Université Clermont Auvergne

Rapport

MSTCC problem and its variations

Réalisé par :
MEDJANI Katia

Contents

0.1 Introduction

Des étude précédente ont demontré que le probléme MST est polynomial, mais autre variations sont NP-hard(arbre de Steiner, abre couvrant avec contrainte de degré DCST, Arbre couvrant a capacité minimum MCST).
Dans ce document on va étudier un cas particulier des graphe qui est le cactus, On considére le problème MSTC(minimum spanning tree with conflicts), et MSTC est NP-Hard, pour le graphe cactus le problème de faisabilité est limité polynomialement alors que la version d'optimalité reste NP-hard et ceci en mettant le lien entre le graphe des cactus et le probléme .
On va aussi démontrer que quand le graphe de conflits est une collection de graphe disjoints(quand la relation de conflit est transitive) MSTC peut être résolu en temps polynomial. Il est encore identifié d'autres cas de MSTC qui peuvent être résolus en temps polynomial d'où est ce qu'ils ont dérivé de fortes bornes inférieures.
Differentes heuristique et tests de faisabilité ont été discutés dans l'article de Ruonan Zhang , Santosh N. Kabadi , Abraham P. Punnen avec des résultats expérimentaux préliminaires.

0.2 Définition

Graphe Cactus
En théorie des graphes, un cactus est un graphe connecté dans lequel deux cycles simples quelconques ont au plus un sommet en commun. De manière équivalente, il s'agit d'un graphe connecté dans lequel chaque arête appartient à au plus un cycle simple, ou (pour un cactus non trivial) dans lequel chaque bloc (sous-graphe maximal sans sommet coupé) est une arête ou un cycle.

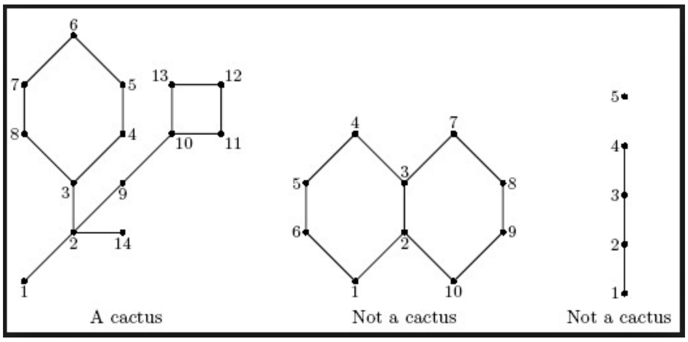

Figure 1: Graphe Cactus

Arbre de Steiner Le cadre le plus classique en optimisation combinatoire est le suivant : étant donné un graphe G, dont les arêtes ont des poids, et un sous-ensemble S de sommets de G, trouver un ensemble d'arêtes de poids minimal tel que le sous-graphe induit soit connexe et contienne tous les sommets de S,Contrairement au problème de l'arbre couvrant minimal où tous les sommets de l'arbre A doivent être dans V, dans le problème de l'arbre de Steiner il est autorisé d'utiliser des points en dehors de V, qu'on appelle les points de Steiner.

Arbre couvrant avec contrainte de degré
Ce problème se traduit de la maniére suivante, on considère un graphe complet K= (V,E). Pour chaque arête e, on a un coût $c_e \in R$. On considère un sommet particulier s et un entier strictement positif k. On souhaite trouver l'arbre couvrant de K de plus petit coût et dont le degré en s est au plus k.

Inclusion d'une arête
L'inclusion d'une arête $e_{p,i}$ consiste à fixer $e_{p,i} \in X^*$ et la supprimer de E_i puis supprimer de S tout les ensemble de type $\{e_{q,i}, e_{p,i}\}$, puis effectuer l'opération d'exclusion pour tout arête dans $E_i - e_{p,i}$.

Exclusion d'une arête
L'exclusion d'une arête $e_{p,i}$ consiste à la suppression de $e_{p,i}$ de E_i et effectuer l'opération d'inclusion de tous $\{e_{q,i} : \{e_{q,i}, e_{p,i}\} \in S\}$

Relation de transitivité de l'ensemble des conflits
On dit que l'ensemble des conflits S es transitif SSI $\forall e, f, g$ dans E, $\{e, s\} \in S$ and $\{f, g\} \in S$ implique que $\{e, g\} \in S$.

0.3 Section 01

0.3.1 Complexité et cas a résolution polynomial

Dans ce document on va discuter une configuration simple de G qui est un cactus. on montre que lorsque G est un cactus , la version de faisabilité de MSTC peut être résolue en temps polynomial alors que la version d'optimisation reste NP-difficile.
Supposons que G = (V, E) est un cactus, mais que le jeu de conflits S est arbitraire. On suppose, sans perte de généralité, que chaque arête de E est sur un cycle. Cela nous donne une partition $(E_1, E_2, ..., E_k)$ de E où chaque $Ei = e_{1,i}, e_{2,i}, ..., e_{1_i,i}$ est l'ensemble des arêtes d'un cycle dans G.
Évidemment, $l_i \geq 3 \ \forall i$.
Pour tout $T \subseteq E$ est l'ensemble des arêtes d'un arbre dans G si et seulement si $|T \cap E_i| = l_i - 1 \ \forall i$.
Le problème se réduit donc à choisir un ensemble $T^* \subseteq E$ tel que $E - T^*$,$= X^*$...(i), contient exactement une arête de chaque E_i et X^* contient au moins un élément de chaque paire de conflits en S (faisabilité).
Au début on montre que sans perte de généralité pour tout $i = 1, ...k$, S contient aux plus $\{e_{p,i}, e_{q,i}\}$(On ne peut avoir plus d'un conflit sur un cycle) pour cela les deux opération d'inclusion et d'exclusion définit précédemment peuvent êtres utiles.

Cas d'infaisabilité

S'il existe plus d'un ensemble du type $\{e_{p,i}, e_{q,i}\} \in S$pour quelque $i \in \{1, 2, ...\}$, si l'intersection de ces ensembles est vide alors le problème n'a pas de solution. Sinon si $e_{p,i}$ est dans chaque sous-ensemble alors $e_{p,i} \in X^*$ (inclusion)

Soit e un isthme dans G, si les arête en conflits avec e déconnecte le graphe alors le problème n'a pas de solution.

Maintenant on va démontrer que le problème MSTC est équivalent au problème de 2-SAT pondéré, et à partir des résultats du problème 2-SAT on peut démontrer que le problème de faisabilité peut être résolu en $O(max\{|E|, |S|\})$, tandit que le problème d'optimalité reste NP-Hard.

0.4 Section 02

Théorème 1 *Le problème MSTC dans les graphe de cactus est NP-HARD. par contre la version de faisabilité peut être résolu en* $O(max\{|E|, |S|\})$ *time.*

Preuve

Comme preuve au théorème 01, on démontre que le problème MSTC est équivalent au problème 2-SAT pondéré. A partir du résultat de 2-SAT pondéré, la version de faisabilité du MSTC cactus est résoluble en temps $(max\{|E|, |S|\})$. Tandis que l'optimalité reste NP-hard

Problème 2-SAT généralisé
Soit un graphe G(N,F) et $(N_1, N_2, ..., N_k)$ une partition de l'ensemble N, où $N_i = \{n_{1,i}, ..., n_{\ l_i,i}\}$ avec $l_i \geq 3$, w_p est le poids de chaque noeud $p \in N$, le problème est de choisir $N^* \subseteq N$ tel que N^* contient exactement un noeud de chaque

Lemme 2 *Le graphe de conflits* $\hat{G}$ *est une collection de cliques disjointes SSI l'ensemble de conflit S est transitif.*
On démontre que MSTC peut être résolu en temps polynomial si Ĝ est transitif.
Preuve
Puisque le problème de l'intersection des matroïdes pondérées est résolu en temps polynomialement.d'où on peut résumer ce résultat dans le théorème suivant.

théorème 03 *Quand le graphe de conflit est une collection de cliques disjointe (de manière équivalente quand S est transitif), MSTC peut être résolu en temps polynomial.*

Théorème 4 *On suppose que le graphe de conflits* $\hat{G}$ *est tel que* $\hat{G}$ *est obtenu en supprimant un nombre fixe k de sommet, qui peuvent être identifiés en temps polynomial, réduit* $\hat{G}$ *en une collection de cliques disjointes .Alors l'instance correspondante de MSTC peut être résolue en temps polynomial.*

Preuve
On considère chacun des k noeuds de $\hat{G}$ où la suppression de ces sommets, réduit $\hat{G}$ en cliques disjointes, Si les arêtes de G correspondant à chaque sommet est à exclure de l'arbre alors on supprime les arêtes de G, et le sommet correspondant dans $\hat{G}$.
Si l'arête est à inclure alors on change son coût à -M, puis on supprime tous ces

voisins dans $\hat{G}$.
Le problème est infaisable s'il existe des arêtes -M qu'on ne peut inclure.
Le nombre de cas possible est de 2^k pour choisir si un noeud est à inclure ou exclure.
En effectuant toutes ces opérations le graphe de conflits résultant sera sous forme de cliques disjointes. D'après le théorème 03 ce problème peut être résolu en temps polynomial.
Comme corollaire pour le théorème 04 on à ce qui suit:

Corollaire 05
Si le graphe possède un nombre fixe K d'arêtes, qui peuvent être identifiés en temps polynomial, et la suppressions de ces arêtes rend la graphe de conflit sous forme de cliques disjointes, alors le problème MSTC peut être résolu en temps polynomial.

Si le graphe de conflit n'est pas une collection de clique disjointes et ne satisfait pas la condition du théorème 4 pour une petite valeur k, l'une des façons d'obtenir une borne inférieure au problème MSTC est de relaxer quelque relation de conflit (c-a-d Supprimer quelques arêtes de $\hat{G}$) pour que le graphe résultant soit une collection de cliques disjointes avec un nombre maximum d'arêtes, et ça c'est exactement le problème du maximum edge clique partitioning (MAX-ECP).Mais il est connu que le problème (MAX-ECP) est NP-Hard.

0.5 Section 03

0.6 Conclusion

Bibliography

[1] A. Aldroubi, C. Cabrelli, A. F. Cakmak, U. Molter, and A. Petrosyan, Iterative actions of normal operators, Submitted. Available at http://arxiv.org/abs/1602.04527.

[2] K. Groechenig, *Foundations of time-frequency analysis*, Birkhäuser Boston, 2001.