

Lista de Exercícios: Relações

Profª: Jandira

Matrizes Relações

Olá tudo bem?

Então, volto a você com uma breve explicações sobre matrizes e também trago alguns exercícios para concretização dos conteúdos ministrados anteriormente.

Só lembrando...

Definição: Uma Matriz relação será tal que o conjunto do domínio representa as *linhas* e o conjunto da imagem representará as *colunas*.

Exemplo

Dados os conjunto $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{a,b,c\}$. Seja R a seguinte relação de A para B

$R=\{(1,a), (1,b), (2,a), (3,b), (4,a), (4,b), (4,c)\}$

Defina sua matriz relação

Resolução

Como fornecido pelo enunciado teremos $\text{Dom}(R)=\{1,2,3,4\}$ e $\text{Im}(R)=\{a,b,c\}$.

A relação em matrizes será dados através de “0” para quando não houver relação e “1” para quando houver relação. Lembrando que a ordem é de extrema importancia em um par ordenado (x,y), então teremos a seguinte matriz.

Imagem da relação		a	b	c
	1	1	1	0
	2	1	0	0
	3	0	1	0
	4	1	1	1
	Domínio da relação			

Então podemos concluir que o dominio será as linhas e a imagem as colunas... Fácil não??



Exercício 1

Seja $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e seja R a relação em A definida por “ x divide y ”, escrita $x|y$. Determine.

- Escreva R como conjunto dos pares ordenados
- Determine sua matriz associada
- Determine seu grafo associado
- Ache a relação inversa

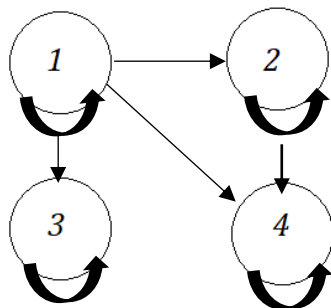
Resolução

a) $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4)\}$

b)

	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	0	1	0	1
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

c)



b) $R^{-1} = \{(1, 1), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (2, 2), (4, 2), (3, 3), (4, 4)\}$

Exercício 2

Seja R uma relação de ordem sobre o conjunto $A = \{a, b, c, d, e\}$ dada por:

$$R = \{(d, d), (d, e), (d, b), (d, a), (e, e), (b, b), (b, a), (a, a)\}.$$

- Determine o diagrama de Hasse que representa a relação R .
- Determine o grafo associado a essa relação.
- Determine o diagrama de Venn associado a essa relação

Lista de Exercícios: Relações

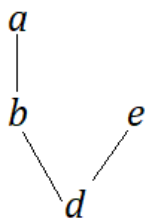
Profª: Jandira

d) Determine a matriz relação

Resolução

a) O que devemos observar inicialmente para determinar o diagrama de Hasse?? Observe que se existe alguns parâmetros para seguirmos:

1. A relação de transitividade $d \rightarrow b$ e $b \rightarrow a$ portanto $d \rightarrow a$
2. O diagrama de Hasse sempre estará na ordem crescente, como se trata de letra e não podemos identificar quem é maior, podemos observar a relação e concluir que o domínio dessa relação está basicamente em d, já que as demais relações de pares ordenados acontecem dele para ele mesmo, por exemplo, (a,a) e (b,b). Então o d nos norteará. Portanto o diagrama referente a relação é:



Lembre-se do seguinte

Seja R uma relação binária no conjunto A.

1. R é **reflexiva** se, $\forall x \in A, xRx$.

→ Cada elemento é relacionado consigo mesmo.

2. R é **simétrica** se, $\forall x, y \in A$, se xRy então yRx .

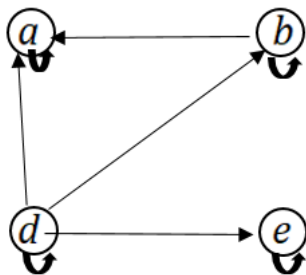
→ Cada elemento relacionado com um outro, o segundo é relacionado com o primeiro.

3. R é **transitiva** se, $\forall x, y, z \in A$, se xRy e yRz então xRz .

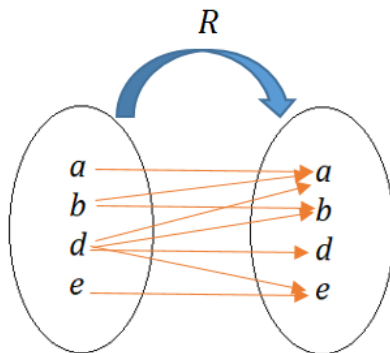
→ Cada elemento relacionado com um segundo, o segundo é relacionado com um terceiro, então o primeiro é relacionado com o terceiro.



- b) $R = \{(d, d), (d, e), (d, b), (d, a), (e, e), (b, b), (b, a), (a, a)\}$.



- c) $R = \{(d, d), (d, e), (d, b), (d, a), (e, e), (b, b), (b, a), (a, a)\}$.



d)

	a	b	d	e
a	1	0	0	0
b	1	1	0	0
d	1	1	1	1
e	0	0	0	1

Exercício 3

Considere os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{-1, 2, 7, 9\}$, e a matriz da relação $R: A \rightarrow B$ dada por:

	-1	2	7	9
1	1	0	0	1
3	0	1	0	1
5	0	0	0	0

Determine:

- O domínio e a imagem de R ,
- Os pares da relação inversa R^{-1}

Resolução

Pela matriz dada temos a seguinte relação:

$$R = \{(1, -1), (1, 9), (3, 2), (3, 9)\}$$

Lembrando que, na matriz relação o domínio representa as linhas e a imagem representa as colunas. Além disso, em um par ordenado (x, y) o x é o elemento do domínio e o y é o elemento da imagem, portanto:

Lista de Exercícios: Relações

Profª: Jandira

a) $\text{Dom}(r) = \{1, 3\}$

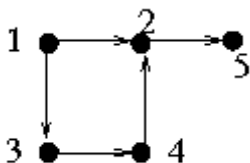
$\text{Im}(r) = \{-1, 2, 9\}$

b) Sendo $R = \{(1, -1), (1, 9), (3, 2), (3, 9)\}$, temos que:

$$R^{-1} = \{(-1, 1), (9, 1), (2, 3), (9, 3)\}$$

Exercício 4

O grafo abaixo representa uma relação R definida no conjunto $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.



Os pares da relação R são:

Resolução

Observando os sentidos das arestas (flechas) do grafo, temos:

$1R2$; $1R3$; $2R5$; $3R4$; $4R2$;

Logo, os pares da relação R são:

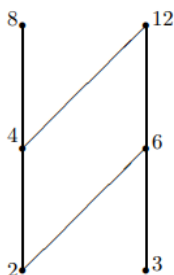
$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 5), (3, 4), (4, 2)\}$$

Exercício 5

Seja $A = \{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$ e defina-se a relação \leq em A por “ $x \leq y$ se e só se x divide y ”.

Como pode ser definido o diagrama de Hasse desta relação?

Solução



$$R = \{(2, 2), (2, 4), (2, 6), (2, 8), (2, 12), (3, 3), (3, 6), (3, 12), (4, 4), (4, 8), (4, 12), (6, 6), (6, 12), (8, 8), (12, 12)\}$$

Lista de Exercícios: Relações

Profª: Jandira

IMPORTANTE: Note-se que em algumas relações como 4 e 6, onde $4 \leq 6$, não satisfaz o segundo requisito do enunciado, que pede que seja menor ou igual e ainda seja divisível. O 4 pode até ser menor ou igual a 6, mas 4 não divide 6.

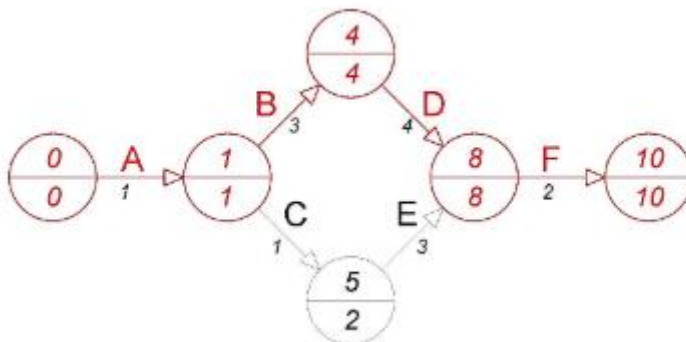


Exercício 6

Elaborar uma rede PERT/COM para o projeto abaixo e determinar o seu caminho crítico e a sua duração

Atividade	Predecessora	Duração
A		1
B	A	3
C	A	1
D	B	4
E	C	3
F	D, E	2

Resolução

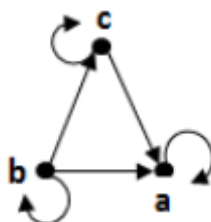


Caminho crítico A-B-D-F

Duração= $1+3+4+2=10$

Exercício 7

O grafo da relação de ordem R é apresentado a seguir



Determine:

Lista de Exercícios: Relações
Profª: Jandira

- a) O Conjunto relação
- b) A matriz associada a relação
- c) O diagrama de Hasse

Resolução

a) Pelo grafo temos que:

bRc ; cRa e bRa .

$R = \{(b,b), (b,c), (b,a), (c,c), (c,a), (a,a)\}$

b)

	b	c	a
b	1	1	1
c	0	1	1
a	0	0	1

c) Assim, por transitividade $b \rightarrow c$ e $c \rightarrow a$ então $b \rightarrow a$ portanto b é o nosso início, ou seja, b é predecessor de c e a (seu nó deve ficar abaixo de c e a). c é predecessor de a , então o nó de c deve ficar abaixo do nó de a . Logo. o diagrama de Hasse será



Exercício 8

Sejam $A = \{1,2,3,4\}$ e as relações R e S sobre A definidas por $R = \{(1,2), (1,1), (1,3), (2,4), (3,2)\}$ e $S = \{(1,4), (1,3), (2,3), (3,1), (4,1)\}$. Pode-se dizer que RoS é:

Resolução

Como $(1,2) \in R$ e $(2,3) \in S$, então temos que $(1,3) \in RoS$.

– Também $(1,1) \in R$ e $(1,4) \in S$, assim, $(1,4) \in RoS$.

– Continuando com este processo, encontra-se que:

– $RoS = \{(1,4), (1,1), (1,3), (2,1), (3,3)\}$

Lista de Exercícios: Relações

Profª: Jandira

Exercício 9

Seja a relação $R = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : 2x + y = 8\}$. A relação inversa denotada por R^{-1} está indicada em qual das alternativas?

- a) $\{(6, 1), (4, 2), (2, 3)\}$
- b) \emptyset
- c) $\{(1, 6), (2, 4), (3, 2)\} \{(1, 6), (2, 4), (3, 2)\}$
- d) \mathbb{N}

Resolução

Temos que:

$$2x + y = 8$$

$$y = 8 - 2x$$

Para a inversa teremos:

$$x = 8 - 2y \rightarrow x - 8 = -2y \rightarrow -x + 8 = 2y$$

$$y = \frac{-x + 8}{2} \rightarrow R^{-1} = \frac{-x + 8}{2}$$

Sejam os números:

6, 4 e 2 tal que o domínio e a imagem da relação se dá em \mathbb{N} , teremos:

Para $x=6$

$$R^{-1} = \frac{-x + 8}{2} \rightarrow R^{-1} = \frac{-6 + 8}{2} \rightarrow R^{-1} = 1$$

Para $x=4$

$$R^{-1} = \frac{-x + 8}{2} \rightarrow R^{-1} = \frac{-4 + 8}{2} \rightarrow R^{-1} = 2$$

Para $x=2$

$$R^{-1} = \frac{-x + 8}{2} \rightarrow R^{-1} = \frac{-2 + 8}{2} \rightarrow R^{-1} = 3$$

Logo a relação inversa de R se dá:

$$\{(6, 1), (4, 2), (2, 3)\}$$

Bons Estudos!!!