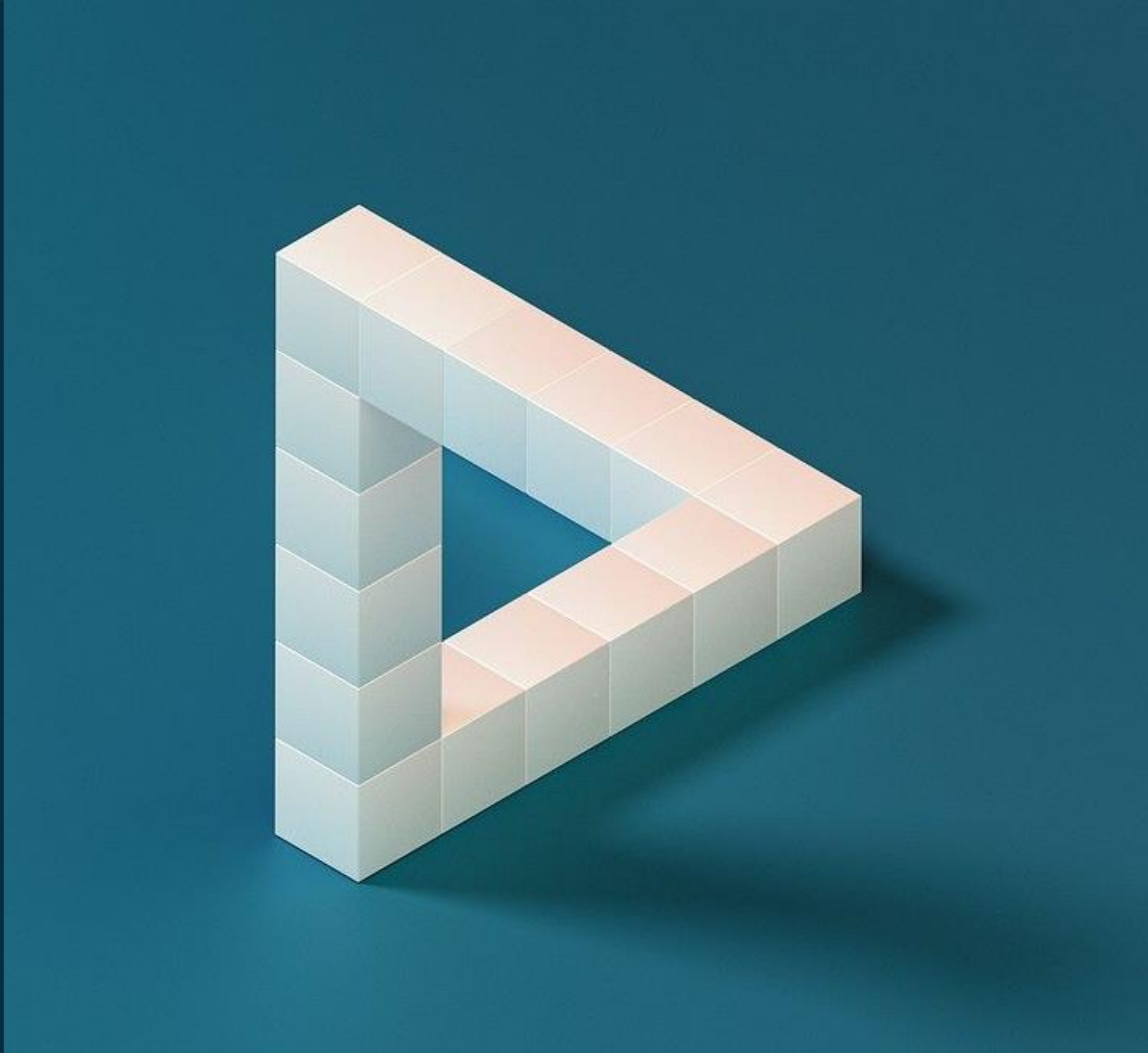
Análise e desenvolvimento de Sistemas

Aula 1: Lógica Matemática



Profª Esp. Jandira Barroso

A lógica não passa de um simples conhecimento de palavras

Charles Lamb

Unidade 1

Lógica para Computação

- Proposições
- Conectivos
- Tautologia e Contradições
- Equivalências Lógicas

Sistemas Dicotômicos

O mundo apresenta situações com dois estados apenas, que mutuamente se excluem.

E situações como:

Morno, azul royal, parta entre aberta?

São situações estritamente dicotômicas, com dois estados excludentes bem definidos.

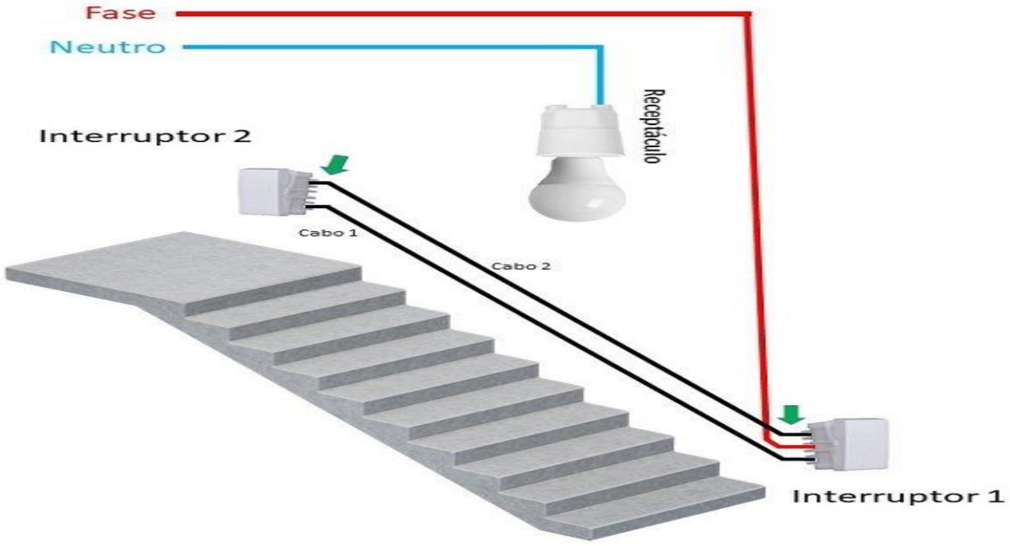
1	0
SIM	NÃO
DIA	NOITE
PRETO	BRANCO
LIGADO	DESLIGADO

Interruptores

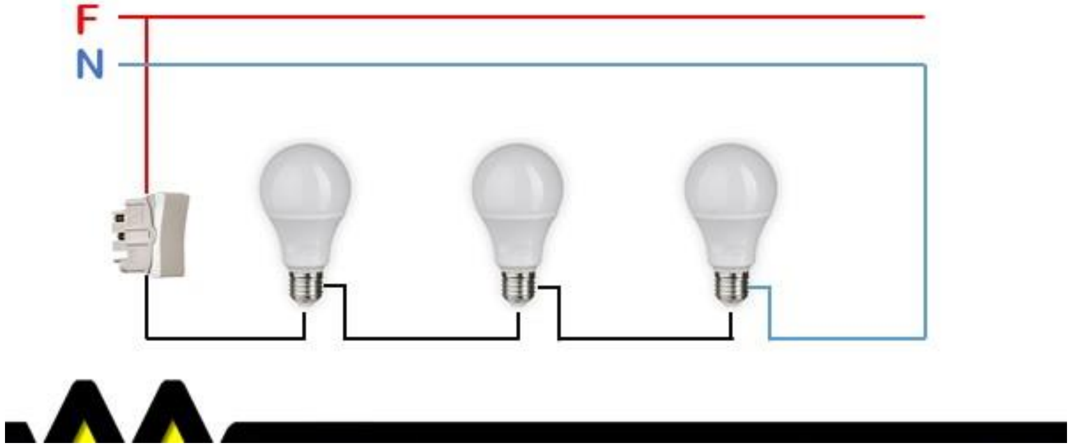
Dispositivo ligado a um circuito elétrico, que pode assumir estados de fechado (1) ou aberto (0).

Aberto

Fechado



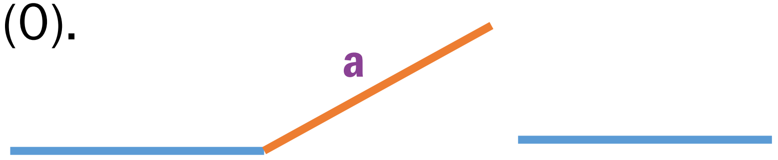
https://www.mundodaeletrica.com.br/como-instalar-interruptor-paralelo-faca-voce-mesmo/



https://www.mundodaeletrica.com/ligacao-em-serie-descubra-como-fazer/

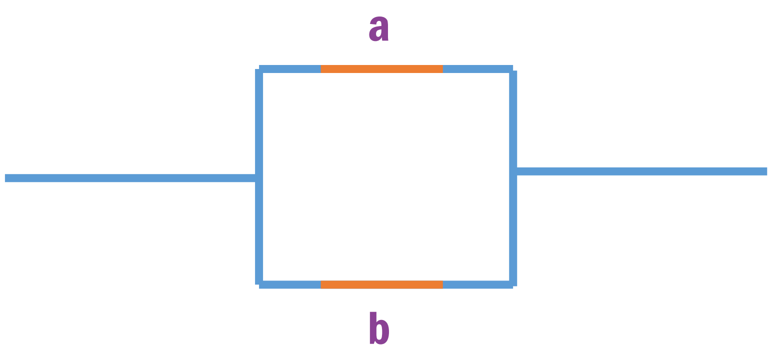
Interruptores

Dispositivo ligado a um circuito elétrico, que pode assumir estados de fechado (1) ou aberto (0).



Aberto

Fechado



Ligados em paralelo

Ligados em série

Interruptores Simples

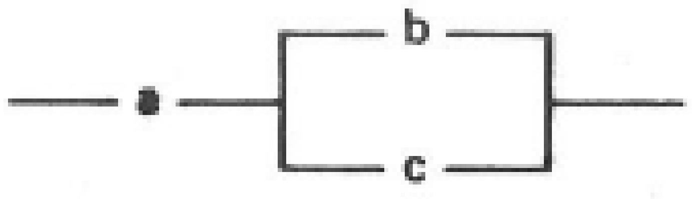
Dispositivo ligado a um circuito elétrico, que pode assumir estados de fechado (1) ou aberto (0).

$0 + 0 = 0$	$0 \cdot 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \cdot 1 = 0$
$1 + 0 = 1$	$1 \cdot 0 = 0$
$1 + 1 = 1$	$1 \cdot 1 = 1$
$a + b = b + a$	$a \cdot b = b \cdot a$
$a + a' = 1$	$a \cdot a' = 0$
$a + 0 = a$	$a \cdot 0 = 0$
$a + 1 = 1$	$a \cdot 1 = a$

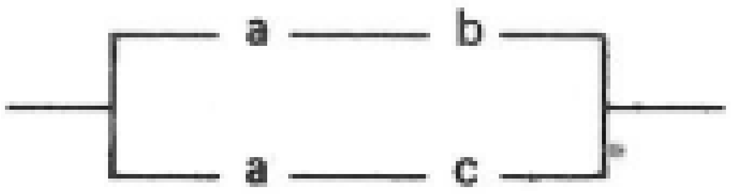
Lógica e álgebra de Boole – Jacob Daghlian – Editora Atlas

Interruptores Compostos

Dispositivo ligado a um circuito elétrico, que pode assumir estados de fechado (1) ou aberto (0).



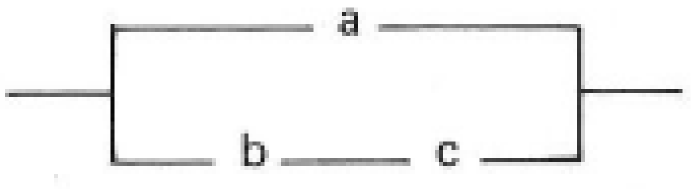
Lógica e álgebra de Boole – Jacob Daghlian – Editora Atlas



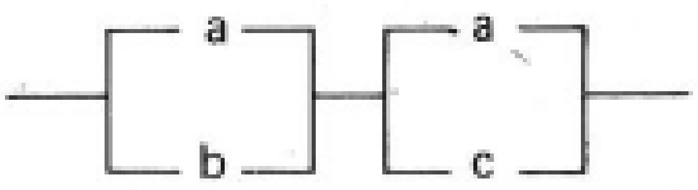
Lógica e álgebra de Boole – Jacob Daghlian – Editora Atlas

Interruptores Compostos

Dispositivo ligado a um circuito elétrico, que pode assumir estados de fechado (1) ou aberto (0).



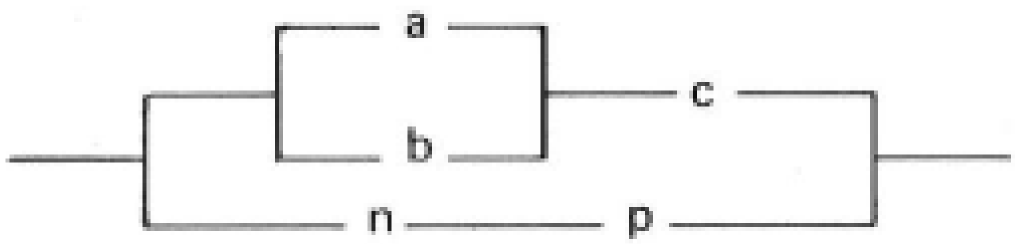
Lógica e álgebra de Boole – Jacob Daghlian – Editora Atlas



Lógica e álgebra de Boole – Jacob Daghlian – Editora Atlas

Exercício

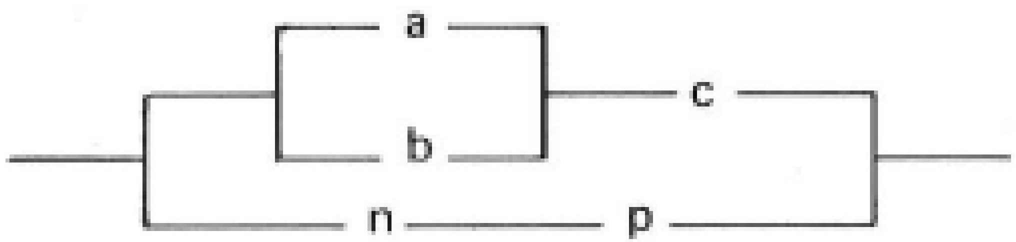
Determine a ligação do seguinte circuito



Lógica e álgebra de Boole – Jacob Daghlian – Editora Atlas

Exercício

Determine a ligação do seguinte circuito

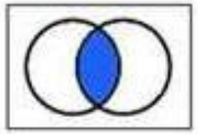
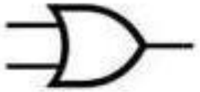
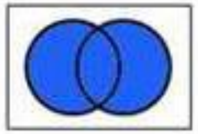
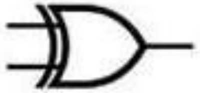
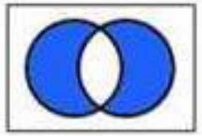
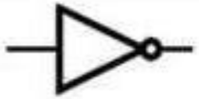
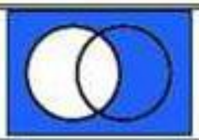
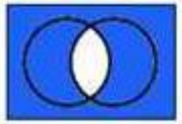
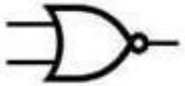
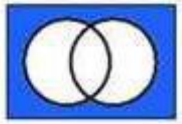
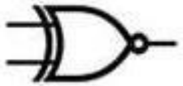
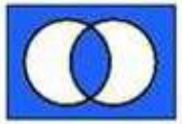
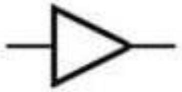


Solução

(a+b).c+(n.p)

Lógica e álgebra de Boole – Jacob Daghlian – Editora Atlas

Relação Algébrica e Diagrama de Venn

Expressão	Símbolo	Diagrama de Venn	Expressão Algébrica	Tabela Verdade		
AND			$A \cdot B$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 0 0 0 1
OR			$A + B$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 0 1 1 1
XOR			$A \oplus B$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 0 1 1 0
NOT			$\overline{A}$	A 0 1		Output 1 0
NAND			$\overline{A \cdot B}$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 1 1 1 0
NOR			$\overline{A + B}$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 1 0 0 0
XNOR			$\overline{A \oplus B}$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 1 0 0 1
BUF			A	IN 0 1		Output 0 1

Conectivos

Conectivos	Símbolo	Tradução
Não	~	Negação
E	^	Conjunção
Ou	V	Disjunção
Se...Então	→	Condicional
Se, e Somente se	↔	Bicondicional
Ou..Ou	$\underline{\vee}$	Disjunção Exclusiva

Conectivos: Conjunção (∧)

$2^n, onde\ n\ é\ o\ número\ de\ proposições$
Portanto:
$$2^2 = 4\ Linhas$$

p: Vou andar de bicicleta

q: Vou andar de patins

Proposição: Vou andar de bicicleta E vou andar de patins

p	q	$p \wedge q$	Tradução
V	V	Falou a verdade	V
V	F	Mentiu	F
F	V	Mentiu	F
F	F	Mentiu	F

Conectivos: Disjunção (∨)

p: Vou andar de bicicleta

q: Vou andar de patins

Proposição: Vou andar de bicicleta OU vou andar de patins

$2^n, onde\ n\ é\ o\ número\ de\ proposições$
Portanto:
$$2^2 = 4\ Linhas$$

p	q	$p \vee q$	Tradução
V	V	Falou a verdade	V
V	F	Falou a verdade	V
F	V	Falou a verdade	V
F	F	Mentiu	F

Conectivos: Disjunção Exclusiva ($\underline{\vee}$)

p: Vou andar de bicicleta

q: Vou andar de patins

Proposição: Vou andar de bicicleta <u>OU</u> vou andar de patins

2^n, *onde n é o número de proposições*
Portanto:
$$2^2 = 4 \; Linhas$$

p	q	$p \underline{\vee} q$	Tradução
V	V	Mentiu	F
V	F	Falou a verdade	V
F	V	Falou a verdade	V
F	F	Mentiu	F

Conectivos: Condicional ($\rightarrow$)

p: Vou andar de bicicleta

q: Vou andar de patins

Proposição: Se Vou andar de bicicleta então vou andar de patins

$2^n, onde\ n\ é\ o\ número\ de\ proposições$
Portanto:
$$2^2 = 4\ Linhas$$

p	q	$p \rightarrow q$	Tradução
V	V	Falou a verdade	V
V	F	Mentiu	F
F	V	Falou a verdade	V
F	F	Falou a verdade	V

Conectivos: Bicondicional (↔)

2^n, onde n é o número de proposições

Portanto:

$$2^2 = 4\ Linhas$$

p: Vou andar de bicicleta

q: Vou andar de patins

Proposição: Vou andar de bicicleta se e somente se vou andar de patins

p	q	$p \leftrightarrow q$	Tradução
V	V	Falou a verdade	V
V	F	Mentiu	F
F	V	Mentiu	F
F	F	Falou a verdade	V

Conectivos: Negação

p: Vou andar de bicicleta

$2^n, \text{onde } n \text{ é o número de proposições}$

Portanto:

$$2^2 = 4\ Linhas$$

p	$\sim p$
V	F
V	F
F	V
F	V

Em que ordem resolvemos?

1. Conectivos dentro de parênteses, dos mais internos para os mais externos
2. ‘ ou ~
3. ^ ou U
4. →
5. ↔

Exemplo 1: Determinar a tabela verdade para $(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow F$

p	**q**	$\sim q$	$\sim p$	$(\sim p \wedge \sim q)$	**F**	$(\sim p \wedge \sim q) \rightarrow F$
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F

Exemplo 2: Determinar a tabela verdade para $p \vee (\mathrm{q} \vee r)$

p	q	r	$(q \vee r)$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	V	V
F	F	F	F	F

Perceba que:
$p \vee (q \vee r)$ e $(p \vee q) \vee r$
São Iguais!!!

Exemplo 2: Determinar a tabela verdade para $(p \vee q) \vee r$

p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
V	V	V	V	V
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	V
F	F	F	F	F

Equivalências Lógicas

Podemos observar que:

Associativa: $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Leis da Equivalência: $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Leis da Equivalência: $\sim(p \leftrightarrow q) \equiv (p \leftrightarrow \sim q) \equiv (\sim p \leftrightarrow q)$

Distributiva: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Equivalências Lógicas

Comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$
Associatividade	$(p \wedge q) \wedge r \equiv$ $p \wedge (q \wedge r)$	$(p \vee q) \vee r \equiv$ $p \vee (q \vee r)$
Distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv$ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv$ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
Identidade	$p \wedge t \equiv p$	$p \vee c \equiv p$
Negação	$p \vee \neg p \equiv t$	$p \wedge \neg p \equiv c$
Dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Idempotência	$p \wedge p \equiv p$	$p \vee p \equiv p$
De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv$ $\neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv$ $\neg p \wedge \neg q$
Limite universal	$p \vee t \equiv t$	$p \wedge c \equiv c$
Absorção	$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
Negações	$\neg t \equiv c$	$\neg c \equiv t$

Exemplo 3: Prove através de equivalências lógicas, através de tabela verdade a equivalência da seguinte expressão $A \wedge \sim(A \wedge B) \equiv (A \wedge \sim B)$

$$A \wedge \sim(A \wedge B) \equiv A \wedge (\sim A \vee \sim B)$$

De Morgan	$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$

$$A \wedge \sim(A \wedge B) \equiv (A \wedge \sim A) \vee (A \wedge \sim B)$$

Distributividade	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

$$A \wedge \sim(A \wedge B) \equiv F \vee (A \wedge \sim B) \quad Contradição$$

$$A \wedge \sim(A \wedge B) \equiv (A \wedge \sim B) \vee F$$

Comutatividade	$p \wedge q \equiv q \wedge p$	$p \vee q \equiv q \vee p$

$$A \wedge \sim(A \wedge B) \equiv (A \wedge \sim B)$$

Identidade	$p \wedge t \equiv p$	$p \vee c \equiv p$

Exemplo 3: Prove através de equivalências lógicas, através de tabela verdade a equivalência da seguinte expressão $A \wedge \sim(A \wedge B) \equiv (A \wedge \sim B)$

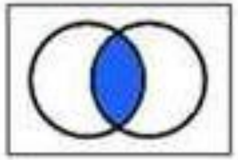
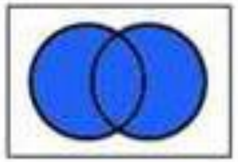
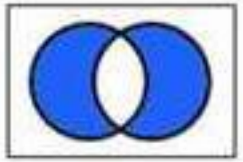
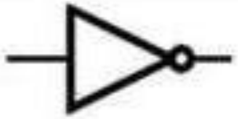
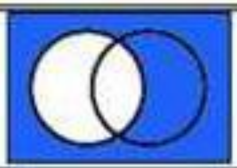
A	B	A^B	~(A^B)	A^~(A^B)	~B	(A^~B)

Exercício: Determinar a tabela verdade da expressão $(p \leftrightarrow q) \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

p	q	$(p \leftrightarrow q)$

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(q \rightarrow p)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Relação Algébrica e Diagrama de Venn

Expressão	Símbolo	Diagrama de Venn	Expressão Algébrica	Tabela Verdade		
				A	B	Output
AND			$A \cdot B$	0	0	0
				0	1	0
				1	0	0
				1	1	1
				A	B	Output
OR			$A + B$	0	0	0
				0	1	1
				1	0	1
				1	1	1
				A	B	Output
XOR			$A \oplus B$	0	0	0
				0	1	1
				1	0	1
				1	1	0
				A		Output
NOT			$\overline{A}$	0		1
				1		0

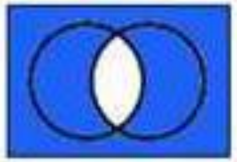
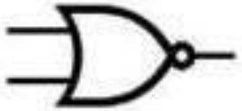
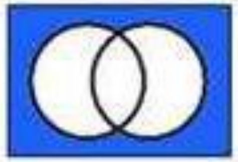
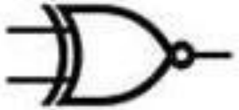
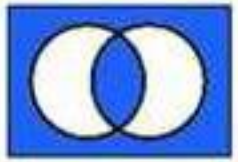
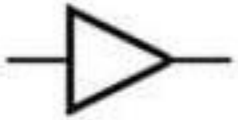
Conjunção

Disjunção

Disjunção Exclusiva

Negação

Relação Algébrica e Diagrama de Venn

NAND			$\overline{A \cdot B}$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 1 1 1 0	Não E
NOR			$\overline{A + B}$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 1 0 0 0	Não OU
XNOR			$\overline{A \oplus B}$	A 0 0 1 1	B 0 1 0 1	Output 1 0 0 1	Não (A e B, mas não ambos)
BUF			A	IN 0 1		Output 0 1	

Quantificadores e Predicados

Sejam as proposições:

p: $3 + 5 \leq 11$ V(p) = 1

q: $x + 5 \leq 11$ V(q) = ? *Sentença aberta ou função proposicional*

$x \in U; U = \{1,3,5,7 \ldots\}$

Quantificadores e Predicados

Predicado: Em uma sentença aberta, a propriedade ou relacionamento entre objetos (ou variáveis) é chamada **predicado.**

Denotaremos um predicado qualquer associado a uma variável x por P(x).

Conjunto Universo: U

Conjunto Verdade: V

Exemplo

Determinar o conjunto verdade das seguintes sentenças abertas:

a) $x+11 = 21$; $U = \mathbb{N}$

b) $\mathbf{2}x - \mathbf{5} \leq \mathbf{13}$, $U = \mathbb{Z}$

Quantificadores

Transformam sentenças abertas ou condições, que não possuem valor lógico, em proposições.

- Universal
- Existencial

Quantificadores

- **Quantificador universal: ∀**

Lê-se: “para todo” , “para qualquer”.

$(\forall x)\ P(x)$

- **Quantificador Existencial: ∃**

Lê-se: “existe um”; “existe algum”;

“há pelo menos um”; “para algum”.

$(\exists x)\ P(x)$

Exemplo

Determine a proposição relacionada a “Todo inteiro é racional”

Para todo x, se $x \in \mathbb{Z}$, então $x \in \mathbb{Q}$

Escrever de maneira simbólica a proposição: $x^2+1 = 2x$

Negação de Quantificadores

"Todos os carros possuem rodas."

"Alguns alunos são estudiosos"

"Existem alunos estudiosos"

Exemplo

Sendo $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11\}$, classifique cada proposição como verdadeira ou falsa:

a) $(\forall x \in A)(x > 10)$.

b) $(\exists x \in A)(x - 2 > 5)$.

c) $[\forall x \in A\,;\, x$ é primo$]$.

Exercícios extras

Negar a sentença:

Para todo x, $x - 1 \geq 5$

Exercícios extras

Negar a sentença:

Para todo x, $x - 1 \geq 5$

Resposta:

$\forall x, x - 1 \geq 5 \; \leftrightarrow \exists x, x - 1 < 5$

Exercícios extras

Negar a sentença: $\exists x, x^2 = 1 \rightarrow x \neq 0$

Exercícios extras

Determinar o conjunto verdade das seguintes sentenças abertas:

a) $x+11 = 21$, U=N

b) $2x - 5 \leq 13$, U=Z

c) $x^2-7x+12 = 0$, U=N

d) $x^2-1=0$, U=N

Exercícios extras

Determinar o conjunto verdade das seguintes sentenças abertas:

a) x+11 =21, U=N

V= {10}

b) $2x - 5 \leq 13$, U=Z

V={...-1,-2,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9}

Exercícios extras

Determinar o conjunto verdade das seguintes sentenças abertas:

c) $x^2-7x+12 = 0$, U=N

V={3,4}

d) $x^2-1=0$, U=N

V={1}

Exercícios extras

Uma das aplicações da Lógica é em circuitos elétricos e eletrônicos simulados por meio de chaves. Os circuitos de chaveamento são representados por meio de chaves que ligam e desligam conforme o estado binário “Verdadeiro (1) ou Falso (0)” da sentença Lógica. Considerando a expressão de um circuito dada por $A \longrightarrow (B \wedge C)$ determine quando a saída do circuito será 1 (ou V).

Exercícios extras

$A \longrightarrow (B \wedge C)$

A	B	C	$(B \wedge C)$	$A \rightarrow (B \wedge C)$
V	V	V	V	**V**
V	V	F	F	**F**
V	F	V	F	**F**
V	F	F	F	**F**
F	V	V	V	**V**
F	V	F	F	**V**
F	F	V	F	**V**
F	F	F	F	**V**

Exercícios extras

Em uma competição de natação, os atletas em questão estão concorrendo por medalhas ao primeiro, segundo e terceiro colocado:

a) Primeiro lugar: Ouro

b) Segundo lugar: Prata

c) Terceiro lugar: Bronze

Cada atleta passará por chaves que determinarão a competição final. Cada atleta só passará para a próxima fase se na fase anterior tiver vencido. Pensando nessa situação elabore uma equação lógica e uma tabela que simule as possibilidades dessa competição.

Exercícios extras

A	B	C	$A \wedge B$	$A \wedge C$	$B \wedge C$	$A \wedge B \wedge C$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	F	V	F
F	V	F	F	F	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	F

UniCesumar
EDUCAÇÃO PRESENCIAL E A DISTÂNCIA