MÉTODO DEDUTIVO

A validade de um argumento pode ser demonstrada deduzindo a tese, através das hipóteses, numa sequência de passos usando as regras de inferência e equivalências lógicas.

As mais usadas são:

Dupla negação	$\neg(\neg p) \equiv p$	
Distributiva	$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	
Leis de De Morgan	$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$ $\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$	
Modus Ponens	$[(p \rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$	Você tem uma condicional $p \rightarrow q$ e também tem a proposição p (1^a), então obtém q (2^a).
Modus Tollens	$[(p \rightarrow q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$	Você tem uma condicional $p \rightarrow q$ e a negação de q, então pode concluir $\sim p$.
Lei de adição	$p \Rightarrow p \vee q$	Você pode juntar duas proposições pelo conectivo $\vee$ (ou).
Leis de simplificação	$p \wedge q \Rightarrow p$ $p \wedge q \Rightarrow q$	Se você tiver a conjunção de duas proposições, pode considerar apenas uma delas (pode 'separar' $p \wedge q$ nas proposições p , q).
Silogismo disjuntivo	$[(p \vee q) \wedge \neg q] \Rightarrow p$	Observe a forma da regra: você tem duas proposições e uma delas pode ser excluída, o que faz com que a outra prevaleça.
Silogismo hipotético ou transitividade	$[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$	É usado para argumentos que encadeiam sentenças do tipo "se-então", onde o primeiro implica o último.
Contrapositiva	$(p \rightarrow q) \equiv (\sim q \rightarrow \sim p)$	Toda condicional é equivalente à sua contrapositiva
	$p \rightarrow q \equiv (\sim p \vee q)$	Sempre que você tiver uma condicional, pode trocar por essa disjunção, e vice-versa.

(Lembrar que em $(p \rightarrow q)$, p é chamado antecedente e q consequente).

Exemplos: Provar os seguintes argumentos:

a) $(p \to q), \neg q, (\neg p \to r) \Rightarrow r$

Temos três hipóteses: $(p \to q)$, $\neg q$ e $(\neg p \to r)$. Fazendo a conjunção das hipóteses, temos que concluir a tese, que é r.

1	$p \to q$	H1
2	$\neg q$	H2
3	$\neg p \to r$	H3
4	$\neg p$	1, 2, MT
5	$\boldsymbol{r}$	3,4,MP

Veja as hipóteses H1 e H2. Em H1 temos uma condicional e em H2 a negação do consequente. Podemos 'juntar' as duas e usar Modus Tollens: $[(p \to q) \wedge \neg q] \Rightarrow \neg p$.
Agora você pode usar o que acabou de concluir: $\neg p$

Veja as linhas 3 e 4: A hipótese 3 afirma que $\neg p \to r$, e na linha 4 temos $\neg p$. Logo, podemos concluir r. Aplicação da regra Modus Ponens.

b) $p \to (q \vee s), \neg(q \vee s), \neg p \to r, r \to t \Rightarrow t$

1	$p \to (q \vee s)$	H1
2	$\neg(q \vee s)$	H2
3	$\neg p \to r$	H3
4	$r \to t$	H4
5	$\sim p$	3,4,MT
6	$\sim p \to t$	3,4, Transit.
7	$\mathbf{t}$	6,5,MP

Veja as linhas 1 e 2 (H1 e H2). Em H1 temos uma condicional e em H2 a negação do consequente. Acontece que agora o consequente é $(q \vee s)$.
Podemos 'juntar' as duas e usar Modus Tollens: $[(p \to (q \vee s)) \wedge \neg (q \vee s)] \Rightarrow \neg p$.

Veja as linhas 3 e 4: Temos duas condicionais $\neg p \to r$, e $r \to t$. Podemos perceber que r é consequente em H3 e antecedente em H4; então por transitividade concluímos que $\neg p \to t$.

Veja as linhas 6 e 5: Temos uma condicional $\sim p \to t$, e a primeira parte dessa condicional: $\sim p$.
"Juntando" temos $(\sim p \to t) \wedge \sim p$, que tem a forma de Modus Ponens. Logo, podemos concluir t:
$(\sim p \to t) \wedge \sim p \Rightarrow t$.

3) Provar o seguinte argumento:

Se ele estuda medicina, então ele se prepara para conseguir uma boa vida.	H1
Se ele estuda artes, então ele se prepara para viver uma vida boa.	H2
Se ele se prepara para conseguir uma boa vida ou se prepara para viver uma vida boa, então seu colégio não é uma perda de tempo.	H3
Mas seu colégio é uma perda de tempo.	H4
Logo, ele não estuda medicina e nem artes.	Tese

(Fonte: FRANCO, V. e GERÔNIMO, J.R. *Fundamentos de Matemática*. Maringá: Eduem, 2006.

Solução: Podemos simbolizar isso como:

H1: $(M \to C)$

H2:$(A \to N)$

H3:$[(C \vee N) \to \sim D]$

$H4: D$

$T: (\sim M \wedge \sim A)$.

Devemos mostrar que: $(M \to C) \wedge (A \to N) \wedge [(C \vee N) \to \sim D] \wedge D \Longrightarrow (\sim M \wedge \sim A)$.

1	$M \to C$	H1
2	$A \to N$	H2
3	$(C \vee N) \to \sim D$	H3
4	D	H4
5	$\sim (C \vee N)$	3,4,MT
6	$\sim C \wedge \sim N$	5, De Morgan
7	$\sim C$	6,simplif.
8	$\sim N$	6, simplif.
9	$\sim M$	1,7, MT
10	$\sim A$	2,8, MT
11	$\sim \boldsymbol{M} \wedge \sim \boldsymbol{A}$	9,10, conjunção

Olhe todas as hipóteses e procure letras proposicionais comuns ou com negação. Na H3 aparece uma condicional com consequente $\sim D$ e na H4 aparece D, que é a negação de $(\sim D)$. Vamos juntar essas duas hipóteses. Veja que tem a forma Modus Tollens:

$[(\#) \to \sim D] \wedge D \Longrightarrow \sim (\#)$ (Aqui coloquei # no lugar da 'primeira parte' para que perceba que se tem uma proposição qualquer # condicional com outra, e tem a negação dessa outra, então isso equivale à negação da primeira proposição $(\sim \#)$).

Ainda não usamos as hipóteses H1 e H2. Precisamos de C e N (ou a negação deles) separados.
Pela linha 6 temos $\sim C$ **e** $\sim N$, então, pela lei de simplificação, podemos separar em duas proposições.

Na hipóteses H1 temos a condicional $M \to C$, e na linha 7, temos $\sim C$. Usando Modus Tollens, concluímos 9.

Na hipótese H2 temos $A \to N$, e na linha 8, a negação desse consequente: $\sim N$. Usando Modus Tollens, concluímos $\sim A$ (linha 10).

Se temos uma proposição P e temos uma outra proposição Q, então temos a proposição P **e** Q, ou seja, $P \wedge Q$ (podemos fazer a conjunção de duas proposições). Observe que temos $\sim M$ e $\sim A$, e a tese é exatamente a conjunção dessas duas proposições.