

Der Komplex der nicht-chromatischen Skalen

Ernst Ulrich Deuker, Kathlén Kohn

6. März 2018

Section 1

Intro

Intuition

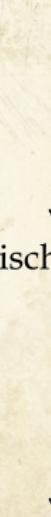
Sprache

26 Buchstaben/8 Satzelemente (Substantive, Verben, Adjektive...)



Malerei

3 Primärfarben (gelb, blau, rot, plus schwarz, weiss)

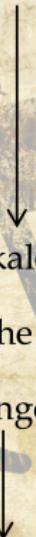


Mischfarben

Bilder

Musik

57 nichtchromatische Skalen



Mischskalen, chromatische Durch-

gänge

Melodien

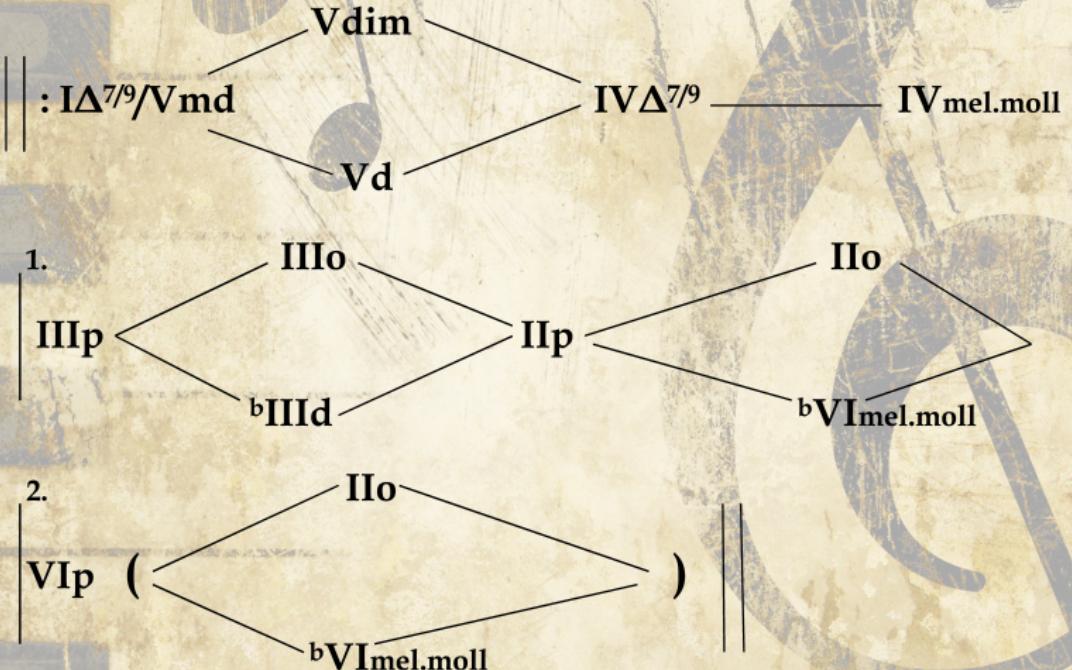
Sätze

Musikalische Praxis

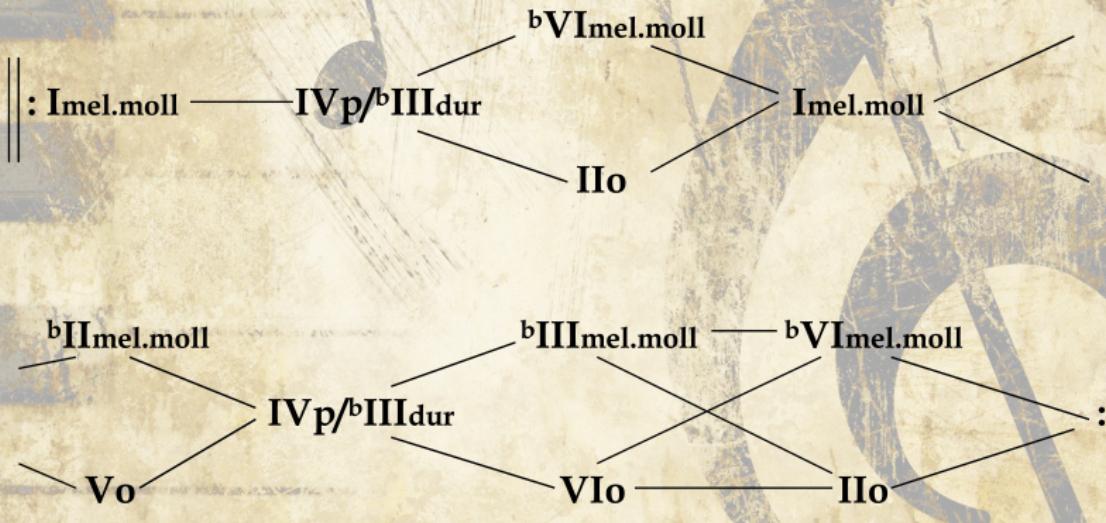
Pentatonik-Basisform:

| | | | | |
|---|------------------|----|---|------------------|
| I | ^b III | IV | V | ^b VII |
| A | C | D | E | G |

Four (Miles Davis)



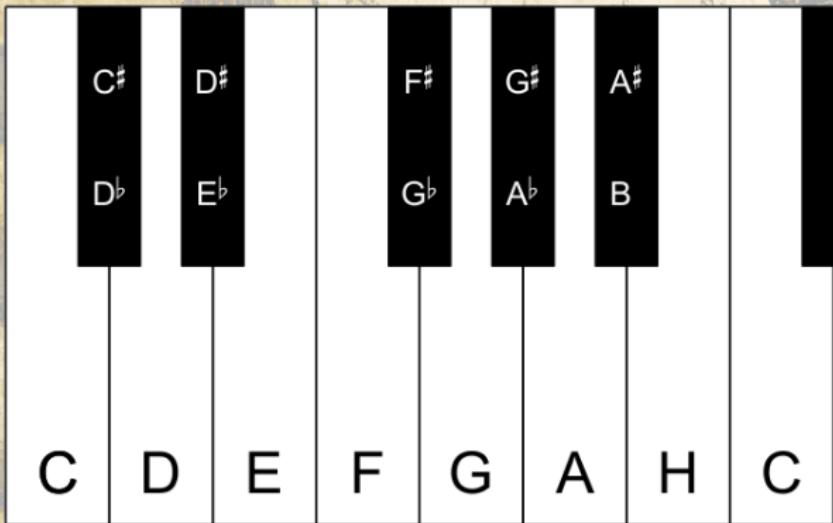
Besa Me Mucho (Velasquez)



Section 2

Resultate

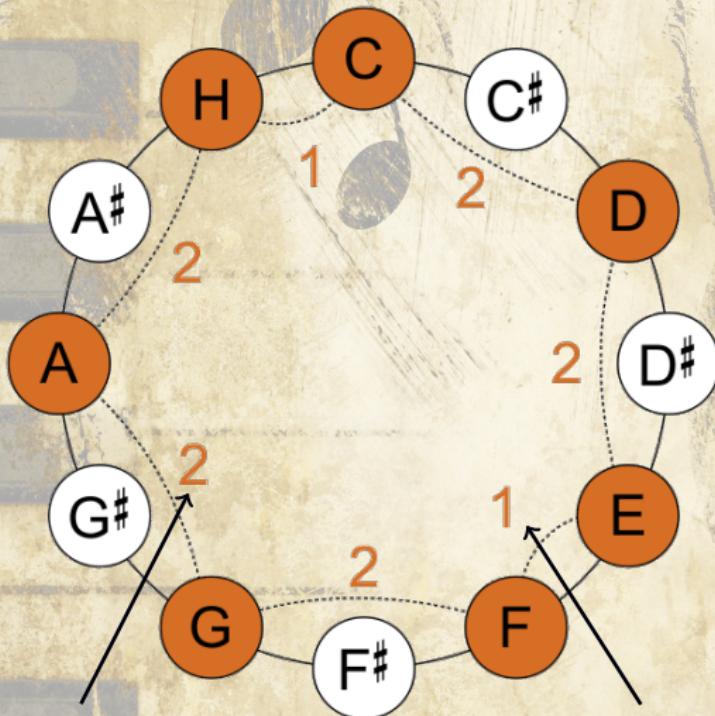
Tonsystem



Definition

Eine **Skala** ist eine Teilmenge von
 $\{C, C\#, D, D\#, E, F, F\#, G, G\#, A, A\#, H\}$.

Zyklische Tonordnung



Ganztonschritt

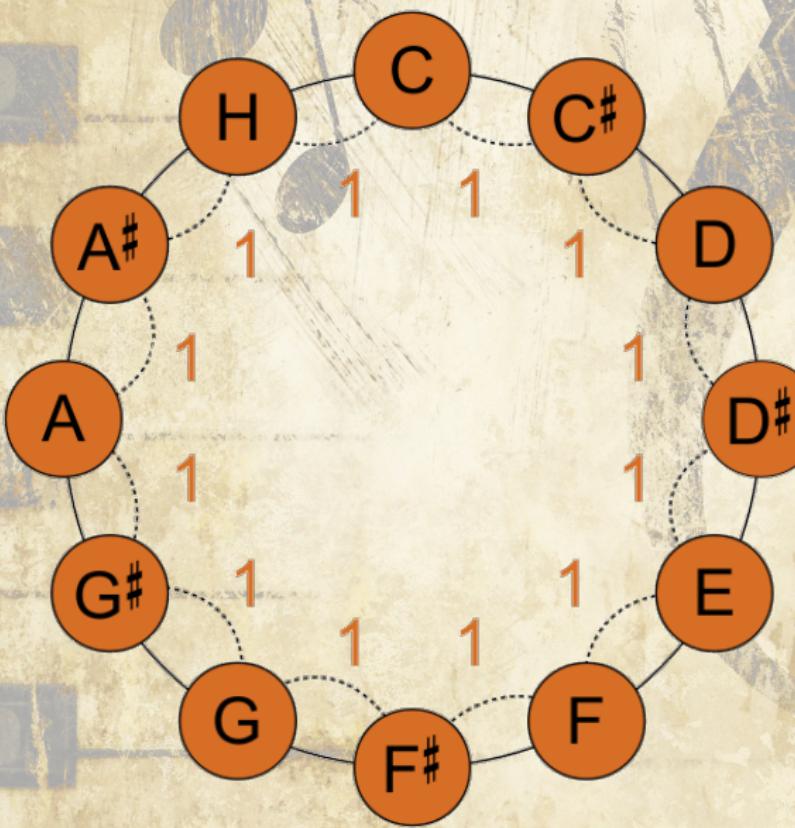
Halbtone Schritt

C-Dur-Skala mit
Intervallfolge
2-2-1-2-2-2-1

oder

natürlich a-Moll
mit
Intervallfolge
2-1-2-2-1-2-2

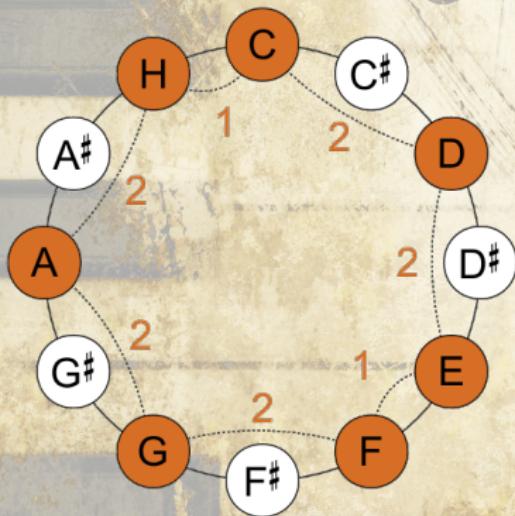
Chromatische Skala



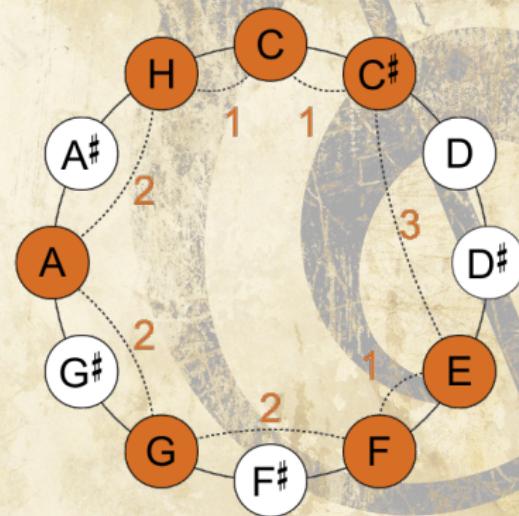
Nicht-Chromatische Skalen

Definition

Eine Skala heißt **nicht-chromatisch**, falls ihre Intervallfolge keine 2 aufeinanderfolgenden Halbtone schritte enthält.



Beispiel



Gegenbeispiel

Simplizialkomplex

Die Menge aller nicht-chromatischen Skalen ist ein Simplizialkomplex.

Diesen bezeichnen mit \mathcal{K}_{NC} .

Erinnerung

Ein Simplizialkomplex ist eine Menge \mathcal{K} von Mengen, sodass: $\forall S \in \mathcal{K} \forall T \subset S : T \in \mathcal{K}$.

Simplizialkomplex

Die Menge aller nicht-chromatischen Skalen ist ein Simplizialkomplex.
Diesen bezeichnen mit \mathcal{K}_{NC} .

Erinnerung

Ein Simplizialkomplex ist eine Menge \mathcal{K} von Mengen, sodass: $\forall S \in \mathcal{K} \forall T \subset S : T \in \mathcal{K}$.

f-Vektor von \mathcal{K}_{NC}

$$(1, 12, 66, 208, 399, 456, 282, 72, 3) \\ (f_{-1}, f_0, f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)$$

$f_i = \text{Anzahl der } (i+1)\text{-elementigen Skalen in } \mathcal{K}_{NC}$

Facetten

Die Facetten von \mathcal{K}_{NC} sind die **maximal nicht-chromatischen Skalen**, d.h.
die nicht-chromatischen Skalen, die nicht in anderen
nicht-chromatischen Skalen enthalten sind.

Facetten

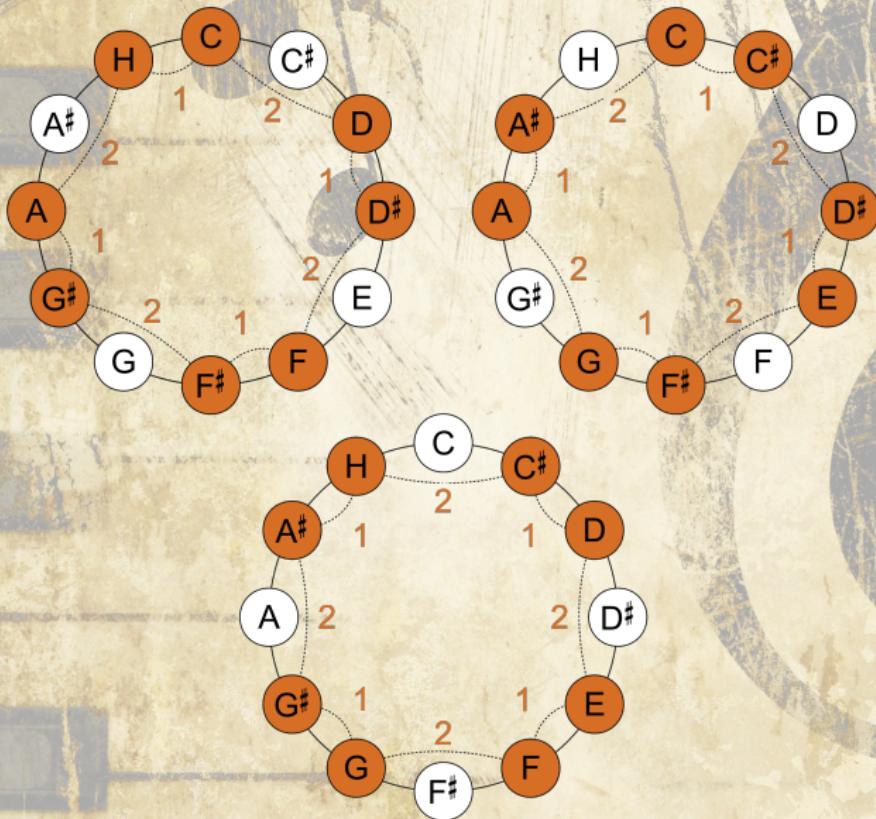
Die Facetten von \mathcal{K}_{NC} sind die **maximal nicht-chromatischen Skalen**, d.h.

die nicht-chromatischen Skalen, die nicht in anderen nicht-chromatischen Skalen enthalten sind.

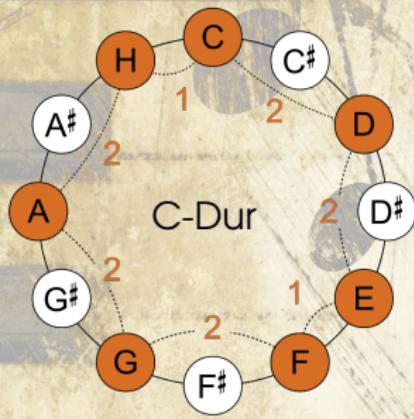
\mathcal{K}_{NC} hat genau 57 Facetten:

| Anzahl Töne | Intervallfolge | Anzahl Skalen | Name |
|----------------|-----------------|------------------|-----------------|
| 8 | 2-1-2-1-2-1-2-1 | 3 | vermindert |
| 7 | 2-2-1-2-2-2-1 | 12 | Dur |
| 7 | 2-1-2-2-2-2-1 | 12 | melodisch Moll |
| 7 | 2-1-2-2-1-3-1 | 12 | harmonisch Moll |
| 7 | 2-2-1-2-1-3-1 | 12 | harmonisch Dur |
| 6 | 2-2-2-2-2-2 | 2 | Ganzton |
| 6 | 1-3-1-3-1-3 | 4 | übermäßig |

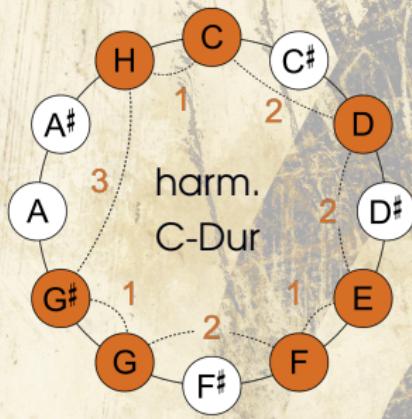
Verminderte Skalen



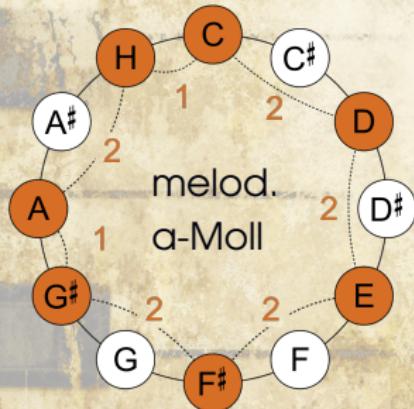
Dur & Moll



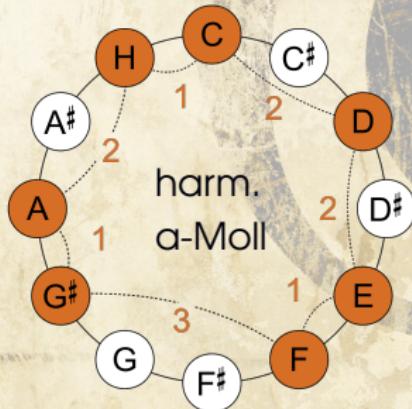
C-Dur



harm.
C-Dur

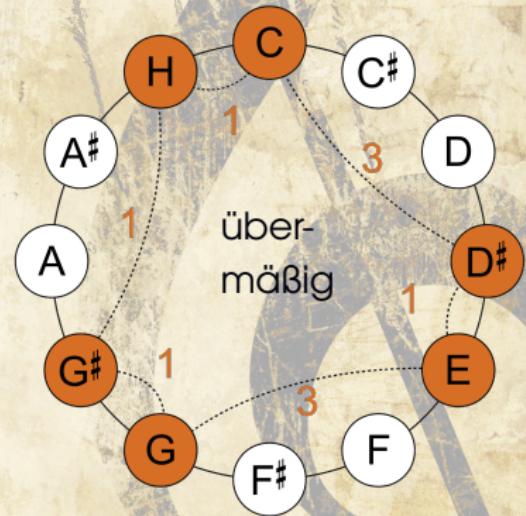
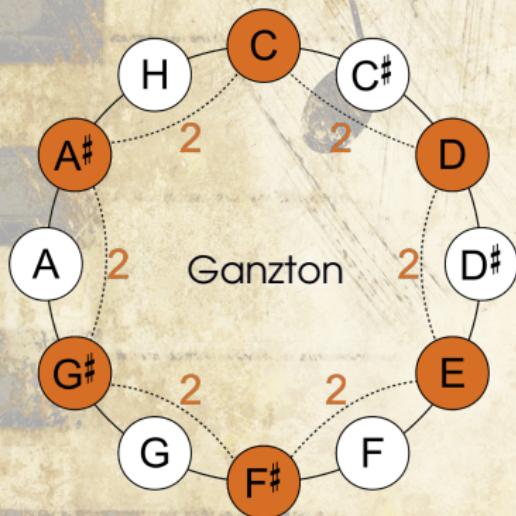


melod.
a-Moll



harm.
a-Moll

Ganzton- & übermäßige Skala



Topologie

(reduzierte) simpliziale Homologie von \mathcal{K}_{NC} über \mathbb{Q}

- H_n bezeichnet die n -te Homologiegruppe von \mathcal{K}_{NC} .
 - ◆ H_n ist ein \mathbb{Q} -Vektorraum.
 - ◆ $\dim(H_n)$ "zählt" die n -dimensionalen "Löcher" von \mathcal{K}_{NC} .
 - ◆ $\dim(H_5) = 3$.
 - ◆ $\dim(H_n) = 0$ für $n \neq 5$.

Topologie

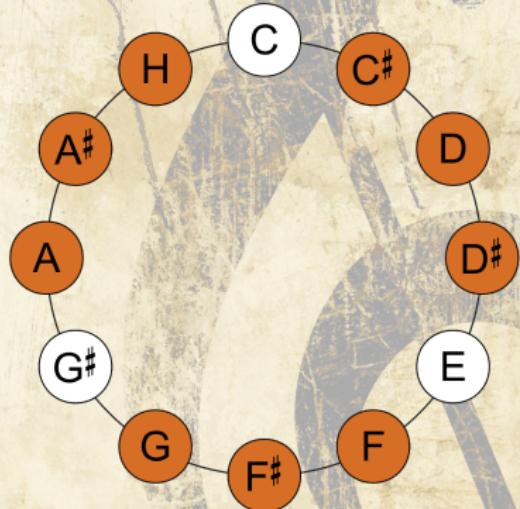
(reduzierte) simpliziale Homologie von \mathcal{K}_{NC} über \mathbb{Q}

- H_n bezeichnet die n -te Homologiegruppe von \mathcal{K}_{NC} .
 - ◆ H_n ist ein \mathbb{Q} -Vektorraum.
 - ◆ $\dim(H_n)$ "zählt" die n -dimensionalen "Löcher" von \mathcal{K}_{NC} .
 - ◆ $\dim(H_5) = 3$.
 - ◆ $\dim(H_n) = 0$ für $n \neq 5$.
- \mathcal{K}_{NC} hat genau 3 "Löcher" der Dimension 5.
 - ◆ D.h. jedes Loch hat auf dem Rand Skalen mit 6 Tönen.
 - ◆ Diese Hexatoniken bilden einen Basisvektor von H_5 .

Basis der Homologie

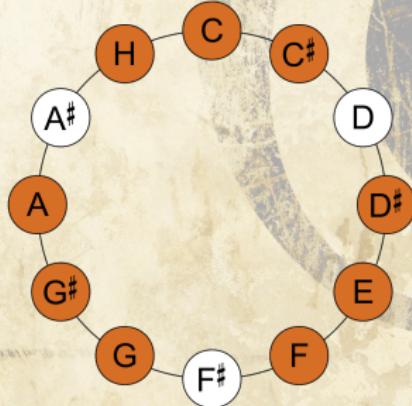
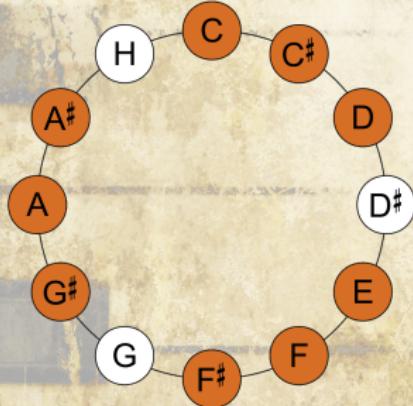
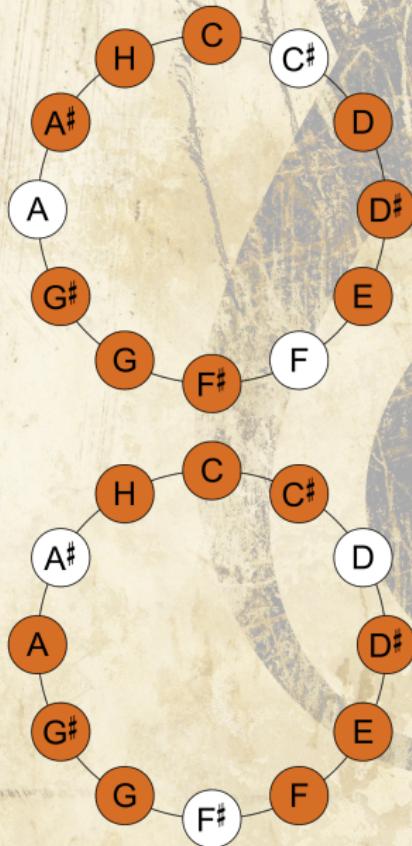
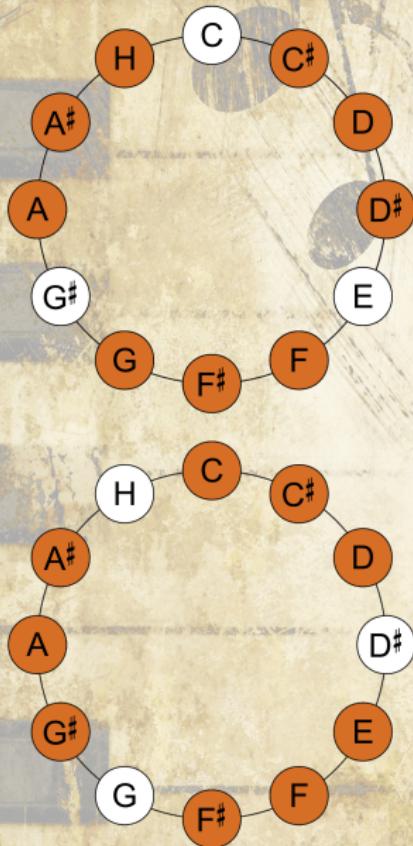
Messiaens Skala (rechts)

- hat 9 Töne
- enthält 27 nicht-chromatische Skalen mit 6 Tönen



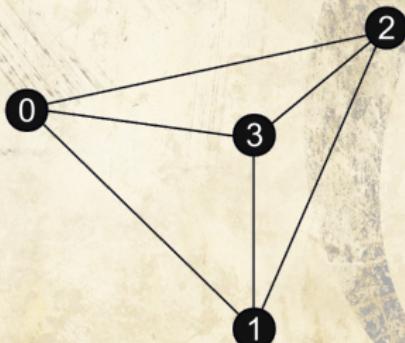
Diese 27 Skalen bilden den Rand für ein Loch und damit einen Basisvektor von H_5 .

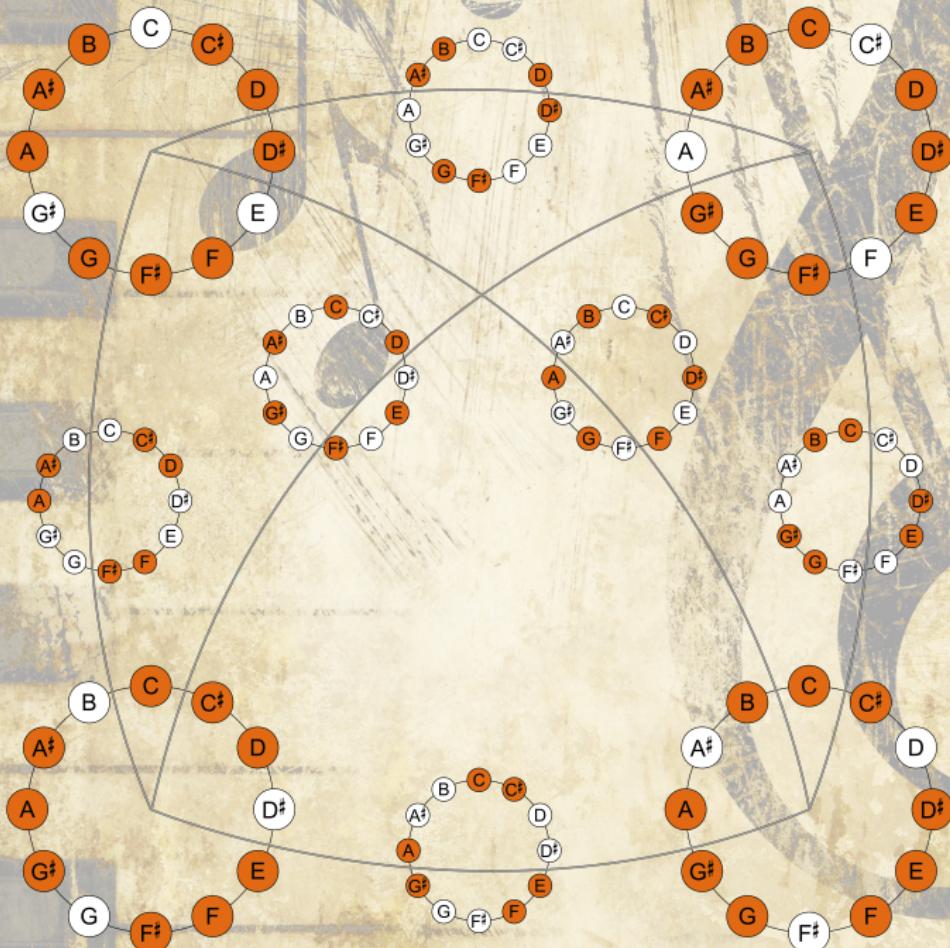
4 Messiaen-Skalen



Warum nur 3 Löcher?

- Die 4 Messiaen-Löcher sind linear abhängig.
- Je 3 davon erzeugen die Homologie.





Section 3

Outro

Avoid Notes

Wir betrachten folgende gängige Akkordverbindung in C-Dur:

| | | | |
|--|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|
| Akkordverbindung potentielle Avoid Notes avoid-note-freie Skalen | D ⁷ — C-Dur | G ⁷ C Dd(9) | CΔ ⁷ F Ap(9) |
|--|------------------------------|------------------------------|-------------------------------|

Pentatonik-Basisform:

I ^bIII IV V ^bVII
A C D E G