Departamento de Filosofia
Pontifícia Universidade Católica (PUC-RJ)

Introdução à Lógica

Cezar A. Mortari

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

Márcio Galvão
galva.marcio@gmail.com

2008

Introdução

Este documento contém propostas de soluções para os exercícios dos Capítulos 1 até 16 do livro "Introdução à Lógica" do Professor Dr. Cezar Mortari (Mortari 2001) primeira edição. Esperamos que o conteúdo aqui apresentado possa ter utilidade para os alunos dos cursos de lógica clássica onde o livro é adotado, bem como para outros interessados no tema.

O livro do prof. Mortari é uma excelente introdução à lógica clássica e tem, entre outros, o grande mérito de transformar um tema normalmente árido para os iniciantes em uma leitura agradável. Com relação à sua estrutura, os primeiros três capítulos de (Mortari 2001) apresentam noções preliminares importantes para o aprendizado da lógica, e o capítulo 4 traz uma revisão da Teoria dos Conjuntos.

Em seguida (capítulos 4 ao 16) é apresentado o Cálculo de Predicados de Primeira Ordem. Os capítulos 6 e 7 tratam de síntaxe, e os capítulos 8 até 11 tratam de semântica (interpretações e estruturas). O método de prova por Tablôs é discutido no capítulo 12, e o método da Dedução Natural é apresentado nos capítulos 14 e 15. O capítulo 16 introduz a relação de identidade e os símbolos funcionais. O capítulo 17 trata das teorias formalizadas e o capítulo 18 das lógicas não-clássicas.

Os enunciados dos exercícios aqui reunidos são parte integrante da primeira edição do texto de (Mortari 2001) e portanto são de popriedade intelectual do professor Cezar A. Mortari.

Alguns exercícios têm solução única (por exemplo, a construção de tabelas de verdade). Porém, há outros (como a tradução de sentenças da linguagem natural para a linguagem do CQC) que podem admitir outras respostas possíveis além das sugeridas neste documento.

Este material *está sendo revisado*, com base em um gabarito[1] disponibilizado pelo prof. Mortari, disponível em

http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/.

A revisão não foi completada e podem existir erros.

Para enviar sugestões de soluções alternativas, críticas e sobretudo para reportar erros neste material, por favor enviar e-mail para Márcio Galvão (galva.marcio@gmail.com).
Sua colaboração será sempre apreciada.

Este texto será substituído por novas versões sempre que houver a necessidade de correção ou a possibilidade de melhorias significativas.

[1] Nota do autor: Este material contém soluções para os exercícios dos capítulos 1 até 16. O gabarito fornecido pelo prof. Mortari também inclui as respostas para os exercícios dos capítulos 17 e 18.

Sumário

Capítulo 1 - Introdução

Exercício 1.1.

Há não muito tempo atrás, num país distante, havia um velho rei que tinha três filhas, inteligentíssimas e de indescritível beleza, chamadas Guilhermina, Genoveva e Griselda. Sentindo-se perto de partir desta para melhor, e sem saber qual das filhas designar como sua sucessora, o velho rei resolveu submetê-las a um teste. A vencedora não apenas seria a nova soberana, como ainda receberia a senha da conta secreta do rei (num banco suíço), além de um fim de semana, com despesas pagas, na Disneylândia. Chamando as filhas à sua presença, o rei mostrou-lhes cinco pares de brincos, idênticos em tudo com exceção das pedras neles engastadas: três eram de esmeralda, e dois de rubi. O rei vendou então os olhos das moças e, escolhendo ao acaso, colocou em cada uma delas um par de brincos. O teste consistia no seguinte: aquela que pudesse dizer, sem sombra de dúvida, qual o tipo de pedra que havia em seus brincos herdaria o reino.

A primeira que desejou tentar foi Guilhermina, de quem foi removida a venda dos olhos. Guilhermina examinou os brincos de suas irmãs, mas não foi capaz de dizer que tipo de pedra estava nos seus (e retirou-se, furiosa). A segunda que desejou tentar foi Genoveva. Contudo, após examinar os brincos de Griselda, Genoveva se deu conta de que também não sabia determinar se seus brincos eram de esmeralda ou rubi e, da mesma furiosa forma que sua irmã, saiu batendo a porta. Quanto a Griselda, antes mesmo que o rei lhe retirasse a venda dos olhos, anunciou corretamente, alto e bom som, o tipo de pedra de seus brincos, dizendo ainda o porquê de sua afirmação. Assim, ela herdou o reino, a conta na Suíça e, na viagem à Disneylândia, conheceu um jovem cirurgião plástico, com quem se casou e foi feliz para sempre.

Que brincos tinha Griselda, de esmeralda ou de rubi ? Justifique.

R. Guilhermina pode ver os brincos de suas irmãs, mas não foi capaz de dizer qual era seu tipo de pedra. Logo, podemos inferir que os brincos de Genoveva e Griselda não eram ambos de rubi (caso contrário, Guilhermina teria podido afirmar que seu brinco só poderia ser de esmeralda). Logo, os brincos de Genoveva e Griselda ou eram ambos de esmeralda, ou um era de esmeralda e o outro de rubi.

Genoveva olhou os brincos de Griselda e também não soube determinar seu tipo de pedra. Logo, o brinco de Griselda não era de rubi. Se fosse, Genoveva saberia que o seu teria que ser de esmeralda, já que elas duas não podiam ter ambas brincos de rubi (ou Guilhermina teria acertado o seu).

Então, Griselda pode inferir com segurança que seus brincos eram de esmeralda, pois se fosse de rubi, Genoveva teria sabido que o dela era de esmeralda, o que não ocorreu.

Capítulo 2 - Lógica e argumentos

Sem exercícios.

Capítulo 3 - Preliminares

Exercício 3.1.
Diga se as sentenças abaixo são verdadeiras ou falsas.

a) 'O nome da rosa' é o título de uma obra de Umberto Eco.

R. Verdadeira. A frase (a) se refere ao título da obra. Quando uma sentença faz referência a alguma outra sentença ou nome, deve-se utilizar aspas na sentença ou nome mencionado.

b) Stanford tem oito letras.

R. Falso. O correto seria 'Stanford' tem oito letras (o *nome* da Universidade). Stanford é a Universidade em si, que naturalmente não tem letras.

c) '3 + 1' é igual a '4'

R. Falsa. Seria correto dizer que 3 + 1 é igual a 4. A expressão '3 + 1' é diferente da expressão '4' ('4' é o *numeral* que denota o *número* 4).

d) 'Pedro Álvares Cabral' descobriu o Brasil.

R. Falsa. Pedro Álvares Cabral (o homem) descobriu o Brasil. Sem aspas, falamos da *pessoa*. Com aspas, como em 'Pedro Álvares Cabral', estamos nos referindo ao seu *nome*.

e) A palavra 'Logik' não é uma palavra do português.

R. Verdadeira. A palavra 'Logik' é do idioma alemão.

f) "Logik" não pode ser usada como sujeito de uma sentença do português.

R. Falsa. Com aspas duplas, estamos citando a palavra 'Logik', que pode ser sujeito de sentenças do idioma português, como por exemplo em

> "Logik" aparece na sentença 'A palavra 'Logik' é do idioma alemão'.

g) "Pedro" não é o nome de Sócrates, mas é o nome de 'Pedro'.

R. Falsa. "Pedro" é uma citação do nome 'Pedro', e o uso de aspas duplas está correto. Mas este nome 'Pedro' é de Pedro, a pessoa. O correto seria:

> "Pedro" não é o nome de Sócrates, mas é o nome de Pedro.

h) Há um livro de James Joyce cujo nome é Ulisses.

R. Falsa. Para fazer menção ao *nome* do livro, o correto seria escrever 'Ulisses'

Exercício 3.2.
Coloque aspas, ou não, nas afirmações abaixo, de modo a torná-las verdadeiras.

a) Rosa é dissílaba.

R. 'Rosa' é dissílaba (a palavra, não a flor ou pessoa)

b) Napoleão foi imperador da França.

R. OK! A sentença é verdadeira como está.

c) Sócrates é o nome de um filósofo grego.

R. 'Sócrates' é o nome de um filósofo grego (falamos do nome, não da pessoa).

d) A palavra water tem o mesmo significado que a palavra portuguesa água.

R. A palavra 'water' tem o mesmo significado que a palavra portuguesa 'água' (estamos falando das palavras, não da substância).

e) A expressão Rosa é o nome da palavra Rosa, que, por sua vez, é o nome de Rosa.

R. A expressão "Rosa" é o nome da palavra 'Rosa', que, por sua vez, é o nome de Rosa.

Neste exemplo, "Rosa" é uma citação da palavra 'Rosa', nome de Rosa (pessoa).

f) A sentença nenhum gato é preto é falsa.

R. A sentença 'nenhum gato é preto' é falsa.

Trata-se de uma sentença que atribui um valor de verdade (falsa) para outra sentença. Logo, a sentença mencionada deve ser destacada entre aspas.

g) Todavia e contudo, mas não também, têm o mesmo significado que mas, contudo, não não.

R. 'Todavia' e 'contudo', mas não 'também', têm o mesmo significado que 'mas', contudo, 'não' não.

h) O numeral 8 designa a soma de 4 mais 4.

R. O numeral '8' designa a soma de 4 mais 4.
(A soma de 4 mais 4 é igual a 8, um *número* que é designado pelo *numeral* '8').

i) 2 + 2 é igual a 3 + 1, mas 3 + 1 é diferente de 4.

R. 2 + 2 é igual a 3 + 1, mas '3 + 1' é diferente de '4'.

Capítulo 4 - Conjuntos

Exercício 4.1.
Expressar em símbolos.

a) b é um elemento de A

R. $b \in A$

b) k não é um elemento de B

R. $k \notin B$

c) O conjunto consistindo nos elementos a, b e c

R. $\{a, b, c\}$

d) b é um elemento do conjunto consistindo dos elementos a, b e c

R. $b \in \{a, b, c\}$

e) O conjunto {b} é um elemento do conjunto consistindo nos elementos a, c e no conjunto {b}

R. $\{b\} \in \{a, c, \{b\}\}$

Exercício 4.2.
Há alguma diferença entre Salma Hayek e {Salma Hayek} ?
E entre os conjuntos $\varnothing$ e $\{\varnothing\}$?

R. Salma Hayek é uma pessoa (cujo nome é 'Salma Hayek'). Já {Salma Hayek} é um conjunto que possui Salma Hayek como único elemento.

O símbolo $\varnothing$ denota o conjunto vazio, que não possui elementos, ao passo que $\{\varnothing\}$ é um conjunto unitário cujo elemento é o conjunto vazio.

Exercício 4.3.

Tente demonstrar as propriedades (b), (d) e (e) da proposição 4.1.

Proposição 4.1: Sejam A, B e C três conjuntos quaisquer. Então:

(a) $\varnothing \subseteq A$
(b) $A \subseteq A$
(c) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subseteq C$
(d) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$ então $A = B$
(e) Se $A \subset B$ então $A \neq B$

R.

(b) Pela definição de inclusão, $A \subseteq A$ seria falso (por hipótese) somente se existisse algum elemento que pertencesse ao conjunto A, mas não pertencesse ao conjunto A, o que é absurdo. Como a hipótese de que $A \subseteq A$ é falso é absurda, temos que admitir que $A \subseteq A$ é verdadeiro para qualquer conjunto A.

(d) Pela definição de inclusão, se $A \subseteq B$ então qualquer elemento de A também é elemento de B, e se $B \subseteq A$, então qualquer elemento de B é também elemento de A. Logo, os conjuntos A e B têm os mesmos elementos. Neste caso, pela definição de igualdade, $A = B$ (A e B são o mesmo conjunto).

(e) Pela definição de inclusão estrita, se $A \subset B$ (A é subconjunto próprio de B), então todo elemento de A é também elemento de B, mas os conjuntos A e B não podem ser iguais (deve existir algo em B que não existe em A). Se existe algo em B que não existe em B, pela definição de igualdade, $A \neq B$.

Para informações sobre a definições de inclusão e igualdade entre conjuntos, ver (MORTARI 2001, 46-47).

Exercício 4.4.
Expressar em símbolos.

a) A é um subconjunto de B

R. $A \subseteq B$

b) A é um subconjunto próprio de B

R. $A \subset B$ (neste caso, $A \subseteq B$ e $A \neq B$)

c) O conjunto união de D e S

R. $D \cup S$

d) c é elemento da intersecção de A e B

R. $c \in (A \cap B)$

e) a é um elemento do complemento de B

R. $a \in \overline{B}$

f) a não é um elemento do complemento da união de M e N

R. $a \notin \overline{(M \cup N)}$

Exercício 4.5
Quais das seguintes afirmações são verdadeiras, e quais são falsas ?

a) $c \in \{a, c, e\}$	R. Verdadeira
b) $e \notin \{a, b, c\}$	R. Verdadeira
c) $\{0, 1, 2\} \subset \{0, 1, 2\}$	R. Falsa. Se $A \subset B$ então $A \neq B$ por definição.
d) $\{0, 1, 2\} \subseteq \{0, 1, 2\}$	R. Verdadeira
e) $\{a, b\} \subseteq \{a, b, c\}$	R. Verdadeira
f) $a \in \{b, \{a\}\}$	R. Falsa
g) $\{a\} \in \{b, \{a\}\}$	R. Verdadeira
h) $\{a\} \in \{c, \{b\}, a\}$	R. Falsa
i) $c \in \{a, b\} \cup \{d, c, e\}$	R. Verdadeira. $c \in \{a, b, d, c, e\}$
j) $\varnothing \subseteq \{a, b, c\}$	R. Verdadeira. Para todo conjunto A, $\varnothing \subseteq A$
k) $\{0, 1, 2\} \subset \{3, 2, 5, 4 ,6\}$	R. Falsa
l) $\{1, b\} \subseteq \{1, b, c\} \cap \{4, d ,1, f, b\}$	R. Verdadeira. $\{1, b\} \subseteq \{1, b\}$

Exercício 4.6

Sejam A, B e C os seguintes conjuntos:

$A = \{x, y, z\}$, $B = \{2, 4\}$, $C = \{\pi\}$, $D = \{a, b\}$, $E = \{1, 4, 8\}$, $F = \{4\}$. Calcule:

a) A x B

R. $A \times B = \{\langle x, y\rangle / x \in A \text{ e } y \in B)$ *(produto cartesiano de A por B)*

$A \times B = \{ \langle x, 2\rangle, \langle x, 4\rangle, \langle y, 2\rangle, \langle y, 4\rangle, \langle z, 2\rangle, \langle z, 4\rangle\}$

b) B x C

R. $B \times C = \{\langle x, y\rangle / x \in B \text{ e } y \in C\}$

$B \times C = \{\langle 2, \pi\rangle, \langle 4, \pi\rangle\}$

c) B x A

R. $B \times A = \{\langle x, y\rangle / x \in B \text{ e } y \in A)$

$B \times A = \{ \langle 2, x\rangle, \langle 2, y\rangle, \langle 2, z\rangle, \langle 4, x\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 4, z\rangle\}$

d) D x F x B

R. $D \times F \times B = \{\langle x, y, z\rangle / x \in D \text{ e } y \in F \text{ e } z \in B)$

$D \times F \times B = \{\langle a, 4, 2\rangle, \langle a, 4, 4\rangle, \langle b, 4, 2\rangle, \langle b, 4, 4\rangle\}$

e) C x F x A

R. $C \times F \times A = \{\langle x, y, z\rangle / x \in C \text{ e } y \in F \text{ e } z \in A)$

$C \times F \times A = \{\langle \pi, 4, x\rangle, \langle \pi, 4, y\rangle, \langle \pi, 4, z\rangle\}$

f) E - B

R. $E - B = \{x / x \in E \text{ e } x \notin B\} = \{1, 8\}$

g) D x (B - E)

R. $B - E = \{x / x \in B \text{ e } x \notin E\} = \{2\}$

$D \times (B - E) = \{\langle x, y\rangle / x \in D \text{ e } y \in (B - E)\}$

$D \times (B - E) = \{\langle a, 2\rangle, \langle b, 2\rangle\}$

h) $(B \cap E)$ x F

R. $B \cap E = \{x / x \in B \text{ e } x \in E\} = \{4\}$

$(B \cap E) \times F = \{\langle x, y\rangle / x \in (B \cap E) \text{ e } y \in F\}$

$(B \cap E) \times F = \{\langle 4, 4\rangle\}$

i) $(E \cup F) \times D$

R. $(E \cup F) = \{x \,/\, x \in E \text{ ou } x \in F\} = \{1, 4, 8\}$
$(E \cup F) \times D = \{\langle x, y\rangle \,/\, x \in (E \cup F) \text{ e } y \in D\}$
$(E \cup F) \times D = \{\langle 1, a\rangle, \langle 1, b\rangle, \langle 4, a\rangle, \langle 4, b\rangle, \langle 8, a\rangle, \langle 8, b\rangle\}$

j) $(C \cup F) \times (A - \{x\})$

R. $C \cup F = \{x \,/\, x \in C \text{ ou } x \in F\} = \{\pi, 4\}$
$A - \{x\} = \{x \,/\, x \in A \text{ e } x \notin \{x\}\} = \{y, z\}$
$(C \cup F) \times (A - \{x\}) = \{\langle x, y\rangle \,/\, x \in (C \cup F) \text{ e } y \in (A - \{x\})\}$
$\{\pi, 4\} \times \{y, z\} = \{\langle \pi, y\rangle, \langle \pi, z\rangle, \langle 4, y\rangle, \langle 4, z\rangle\}$

k) $P(A)$

R. $P(A) = \{X \,/\, X \subseteq A\}$ *(Conjunto de todos os subconjuntos X de A)*
$P(A) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$

l) $P(B)$

R. $P(B) = \{X \,/\, X \subseteq B\}$
$P(B) = \{\varnothing, \{2\}, \{4\}, \{2,4\}\}$

Exercício 4.7
Dê um exemplo de domínio e conjunto imagem para que tenhamos as seguintes funções:

a) 'o local de nascimento de x'

R. Reproduzindo o essencial da noção de função (ver (MORTARI 2001, 54)): Sejam A e B dois conjuntos. Seja f uma função de A em B. Neste caso, há em B exatamente um elemento para cada elemento de A (mais de um elemento em A podem ser relacionados a um mesmo elemento de B). A é o *domínio* de f, e B o *contradomínio* de f. Diz-se dos elementos de A que são os *argumentos* de f, e dos elementos de B que são os *valores* de f. Um elemento de B associado por f a um elemento de A é uma *imagem*. No caso do exercício (a), para a função 'o local de nascimento de x', podemos ter, por exemplo, os seguintes conjuntos domínio e imagem:

A = {Pedro, Vitor, Patrícia} = domínio de f
B = {Florianópolis, Porto Alegre} = contradomínio de f
$x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$

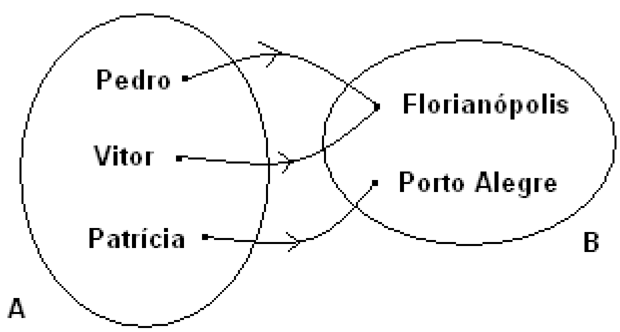


Figura 4.1

Observar que como nem todo elemento do domínio tem uma imagem diferente, a função não é *injetora*.

b) 'a esposa de x'

R.
A = {Galvão, Zé, Sócrates} = domínio de f
B = {Patrícia, Valéria, Xantipa} = contradomínio de f
$x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$

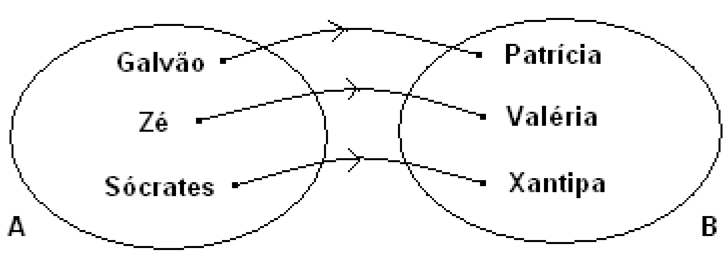


Figura 4.2

c) 'O marido de x'

R.
A = {Patrícia, Valéria} = domínio de f
B = {Galvão, Zé} = contradomínio de f
$x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$

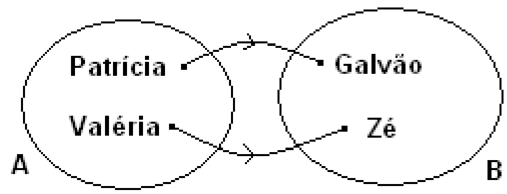


Figura 4.3

d) 'A data de nascimento de x'

R.
A = {Bernardo, Isabela} = domínio de f
B = {29/09/2004, 16/10/1993} = contradomínio de f
$x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$

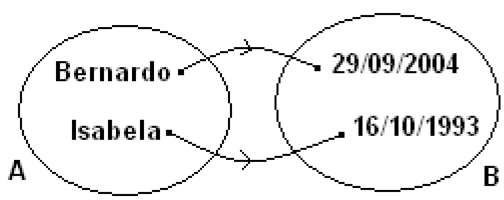


Figura 4.4

e) 'O pai biológico de x'

R.
A = {Bernardo, Isabela} = domínio de f
B = {Eduardo, Zé} = contradomínio de f
$x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$

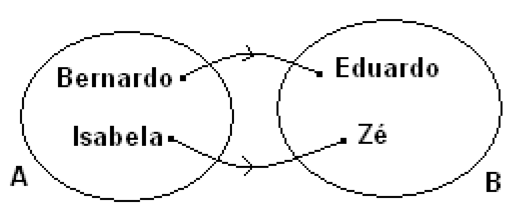


Figura 4.5

f) 'A idade de x'

R.
A = {Pedro, Bernardo} = domínio de f
B = {15, 2} = contradomínio de f *(Anos)*
x ∈ A, y ∈ B, f(x) = y

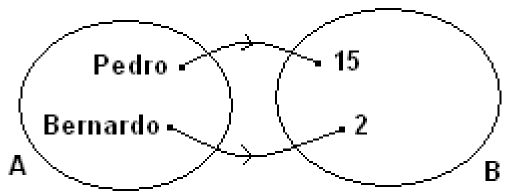


Figura 4.6

g) 'O diâmetro de x'

R.
A = {Terra, Lua} = domínio de f
B = {12.756, 3.476} = contradomínio de f *(Km)*
x ∈ A, y ∈ B, f(x) = y

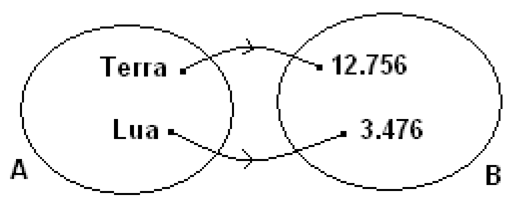


Figura 4.7

h) 'A capital de x'

R.
A = {Bahia, Paraná, São Paulo} = domínio de f
B = {Salvador, Curitiba, São Paulo} = contradomínio de f
x ∈ A, y ∈ B, f(x) = y

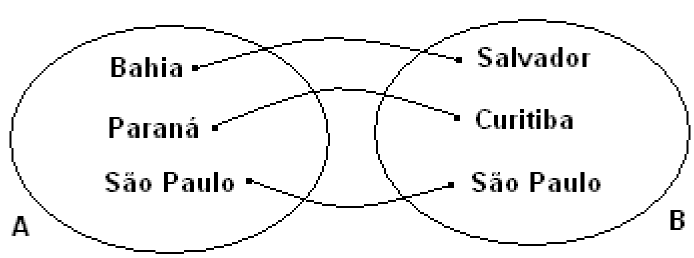


Figura 4.8

i) 'O filho mais velho de x'

R.
A = {Patrícia} = domínio de f
B = {Pedro, Vitor} = contradomínio de f
$x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$

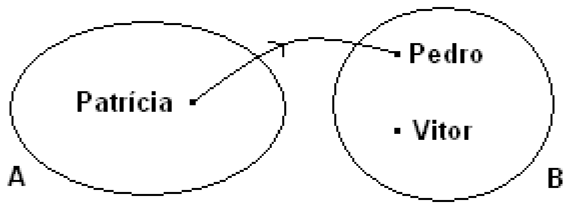


Figura 4.9

Observar na Figura 4.9 que há elementos no contradomínio que não são imagem de elementos do domínio, logo, a função não *é sobrejetora*.

j) 'A raiz quadrada de x'

R.
A = {4, 25, 529} = domínio de f
B = {2, 5, 23} = contradomínio de f
$x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$

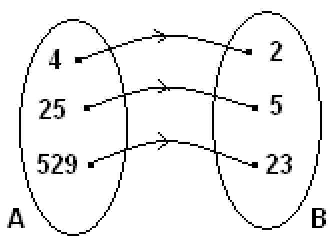


Figura 4.10

Observar na Figura 4.10 que o conjunto imagem da função é igual ao seu contradomínio, isto é, não há elementos do contradomínio que não sejam imagem de algum elemento do domínio. Logo, a função é *sobrejetora*. Além disso, como cada elemento do domínio tem uma imagem diferente, a função também é *injetora* (se $x \neq y$, então $f(x) \neq f(y)$). Neste caso, diz-se que há uma *correspondência biunívoca* ou bijeção, entre os elementos dos conjuntos.

Capítulo 5 - Introdução ao CQC

Exercício 5.1.
Você acha que seria possível incluir no universo de estudo objetos impossíveis, como o círculo quadrado, o número inteiro cujo quadrado é menos 1, e o único gato branco que não é gato ?

R. Na lógica clássica (CQC), é adotado o "pressuposto existencial" de que toda constante individual denota um indivíduo que existe no universo, e também de que o universo da estrutura não é vazio (existe pelo menos um indivíduo). É possivel incluir no universo de discurso indivíduos ficcionais ou inexistentes como "Pégasus" ou "Darth Vader" e formalizar sentenças sobre eles. Porém, "inexistente" é diferente de "impossível". Objetos como "o círculo quadrado" violam o princípio da contradição. Por este motivo, a inclusão destes objetos "impossíveis" ou inconsistentes (contraditórios) no universo de uma estrutura não é aceita na lógica clássica.

Quanto ao aspecto metafísico da questão, vale ressaltar que o filósofo austríaco Alexius Meinong (1853 - 1920) elaborou uma teoria para objetos não existentes, que foi criticada por Russell (HAACK 1998, 110). Sem maiores detalhamentos, para Meinong, há objetos que existem (no espaço e no tempo) e também *objetos que não existem*, não ocupam nenhuma região do espaço e nem são acessíveis aos sentidos, mas mesmo assim podem ter *propriedades*. Estes objetos *subsistem*.

Já no que se refere ao aspecto lógico, o problema de se aceitar objetos com propriedades contraditórias na lógica clássica (CQC) é que, nesta lógica, as contradições trivializam o sistema, ou seja, a partir de uma contradição pode-se provar qualquer coisa. Porém, há lógicas não clássicas como a Lógica Paraconsistente, desenvolvida pelo Prof. Dr. Newton C. A. da Costa, onde uma contradição não implica necessariamente em trivialização, e nestas lógicas, pode-se tratar situações que representem contradições.

Capítulo 6 - A Síntaxe do Cálculo de Predicados (I)

Exercício 6.1.
Diga, de cada uma das expressões abaixo, se ela é ou não uma expressão da linguagem do CQC. Caso seja, diga também se ela é uma constante ou uma variável.

a) a R. É expressão do CQC (constante individual)

b) z_2 R. É expressão do CQC (variável individual com subscrito)

c) x_{VI} R. Não é expressão do CQC (o alfabeto de L não tem 'VI')

d) t_{47} R. É expressão do CQC (constante individual com subscrito)

e) é R. Não é expressão do CQC (o alfabeto de L não tem 'é')

f) p_0 R. Não é expressão do CQC (subscrito inválido)

g) 9 R. Não é expressão do CQC

h) -a R. Não é expressão do CQC (o alfabeto de L não tem '-')

i) w_{275} R. É expressão do CQC (variável individual com subscrito)

j) pq R. Não é expressão (bem formada) do CQC

k) q_{-1} R. Não é expressão do CQC (o alfabeto de L não tem '-')

l) k R. É expressão do CQC (constante individual)

Nota

1) Por definição, uma expressão da linguagem objeto L é qualquer seqüência finita de símbolos do alfabeto de L (entretanto, nem todas as expressões são bem formadas). Em (MORTARI 2001, 69) o alfabeto de L é apresentado como sendo composto por 65 caracteres, resumidos na tabela seguinte:

O alfabeto da linguagem L do Cálculo de Predicados de Primeira Ordem	
a, b, c, d, ... t	Constantes individuais, admitindo subscritos como em a_1, t_{47}, q_{12}, etc
u, v, w, x, y, z	Variáveis individuais, admitindo subscritos, como em z_2, w_{275}, etc
A, B, C, D, ... T	Constantes de predicado n-ários
$\neg \vee \wedge \rightarrow \leftrightarrow \forall \exists$	Símbolos lógicos de operações e quantificadores
( )	Sinais de pontuação (parênteses)
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9	Numerais (para formar os subscritos de constantes e variáveis)

Tabela 6.1

Com base neste alfabeto, algo como 't_{47}' (item (d) é considerada uma expressão bem formada da linguagem L. De acordo com (MORTARI 2001, 70), o uso de subscritos formados por numerais tem como propósito produzir um número infinito, porém enumerável, de constantes e variáveis individuais.

Com relação ao uso dos subscritos, talvez se possa argumentar que, a rigor, um símbolo como 't_{47}' *não* está definido explicitamente como parte do alfabeto, sendo na verdade uma *combinação* dos símbolos 't', '4' e '7', estes sim parte do alfabeto. Como alternativas ao uso dos subscritos, pode-se citar por exemplo a abordagem utilizada em (MATES 1968), que define um conjunto infinito de variáveis e constantes individuais (em ordem canônica, temos a, b, ... t, a1, b1, ... t1, a2, b2, ..., t2, a3, b3, ...t3, ...). Neste caso, uma variável como 't47' é de fato uma expressão básica da linguagem formal (observar que '47' é *parte da própria variável*, e não um subscrito!).

No Exercício 6.1, estamos adotando como referência o alfabeto da Tabela 6.1, compatível com o critério adotado em (MORTARI 2001). Assim, por exemplo, a expressão 'w_{275}' do item (i) foi considerada uma expressão básica de L, ao passo que pelo critério adotado em (MATES 1968) provavelmente 'w_{275}' não seria uma expressão.

Aceitando-se o uso dos subscritos para a produção de constantes e variáveis, devemos respeitar a restrição de que os mesmos devem ser números naturais positivos (MORTARI 2001, 70). Logo, a expressão 'x_{VI}' do item (c) do Exercício 6.1. não é uma expressão básica, pois utiliza subscritos inválidos que não fazem parte do alfabeto. Analogamente, a seqüência de caracteres 'p_0' do item (f) não é uma expressão básica de L pois utiliza um subscrito inválido.

Exercício 6.2.
Usando a notação sugerida, traduzir as sentenças abaixo para a linguagem do CQC.
(c: Cléo, m: Miau, t: Tweety, F: x é um peixe, P: x é um pássaro, G: x é um gato, M: x é maior que y, L: x gosta mais de y do que de z).

a) Cléo é um pássaro.

R. Pc *lê-se: "c tem a propriedade p"*

b) Miau é um peixe.

R. Fm

c) Miau é maior que Cléo.

R. Mmc *lê-se: "m tem a relação M com c"*

d) Tweety é um gato.

R. Gt

e) Tweety é maior que Miau.

R. Mtm

f) Miau é maior que Tweety.

R. Mmt

g) Miau gosta mais de Cléo do que de Tweety.

R. Lmct *lê-se: "m tem a relação L com c e t"*

h) Tweety gosta mais de Miau do que de Cléo.

R. Ltmc *lê-se: "t tem a relação L com m e c"*

i) Cléo gosta mais de si mesma do que de Miau.

R. Lccm

Nota: Alguns textos de lógica como (MATES 1968) utilizam um índice superior para indicar o grau dos predicados. Assim, a fórmula Pc (onde P é um símbolo de propriedade) é traduzida como P^1c, a fórmula Mtm (relação binária) como M^2tm, a fórmula Ltmc (relação ternária) como L^3tmc, etc. Neste e nos próximos exercícios foi adotado o critério de (MORTARI 2001), onde tais índices são omitidos em favor da maior simplicidade da notação, já que o contexto permite determinar facilmente o grau dos predicados.

Exercício 6.3.
Traduzir as sentenças para a linguagem do CQC, utilizando a notação sugerida.

a) Carla é pintora (c: Carla, P: x é pintora)

R. Pc

b) Paulo é jogador de futebol (p: Paulo, J: x é jogador de futebol)

R. Jp

c) Carla é mais alta que Paulo (A: x é mais alto que y)

R. Acp

d) Paulo é irmão de Carla (I: x é irmão de y)

R. Ipc

e) Paulo ama Denise (d: Denise, A: x ama y)

R. Apd

f) Denise ama Paulo.

R. Adp

g) Carla gosta de si própria (G: x gosta de y)

R. Gcc

h) A Lua é um satélite da Terra (l: Lua, t: Terra, S: x é um satélite de y)

R. Slt

i) Carla deu a Paulo o livro de Denise (D: x dá a y o livro de z)

R. Dcpd

j) Paulo deu a Carla o livro de Denise.

R. Dpcd

k) Paulo é filho de Alberto e Beatriz (a: Alberto, b: Beatriz, F: x é filho de y e z)

R. Fpab

l) Florianópolis fica entre Porto Alegre e Curitiba
(f: Florianópolis, p: Porto Alegre, c: Curitiba, E: x fica entre y e z)

R. Efpc

m) Curitiba fica entre Florianópolis e São Paulo (s: São Paulo)

R. Ecfs

n) Paulo comprou em Curitiba um quadro de Matisse para presentear Denise.
(m: Matisse, C: x comprou em y um quadro de z para presentear w).

R. Cpcmd

o) Alberto comprou em São Paulo um quadro de Van Gogh para presentear Beatriz.
(g: Van Gogh)

R. Casgb

Exercício 6.4.
Diga, das expressões abaixo, se são fórmulas ou não, e por que, supondo que A é um símbolo de predicado zero-ário, P e Q são símbolos de propriedade, e R, de relação binária.

a) Rab

R. Fórmula atômica (constante de predicado seguida por duas constantes individuais)

b) $\neg$Px

R. Fórmula molecular (começa com símbolo de operção de negação, $\neg$)

c) aRb

R. Embora aRb seja uma notação alternativa para Rab, pela convenção adotada em (MORTARI 2001) as fórmulas atômicas devem ser iniciadas por constantes de predicado. *De acordo com este critério*, aRb não é uma fórmula.

d) (Ra $\rightarrow$ Qb)

R. Não é uma fórmula pois R é uma relação binária e deveria ser seguido por dois termos.

e) (($\neg$Rxa $\leftrightarrow$ Qb) $\wedge$ Pc)

R. Fórmula molecular conjuntiva (começa com parênteses)

f) ($\alpha \vee \neg\beta$)

R. Não é uma fórmula, é um esquema de fórmula molecular, onde 'α' e 'β' são metavariáveis que indicam uma fórmula qualquer, e não fazem parte do alfabeto de L. Para informações adicionais, ver (MORTARI 2001, 86).

g) (($\neg$Rxy $\rightarrow$ Qx) $\wedge$ $\neg$(Pb $\vee$ A))

R. Fórmula molecular conjuntiva (começa com parênteses)

h) (A $\rightarrow$ (Pc $\vee$ Rcc))

R. Fórmula molecular condicional (começa com parênteses)

Exercício 6.5.
Usando a notação sugerida, transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do CQC.
(c: Cléo, m: Miau, t: Tweety, F: x é um peixe, P: x é um pássaro, G: x é um gato, M: x é maior que y, L: x gosta mais de y do que de z).

a) Cléo não é um pássaro.

R. $\neg Pc$

b) Miau não é um peixe.

R. $\neg Fm$

c) Miau é um gato ou é um pássaro.

R. $(Gm \vee Pm)$

d) Miau é um gato e é maior que Cléo.

R. $(Gm \wedge Mmc)$

e) Tweety não é um gato.

R. $\neg Gt$

f) Ou Tweety é maior que Miau, ou Miau é maior que Tweety.

R. $(Mtm \vee Mmt)$

g) Se Miau é maior que Tweety, então Tweety não é maior que Miau.

R. $(Mmt \rightarrow \neg Mtm)$

h) Miau é maior que Tweety, se Tweety não é maior que Miau.

R. $(\neg Mtm \rightarrow Mmt)$ *SE Tweety não é maior que Miau, ENTÃO Miau é maior que Tweety*

i) Se Miau é um gato, então não é um peixe.

R. $(Gm \rightarrow \neg Fm)$

j) Miau gosta mais de Cléo do que de Tweety se e somente se Tweety é um pássaro.

R. $(Lmct \leftrightarrow Pt)$

k) Tweety gosta mais de Miau do que de Cléo, mas Miau não gosta mais de Cléo do que de Tweety.

R. $(Ltmc \wedge \neg Lmct)$ *Observar que o "mas" tem o sentido de "e"*

l) Nem Miau nem Cléo são pássaros.

R. $(\neg Pm \wedge \neg Pc)$ *Miau não é um pássaro e Cléo não é um pássaro*

Alternativamente, $\neg(Pm \vee Pc)$ *É falso que (Miau é um passaro OU Cléo é um pássaro).*

m) Tweety não é um gato ou não é um peixe.

R. $(\neg Gt \vee \neg Ft)$

Alternativamente, $\neg(Gt \wedge Ft)$ *É falso que (Tweety é um gato E um peixe).*

n) Não é verdade que Tweety é um gato e um peixe.

R. $\neg(Gt \wedge Ft)$

Alternativamente, $(\neg Gt \vee \neg Ft)$ *Tweety não é um gato ou não é um peixe.*

o) Não é o caso que, se Miau é um gato, então é um peixe.

R. $\neg(Gm \rightarrow Fm)$

Exercício 6.6.
Formalize as sentenças abaixo usando a notação sugerida.

a) Carla é pintora, mas Paulo é jogador de futebol.
(c: Carla, p: Paulo, P: x é pintora, J: x é jogador de futebol)

R. $(Pc \wedge Jp)$

b) Ou Paulo é engenheiro ou Carla é engenheira.
(E: x é engenheiro)

R. $(Ep \vee Ec)$

c) Carla é pintora, mas Paulo é engenheiro ou jogador de futebol.

R. $(Pc \wedge (Ep \vee Jp))$

d) Se Sócrates é o mestre de Platão, então Platão é um filósofo.
(s: Sócrates, p: Platão, M: x é o mestre de y, F: x é um filósofo)

R. $(Msp \rightarrow Fp)$

e) Paulo ama Denise, que ama Ricardo.
(d: Denise, r: Ricardo, A: x ama y)

R. $(Apd \wedge Adr)$ *Observar que o "que ama" na sentença tem o sentido de "e Denise ama"*

f) Paulo ama a si próprio se e somente se ele é narcisista.
(p: Paulo, A: x ama y, N: x é narcisista)

R. $(App \leftrightarrow Np)$

g) Chove ou faz Sol
(C: chove, S: faz Sol)

R. $(C \vee S)$ *Observar que C, S são letras sentenciais (predicados zero-ários)*

h) Não chove, mas nem faz Sol nem está frio.
(F: está frio)

R. $(\neg C \wedge \neg S \wedge \neg F)$

i) João vai a praia, se o tempo estiver bom.
(j: João, P: x vai a praia, T: o tempo está bom)

R. $(T \rightarrow Pj)$ *SE o tempo estiver bom, ENTÃO João vai a praia.*

j) Se o tempo estiver bom e não fizer muito frio, João irá na praia.
(F: faz muito frio)

R. $((T \wedge \neg F) \rightarrow Pj)$

k) Se o tempo não estiver bom, então, se fizer muito frio, João não irá na praia

R. $(\neg T \rightarrow (F \rightarrow \neg Pj))$ *Aqui os parênteses são importantes, para evitar ambigüidade*

l) A Terra é um planeta, e a Lua gira em torno dela.
(t: Terra, l: Lua, P: x é um planeta, G: x gira em torno de y)

R. $(Pt \wedge Glt)$

m) Saturno é um planeta, mas não gira em torno de Alfa Centauri.
(s: Saturno, a: Alfa Centauri)

R. $(Ps \wedge \neg Gsa)$

n) A Lua não é um planeta, nem gira em torno de Saturno.

R. $(\neg Pl \wedge \neg Gls)$

o) Miau é um gato preto.
(m: Miau, G: x é um gato, P: x é preto)

R. $(Gm \wedge Pm)$

p) Miau é um gato angorá que não é preto.
(A: x é angorá)

R. $(Gm \wedge Am \wedge \neg Pm)$

q) Carla é mais alta que Paulo somente se Paulo é mais baixo que Carla.
(A: x é mais alto que y, B: x é mais baixo que y)

R. $(Acp \leftrightarrow Bpc)$

r) Carla não é mais alta que Paulo somente se for mais baixa ou tiver a mesma altura que ele. (T: x tem a mesma altura que y)

R. $(\neg Acp \leftrightarrow (Bcp \vee Tcp))$

Exercício 6.7.
Traduzir as fórmulas abaixo da linguagem do CQC para o português, sendo: (a: Antônio, b: Bernardo, c: Cláudia, d: Débora, F: x é um filósofo, G: x gosta de y, D: x detesta y).

a) Gbd

R. Bernardo gosta de Débora.

b) (Fb $\wedge$ Fd)

R. Bernardo e Débora são filósofos (OU "Bernado é filósofo e Débora é filósofa", OU "Tanto Bernardo quanto Débora são filósofos", etc. Em muitos casos, há mais de uma maneira de se fazer a tradução. Nos exercícios seguintes, vamos sugerir apenas uma).

c) (Fb $\wedge$ $\neg$Fa)

R. Bernardo é filósofo, mas Antônio não é filósofo.

d) (Fa $\wedge$ Gac)

R. Antônio é filósofo e gosta de Cláudia.

e) (Gbd $\wedge$ Ddb)

R. Bernardo gosta de Débora, mas Débora detesta Bernardo.

f) ($\neg$Gcb $\vee$ $\neg$Gbc)

R. Ou Cláudia não gosta de Bernardo, ou Bernardo não gosta de Cláudia.

g) (Gbb $\rightarrow$ Dcb)

R. Se Bernardo gosta de si próprio, então Cláudia detesta Bernardo.

h) (Gbd $\leftrightarrow$ Dcb)

R. Bernardo gosta de Débora se e somente se Cláudia destesta Débora.

i) (Dbd $\rightarrow$ (Fb $\vee$ Fd))

R. Se Bernardo detesta Débora, então ou Bernardo é filósofo, ou Débora é filósofa.

j) ((Fa $\wedge$ Fc) $\rightarrow$ (Gac $\wedge$ Gca))

R. Se Antônio e Cláudia são filósofos, então Antônio gosta de Cláudia e Cláudia gosta de Antônio.

Exercício 6.8.
Supondo que C é um predicado zero-ário, que P e Q são predicados unários, e que T e R são predicados binários, diga quais das expressões abaixo são fórmulas, e caso sejam, se são atômicas, moleculares ou gerais.

a) $\forall$x(Px $\vee$ Tay)

R. Fórmula geral (iniciada com quantificador $\forall$).

b) ($\exists$xQx)

R. Na forma em que está, é uma fórmula molecular, pois é iniciada com parêntese esquerdo. Entretanto, os parênteses são supérfluos. Se forem removidos (isto é, considerando apenas a expressão '$\exists$xQx'), a fórmula é geral (iniciada com quantificador $\exists$).

c) ($\neg$C $\rightarrow$ $\forall$xC)

R. É uma expressão, pois é uma seqüência finita de símbolos que fazem parte do alfabeto de L (ver Tabela 6.1), mas não é uma expressão bem formada, pois em '$\forall$xC' a variável do quantificador não ocorre dentro de seu escopo.

Considerando que as fórmulas são expressões bem formadas, '($\neg$C $\rightarrow$ $\forall$xC)' não é uma fórmula. Para informações adicionais, ver definições 7.3 e 7.4 em (MORTARI 2001, 101).

d) $\exists$Rax

R. É uma expressão, mas não é bem formada (o quantificador $\exists$ não é seguido de uma variável). Logo, não é uma fórmula.

e) ($\neg$Rax $\leftrightarrow$ Tab)

R. Fórmula molecular bicondicional, iniciada com parêntese esquerdo.

f) $\neg\forall$w($\neg$Rxy $\rightarrow$ (Qx $\vee$ Tzw))

R. Fórmula molecular (iniciada com símbolo de negação '$\neg$')

Exercício 6.9.
Transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, utilizando a notação sugerida.

a) Algo é branco (B: x é branco)

R. $\exists xBx$

b) Tudo é azul (A: x é azul)

R. $\forall xAx$

c) Alguma coisa não é azul.

R. $\exists x\neg Ax$ (ou $\neg\forall xAx$)

d) Algo é bonito (B: x é bonito)

R. $\exists xBx$

e) Todos são mortais (M: x é mortal)

R. $\forall xMx$

f) Nada é insubstituível (I: x é insubstituível)

R. $\neg\exists xIx$ (ou $\forall x\neg Ix$)

g) Nem tudo dura para sempre (D: x dura para sempre)

R. $\exists x\neg Dx$ (ou $\neg\forall xDx$)

h) Centauros não existem (C: x é um centauro)

R. $\neg\exists xCx$ (ou $\forall x\neg Cx$)

i) Alguma coisa não é verde (G: x é verde)

R. $\exists x\neg Gx$ (ou $\neg\forall xGx$)

j) Cada objeto é igual a si mesmo (I: x é igual a y)

R. $\forall xIxx$

k) Há objetos que não são iguais a si mesmos

R. $\exists x\neg Ixx$ (ou $\neg\forall xIxx$)

l) Nem tudo é cor-de-rosa (R: x é cor-de-rosa).

R. $\exists x \neg Rx$ (ou $\neg \forall x Rx$)

m) Nada é cor-de-rosa.

R. $\neg \exists x Rx$ (ou $\forall x \neg Rx$)

n) Alguém é mais velho que Pedro (p: Pedro, O: x é mais velho que y)

R. $\exists x Oxp$

o) Ninguém é mais velho que Pedro.

R. $\neg \exists x Oxp$ (ou $\forall x \neg Oxp$)

p) Matusalém é mais velho que alguém (m: Matusalém)

R. $\exists x Omx$

q) Matusalém é mais velho que todos.

R. $\forall x Omx$

r) Não é verdade que Matusalém é mais velho que todos.

R. $\neg \forall x Omx$

s) Alguém gosta de si mesmo (G: x gosta de y)

R. $\exists x Gxx$

t) Todos gostam de si mesmos.

R. $\forall x Gxx$

u) Ninguém gosta de Miau (m: Miau)

R. $\forall x \neg Gxm$ (ou $\neg \exists x Gxm$)

v) Alguém não gosta de si mesmo.

R. $\exists x \neg Gxx$ (ou $\neg \forall x Gxx$)

w) Não existe alguém que goste de si mesmo.

R. $\neg\exists xGxx$ (ou $\forall x\neg Gxx$)

x) Não existe alguém que não goste de si mesmo.

R. $\neg\exists x\neg Gxx$

y) Ninguém gosta mais de Paulo do que de Denise
(p: Paulo, d: Denise, L: x gosta mais de y do que de z)

R. $\neg\exists xLxpd$ (ou $\forall x\neg Lxpd$)

z) Nem todos gostam mais de Paulo do que de Denise.

R. $\exists x\neg Lxpd$

Capítulo 7 - A Síntaxe do Cálculo de Predicados (II)

Exercício 7.1.

Construa a árvore de formação para cada uma das fórmulas abaixo, e faça a lista de suas subfórmulas.

Nota: Seguem as legendas para as regras de identificação das subfórmulas imediatas que foram utilizadas nos exercícios desta seção. Para informações sobre a construção de árvores de formação, ver (MORTARI 2001, 103).

[3] Geral: A subfórmula imediata de $\forall x\alpha$ e $\exists x\alpha$ é α.

[3 $\forall$] = fórmula geral universal

[3 $\exists$] = fórmula geral existencial

[2] Molecular:

- A subfórmula imediata de $\neg\alpha$ é α.

[2 $\neg$] = fórmula molecular negação

- As subfórmulas imediatas de $(\alpha \wedge \beta)$, $(\alpha \vee \beta)$, $(\alpha \rightarrow \beta)$ e $(\alpha \leftrightarrow \beta)$ são α e β.

[2 $\wedge$] = fórmula molecular conjunção

[2 $\vee$] = fórmula molecular disjunção

[2 $\rightarrow$] = fórmula molecular condicional

[2 $\leftrightarrow$] = fórmula molecular bicondicional

[1] Atômica: não possui subfórmula imediata.

Constante de predicado seguida de constante individual ou variável individual

a) $\neg Fa \wedge Gb$

Árvore de formação

$(\neg Fa \wedge Gb)$ [2 $\wedge$]

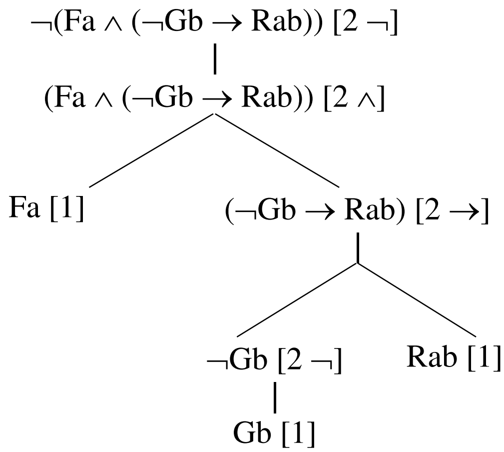
$\neg Fa$ [2 $\neg$] Gb [1]

Fa [1]

Lista de subfórmulas de $(\neg Fa \wedge Gb)$: L = $\{\neg Fa, Gb, Fa\}$

b) $\neg(Fa \wedge (\neg Gb \rightarrow Rab))$

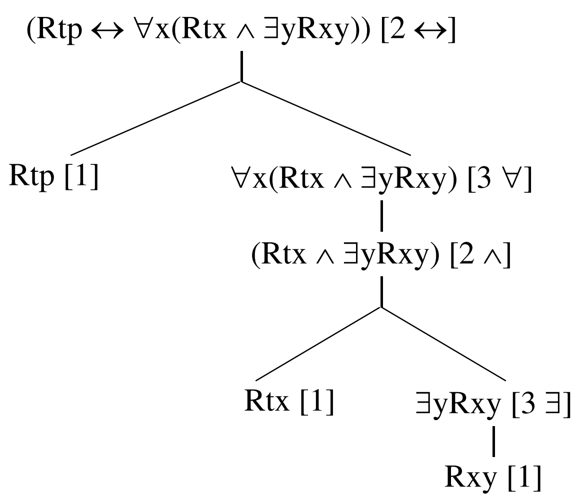
Árvore de formação



Subfórmulas: $L = \{(Fa \wedge (\neg Gb \rightarrow Rab)), Fa, (\neg Gb \rightarrow Rab), \neg Gb, Rab, Gb\}$

c) $Rtp \leftrightarrow \forall x(Rtx \wedge \exists yRxy)$

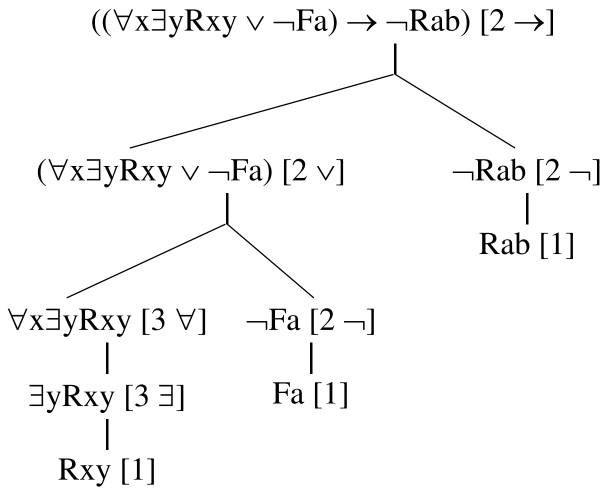
Árvore de formação



Subfórmulas: $L = \{Rtp, \forall x(Rtx \wedge \exists yRxy), (Rtx \wedge \exists yRxy), Rtx, \exists yRxy, Rxy\}$

d) $(\forall x \exists y Rxy \vee \neg Fa) \rightarrow \neg Rab$

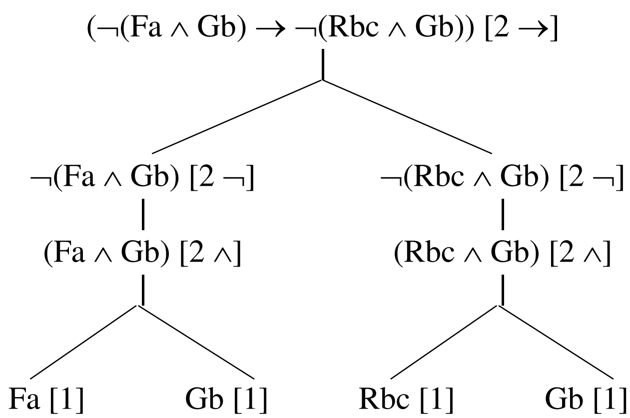
Árvore de formação



Subfórmulas: $L = \{(\forall x \exists y Rxy \vee \neg Fa), \neg Rab, \forall x \exists y Rxy, \neg Fa, Rab, \exists y Rxy, Fa, Rxy\}$

e) $\neg(Fa \wedge Gb) \rightarrow \neg(Rbc \wedge Gb)$

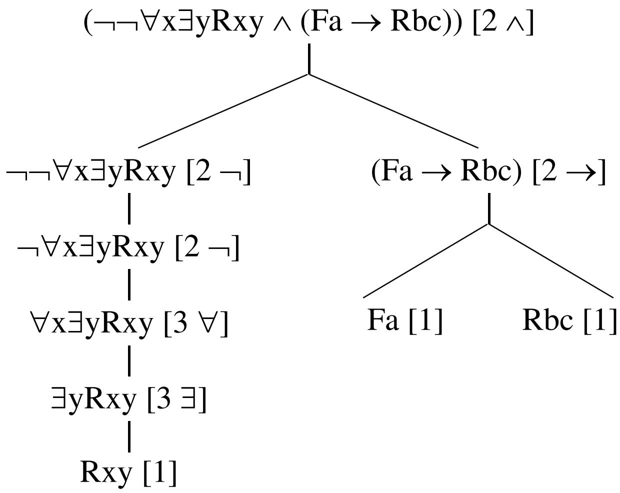
Árvore de formação



Subfórmulas: $L = \{\neg(Fa \wedge Gb), \neg(Rbc \wedge Gb), (Fa \wedge Gb), (Rbc \wedge Gb), Fa, Gb, Rbc\}$

f) $\neg\neg\forall x\exists yRxy \wedge (Fa \rightarrow Rbc)$

Árvore de formação



Lista de subfórmulas: L = $\{\neg\neg\forall x\exists yRxy, (Fa \rightarrow Rbc), \neg\forall x\exists yRxy, Fa, Rbc, \forall x\exists yRxy, \exists yRxy, Rxy\}$

Exercício 7.2.
Diga se as fórmulas abaixo são sentenças ou não, qual é o escopo de cada quantificador e quais são as variáveis que ocorrem livres ou ligadas nelas.

a) Fx

R. A variável x ocorre livre em Fx, pois não está no escopo de nenhum quantificador. Logo, a fórmula Fx é aberta. Sendo aberta, Fx não é uma sentença (MORTARI 2001, 105).

b) ∀xFx

R. O escopo de ∀x é '∀xFx'. Na fórmula existem duas ocorrências da variável x:
- A ocorrência de x em ∀x é ligada, pois x faz parte do quantificador universal.
- A ocorrência de x em Fx é ligada, pois Fx está no escopo do quantificador.
Logo, a fórmula é fechada, pois não tem ocorrências de variáveis livres.
Sendo uma fórmula fechada, ∀xFx é uma sentença.

c) Pa

R. A fórmula não possui variáveis individuais (a é uma constante individual), logo, não pode ter ocorrência livre de variáveis. Logo, Pa é uma fórmula fechada (sentença).

d) ∀y¬Py

R. O escopo de ∀y é '∀y¬Py. Na fórmula existem duas ocorrências da variável y:
- A ocorrência de y em ∀y é ligada, pois y faz parte do quantificador universal.
- A ocorrência de y em ¬Py é ligada, pois ¬Py está no escopo do quantificador.

Logo, a fórmula é fechada, pois não tem ocorrências de variáveis livres.
Sendo uma fórmula fechada, ∀y¬Py é uma sentença.

e) ¬∀xFx ∨ Ga

R. O escopo de ∀x é '∀xFx'. Observar que os quantificadores agem apenas sobre a fórmula que se inicia imediatamente *após* a variável do quantificador, de modo que o símbolo de negação (¬) que precede o quantificador não faz parte do seu escopo. Analogamente, o símbolo de disjunção (∨) e a fórmula Ga também estão fora do escopo de ∀x.

Na fórmula geral ∀xFx existem duas ocorrências da variável x:
- A ocorrência de x em ∀x é ligada, pois x faz parte do quantificador universal.
- A ocorrência de x em Fx é ligada, pois Fx está no escopo do quantificador.

A fórmula atômica Ga não possui variáveis individuais.

Assim, a fórmula molecular (¬∀xFx ∨ Ga) é fechada (não tem variáveis livres).
Sendo uma fórmula fechada, é uma sentença.

f) $\forall xPx \rightarrow Qb$

R. O escopo de $\forall x$ é '$\forall xPx$'.
Na fórmula geral $\forall xPx$ existem duas ocorrências da variável x:
- A ocorrência de x em $\forall x$ é ligada, pois x faz parte do quantificador universal.
- A ocorrência de x em Px é ligada, pois Px está no escopo do quantificador.

A fórmula atômica Qb é fechada por definição (não possui variáveis individuais). Assim, a fórmula molecular ($\forall xPx \rightarrow Qb$) é fechada (não tem variáveis livres). Sendo uma fórmula fechada, é uma sentença.

g) $\forall x(\forall yRxy \rightarrow Ryx)$

R. O escopo de $\forall x$ é '$\forall x(\forall yRxy \rightarrow Ryx)$', e o escopo de $\forall y$ é '$\forall yRxy$'.
- A ocorrência de x em $\forall x$ é ligada (parte do quantificador).
- A ocorrência de x em Rxy é ligada (parte do escopo do quantificador $\forall x$).
- A ocorrência de x em Ryx é ligada (parte do escopo do quantificador $\forall x$).
- A ocorrência de y em $\forall y$ é ligada (parte do quantificador).
- A ocorrência de y em Rxy é ligada (parte do escopo do quantificador $\forall y$).
- A ocorrência de y em Ryx é livre (fora do escopo dos quantificadores).

A fórmula possui uma ocorrência livre de uma variável (y), logo, é aberta. Sendo uma fórmula aberta, não é uma sentença.

h) $\exists x\forall yGxy \rightarrow \forall y\exists xGyx$

R. Temos quatro quantificadores, vamos analisar o alcance de cada um deles.
- O escopo de $\exists x$ em $\exists x\forall yGxy$ é '$\exists x\forall yGxy$ '
- O escopo de $\forall y$ em $\exists x\forall yGxy$ é '$\forall yGxy$'.
- O escopo de $\forall y$ em $\forall y\exists xGyx$ é '$\forall y\exists xGyx$'.
- O escopo de $\exists x$ em $\forall y\exists xGyx$ é '$\exists xGyx$ '

Graficamente,

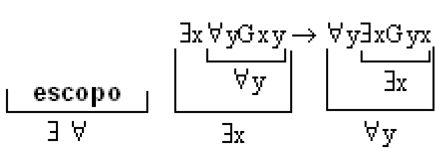


Figura 7.1

Em todos os casos, todas as ocorrências das variáveis x e y são ligadas. Assim, a fórmula molecular condicional $\exists x\forall yGxy \rightarrow \forall y\exists xGyx$) é fechada (não tem variáveis livres). Sendo uma fórmula fechada, é uma sentença.

i) $\forall xFx \lor \neg Fx$

R. O escopo de $\forall x$ é '$\forall xFx$'.
Na fórmula geral $\forall xFx$ existem duas ocorrências da variável x:
- A ocorrência de x em $\forall x$ é ligada (x faz parte do quantificador).
- A ocorrência de x em Fx é ligada (Fx está no escopo do quantificador).
Porém, a ocorrência de x em $\neg Fx$ é livre (não quantificada). Assim, a fórmula molecular ($\forall xFx \lor \neg Fx$) é aberta (possui variável livre). Sendo uma fórmula aberta, não é uma sentença.

j) $Pa \rightarrow (Pa \rightarrow Pa)$

R A fórmula não possui variáveis individuais (apenas constantes), logo, não pode possuir variáveis livres, e portanto é fechada por definição (sentença).

k) $Ax \rightarrow \forall xAx$

R. O escopo de $\forall x$ é '$\forall xAx$'.
Na fórmula geral $\forall xAx$ existem duas ocorrências da variável x:
- A ocorrência de x em $\forall x$ é ligada (parte do quantificador).
- A ocorrência de x em Ax é ligada (escopo do quantificador).
Porém, há uma outra ocorrência de x em Ax, que é livre (não quantificada). Assim, a fórmula molecular condicional ($Ax \rightarrow \forall xAx$) é aberta (possui variável livre). Sendo uma fórmula aberta, não é uma sentença.

l) $(\exists x(Qa \leftrightarrow Qx) \leftrightarrow Qa) \leftrightarrow Qx$

R. O escopo de $\exists x$ é '$\exists x(Qa \leftrightarrow Qx)$'.
Na fórmula geral $\exists x(Qa \leftrightarrow Qx)$ existem duas ocorrências da variável x:
- A ocorrência de x em $\exists x$ é ligada (parte do quantificador).
- A ocorrência de x em Qx é ligada (escopo do quantificador).
A fórmula atômica Qa (fora do escopo de $\exists x$) é fechada, não possui variáveis individuais. Porém, há uma outra ocorrência de x na fórmula Qx (fora do escopo de $\exists x$) que é livre (não quantificada). Assim, a fórmula molecular bicondicional ($(\exists x(Qa \leftrightarrow Qx) \leftrightarrow Qa) \leftrightarrow Qx$) é aberta (possui variável livre). Sendo uma fórmula aberta, não é uma sentença.

m) $\neg Pa \land \neg Qb$

R A fórmula não possui variáveis individuais (apenas constantes), logo, não pode possuir variáveis livres, e portanto é fechada por definição (sentença).

n) $\forall x \exists y \forall z((Sxyz \land Szya) \rightarrow Cx)$

R. Temos três quantificadores, vamos analisar o alcance de cada um deles.
- O escopo de $\forall x$ é '$\forall x \exists y \forall z((Sxyz \land Szya) \rightarrow Cx)$'
- O escopo de $\exists y$ é '$\exists y \forall z((Sxyz \land Szya) \rightarrow Cx)$'.
- O escopo de $\forall z$ é '$\forall z((Sxyz \land Szya) \rightarrow Cx)$'.

Graficamente,

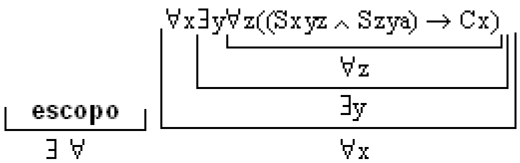


Figura 7.2

Todas as ocorrências de x são ligadas por $\forall x$.
Todas as ocorrências de y são ligadas por $\exists y$.
Todas as ocorrências de z são ligadas por $\forall z$.

Logo, a fórmula não tem variáveis livres, e portanto é fechada (sentença).

Exercício 7.3.
Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida.

a) Alguns homens não são sinceros.
(H: x é homem, S: x é sincero).

R. $\exists x(Hx \wedge \neg Sx)$ ou $\neg\forall x(Hx \rightarrow Sx)$

b) Todas as mulheres são lindas.
(M: x é mulher, L: x é linda)

R. $\forall x(Mx \rightarrow Lx)$ ou $\neg\exists x(Mx \wedge \neg Lx)$

c) Nenhum peixe é anfíbio.
(P: x é um peixe, A: x é anfíbio)

R. $\forall x(Px \rightarrow \neg Ax)$ ou $\neg\exists x(Px \wedge Ax)$

d) Alguns metais são líquidos.
(M: x é um metal, S: x é líquido)

R. $\exists x(Mx \wedge Sx)$ ou $\neg\forall x(Mx \rightarrow \neg Sx)$

e) Nenhum animal é vegetal.
(A: x é um animal, T: x é um vegetal)

R. $\forall x(Ax \rightarrow \neg Tx)$ ou $\neg\exists x(Ax \wedge Tx)$

f) Nem todos os animais são invertebrados.
(I: x é invertebrado).

R. $\exists x(Ax \wedge \neg Ix)$ ou $\neg\forall x(Ax \rightarrow Ix)$

g) Alguns papagaios não são vermelhos.
(P: x é um papagaio, R: x é vermelho)

R. $\exists x(Px \wedge \neg Rx)$ ou $\neg\forall x(Px \rightarrow Rx)$

h) Nenhum papagaio é vermelho.
(P: x é um papagaio, R: x é vermelho)

R. $\forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$ ou $\neg\exists x(Px \wedge Rx)$

i) Há ao menos um papagaio vermelho.
(P: x é um papagaio, R: x é vermelho)

R. $\exists x(Px \wedge Rx)$ ou $\neg\forall x(Px \rightarrow \neg Rx)$

j) Há ao menos um papagaio, e ao menos uma coisa vermelha.

R. $\exists xPx \wedge \exists xRx$

k) Alguns números naturais são ímpares.
(N: x é um número natural, I: x é ímpar)

R. $\exists x(Nx \wedge Ix)$ ou $\neg\forall x(Nx \rightarrow \neg Ix)$

l) Tudo que é azul é bonito.
(A: x é azul, B: x é bonito)

R. $\forall x(Ax \rightarrow Bx)$ ou $\neg\exists x(Ax \wedge \neg Bx)$

m) Todo poeta é romântico.
(P: x é um poeta, R: x é romântico)

R. $\forall x(Px \rightarrow Rx)$ ou $\neg\exists x(Px \wedge \neg Rx)$

n) Nenhum poeta romântico vende muitos livros.
(P: x é um poeta, R: x é romântico, L: x vende muitos livros).

R. $\forall x((Px \wedge Rx) \rightarrow \neg Lx)$ ou $\neg\exists x(Px \wedge Rx \wedge Lx)$

o) Qualquer pessoa que seja persistente pode aprender lógica.
(P: x é uma pessoa, T: x é persistente, L: x pode aprender lógica)

R. $\forall x((Px \wedge Tx) \rightarrow Lx)$

p) Há crianças que gostam de brincar.
(C: x é uma criança, G: x gosta de brincar)

R. $\exists x(Cx \wedge Gx)$

q) Toda criança gosta de brincar.
(C: x é uma criança, G: x gosta de brincar)

R. $\forall x(Cx \rightarrow Gx)$

r) Toda criança travessa gosta de brincar.
(C: x é uma criança, T: x é travessa, G: x gosta de brincar)

R. $\forall x((Cx \wedge Tx) \rightarrow Gx)$

s) Toda criança travessa gosta de brincar e de ir ao cinema.
(C: x é uma criança, T: x é travessa, G: x gosta de brincar, K: x gosta de cinema)

R. $\forall x((Cx \wedge Tx) \rightarrow (Gx \wedge Kx))$

t) Qualquer amigo de Pedro é amigo de João.
(p: Pedro, j: João, A: x é amigo de y)

R. $\forall x(Axp \rightarrow Axj)$

u) Nem todos os espiões são mais perigosos que Bóris.
(b: Bóris, S: x é espião, D: x é mais perigoso que y)

R. $\exists x(Sx \wedge \neg Dxb)$ ou $\neg\forall x(Sx \rightarrow Dxb)$

v) Nenhum espião é mais perigoso que Natasha.
(n: Natasha, S: x é espião, D: x é mais perigoso que y)

R. $\forall x(Sx \rightarrow \neg Dxn)$ ou $\neg\exists x(Sx \wedge Dxn)$

w) Qualquer um que seja mais perigoso que Natasha é mais perigoso que Bóris.
(b: Bóris, n: Natasha, D: x é mais perigoso que y)

R. $\forall x(Dxn \rightarrow Dxb)$

x) Nenhum espião que seja mais perigoso que Natasha é mais perigoso que Bóris.
(b: Bóris, n: Natasha, S: x é espião, D: x é mais perigoso que y)

R. $\forall x((Sx \wedge Dxn) \rightarrow \neg Dxb)$ ou $\neg\exists x(Sx \wedge Dxn \wedge Dxb)$

y) Alguém é mais perigoso do que Bóris e Natasha.
(b: Bóris, n: Natasha, D: x é mais perigoso que y)

R. $\exists x(Dxb \wedge Dxn)$

z) Há um espião que não é mais perigoso do que Bóris e nem do que de Natasha.
(b: Bóris, n: Natasha, S: x é espião, D: x é mais perigoso que y)

R. $\exists x(Sx \wedge \neg Dxb \wedge \neg Dxn)$ (Nesta tradução, há *pelo menos um* espião que não é mais perigoso do que Bóris e nem do que de Natasha Se for *exatamente um*, é preciso utilizar a relação de identidade para uma tradução adequada).

Exercício 7.4.
Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida.
(m: Miau, G: x gosta de y, A: x ama y).

a) Todos amam alguém.

R. $\forall x \exists y Axy$

b) Alguém ama alguém

R. $\exists x \exists y Axy$

c) Todos são amados por alguém

R. $\forall x \exists y Ayx$

d) Alguém é amado por todos

R. $\exists x \forall y Ayx$

e) Todos são amados por todos

R. $\forall x \forall y Axy$

f) Alguém não ama todos

R. $\exists x \neg \forall y Axy$

g) Alguém não é amado por todos

R. $\exists x \neg \forall y Ayx$

h) Se todos gostam de Miau, Miau gosta de todos

R. $\forall x Gxm \rightarrow \forall x Gmx$
(Se todos gostam de Miau, ENTÃO Miau gosta de todos)
(SE $\forall x Gxm$, ENTÃO $\forall x Gmx$)
($\forall x Gxm \rightarrow \forall x Gmx$)

i) Alguém gosta de alguém, se Miau gosta de todos

R. $\forall x Gmx \rightarrow \exists x \exists y Gxy$
(SE Miau gosta de todos, ENTÃO alguém gosta de alguém)
(SE $\forall x Gmx$, ENTÃO $\exists x \exists y Gxy$)
($\forall x Gmx \rightarrow \exists x \exists y Gxy$)

j) Todos gostam de Miau, mas Miau não gosta de ninguém

R. $\forall xGxm \wedge \forall x\neg Gmx$
(Observar que o "mas" tem o sentido de "E")

k) Todos amam alguém que não os ama.

R. $\forall x\exists y(Axy \wedge \neg Ayx)$
(Para todo x, existe um y tal que x ama y, e y não ama x)

l) Todos amam alguém que não ama ninguém

R. $\forall x\exists y(Axy \wedge \forall z\neg Ayz)$
Tradução complicada ... o "que" sugere que o "alguém que é amado por todos" é o *mesmo* "alguém que não ama ninguém", simbolizado pela variável y (o escopo dos quantificadores é importante aqui). A variável z o quantificador universal $\forall z$ foram introduzidos para dar conta do "ninguém".

m) Todos amam alguém, mas ninguém ama todos.

R. $\forall x\exists yAxy \wedge \neg\exists x\forall yAxy$
(Observar que o "mas" tem o sentido de "E")

n) Ou alguém é amado por todos, ou alguém ama todos e alguém não ama ninguém.

R. $\exists x\forall yAyx \vee ((\exists x\forall yAxy) \wedge (\exists x\forall y\neg Axy))$

Exercício 7.5.
Traduza as sentenças abaixo para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida.

a) Nenhum amigo de Pedro é amigo de João.
(p: Pedro, j: João, A: x é amigo de y)

R. $\forall x(Axp \rightarrow \neg Axj)$ ou $\neg\exists x(Axp \wedge Axj)$

b) Qualquer amigo de Pedro que não seja um político é amigo de João.
(p: Pedro, j: João, A: x é amigo de y, P:x é um político)

R. $\forall x((Axp \wedge \neg Px) \rightarrow Axj)$

c) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de João.
(p: Pedro, j: João, c: Carlos, A: x é amigo de y)

R. $\forall x((Axp \vee Axc) \rightarrow Axj)$

d) Qualquer amigo de Pedro é amigo de algum amigo de João.

R. $\forall x(Axp \rightarrow \exists y(Axy \wedge Ayj))$

e) Qualquer amigo de Pedro ou Carlos é amigo de qualquer amigo de João.
(p: Pedro, j: João, c: Carlos, A: x é amigo de y)

R. $\forall x((Axp \vee Axc) \rightarrow \forall y(Ayj \rightarrow Axy))$

f) Nenhuma mulher é feia, mas algumas mulheres não são bonitas.
(M: x é uma mulher, F: x é feia, B: x é bonita).

R. $\forall x(Mx \rightarrow \neg Fx) \wedge \exists y(My \wedge \neg By)$
(Observar que o "mas" tem o sentido de "E")

g) Se todos os humanos são imortais, então Sócrates é imortal ou Sócrates não é humano.
(s: Sócrates, H: x é humano, I:x é imortal)

R. $\forall x(Hx \rightarrow Ix) \rightarrow (Is \vee \neg Hs)$

h) Nem todas as aves voam, se Tweety não voa.
(t: Tweety, A: x é uma ave, F:x voa)

R. $\neg Ft \rightarrow \exists x(Ax \wedge \neg Fx)$ (se Tweety não voa, então existe algo que é uma ave e não voa).
Ou, alternativamente,
$\neg Ft \rightarrow \neg\forall x(Ax \rightarrow Fx)$ (se Tweety não voa, então é falso que todas as aves voam).

i) Todo fazendeiro tem um burro no qual ele bate.
(F: x é um fazendeiro, B: x é um burro, T: x pertence a y: H:x bate em y)

R. $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(By \wedge Tyx \wedge Hxy))$

$\forall x$	(Fx	$\rightarrow$	$\exists y$	(By	$\wedge$	Tyx	$\wedge$	Hxy))
Todo x:	Se x é fazendeiro	então	Existe um y tal que	y é um burro	e	y pertence a x	e	x bate em y

j) Algum fazendeiro tem um burro no qual ele não bate.
(F: x é um fazendeiro, B: x é um burro, T: x pertence a y: H:x bate em y)

R. $\exists x(Fx \wedge \exists y(By \wedge Tyx \wedge \neg Hxy))$

k) Todo homem ama uma mulher que o ama.
(H: x é homem, M:x é mulher, A: x ama y)

R. $\forall x(Hx \rightarrow \exists y(My \wedge Axy \wedge Ayx))$

l) Nem todo homem ama uma mulher que o ama.
(H: x é homem, M:x é mulher, A: x ama y)

R. $\exists x(Hx \wedge \exists y(My \wedge Ayx \wedge \neg Axy))$ ou $\neg\forall x(Hx \rightarrow \exists y(My \wedge (Axy \wedge Ayx)))$

m) Todo homem ama uma mulher que ama alguém.
(H: x é homem, M:x é mulher, A: x ama y)

R. $\forall x(Hx \rightarrow \exists y(My \wedge Axy \wedge \exists zAyz))$
Tradução complicada ... a variável z e o quantificador existencial $\exists z$ foram utilizados para dar conta do "alguém". Não temos garantia que o "alguém" que a mulher ama é o mesmo homem que a ama. Ela pode ser amada por João e amar José.

n) Se todos os filósofos espertos são cínicos e apenas mulheres são filósofos espertos, então, se há algum filósofo esperto, alguma mulher é cínica.
(F:x é um filósofo, M: x é uma mulher, E:x é esperto, C:x é cínico)

R. $(\forall x((Fx \wedge Ex) \rightarrow Cx) \wedge \forall x((Fx \wedge Ex) \rightarrow Mx)) \rightarrow (\exists x(Fx \wedge Ex) \rightarrow \exists x(Mx \wedge Cx))$

Nota: a solução do gabarito[2] para o exercício (n) é ligeiramente diferente:

Rg. $(\forall x((Fx \wedge Cx) \rightarrow Ex) \wedge \forall x((Fx \wedge Ex) \rightarrow Mx)) \rightarrow (\exists x(Fx \wedge Ex) \rightarrow \exists x(Mx \wedge Cx))$

[2] http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ7.pdf

Exercício 7.6.

Traduza as sentenças abaixo (algumas são um pouco complicadas!) para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida: (a: Alice, b: Beatriz, c: Cláudia, L:x é um livro, P: x é um psicólogo, F:x é um filósofo, G: x gosta de y, D:x dá y para z).

a) Alice gosta de algum filósofo que gosta dela

R. $\exists x(Fx \wedge Gax \wedge Gxa)$

Informalmente: existe um x tal que x é filósofo e alice gosta de x e x gosta de Alice

b) Todo filósofo gosta de algum livro

R. $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Ly \wedge Gxy))$

Informalmente: para todo x, se x é filósofo, então existe um y que é um livro e x gosta de y

c) Há um livro do qual todos os filósofos gostam.

R. $\exists x(Lx \wedge \forall y(Fy \rightarrow Gyx))$

Informalmente: existe um x que é um livro e para todo y, se y é filósofo, então y gosta de x.

d) Os filósofos gostam de todos os livros

R. $\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow Gxy))$ ou $\forall x\forall y((Fx \wedge Ly) \rightarrow Gxy)$

Informalmente: para todo x, se x é um filósofo, então, para todo y, se y é um livro, então x gosta de y. Observar que "Os" tem o sentido de "Todos" (todos os filófosos gostam de todos os livros, ou qualquer filósofo gosta de qualquer livro).

e) Há um livro do qual nenhum psicólogo gosta.

R. $\exists x(Lx \wedge \forall y(Py \rightarrow \neg Gyx))$

Informalmente: Existe um x tal que x é um livro, E, para todo y, se y é um psicólogo, então é falso que y goste de x.

f) Nenhum psicólogo gosta de livros.

R. $\forall x(Px \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow \neg Gxy))$ ou $\forall x(Px \rightarrow \neg\exists y(Ly \wedge Gxy))$

Informalmente: Para todo x, se x é um psicólogo, então, para todo y, se y é um livro, é falso que x goste de y, OU, para todo x, se x é um psicólogo, então é falso que exista um y tal que y é um livro e x goste de y. Observar que a sentença tem o sentido "nenhum psicólogo gosta de *nenhum* livro".

g) Filósofos não gostam de psicólogos.

R. $\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Py \rightarrow \neg Gxy))$ ou $\forall x(Fx \rightarrow \neg\exists y(Py \wedge Gxy))$

Informalmente: Para todo x, se x é um filósofo, então, para todo y, se y é um psicólogo, é falso que x goste de y, OU, para todo x, se x é um filósofo, então é falso que exista um y tal que y é um filósofo e x goste de y. Outra solução (gabarito): $\forall x\forall y((Fx \wedge Py) \rightarrow \neg Gxy)$.

h) Um filósofo deu um livro para Alice.

R. $\exists x(Fx \wedge \exists y(Ly \wedge Dxya))$

Informalmente: Existe um x tal que x é um filósofo E existe um y tal que y é um livro E x dá y para a (a denota Alice). Aqui, "um" foi interpretado como "pelo menos um". Se for no sentido de *exatamente um* filósofo deu *exatamente um* livro para Alice, é preciso utilizar a relação de identidade para uma tradução adequada.

i) Um filósofo deu um livro para Alice, do qual ela não gostou.

R. $\exists x(Fx \wedge \exists y(Ly \wedge Dxya \wedge \neg Gay))$

Informalmente: Existe um x tal que x é um filósofo E existe um y tal que y é um livro E x dá y para a (a denota Alice) E é falso que a (Alice) gosta de y. Novamente, "um" foi interpretado no sentido mais usual de "pelo menos um", não no sentido mais específico de "exatamente" ou "no máximo um".

j) Alice e Beatriz deram um livro para Cláudia.

R. $\exists x(Lx \wedge Daxc \wedge Dbxc)$

A sentença é ambígua. Alice e Beatriz deram juntas o mesmo livro, ou cada uma deu um livro diferente ? Na tradução acima, ambas deram o mesmo livro para Cláudia. Já na versão seguinte, cada uma deu um livro *diferente*. Neste caso, temos que utilizar a relação de identidade (MORTARI 2001, capítulo 16): $\exists x(Lx \wedge Daxc) \wedge \exists y(Ly \wedge Dbyc) \wedge (x \neq y)$

k) Um filósofo e um psicólogo deram um livro para Beatriz.

R. $\exists x\exists y\exists z(Fx \wedge Py \wedge Lz \wedge Dxzb \wedge Dyzb)$

Aqui também temos diferentes interpretações. Um filósofo e um psicólogo deram o mesmo livro, ou cada um deu um livro diferente ? Na tradução acima, ambos deram o mesmo livro para Cláudia. Já na versão seguinte, o filósofo deu um livro e o psicólogo deu *outro* livro.
$\exists x\exists y(Fx \wedge Ly \wedge Dxyb) \wedge \exists x\exists z(Px \wedge Lz \wedge Dxzb) \wedge (x \neq z)$

Solução do gabarito: $\exists x(Lx \wedge (\exists y(Fy \wedge Dyxb) \wedge \exists y(Py \wedge Dyxb)))$

l) Nem os filósofos nem os psicólogos gostam de si mesmos.

R. $\forall x((Fx \lor Px) \rightarrow \neg Gxx)$ ou $\forall x(Fx \rightarrow \neg Gxx) \land \forall x(Px \rightarrow \neg Gxx)$
Informalmente: Para todo x, se x é filósofo OU psicólogo, então é falso que x goste de x.

m) Se algum psicólogo gosta de Beatriz, então algum filósofo também gosta.

R. $\exists x(Px \land Gxb) \rightarrow \exists x(Fx \land Gxb)$

Informalmente: SE (existe pelo menos um x que é psicólogo e gosta de Beatriz), ENTÃO (existe pelo menos um x que é filósofo e gosta de Beatriz). Observar que não foram utilizadas variáveis diferentes (x, y) para "filósofos" e "psicólogos", pois pode ser o mesmo indivíduo (alguém que é filósofo e psicólogo e gosta de Beatriz).

n) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo gosta desta mesma pessoa.

R. $\forall x(Px \rightarrow \forall y(Gxy \rightarrow \exists z(Fz \land Gzy)))$
Sentença complicada de traduzir sem usar a relação de identidade ...

$\forall x(Px$	$\rightarrow$	$\forall y(Gxy$	$\rightarrow$	$\exists z(Fz$	$\land$	$Gzy)))$
Para todo x, se x é psicólogo	então	Para todo y, se x gosta de y	então	Existe um z que é filósofo	e	z também gosta de y

Solução do gabarito: $\forall x(\exists y(Py \land Gyx) \rightarrow \exists y(Fy \land Gyx))$

o) Se algum psicólogo gosta de alguém, então algum filósofo também gosta de alguém.

R. $\exists x(Px \land \exists yGxy) \rightarrow \exists x(Fx \land \exists yGxy)$

p) Ou os filósofos gostam de todos os livros, ou não gostam de nenhum.

R. $\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow Gxy) \lor \forall y(Ly \rightarrow \neg Gxy))$
Observar que toda a expressão está no escopo de $\forall x$.
Solução do gabarito: $\forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow Gxy)) \lor \forall x(Fx \rightarrow \forall y(Ly \rightarrow \neg Gxy))$

q) Alice e Beatriz gostam de todos os filósofos, se algum filósofo dá um livro para alguém.

R. $\exists x\exists y\exists z(Fx \land Ly \land Dxyz) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow (Gax \land Gbx))$
SE (algum filósofo dá um livro para alguém), ENTÃO (Alice e Beatriz gostam de todos os filósofos)
Solução do gabarito: $\exists x(Fx \land \exists y\exists z(Ly \land Dxyz)) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow (Gax \land Gbx))$

r) Todos gostam dos filósofos, se todo filósofo dá algum livro para alguém.

R. $\forall x(Fx \rightarrow \exists y(Ly \land \exists zDxyz)) \rightarrow \forall x(Fx \rightarrow \forall yGyx)$
SE (todo filósofo dá um livro para alguém), ENTÃO (todos gostam de todos os filósofos)
Solução do gabarito: $\forall x((Fx \land \exists y\exists z(Ly \land Dxyz)) \rightarrow \forall yGyx)$

Capítulo 8 - Interpretações

Sem exercícios.

Capítulo 9 - Valorações

Exercício 9.1.

Supondo que A, B, C e D têm valores V, F, F e V, respectivamente, numa certa valoração **v**, calcule o valor em **v** das fórmulas abaixo:

Nos exercícios seguintes, a notação "Ve" denota verdadeiro (V), "Fa" denota falso (F), e α representa a fórmula cujo valor de verdade se pretende investigar na valoração dada.

a) $\neg A \vee B$

$\neg(\text{Ve}) \vee (\text{Fa})$
Fa $\vee$ Fa
Fa R. $\mathbf{v}(\alpha) = F$ (a fórmula é falsa na valoração **v**)

b) $\neg B \to (A \vee B)$

$\neg(\text{Fa}) \to (\text{Ve} \vee \text{Fa})$
Ve $\to$ Ve
Ve R. $\mathbf{v}(\alpha) = V$

c) $(C \vee A) \leftrightarrow \neg\neg C$

$(\text{Fa} \vee \text{Ve}) \leftrightarrow \neg\neg(\text{Fa})$
Ve $\leftrightarrow \neg(\text{Ve})$
Ve $\leftrightarrow$ Fa
Fa R. $\mathbf{v}(\alpha) = F$

d) $A \vee (A \to B)$

Ve $\vee$ (Ve $\to$ Fa)
Ve $\vee$ Fa
Ve R. $\mathbf{v}(\alpha) = V$

e) $(D \vee \neg A) \to \neg C$

$(\text{Ve} \vee \neg(\text{Ve})) \to \neg\text{Fa}$
(Ve $\vee$ Fa) $\to$ Ve *condicional com conseqüente V é V, poderíamos parar por aqui...*
Ve $\to$ Ve
Ve R. $\mathbf{v}(\alpha) = V$

f) $\neg(A \wedge B) \to \neg(C \wedge B)$

$\neg(Ve \wedge Fa) \to \neg(Fa \wedge Fa)$
$\neg(Fa) \to \neg(Fa)$
$Ve \to Ve$
Ve R. $\mathbf{v}(\alpha) = V$

g) $\neg\neg D \wedge \neg(A \to A)$

$\neg\neg(Ve) \wedge \neg(Ve \to Ve)$
$\neg(Fa) \wedge \neg(Ve)$
$Ve \wedge Fa$
Fa R. $\mathbf{v}(\alpha) = F$

h) $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$

$(\neg(Ve) \vee Fa) \leftrightarrow \neg(Ve \wedge \neg(Fa))$
$(Fa \vee Fa) \leftrightarrow \neg(Ve \wedge Ve)$
$Fa \leftrightarrow \neg(Ve)$
$Fa \leftrightarrow Fa$
Ve R. $\mathbf{v}(\alpha) = V$

Exercício 9.2.
Construa tabelas de verdade para as fórmulas do exercício 9.1.

Nota: Como referência para a solução dos exercícios, reproduzimos abaixo as tabelas de verdade dos operadores lógicos (¬, ∧, ∨, →, ↔).

p	¬p
V	F
F	V

p	q	(p ∧ q)	(p ∨ q)	(p → q)	(p ↔ q)
V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	V	V

Tabela 9.1

a) ¬A ∨ B

A	B	¬A	¬A ∨ B
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

b) ¬B → (A ∨ B)

A	B	¬B	A ∨ B	¬B → (A ∨ B)
V	V	F	V	V
V	F	V	V	V
F	V	F	V	V
F	F	V	F	F

c) (C ∨ A) ↔ ¬¬C

A	C	C ∨ A	¬C	¬¬C	(C ∨ A) ↔ ¬¬C
V	V	V	F	V	V
V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V

d) A ∨ (A → B) (tautologia)

A	B	A → B	A ∨ (A → B)
V	V	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	F	V	V

e) $(D \vee \neg A) \rightarrow \neg C$

A	**C**	**D**	**$\neg A$**	**$D \vee \neg A$**	**$\neg C$**	**$(D \vee \neg A) \rightarrow \neg C$**
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	V

f) $\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg(C \wedge B)$

A	**B**	**C**	**$A \wedge B$**	**$\neg(A \wedge B)$**	**$C \wedge B$**	**$\neg(C \wedge B)$**	**$\neg(A \wedge B) \rightarrow \neg(C \wedge B)$**
V	V	V	V	F	V	F	V
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	V	F	V	F	V	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	F	V	F	V	V

g) $\neg\neg D \wedge \neg(A \rightarrow A)$ (contradição)

A	**D**	**$\neg D$**	**$\neg\neg D$**	**$A \rightarrow A$**	**$\neg(A \rightarrow A)$**	**$\neg\neg D \wedge \neg(A \rightarrow A)$**
V	V	F	V	V	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	F	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F

h) $(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$ (tautologia)

A	**C**	**$\neg A$**	**$\neg A \vee C$**	**$\neg C$**	**$(A \wedge \neg C)$**	**$\neg(A \wedge \neg C)$**	**$(\neg A \vee C) \leftrightarrow \neg(A \wedge \neg C)$**
V	V	F	V	F	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	F	V	V

Exercício 9.3.
Determine se as fórmulas seguintes são tautologias, contradições ou contingêcias.

a) $\neg\neg A \leftrightarrow (A \vee A)$

A	**$\neg$A**	**$\neg\neg$A**	**A $\vee$ A**	**$\neg\neg$A $\leftrightarrow$ (A $\vee$ A)**
V	F	V	V	V
F	V	F	F	V

R. Tautologia

b) $B \vee \neg(B \wedge C)$

B	**C**	**B $\wedge$ C**	**$\neg$(B $\wedge$ C)**	**B $\vee$ $\neg$(B $\wedge$ C)**
V	V	V	F	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	V	V

R. Tautologia (a fórmula é verdadeira em todas as valorações)

c) $(A \rightarrow B) \wedge \neg(\neg A \vee B)$

A	**B**	**A $\rightarrow$ B**	**$\neg$A**	**($\neg$A $\vee$ B)**	**$\neg$($\neg$A $\vee$ B)**	**(A $\rightarrow$ B) $\wedge$ $\neg$($\neg$A $\vee$ B)**
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	F	F
F	F	V	V	V	F	F

R. Contradição (a fórmula é falsa em todas as valorações)

d) $((A \rightarrow B) \wedge \neg B) \rightarrow \neg A$

A	**B**	**A $\rightarrow$ B**	**$\neg$B**	**(A $\rightarrow$ B) $\wedge$ $\neg$B**	**$\neg$A**	**((A $\rightarrow$ B) $\wedge$ $\neg$B) $\rightarrow$ $\neg$A**
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

R. Tautologia

e) $\neg(F \vee B) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg B)$

F	**B**	**$F \vee B$**	**$\neg(F \vee B)$**	**$\neg F$**	**$\neg B$**	**$\neg F \vee \neg B$**	**$\neg(F \vee B) \leftrightarrow (\neg F \vee \neg B)$**
V	V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	V	V

R. Contingente (a fórmula é verdadeira em algumas valorações e falsa em outras).

f) $\neg(B \rightarrow B) \vee (A \wedge \neg A)$

A	**B**	**$B \rightarrow B$**	**$\neg(B \rightarrow B)$**	**$\neg A$**	**$A \wedge \neg A$**	**$\neg(B \rightarrow B) \vee (A \wedge \neg A)$**
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	F	F	F
F	V	V	F	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F

R. Contradição

g) $\neg(\neg D \rightarrow G) \rightarrow (\neg G \vee \neg D)$

D	**G**	**$\neg D$**	**$\neg D \rightarrow G$**	**$\neg(\neg D \rightarrow G)$**	**$\neg G$**	**$\neg G \vee \neg D$**	**$\neg(\neg D \rightarrow G) \rightarrow (\neg G \vee \neg D)$**
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V
F	V	V	V	F	F	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V

R. Tautologia

h) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \leftrightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$

A	**B**	**C**	**$B \rightarrow C$**	**$\alpha = (A \rightarrow (B \rightarrow C))$**	**$A \rightarrow B$**	**$\beta = ((A \rightarrow B) \rightarrow C)$**	**$\alpha \leftrightarrow \beta$**
V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V	F	V
V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	F

R. Contingente

Exercício 9.4.

Usando tabelas de verdade, verifique se as conclusões indicadas abaixo são de fato conseqüência tautológica das premissas, ou não.

a) $A \vee B, \neg A \models B$

A	**B**	**A ∨ B**	**¬A**	**B**
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	**V**	**V**	**V**
F	F	F	V	F
		P1	P2	C

R. Cada linha da tabela de verdade representa uma valoração possível. Na única valoração onde as duas premissas são verdadeiras (linha 3, v(A) = F e v(B) = V), a conclusão também é verdadeira, logo, a conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

b) $A \leftrightarrow B, \neg A \models \neg B$

A	**B**	**A ↔ B**	**¬A**	**¬B**
V	V	V	F	F
V	F	F	F	V
F	V	F	V	F
F	F	**V**	**V**	**V**
		P1	P2	C

R. Na única valoração (v(A) = v(B) = F) que é modelo para o conjunto de premissas (isto é, onde as premissas P1 e P2 são verdadeiras), a conclusão C também é verdadeira, logo, a conclusão é uma conseqüência tautológica das premissas.

c) $\neg(A \wedge B) \models \neg B \wedge \neg A$

A	**B**	**A ∧ B**	**¬(A ∧ B)**	**¬B**	**¬A**	**¬B ∧ ¬A**
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	**V**	V	F	**F**
F	V	F	**V**	F	V	**F**
F	F	F	**V**	V	V	**V**
			P			C

R. Das três valorações que tornam a única premissa P verdadeira, existem duas onde a conclusão é falsa, logo, a conclusão não é uma conseqüência tautológica das premissas. A forma deste argumento é inválida: da conjunção negada "*é falso que*: joão foi ao cinema e foi na praia" NÃO decorre logicamente que "é falso que joão foi ao cinema" e "é falso que joão foi na praia".

d) $A \rightarrow B \models A \vee B$

A	**B**	**$A \rightarrow B$**	**$A \vee B$**
V	V	**V**	**V**
V	F	F	V
F	V	**V**	**V**
F	F	**V**	**F**
		P	C

R. Das três valorações que tornam a premissa P verdadeira, existe uma (v(A) = v(B) = F) onde a conclusão é falsa, logo a conclusão C não é conseqüência tautológica da premissa.

e) $\neg A \rightarrow \neg B \models A \rightarrow B$

A	**B**	**$\neg A$**	**$\neg B$**	**$\neg A \rightarrow \neg B$**	**$A \rightarrow B$**
V	V	F	F	**V**	**V**
V	F	F	V	**V**	**F**
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	**V**	**V**
				P	C

R. Das valorações que tornam a premissa P verdadeira, existe uma (v(A) = V, v(B) = F) onde a conclusão é falsa, logo a conclusão não é conseqüência tautológica da premissa.

f) $A, A \rightarrow C \models A \leftrightarrow C$

A	**C**	**$A \rightarrow C$**	**$A \leftrightarrow C$**
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	V	F
F	F	V	V
P1		P2	C

R. A conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

g) $B \rightarrow \neg C \models \neg(B \wedge C)$

B	**C**	**$\neg C$**	**$B \rightarrow \neg C$**	**$B \wedge C$**	**$\neg(B \wedge C)$**
V	V	F	F	V	F
V	F	V	**V**	F	**V**
F	V	F	**V**	F	**V**
F	F	V	**V**	F	**V**
			P		C

R. A conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

h) $\neg(A \vee B), F \leftrightarrow A \models \neg F$

A	**B**	**F**	**$A \vee B$**	**$\neg(A \vee B)$**	**$F \leftrightarrow A$**	**$\neg F$**
V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	V	F	V	F
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	V	F	F	F
F	V	F	V	F	V	V
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	**V**	**V**	**V**
				P	P	C

R. A conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

i) $\neg(A \wedge B), D \leftrightarrow A \models \neg D$

A	**B**	**D**	**$A \wedge B$**	**$\neg(A \wedge B)$**	**$D \leftrightarrow A$**	**$\neg D$**
V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	F	V
V	F	V	F	**V**	**V**	**F**
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	**V**	**V**	**V**
F	F	V	F	V	F	F
F	F	F	F	**V**	**V**	**V**
				P1	P2	C

R. Das três valorações que tornam as premissas P1 e P2 verdadeiras, existe uma (v(A) = V, v(B) = F, v(D) = V) onde a conclusão C é falsa, logo a conclusão não é conseqüência tautológica das premissas.

j) $A \models (A \rightarrow (B \wedge A)) \rightarrow (A \wedge B)$

A	**B**	**$B \wedge A$**	**$A \rightarrow (B \wedge A)$**	**$A \wedge B$**	**$(A \rightarrow (B \wedge A)) \rightarrow (A \wedge B)$**
V	V	V	V	V	**V**
V	F	F	F	F	**V**
F	V	F	V	F	F
F	F	F	V	F	F
P					C

R. Nas duas valorações onde a premissa P é verdadeira a conclusão C também é verdadeira. Observar que a premissa P é *tautologicamente equivalente* à conclusão C, pois ambas têm o mesmo valor de verdade em todas as valorações.

k) $(B \wedge C) \rightarrow F, \neg B, \neg C \models \neg F$

B	**C**	**F**	**$B \wedge C$**	**$(B \wedge C) \rightarrow F$**	**$\neg B$**	**$\neg C$**	**$\neg F$**
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	F	V
V	F	V	F	V	F	V	F
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	V	V	F	V
F	F	V	F	**V**	**V**	**V**	**F**
F	F	F	F	**V**	**V**	**V**	**V**
				P1	P2	P3	C

R. Das duas valorações que tornam as premissas P1, P2 e P3 todas verdadeiras, existe uma (v(B) = F, v(C) = F, v(F) = V) onde a conclusão C é falsa, logo a conclusão não é uma conseqüência tautológica do conjunto de premissas.

l) $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \models A \leftrightarrow C$

A	**B**	**C**	**$A \leftrightarrow B$**	**$B \leftrightarrow C$**	**$A \leftrightarrow C$**
V	V	V	**V**	**V**	**V**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	F
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	F
F	F	F	**V**	**V**	**V**
			P1	P2	C

R. Nas duas valorações que são modelo para o conjunto de premissas, a conclusão C é verdadeira, logo, a conclusão é uma conseqüência tautológica das premissas.

m) $A \to (B \vee C), (B \wedge C) \to D \models A \to D$

A	**B**	**C**	**D**	**B ∨ C**	**A → (B ∨ C)**	**B ∧ C**	**(B ∧ C) → D**	**A → D**
V	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	V	F	V	V	V	F	F
V	V	F	V	V	**V**	F	**V**	**V**
V	V	F	F	V	**V**	F	**V**	**F**
V	F	V	V	V	**V**	F	**V**	**V**
V	F	V	F	V	**V**	F	**V**	**F**
V	F	F	V	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	V	F	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	**V**	F	**V**	**V**
F	V	F	F	V	**V**	F	**V**	**V**
F	F	V	V	V	**V**	F	**V**	**V**
F	F	V	F	V	**V**	F	**V**	**V**
F	F	F	V	F	**V**	F	**V**	**V**
F	F	F	F	F	**V**	F	**V**	**V**
					P1		P2	C

R. Das diversas valorações que tornam as premissas P1 e P2 verdadeiras, existem duas onde a conclusão C é falsa, logo a conclusão não é conseqüência tautológica das premissas.

n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \to D \models A \to D$

A	**B**	**C**	**D**	**¬A**	**¬A ∨ B**	**(¬A ∨ B) ∨ C**	**B ∨ C**	**(B ∨ C) → D**	**A → D**
V	V	V	V	F	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	**V**	V	**V**	**V**
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	F	V	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	**V**	F	**V**	**V**
F	F	F	F	V	V	**V**	F	**V**	**V**
						P1		P2	C

R. A conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

o) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \models A$

A	**B**	**$A \rightarrow B$**	**$(A \rightarrow B) \rightarrow A$**	**A**
V	V	V	**V**	**V**
V	F	F	**V**	**V**
F	V	V	F	F
F	F	V	F	F
			P	C

R. Nas duas valorações onde a premissa é verdadeira a conclusão também é verdadeira, logo, a conclusão é conseqüência tautológica da premissa.

Adicionalmente, observar que a premissa é *tautologicamente equivalente* à conclusão, pois ambas têm o mesmo valor de verdade em todas as valorações.

Exercício 9.5.
Usando tabelas de verdade, verifique se os pares de fórmulas abaixo são tautologicamente equivalentes ou não.

a) $A \rightarrow B$ e $\neg A \vee B$

		α		β
A	**B**	$\mathbf{A \rightarrow B}$	$\mathbf{\neg A}$	$\mathbf{\neg A \vee B}$
V	V	**V**	F	**V**
V	F	**F**	F	**F**
F	V	**V**	V	**V**
F	F	**V**	V	**V**
		↑		↑

De acordo com a definição 9.7 em (MORTARI 2001, 149), duas fórmulas α e β são tautologicamente equivalentes se, para qualquer valoração v, temos que $v(\alpha) = v(\beta)$. Portanto, para resolver os exercícios desta seção, construímos as tabelas de verdade das duas fórmulas α e β em questão e verificamos se, em todas as valorações, as fórmulas possuem os mesmos valores de verdade. Em particular, no exercício (a), vemos que α e β são tautologicamente equivalentes.

b) $A \wedge B$ e $\neg(\neg A \vee \neg B)$

A	**B**	$\mathbf{A \wedge B}$	$\mathbf{\neg A}$	$\mathbf{\neg B}$	$\mathbf{\neg A \vee \neg B}$	$\mathbf{\neg(\neg A \vee \neg B)}$
V	V	**V**	F	F	F	**V**
V	F	**F**	F	V	V	**F**
F	V	**F**	V	F	V	**F**
F	F	**F**	V	V	V	**F**
		↑				↑

R. As fórmulas são tautologicamente equivalentes.

c) $A \rightarrow B$ e $B \rightarrow A$

A	**B**	$\mathbf{A \rightarrow B}$	$\mathbf{B \rightarrow A}$
V	V	**V**	**V**
V	F	**F**	**V**
F	V	**V**	**F**
F	F	**V**	**V**
		↑	↑

R. Existem duas valorações onde $v(A \rightarrow B) \neq v(B \rightarrow A)$, logo, as fórmulas não são tautologicamente equivalentes.

d) $A \leftrightarrow B$ e $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$

A	**B**	**$A \leftrightarrow B$**	**$A \rightarrow B$**	**$B \rightarrow A$**	**$(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$**
V	V	**V**	V	V	**V**
V	F	**F**	F	V	**F**
F	V	**F**	V	F	**F**
F	F	**V**	V	V	**V**
		↑			↑

R. As fórmulas são tautologicamente equivalentes.

e) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$ e $(A \rightarrow B) \rightarrow C$

A	**B**	**C**	**$B \rightarrow C$**	**$A \rightarrow (B \rightarrow C)$**	**$A \rightarrow B$**	**$(A \rightarrow B) \rightarrow C$**
V	V	V	V	**V**	V	**V**
V	V	F	F	**F**	V	**F**
V	F	V	V	**V**	F	**V**
V	F	F	V	**V**	F	**V**
F	V	V	V	**V**	V	**V**
F	V	F	F	**V**	V	**F**
F	F	V	V	**V**	V	**V**
F	F	F	V	**V**	V	**F**
				↑		↑

R. As fórmulas não têm o mesmo valor de verdade em todas as valorações, logo não são tautologicamente equivalentes.

f) $\neg\neg A$ e A

A	**$\neg A$**	**$\neg\neg A$**
V	F	**V**
F	V	**F**

R. As fórmulas são tautologicamente equivalentes.

Exercício 9.6.

Usando a nova definição de valoração, determine se as fórmulas à direita de $\models$ são ou não conseqüência lógica das demais.

a) Pa $\vee$ Qb,$\neg$Pa $\models$ Qb

R. Em (MORTARI 2001, 152) define-se uma fórmula elementar como sendo qualquer fórmula que seja atômica ou geral, e em seguida (Definição 9.8) é apresentada uma definição de valoração não apenas como uma função de letras sentenciais no conjunto dos valores de verdade {V, F}, mas sim do conjunto de todas as fórmulas elementares no conjunto {V, F}. Na prática, isso significa que algumas fórmulas do cálculo de predicado de primeira ordem (inclusive fórmulas quantificadas) também podem ser tautológicas, desde que sejam verdadeiras em todas as valorações, e que a validade de algumas formas de argumentos contendo fórmulas elementares pode se avaliada *proposicionalmente* (através de tabelas de verdade). Por exemplo, no caso do exercício (a), vemos que o argumento dado Pa $\vee$ Qb,$\neg$Pa $\models$ Qb é uma instância do esquema conhecido como *silogismo disjuntivo*:

$\alpha \vee \beta$
$\neg\alpha$
____
β

Qualquer argumento que tenha esta forma lógica será proposicionalmente válido, mesmo que contenha fórmulas do cálculo de predicados de primeira ordem (propriedades, relações, quantificadores, etc). Podemos comprovar isso substituindo as fórmulas atômicas Pa e Qb por letras sentenciais do cálculo proposicional e construindo uma tabela de verdade para testar a validade do argumento (isto é, verificar se a conclusão é conseqüência tautológica do conjunto de premissas). Por exemplo, se usamos a letra "p" para representar a fórmula Pa, e a letra "q" para representar a fórmula Qb, o argumento (a) seria simbolizado no cálculo proposicional como (p $\vee$ q), $\neg$p $\models$ q, cuja validade pode ser demostrada pela seguinte tabela de verdade:

p	**q**	**p $\vee$ q**	**$\neg$p**	**q**
V	V	V	F	V
V	F	V	F	F
F	V	**V**	**V**	**V**
F	F	F	V	F
		P1	P2	C

Como se pode observar, na única valoração onde as duas premissas são verdadeiras (linha 3), a conclusão também é verdadeira, logo o argumento é (proposicionalmente) válido.

Formalmente, dizemos que a conclusão é uma conseqüência tautológica (e portanto lógica) das premissas.

b) $(Pa \wedge Fc) \rightarrow \exists xHx, \neg Pa, \neg\exists xHx \models \neg Fc$

R. Para testar se a forma do argumento (b) é proposicionalmente válida, vamos executar os seguintes procedimentos:

i) Substituir as fórmulas elementares (atômicas e gerais) do argumento por letras sentenciais (p, q, r, etc)
ii) Construir uma tabela de verdade para as premissas e conclusão do argumento
iii) Verificar se a conclusão é verdadeira em todas as valorações que tornam as premissas verdadeiras. Neste caso, a conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

Se a letra sentencial "p" representa a fórmula atômica Pa
Se a letra sentencial "q" representa a fórmula atômica Fc
Se a letra sentencial "r" representa a fórmula geral $\exists xHx$
O argumento (b) pode ser simbolizado no cálculo proposicional como:
$(p \wedge q) \rightarrow r, \neg p, \neg r \models \neg q$

Podemos testar a validade formal do argumento através de uma tabela de verdade.

fórmulas elementares				$(Pa \wedge Fc) \rightarrow \exists xHx$	$\neg Pa$	$\neg\exists xHx$	$\neg Fc$
p	**q**	**r**	**$p \wedge q$**	**$(p \wedge q) \rightarrow r$**	**$\neg p$**	**$\neg r$**	**$\neg q$**
V	V	V	V	V	F	F	F
V	V	F	V	F	F	V	F
V	F	V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F	V	V
F	V	V	F	V	V	F	F
F	V	F	F	**V**	**V**	**V**	**F**
F	F	V	F	V	V	F	V
F	F	F	F	**V**	**V**	**V**	**V**
				P1	P2	P3	C

Como podemos observar, existe uma valoração onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, logo a conclusão não é conseqüência tautológica das premissas.

Nota: O exercício 9.6 pede para provar se as fórmulas à direita de $\models$ são ou não conseqüência *lógica* das demais. Sempre que pudermos provar por tabelas de verdade que a conclusão de um argumento é uma conseqüência *tautológica* de suas premissas, estamos provando também que existe uma relação de conseqüência *lógica* entre as premissas e a conclusão. Porém, o inverso não ocorre: toda conseqüência tautológica é uma conseqüência lógica, mas nem toda conseqüência lógica é tautológica. Ou seja, a noção de conseqüência tautológica do cálculo proposicional é um caso particular da noção mais ampla de conseqüência lógica do cálculo de predicados de primeira ordem. Analogamente, uma tautologia é um caso particular de fórmula válida. Toda fórmula que é uma tautologia do cálculo proposicional é uma fórmula válida no cálculo de predicados, mas há fórmulas válidas que não são tautologias. Para informações adicionais, comparar as definições 9.6 (conseqüência tautológica) e 11.3 (conseqüência lógica) em (MORTARI 2001).

c) $\neg(Rbc \wedge Gm), D \leftrightarrow Rbc \models \neg Gm$

R. Para testar se a forma do argumento (c) é proposicionalmente válida, vamos executar os seguintes procedimentos:

i) Substituir as fórmulas elementares (atômicas e gerais) do argumento por letras sentenciais (p, q, r, etc)
ii) Construir uma tabela de verdade para as premissas e conclusão do argumento
iii) Verificar se a conclusão é verdadeira em todas as valorações que tornam as premissas verdadeiras. Neste caso, a conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

Se a letra sentencial "p" representa a fórmula atômica Rbc
Se a letra sentencial "q" representa a fórmula atômica Gm
Se a letra sentencial "r" representa a sentença D

O argumento (c) pode ser simbolizado no cálculo proposicional como:

$\neg(p \wedge q), r \leftrightarrow p \models \neg q$

Para verificar se neste argumento a conclusão é conseqüência tautologica das premissas, vamos construir sua tabela de verdade.

fórmulas elementares				$\neg(Rbc \wedge Gm)$	$D \leftrightarrow Rbc$	$\neg Gm$
p	**q**	**r**	**p ∧ q**	**¬(p ∧ q)**	**r ↔ p**	**¬q**
V	V	V	V	F	V	F
V	V	F	V	F	F	F
V	F	V	F	**V**	**V**	**V**
V	F	F	F	V	F	V
F	V	V	F	V	F	F
F	V	F	F	**V**	**V**	**F**
F	F	V	F	V	F	V
F	F	F	F	**V**	**V**	**V**
				P1	P2	C

R. Das três valorações que tornam as premissas P1 e P2 verdadeiras, existe uma (v(p) = F, v(q) = V, v(r) = F) onde a conclusão C é falsa, logo o argumento é inválido em forma proposicional, e portanto a conclusão não é conseqüência tautológica das premissas.

d) $\forall xAx \leftrightarrow \forall xBx, \forall xBx \leftrightarrow \exists xHx \models \forall xAx \rightarrow \exists xHx$

R. Para testar se a forma do argumento (d) é proposicionalmente válida, vamos executar os seguintes procedimentos:

i) Substituir as fórmulas elementares (atômicas e gerais) do argumento por letras sentenciais (p, q, r, etc)
ii) Construir uma tabela de verdade para as premissas e conclusão do argumento
iii) Verificar se a conclusão é verdadeira em todas as valorações que tornam as premissas verdadeiras. Neste caso, a conclusão é conseqüência tautológica das premissas.

Se a letra sentencial "p" representa a fórmula geral $\forall xAx$
Se a letra sentencial "q" representa a fórmula geral $\forall xBx$
Se a letra sentencial "r" representa a fórmula geral $\exists xHx$

O argumento (d) pode ser simbolizado no cálculo proposicional como:

$p \leftrightarrow q, q \leftrightarrow r \models p \rightarrow r$

Para verificar se neste argumento a conclusão é conseqüência tautologica das premissas, vamos construir sua tabela de verdade.

elementares			$\forall xAx \leftrightarrow \forall xBx$	$\forall xBx \leftrightarrow \exists xHx$	$\forall xAx \rightarrow \exists xHx$
p	**q**	**r**	$\mathbf{p \leftrightarrow q}$	$\mathbf{q \leftrightarrow r}$	$\mathbf{p \rightarrow r}$
V	V	V	**V**	**V**	**V**
V	V	F	V	F	F
V	F	V	F	F	V
V	F	F	F	V	F
F	V	V	F	V	V
F	V	F	F	F	V
F	F	V	V	F	V
F	F	F	**V**	**V**	**V**
			P1	P2	C

Nas duas valorações onde as duas premissas são verdadeiras, a conclusão também é verdadeira, logo o argumento é (proposicionalmente) válido.

Formalmente, dizemos que a conclusão do argumento é uma conseqüência tautológica (e, portanto, conseqüência lógica) das premissas.

e) $(\neg A \lor Qb) \lor \forall x \exists y Rxy$, $(Qb \lor \forall x \exists y Rxy) \to Lab \models A \to Lab$

R. Vamos testar se a forma do argumento (e) é proposicionalmente válida:

A já é uma letra proposicional.
Seja "B" a letra proposicional que representa a fórmula atômica Qb
Seja "C" a letra proposicional que representa a fórmula geral $\forall x \exists y Rxy$
Seja "D a letra proposicional que representa a fórmula atômica Lab

O argumento (e pode ser simbolizado no cálculo proposicional como:

$(\neg A \lor B) \lor C$, $(B \lor C) \to D \models A \to D$

Já construímos uma tabela de verdade para este argumento, no Exercício 9.4 (n), que reproduzimos em seguida:

A	**B**	**C**	**D**	**¬A**	**¬A ∨ B**	**(¬A ∨ B) ∨ C**	**B ∨ C**	**(B ∨ C) → D**	**A → D**
V	V	V	V	F	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	V	F	F	V	V	V	F	F
V	V	F	V	F	V	**V**	V	**V**	**V**
V	V	F	F	F	V	V	V	F	F
V	F	V	V	F	F	**V**	V	**V**	**V**
V	F	V	F	F	F	V	V	F	F
V	F	F	V	F	F	F	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	V	F
F	V	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	V	F	V	V	V	V	F	V
F	V	F	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	V	F	F	V	V	V	V	F	V
F	F	V	V	V	V	**V**	V	**V**	**V**
F	F	V	F	V	V	V	V	F	V
F	F	F	V	V	V	**V**	F	**V**	**V**
F	F	F	F	V	V	**V**	F	**V**	**V**
						P1		P2	C

Em todas as valorações onde as premissas são todas verdadeiras, a conclusão também é verdadeira. Logo, o argumento é proposicionalmente válido. A conclusão é conseqüência tautológica (lógica) das premissas.

Capítulo 10 - Estruturas e Verdade

Exercício 10.1.

Construa duas outras estruturas para a linguagem L acima (ver notas), usando como universo:
(a) O conjunto das capitais de estados do Brasil
(b) O conjunto dos números naturais

(a) Seja $\mathtt{A}$ = <A, I> uma estrutura para L, onde A é o conjunto das capitais de estados do Brasil, e I uma função de interpretação tal que:

I(a) = São Paulo
I(b) = Rio de Janeiro
I(c) = Florianópolis
I(d) = Cuiabá

Podemos definir informalmente as propriedades R, M, C, H e a relação G como segue:

I(R) = {x ∈ A / x tem mais de 3.500 km^2 de área}
I(M) ={x ∈ A / x tem praia}
I(C) = {x ∈ A / x tem mais de 10.000.000 de habitantes}
I(H) = {x ∈ A / x é uma ilha}
I(G) = {<x, y> ∈ A^2 / x está ao norte de y}

Formalmente (ou seja, de forma relacionada com indivíduos da estrutura), temos:

I(R) = {Cuiabá}
I(M) = {Rio de Janeiro, Florianópolis}
I(C) = {São Paulo}
I(H) = {Florianópolis}
I(G) = {<Rio de Janeiro, São Paulo>, <Rio de Janeiro, Florianópolis>, <São Paulo, Florianópolis>, <Cuiabá, Rio de Janeiro>, <Cuiabá, São Paulo>, <Cuiabá, Florianópolis>.

Notas:

1. A Linguagem L a que se refere o exercício é L = {a, b, c, d, R, M, C, H, G}, onde G é um predicado binário, e os demais são unários (ver MORTARI 2001, 159).
2. Adotamos a notação simplificada 'I' em vez de '$I_{\mathtt{A}}$', para representar "a função de interpretação I de uma estrutura $\mathtt{A}$ qualquer".

Ver *solução do gabarito*, em http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ10.pdf

(b) Seja N = <N, I> uma estrutura para L, onde N é o conjunto dos números naturais, e I uma função de interpretação tal que:

L = {a, b, c, d, R, M, C, H, G}

Podemos nomear, por exemplo, os seguintes indivíduos em nossa estrutura, utilizando as constantes individuais de L:

I(a) = 0, I(b) = 1, I(c) = 2, I(d) = 4

Podemos definir informalmente as propriedades R, M, C, H e a relação G como segue:

I(R) = {x ∈ N / x é ímpar}
I(M) ={x ∈ N / x é par}
I(C) = {x ∈ N / x é primo}
I(H) = ∅
I(G) = {<x, y> ∈ N^2 / x é menor que y}

Assim, formalmente (ou seja, de forma relacionada com indivíduos da estrutura), temos:

I(R) = {1}
I(M) ={0, 2, 4}
I(C) = {2}
I(H) = ∅
I(G) = {<0,1>, <0,2>, <0,4>, <1,2>, <1,4>, <2,4>}

Nota: Ver *solução do gabarito*, em http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ10.pdf, que é baseada em uma estrutura diferente.

Exercício 10.2.
Quantas estruturas você acha que podemos construir para a linguagem L acima ?

R. Uma estrutura A para L especifica um universo de discurso (conjunto não vazio e enumerável), que é o domínio de entidades com as quais desejamos trabalhar, e utiliza uma função de interpretação I para atribuir valores semânticos (significado) as constantes de L que denotam indivíduos e propriedades n-árias.

Mesmo para uma linguagem limitada como L = {a, b, c, d, R, M, C, H, G}, que possui apenas algumas constantes de indivíduos e algumas constantes de predicados unários e binários, há uma quantidade infinita de possibilidades de universos de discurso onde diferentes propriedades e relações podem ser atribuídas a estas constantes. Por exemplo, as constantes a, b, c, d podem representar números reais, e há um número não-enumeravelmente grande de números reais. Logo, o número de diferentes estruturas que pode ser construído para L é infinito.

Exercício 10.3.
Determine o valor das fórmulas abaixo na estrutura A que estamos considerando. Faça depois o mesmo com relação à estrutura B.

R. A estrutura A que está sendo considerada é descrita em (MORTARI 2001, 157-162). Resumidamente, é definida uma linguagem L = {a, b, c, d, R, M, C, H, G} e uma estrutura A = <A, I>, onde A = {Ana Maria, Dorothee, Juliana, Elisa, Leila, Gabriela, Mariana, Veronika, Conrado, Felipe, Sebastian, Fernando} é o universo composto pelos sobrinhos do prof. César Mortari, e é dada a seguinte interpretação para as constantes de L:

I(a) = Ana Maria
I(b) = Juliana
I(c) = Sebastian
I(d) = Felipe

I(R) = {x $\in$ A / x é um rapaz} = {Conrado, Felipe, Sebastian, Fernando}
I(M) = {x $\in$ A / x é uma moça} = {Ana Maria, Dorothee, Juliana, Elisa, Leila, Gabriela, Mariana, Veronika}
I(C) = {x $\in$ A / x mora em Campinas} = {Leila, Gabriela, Mariana}
I(H) = {x $\in$ A / x mora em Heidelberg} = {Veronika, Dorothee, Sebastian}
I(G) = {<x, y> $\in$ A^2 / x gosta de brincar com y} = {<Elisa, Juliana>, <Leila, Gabriela>, <Felipe, Conrado>, <Dorothee, Veronika>}

Fórmulas

(a) Ra	A(Ra) = V sse I(a) $\in$ I(R). Como Ana Maria não é rapaz), temos A(Ra) = F
(b) Rc	A(Rc) = V sse I(c) $\in$ I(R). Como Sebastian é rapaz, temos A(Rc) = V
(c) Mb	A(Mb) = V sse I(b) $\in$ I(M). Como Juliana é moça, temos A(Mb) = V
(d) Hc	A(Hc) = V sse I(c) $\in$ I(H). Como Sebastian mora em Heidelberg, temos A(Hc) = V
(e) Cb	A(Cb) = V sse I(b) $\in$ I(C). Como Juliana não mora em Campinas, temos A(Cb) = F
(f) Rd	A(Rd) = V sse I(d) $\in$ I(R). É o caso (Felipe é rapaz), logo A(Rd) = V
(g) Gab	A(Gab) = V sse <I(a), I(b)> $\in$ I(G). Como <Ana Maria, Juliana> $\notin$ I(G), A(Gab) = F
(h) Gba	A(Gba) = V sse <I(b), I(a)> $\in$ I(G). Como <Juliana, Ana Maria> $\notin$ I(G), A(Gba) = F
(i) Gcc	A(Gcc) = V sse <I(c), I(c)> $\in$ I(G). Como <Sebastian, Sebastian> $\notin$ I(G), A(Gcc) = F

Vejamos os valores das fórmulas para a mesma linguagem L = {a, b, c, d, R, M, C, H, G}, mas considerando agora a estrutura B = <B, I> (MORTARI 2001, 163), que tem como universo o conjunto B = {1,2,3}, e tem uma função de interpretação I, como segue:

I(a) = 1	I(R) = {1, 2}
I(b) = 2	I(M) = {2, 3}
I(c) = 3	I(C) = ∅
I(d) = 2	I(H) = B
	I(G) = {<2,1>, <3,1>, <3,3>}

Fórmulas

(a) Ra	B(Ra) = V sse I(a) ∈ I(R). Como 1 ∈ {1, 2}, temos B(Ra) = V
(b) Rc	B(Rc) = V sse I(c) ∈ I(R). Como 3 ∉ {1, 2}, temos B(Rc) = F
(c) Mb	B(Mb) = V sse I(b) ∈ I(M). Como 2 ∈ {2, 3}, temos B(Mb) = V
(d) Hc	B(Hc) = V sse I(c) ∈ I(H). Como 3 ∈ B, temos B(Hc) = V
(e) Cb	B(Cb) = V sse I(b) ∈ I(C). Como 2 ∉ ∅, temos B(Cb) = F
(f) Rd	B(Rd) = V sse I(d) ∈ I(R). Como 2 ∈ {1, 2}, temos B(Rd) = V
(g) Gab	B(Gab) = V sse <I(a), I(b)> ∈ I(G). Como <1, 2> ∉ I(G), temos B(Gab) = F
(h) Gba	B(Gba) = V sse <I(b), I(a)> ∈ I(G). Como <2, 1> ∈ I(G), temos B(Gba) = V
(i) Gcc	B(Gcc) = V sse <I(c), I(c)> ∈ I(G). Como <3, 3> ∈ I(G), temos B(Gcc) = V

Exercício 10.4.

Usando os valores obtidos para as fórmulas atômicas do exercício anterior, determine o valor das fórmulas abaixo estrutura A que estamos considerando. Faça o mesmo com relação à B.

R. Para facilitar, os valores de verdade obtidos para as fórmulas do exercício 10.3 nas estruturas $\mathfrak{A}$ e $\mathfrak{B}$ estão resumidos na tabela abaixo:

	A	B
Ra	F	V
Rc	V	F
Mb	V	V
Hc	V	V
Cb	F	F
Rd	V	V
Gab	F	F
Gba	F	V
Gcc	F	V

a) $\neg$Ra

Como A(Ra) = F, temos que A($\neg$Ra) = V, ou seja, $\neg$Ra é verdadeira na estrutura A
Como B(Ra) = V, temos que B($\neg$Ra) = F, ou seja, $\neg$Ra é falsa na estrutura B

b) Rc $\wedge$ Mb

Como A(Rc) = V e A(Mb) = V, temos que A(Rc $\wedge$ Mb) = V
Como B(Rc) = F e B(Mb) = V, temos que B(Rc $\wedge$ Mb) = F

c) $\neg\neg$Mb

Como A(Mb) = V, temos que A($\neg$Mb) = F, e A($\neg\neg$Mb) = V
Como B(Mb) = V, temos que B($\neg$Mb) = F, e B($\neg\neg$Mb) = V

d) Ca $\rightarrow$ (Cb $\vee$ $\neg$Ra)

A(Ca) = V sse I(a) $\in$ I(C). Como Ana Maria não mora em Campinas, temos A(Ca) = F. Como a fórmula é condicional com antecedente é falso, temos A(Ca $\rightarrow$ (Cb $\vee$ $\neg$Ra)) = V.

B(Ca) = V sse I(a) $\in$ I(C). Como 1 $\notin \emptyset$, temos B Ca) = F.
Como a fórmula é condicional com antecedente é falso, temos B(Ca $\rightarrow$ (Cb $\vee$ $\neg$Ra)) = V.

e) $(Cb \wedge Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \vee \neg Mb)$

Tanto na estrutura $\mathtt{A}$ quanto na estrutura $\mathtt{B}$, temos os mesmos valores de verdade para as fórmulas atômicas Cb, Hc e Mb. Sendo assim, o valor de verdade da expressão acima será o mesmo em ambas as estruturas. Vejamos:

$(Fa \wedge Ve) \leftrightarrow (\neg Ve \vee \neg Ve)$ Onde Ve = Verdadeiro, Fa = Falso
$Fa \leftrightarrow (Fa \vee Fa)$
$Fa \leftrightarrow Fa$
Ve

Se $\alpha = (Cb \wedge Hc) \leftrightarrow (\neg Hc \vee \neg Mb)$, temos $\mathtt{A}(\alpha) = \mathtt{B}(\alpha) = V$

f) $\neg(Gcc \rightarrow Gab)$

Para a estrutura $\mathtt{A}$, temos:

$\neg(Fa \rightarrow Fa)$
$\neg(Ve)$
Fa

Ou seja, $\mathtt{A}(\neg(Gcc \rightarrow Gab)) = F$

Para a estrutura $\mathtt{B}$, temos:

$\neg(Ve \rightarrow Fa)$
$\neg(Fa)$
Ve

Logo, $\mathtt{B}(\neg(Gcc \rightarrow Gab)) = V$

Exercício 10.5.
Determine o fecho das fórmulas abaixo:

a) Rxc

R. x é livre. O fecho é $\forall xRxc$

b) $Rzw \rightarrow Rby$

R. z, w e y são livres. O fecho é $\forall z\forall w\forall y(Rzw \rightarrow Rby)$

c) $\neg Rxz \vee \forall uQu$

R. x e z são livres, u é ligada. O fecho é $\forall x\forall z(\neg Rxz) \vee \forall uQu$

d) $\exists y(Qy \rightarrow Lyz)$

R. z é livre, y é ligada. O fecho é $\forall z\exists y(Qy \rightarrow Lyz)$

e) $(Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz$

R. x, y e z são livres. O fecho é $\forall x\forall y\forall z((Rxy \wedge Ryz) \rightarrow Rxz)$

f) $B \vee (Hbx \leftrightarrow Hyx)$

R. x e y são livres. O fecho é $B \vee \forall x\forall y(Hbx \leftrightarrow Hyx)$

Exercício 10.6.

Considere uma linguagem L = {a, b, c, d, B, G, L} e uma estrutura $\mathcal{A}$ = <A, I>, onde A = {Miau, Tweety, Cleo, Fido}, e tal que a função interpretação I é como segue:

I(a) = Miau
I(b) = Tweety
I(c) = Cleo
I(d) = Fido
I(B) = {Miau, Tweety}
I(G) = {Cleo, Fido}
I(L) = {<Miau, Miau>, <Tweety, Tweety>, <Cleo, Cleo>, <Miau, Cleo>, <Miau, Fido>, <Tweety, Cleo>, <Cleo, Miau>, <Fido, Miau>}

Diga se as fórmulas abaixo são verdadeiras ou falsas em $\mathcal{A}$, e por que. Note que neste caso não precisamos de novos nomes, já que a cada indivíduo foi atribuída uma constante.

a) $\neg Bc$

R. Pela definição de verdade em estruturas, $\mathcal{A}(Bc) = V$ sse $I(c) \in I(B)$. Na interpretação dada, Cleo $\notin$ {Miau, Tweety}, logo $\mathcal{A}(Bc) = F$. Portanto, $\mathcal{A}(\neg Bc) = V$.

b) $\neg Gd \rightarrow Bb$

R. Temos que $\mathcal{A}(Gd) = V$ sse $I(d) \in I(G)$. Como Fido $\in$ {Cleo, Fido}, temos $\mathcal{A}(Gd) = V$. Portanto, $\mathcal{A}(\neg Gd) = F$. Como este é o antecedente da expressão (b), que é uma expressão condicional, a expressão será verdadeira, independentemente do valor de $\mathcal{A}(Bb)$. Ou seja, $\mathcal{A}(\neg Gd \rightarrow Bb) = V$ (a expressão é verdadeira na estrutura $\mathcal{A}$).

c) $\neg Lca \leftrightarrow \neg Bb$

R. Investigando inicialmente o valor de verdade das fórmulas atômicas, temos:

$\mathcal{A}(Lca) = V$ sse <I(c), I(a)> $\in$ I(L). Como <Cleo, Miau> $\in$ {<Miau, Miau>, <Tweety, Tweety>, <Cleo, Cleo>, <Miau, Cleo>, <Miau, Fido>, <Tweety, Cleo>, <Cleo, Miau>, <Fido, Miau>}, temos que $\mathcal{A}(Lca) = V$. Portanto, $\mathcal{A}(\neg Lca) = F$.

$\mathcal{A}(Bb) = V$ sse $I(b) \in I(B)$. Como Tweety $\in$ {Miau, Tweety}, é o caso que $\mathcal{A}(Bb) = V$. Portanto, $\mathcal{A}(\neg Bb) = F$.

Temos então, para a fórmula molecular:

Fa $\leftrightarrow$ Fa   Onde Ve = Verdadeiro, Fa = Falso
Ve
Logo, $\mathcal{A}(\neg Lca \leftrightarrow \neg Bb) = V$.

d) $Ga \rightarrow (\neg Bb \wedge Bc)$

R. Para as fórmulas atômicas, temos:

$\mathcal{A}(Ga) = V$ sse $I(a) \in I(G)$. Não é o caso, logo $\mathcal{A}(Ga) = F$. Como a expressão é condicional e o antecedente é falso, já podemos concluir que toda a expressão é verdadeira, ou seja, temos que $\mathcal{A}(Ga \rightarrow (\neg Bb \wedge Bc)) = V$. Apenas como referência, vamos prosseguir com a análise do valor de verdade das demais fórmulas atômicas. Dos exercícios (c) e (a) anteriores, temos que $\mathcal{A}(Bb) = V$ e $\mathcal{A}(Bc) = F$.

Temos então, para a fórmula molecular:

$Fa \rightarrow (\neg Ve \wedge Fa)$ Onde Ve = Verdadeiro, Fa = Falso
$Fa \rightarrow (Fa \wedge Fa)$
$Fa \rightarrow Fa$
Ve

Logo, $\mathcal{A}(Ga \rightarrow (\neg Bb \wedge Bc)) = V$, como se esperava.

e) $\neg(Lca \vee Lbb)$

R. Do exercício (c), temos que $\mathcal{A}(Lca) = V$.

$\mathcal{A}(Lbb) = V$ sse $\langle I(b), I(b)\rangle \in I(L)$. Como o par <Tweety, Tweety> de fato pertence ao conjunto definido por I(L), temos que $\mathcal{A}(Lbb) = V$.

Para a fórmula molecular:

$\neg(Ve \vee Ve)$ Onde Ve = Verdadeiro, Fa = Falso
$\neg Ve$
Fa

Logo, $\mathcal{A}(\neg(Lca \vee Lbb)) = F$

f) $\exists xBx$

R. Pela Definição 10.2 (Mortari 2001, 173) de verdade em estruturas, temos que para uma fórmula geral existencial, $\mathcal{A}(\exists x\alpha) = V$ sse $\mathcal{A}(\alpha[x/\mathbf{i}]) = V$ para algum parâmetro **i**. Ou seja, temos que $\mathcal{A}(\exists xBx) = V$ sse $\mathcal{A}(B\mathbf{i}) = V$ para alguma constante individual **i** qualquer de L que denote algum indivíduo existente no Universo de discurso A.

Como $I(a) \in I(B)$, fazendo **i** = a temos $\mathcal{A}(Ba) = V$, logo, $\mathcal{A}(\exists xBx) = V$.

g) $\exists x \neg Gx$

R. Temos que $\mathcal{A}(\exists x \neg Gx) = V$ sse $\mathcal{A}(\neg G\mathbf{i}) = V$ para algum **i,** ou seja, sse $\mathcal{A}(G\mathbf{i}) = F$ para alguma constante individual **i** que tenha referência (isto é, que nomeie algum indivíduo do Universo). Como $I(a) \notin I(G)$, se $\mathbf{i} = a$ temos que $\mathcal{A}(Ga) = F$, logo, $\mathcal{A}(\neg Ga) = V$, de onde segue que $\mathcal{A}(\exists x \neg Gx) = V$.

Intuitivamente, pela interpretação dada é fácil constatar que a sentença "existe alguém que não tem a propriedade G" é verdade na estrutura dada, pois I(G) = {Cleo, Fido}, de modo que nem Miau e nem Tweety têm esta propriedade.

h) $\forall x Lax$

R. Pela definição de verdade para as fórmulas gerais universais (MORTARI 2001, 173), temos que $\mathcal{A}(\forall x \alpha) = V$ sse $\mathcal{A}(\alpha[x/\mathbf{i}]) = V$ para todo parâmetro **i.** Em particular, temos que $\mathcal{A}(\forall x Lax) = V$ sse $\mathcal{A}(La\mathbf{i}) = V$ para todo **i**.

No caso, $\forall x Lax$ será verdadeira se o indivíduo denotado por 'a' (Miau) tiver a relação binária L com todos os demais indivíduos do Universo, inclusive ele próprio.

Investigando os pares ordenados do conjunto definido por I(L). vemos que não existe o par <Miau, Tweety>, logo, se $\mathbf{i} = b$, temos que $\mathcal{A}(Lab) = F$, e portanto $\mathcal{A}(\forall x Lax) = F$

i) $\forall y Lyy$

R. Temos que $\mathcal{A}(\forall y Lyy) = V$ sse $\mathcal{A}(L\mathbf{ii}) = V$ para todo **i**, o que só ocorrerá se todos os indivíduos do Universo tiverem a relação binária L com si próprios.

Porém, o par ordenado <Fido, Fido> não pertence ao conjunto I(L) (Fido não tem L com si próprio), logo, se $\mathbf{i} = d$, temos que $\mathcal{A}(Ldd) = F$, e portanto $\mathcal{A}(\forall y Lyy) = F$.

j) $\forall x Bx \wedge \forall x Gx$

R. Temos que $\mathcal{A}(\forall x Bx) = V$ sse $\mathcal{A}(B\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Como $I(c) \notin I(B)$, se $\mathbf{i} = c$, temos que $\mathcal{A}(Bc) = F$, logo, $\mathcal{A}(\forall x Bx) = F$. Analogamente, temos $\mathcal{A}(\forall x Gx) = V$ sse $\mathcal{A}(G\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Como se pode observar, $I(a) \notin I(G)$, logo se $\mathbf{i} = a$, temos que $\mathcal{A}(Ga) = F$, logo, $\mathcal{A}(\forall x Gx) = F$. A fórmula molecular em (j) será portanto falsa na estrutura:

Fa $\wedge$ Fa   Onde Fa = Falso
Fa

$\mathcal{A}(\forall x Bx \wedge \forall x Gx) = F$

Exercício 10.7.

Considere uma linguagem L = {a, b, c, A, F, G, H, K} e uma estrutura $\mathcal{B}$ = <B, I> onde B = {0, 1, 2, 3 ,4} e tal que a função de interpretação I é como segue:

I(a) = 0	I(F) = {0, 1, 2}
I(b) = 2	I(G) = {2, 4}
I(c) = 4	I(H) = {<0,1>, <1,3>, <4,2>}
I(A) = V	I(K) = {<1,1,2>,<2,2,4>}

Diga se as fórmulas abaixo são verdadeiras ou falsas em $\mathcal{B}$, e por quê (note que nem todos os indivíduos do Universo B têm uma constante individual associada a eles; assim a primeira coisa a fazer é acrescentar os nomes faltantes à linguagem).

R. De fato, 1 e 3 são "indivíduos" do Universo de discurso B e não estão nomeados. Vamos então fazer uma extensão da linguagem L, acrescentando novas constantes individuais para poder nomear todos os indivíduos do Universo B, por exemplo:

L = {a, b, c, d, e, A, F, G, H, K}

Podemos agora dar uma interpretação para as duas novas constantes acrescentadas:

I(d) = 3
I(e) = 1

Agora todos os indivíduos estão nomeados por constantes de L-extendida, e podemos dar continuidade ao exercício.

a) Fa

R. $\mathcal{B}$(Fa) = V sse I(a) $\in$ I(F). Como 0 $\in$ {0, 1, 2}, temos que $\mathcal{B}$(Fa) = V.

b) Gb $\vee$ A

R. $\mathcal{B}$(Gb) = V sse I(b) $\in$ I(G). É o caso, logo $\mathcal{B}$(Gb) = V. Como a fórmula molecular em questão (Gb $\vee$ A) é uma disjunção, sua verdade já está assegurada independentemente do valor de verdade da sentença A na estrutura. Logo, $\mathcal{B}$(Gb $\vee$ A) = V

Apenas como referência, pela Definição 10.2 (MORTARI 2001, 173), temos que $\mathcal{B}$(S) = V sse I(S) = V, onde S é uma letra sentencial qualquer (predicado zero-ário). Em particular, pela interpretação dada, I(A) = V, logo, $\mathcal{B}$(A) = V.

c) Hbc

R. $\mathcal{B}$(Hbc) = V sse <I(b), I(c)> $\in$ I(H). Como <2, 4> $\notin$ {<0,1>, <1,3>, <4,2>}, temos que $\mathcal{B}$(Hbc) = F.

d) Kbbc

R. $\mathrm{B}(Kbbc) = V$ sse $\langle I(b), I(b), I(c)\rangle \in I(K)$. Como $\langle 2, 2, 4\rangle \in \{\langle 1,1,2\rangle,\langle 2,2,4\rangle\}$, temos que $\mathrm{B}(Kbbc) = V$.

e) $\neg Fa \lor Ga$

R. Do exercício (a), temos que $\mathrm{B}(Fa) = V$, logo, $\mathrm{B}(\neg Fa) = F$. Já $\mathrm{B}(Ga) = V$ sse $I(a) \in I(G)$. Como $0 \notin \{2, 4\}$, temos que $\mathrm{B}(Ga) = F$. Neste caso, a fórmula molecular é falsa na estrutura, já que é uma disjunção onde ambos os disjuntos são falsos: $\mathrm{B}(\neg Fa \lor Ga) = F$.

f) $Fa \to (Hab \lor Ga)$

R. Do exercício (a), temos que $\mathrm{B}(Fa) = V$, e de (e) temos que $\mathrm{B}(Ga) = F$. Falta o valor da fórmula atômica Hab.

Por definição, $\mathrm{B}(Hab) = V$ sse $\langle I(a), I(b)\rangle \in I(H)$. Como $\langle 0, 2\rangle \notin \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$, temos que $\mathrm{B}(Hab) = F$.

Temos então, para a fórmula molecular condicional:

$Ve \to (Fa \lor Fa)$ Onde Ve = Verdadeiro, Fa = Falso
$Ve \to Fa$
Fa

Logo, $\mathrm{B}(Fa \to (Hab \lor Ga)) = F$.

g) $\neg(\neg Fa \land \neg Kbbc)$

R. Do exercício (a), temos que $\mathrm{B}(Fa) = V$, e do exercício (d), $\mathrm{B}(Kbbc) = V$. Temos então o seguinte valor veritativo resultante, para a fórmula molecular:

$\neg(\neg Ve \land \neg Ve)$ Onde Ve = Verdadeiro, Fa = Falso
$\neg(Fa \land Fa)$
$\neg Fa$
Ve

Logo, $\mathrm{B}(\neg(\neg Fa \land \neg Kbbc)) = V$.

h) $\exists yFy$

R. Temos que $B(\exists yFy) = V$ sse $B(F\mathbf{i}) = V$ para alguma constante **i** de L que denote algum indivíduo existente no Universo de discurso B.

Como, por exemplo, $I(a) \in I(F)$, se $\mathbf{i} = a$ temos $B(Fa) = V$, logo, $B(\exists yFy) = V$.

i) $\neg\exists yFy$

R. Do exercício anterior, $B(\exists yFy) = V$, logo, $B(\neg\exists yFy) = F$.

j) $\exists x\neg Gx$

R. Temos que $B(\exists x\neg Gx) = V$ sse $B(\neg G\mathbf{i}) = V$ para algum **i**, ou $B(G\mathbf{i}) = F$ para algum **i** (em português: a fórmula geral $\exists x\neg Gx$ será verdadeira na estrutura B se existir pelo menos um indivíduo que não tenha a propriedade G). Como $1 \notin \{2, 4\}$, $I(e) \notin I(G)$, logo se $\mathbf{i} = e$ temos $B(Ge) = F$, ou $B(\neg Ge) = V$, de onde decorre que $B(\exists x\neg Gx) = V$.

k) $\forall xHax$

R. Por definição, $B(\forall xHax) = V$ sse $B(Ha\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Porém, podemos observar que na interpretação dada, $\langle I(a), I(b)\rangle \notin I(H)$ (ou: $\langle 0, 2\rangle \notin \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$). Assim, se fazemos $\mathbf{i} = b$, temos que $B(Hab) = F$, logo, $B(\forall xHax) = F$.

l) $\exists x\,(Fx \wedge Gx)$

R. Temos que $B(\exists x\,(Fx \wedge Gx)) = V$ sse $B(F\mathbf{i} \wedge G\mathbf{i}) = V$ para algum **i**, ou seja, se existir pelo menos um indivíduo que tenha as propriedades F e G:

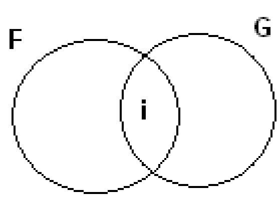


Figura 10.1

Como $I(F) = \{0, 1, 2\}$ e $I(G) = \{2, 4\}$, podemos observar que o "indivíduo" $I(b) = 2$ possui as duas propriedades (é elemento de ambos os conjuntos).

Logo, se fazemos $\mathbf{i} = b$, temos:

$I(b) \in I(F)$, logo, $B(Fb) = V$
$I(b) \in I(G)$, logo, $B(Gb) = V$
Disso se conclui que $B(Fb \wedge Gb) = V$, e portanto, $B(\exists x\,(Fx \wedge Gx)) = V$

m) $\exists x(\neg Fx \wedge \neg Gx)$

R. Temos que $\mathrm{B}(\exists x(\neg Fx \wedge \neg Gx)) = V$ sse $\mathrm{B}(\neg F\mathbf{i} \wedge \neg G\mathbf{i}) = V$ para algum **i**, ou seja, se existir pelo menos um indivíduo que não tenha a propriedade F e nem a propriedade G:

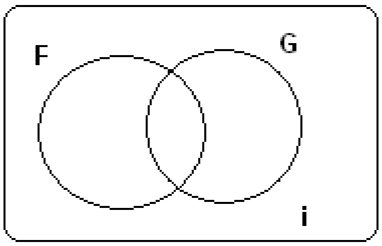


Figura 10.2

Como I(F) = {0, 1, 2} e I(G) = {2, 4}, podemos observar que o "indivíduo" I(d) = 3 não possui tais propriedades (não é elemento dos conjuntos associados com F e G):

Logo, se fazemos **i** = d, temos:

$I(d) \notin I(F)$, logo, $\mathrm{B}(Fd) = F$
$I(d) \notin I(G)$, logo, $\mathrm{B}(Gd) = F$

De onde se obtém que $\mathrm{B}(\neg Fd) = V$ e $\mathrm{B}(\neg Gd) = V$, logo, $\mathrm{B}(\neg Fb \wedge \neg Gb) = V$, e portanto, $\mathrm{B}(\exists x (Fx \wedge Gx)) = V$

n) $\exists x \neg Fx \wedge \exists x \neg Gx$

R. A expressão $(\exists x \neg Fx \wedge \exists x \neg Gx)$ é uma fórmula molecular conjuntiva na forma $(\alpha \wedge \beta)$, logo será verdadeira na estrutura B sse $\mathrm{B}(\alpha) = V$ e $\mathrm{B}(\beta) = V$.

No caso, $\mathrm{B}(\alpha) = \mathrm{B}(\exists x \neg Fx) = V$ sse $\mathrm{B}(\neg F\mathbf{i}) = V$ para algum **i**, ou $\mathrm{B}(F\mathbf{i}) = F$ para algum **i**. Como $I(c) \notin I(F)$, se **i** = c temos que $\mathrm{B}(Fc) = F$, de onde $\mathrm{B}(\neg Fc) = V$.

Prosseguindo, $\mathrm{B}(\beta) = \mathrm{B}(\exists x \neg Gx) = V$ sse $\mathrm{B}(\neg G\mathbf{i}) = V$ para algum **i**, ou $\mathrm{B}(G\mathbf{i}) = F$ para algum **i**. Como $I(a) \notin I(G)$, se **i** = a temos que $\mathrm{B}(Ga) = F$, de onde $\mathrm{B}(\neg Ga) = V$.

Assim, temos por exemplo que $\mathrm{B}(\neg Fc \wedge \neg Ga) = V$, logo, $\mathrm{B}(\exists x \neg Fx \wedge \exists x \neg Gx) = V$.

o) $\forall x\ (Fx \rightarrow \exists yGy)$

R. A expressão será verdadeira na estrutura sse $\mathbb{B}(F\mathbf{i} \rightarrow \exists yGy) = V$ para todo indivíduo **i** (se **i** tem a propriedade F, então existe pelo menos um indivíduo que tem a propriedade G). Pela interpretação dada, os indivíduos 0, 1 e 2 têm a propriedade F ($F \neq \emptyset$).

I(a) = 0	I(F) = {0, 1, 2}
I(b) = 2	I(G) = {2, 4}
I(c) = 4	
I(e) = 1	

Sendo uma condicional com antecedente verdadeiro, a expressão será verdadeira se o conseqüente $\exists yGy$ não for falso. Para isso, basta que *algum* indivíduo tenha a propriedade G ($G \neq \emptyset$). Como os indivíduos 2 e 4 têm G, a expressão em (o) é verdadeira.

p) $\neg\forall x\neg Gx$

R. Temos que $\mathbb{B}(\neg\forall x\neg Gx) = V$ sse $\mathbb{B}(\forall x\neg Gx) = F$.

Em (MORTARI 2001, 173), temos as condições em que as fórmulas gerais universais são falsas: $\mathbb{B}(\forall x\alpha) = F$ sse $\mathbb{B}(\alpha[x/\mathbf{i}]) = F$ para algum i.

Assim, $\mathbb{B}(\forall x\neg Gx) = F$ se $\mathbb{B}(\neg G\mathbf{i}) = F$ para algum **i**, ou $\mathbb{B}(G\mathbf{i}) = V$ para algum **i.**

Como $I(b) \in I(G)$, se **i** = b temos que $\mathbb{B}(Gb) = V$ ($2 \in \{2, 4\}$). Daí, temos que $\mathbb{B}(Gb) = V$, logo, *existe algum x que tem G*, de modo que $\mathbb{B}(\forall x\neg Gx) = F$.

Disso decorre que $\mathbb{B}(\neg\forall x\neg Gx) = V$.

q) $\forall x\ (Gx \rightarrow Fx)$

R. Temos que $\mathbb{B}(\forall x\alpha) = V$ sse $\mathbb{B}(\alpha[x/\mathbf{i}]) = V$ para todo **i**.

Assim, $\mathbb{B}(\forall x\ (Gx \rightarrow Fx)) = V$ sse $\mathbb{B}(G\mathbf{i} \rightarrow F\mathbf{i}) = V$ para todo **i** (qualquer indivíduo: se ele tem G, então ele tem F). Se houver algum indivíduo que tenha a propriedade G e não tenha a propriedade F, o antecedente será verdadeiro e o conseqüente será falso, e neste caso a expressão será inválida (falsa na estrutura).

Pela interpretação dada, vemos que $I(c) \in I(G)$ ($4 \in \{2, 4\}$), mas $I(c) \notin I(F)$ ($4 \notin \{0, 1, 2\}$).

Logo, se **i** = c, $\mathbb{B}(Gc) = V$ e $\mathbb{B}(Fc) = F$, ou seja, $\mathbb{B}(Gc \rightarrow Fc) = F$.

Portanto, $\mathbb{B}(\forall x\ (Gx \rightarrow Fx)) = F$

r) Hba $\rightarrow$ $\forall$xHbx

R. A expressão molecular condicional em (r) só será falsa na estrutura $\mathcal{B}$ se o antecedente Hba for verdadeiro e o conseqüente $\forall$xHbx for falsa. Se o antecedente Hba for falso, a expressão será verdadeira, independentemente do valor de verdade do conseqüente.

Temos que $\mathcal{B}$(Hba) = V sse <I(b), I(a)> $\in$ I(H).

Pela interpretação dada, <2, 0> $\notin$ {<0,1>, <1,3>, <4,2>}, logo, $\mathcal{B}$(Hba) = F.

Portanto, $\mathcal{B}$(Hba $\rightarrow$ $\forall$xHbx) = V.

s) $\exists$xKxxx

R. Temos que $\mathcal{B}$($\exists$xKxxx) = V sse $\mathcal{B}$(K**iii**) = V para algum **i**. Na interpretação dada, vemos que não existe um indivíduo **i** tal que a tripla ordenada **<i, i, i>** $\in$ I(K) = {<1,1,2>,<2,2,4>}. Logo, $\mathcal{B}$($\exists$xKxxx) = F.

t) $\exists$z$\neg$Kzab

R. Temos que $\mathcal{B}$($\exists$z$\neg$Kzab) = V sse $\mathcal{B}$($\neg$K**i**ab) = V para algum **i**, ou ainda $\mathcal{B}$(K**i**ab) = F para algum **i.**

Pela interpretação dada, se **i** = c, por exemplo, temos que a tripla <I(c), I(a), I(b)> $\notin$ I(K) (<4, 0, 2> $\notin$ {<1,1,2>,<2,2,4>}.

Logo, $\mathcal{B}$(Kcab) = F, ou $\mathcal{B}$($\neg$Kcab) = V, de onde $\mathcal{B}$($\exists$z$\neg$Kzab) = V

u) $\neg\forall$xGx $\leftrightarrow$ $\neg\exists$xKxxx

R. A fórmula molecular bicondicional em (u) tem a forma ($\alpha \leftrightarrow \beta$) e será falsa na estrutura $\mathcal{B}$ se $\mathcal{B}(\alpha) \neq \mathcal{B}(\beta)$. Para o lado esquerdo da bicondicional, temos que $\mathcal{B}$($\neg\forall$xGx) = V sse $\mathcal{B}$($\neg$G**i**) = V para todo **i**, ou $\mathcal{B}$(G**i**) = F para todo **i**. Como I(b)$\in$ I(G), se **i** = b temos que $\mathcal{B}$(Gb) = V, logo, concluímos que $\mathcal{B}$($\neg\forall$xGx) = F.
Para o lado direito, do exercício (s) temos que $\mathcal{B}$($\exists$xKxxx) = F, logo, $\mathcal{B}$($\neg\exists$xKxxx) = V.
Nestas condições, $\mathcal{B}(\alpha) \neq \mathcal{B}(\beta)$, e a expressão (u) é falsa na estrutura.

Nota! Na solução do gabarito[3], a expressão (u) é verdadeira:
Como $\mathcal{B}$($\forall$xGx) = F, (pois $\mathcal{B}$(*Ga*) = F, letra (e)), $\mathcal{B}$($\neg\forall$xGx) = V
Como $\mathcal{B}$($\exists$xKxxx) = F (pela letra (s)), $\mathcal{B}$($\neg\exists$xKxxx) = V.
Portanto, $\mathcal{B}$($\neg\forall$xGx $\leftrightarrow$ $\neg\exists$xKxxx) = V.

[3] http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ10.pdf

v) $\exists x \exists y Hxy$

R. Temos que B($\exists x \exists y Hxy$) = V sse B(H**ij**) = V para algum **i** e algum **j** (podendo ser **i** = **j**), ou seja, "se existir pelo menos um x e um y tal que x tenha a relação H com y". Como, por exemplo, $\langle I(c), I(b)\rangle \in I(H)$ ($\langle 4, 2\rangle \in \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$), fazendo **i** = c e **j** = b temos que B(Hcb) = V, logo, B($\exists x \exists y Hxy$) = V.

w) $\forall y Hxy$

R. A fórmula é aberta, pois x ocorre livre. De acordo com (MORTARI 2001, 174), a fórmula será verdadeira se seu fecho $\forall x \forall y Hxy$ for verdadeiro na estrutura.

Temos que B($\forall x \forall y Hxy$) = V sse B(H**ij**) = V para todo **i** e para todo **j** (podendo ser o mesmo indivíduo, ou seja, **i** = **j**), ou seja, "se todos os indivíduos do universo B tiverem a relação H com todos os demais, e com si próprios".

Pela interpretação dada, é possível encontrar um contra-exemplo que mostra que este não é o caso. Por exemplo, se fazemos **i** = a e **j** = b, vemos que o par $\langle I(a), I(b)\rangle \notin I(H)$ ($\langle 0, 2\rangle \notin \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$). Logo, B(Hab) = F, e portanto B($\forall x \forall y Hxy$) = F.

Daí decorre que o valor de verdade da fórmula aberta $\forall y Hxy$ é a falsidade.

x) $Fx \leftrightarrow \neg Hzz$

R. Fórmula aberta, seu fecho é $\forall x \forall z (Fx \leftrightarrow \neg Hzz)$.

Temos que B($\forall x \forall z (Fx \leftrightarrow \neg Hzz)$) = V sse B($\forall z$ (F**i** $\leftrightarrow \neg Hzz$)) = V para todo **i**.

E B($\forall z$ (F**i** $\leftrightarrow \neg Hzz$)) = V sse B(F**i** $\leftrightarrow \neg$H**jj**) = V para todo **j**, podendo ser **i** = **j**.

Na interpretação dada, se **i** =c, temos que B(Fc) = F, pois $I(c) \notin I(F)$ ($4 \notin \{0, 1, 2\}$).

Temos também que nenhum indivíduo **j** tem a relação H com si próprio: $\langle I(\mathbf{j}), I(\mathbf{j})\rangle \notin I(H)$, onde $I(H) = \{\langle 0,1\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 4,2\rangle\}$. Em particular, se fazemos por exemplo **j** = c, temos que B(Hcc) = F, ou B($\neg$Hcc) = V

Assim, encontramos um contra exemplo, ou seja, uma interpretação onde a expressão molecular bicondicional é falsa, pois o lado esquerdo é falso e o lado direito é verdadeiro: B($Fc \leftrightarrow \neg Hcc$) = F.

Neste caso, B($\forall x \forall z (Fx \leftrightarrow \neg Hzz)$) = F.

Exercício 10.8.
Considere uma linguagem L = {a, b, c, H, L} e uma estrutura $\mathcal{C}$ = <C, I> tal que C = {Vênus, Hera, Minerva} e tal que a função interpretação I é como segue:

I(a) = Vênus
I(b) = Hera
I(c) = Minerva
I(H) = {Hera, Minerva}
I(L) = {<Vênus, Hera>, <Minerva, Hera>, <Hera, Hera>, <Hera, Vênus>}

Com relação a essa estrutura, dê exemplos de:

a) Uma fórmula que seja falsa

R. Ha

Como I(a) $\notin$ I(H), temos por exemplo que $\mathcal{C}$(Ha) = F

b) Uma fórmula com uma negação que seja verdadeira.

R. $\neg$Ha

De (a), vimos que $\mathcal{C}$(Ha) = F, logo, $\mathcal{C}$($\neg$Ha) = V

c) Uma conjunção verdadeira

R. (Hb $\wedge$ Hc)

Como I(b) $\in$ I(H) e I(c) $\in$ I(H), temos que $\mathcal{C}$(Hb) = V e $\mathcal{C}$(Hc) = V. Logo, $\mathcal{C}$(Hb $\wedge$ Hc) = V

d) Uma fórmula universalmente quantificada que seja verdadeira.

R. $\forall$xLxb

Na interpretação dada, todos os indivíduos têm a relação L com Hera. Logo, $\mathcal{C}$($\forall$xLxb) = V

e) Uma fórmula existencialmente quantificada que seja falsa.

R. $\exists$x$\neg$Lxb

Se todos os indivíduos têm relação L com Hera, é falso afirmar que "existe algum indivíduo **i** tal que **i** não tem a relação L com Hera" (b denota Hera). Logo, $\mathcal{C}$($\exists$x$\neg$Lxb) = F

Também, é falsa, por exemplo, a expressão $\exists$xLxc, pois não existe um indivíduo **i** que tenha a relação L com Minerva (c denota Minerva).

f) Um fórmula com um quantificador universal e um existencial que seja verdadeira.

R. $\exists x \forall y Lyx$

A fórmula "diz" que "existe algum indivíduo **i** com o qual todos os indivíduos do universo têm a relação L, o que é o caso para I(b) = Hera, conforme a interpretação dada. Logo, temos que $\mathcal{C}(\exists x \forall y Lyx) = V$

g) Uma fórmula aberta que seja verdadeira.

R. Lxb

Uma fórmula aberta α será verdadeira em uma estrutura se seu fecho $\forall x \alpha$ for verdadeiro na estrutura (para uma definição menos informal, ver (MORTARI 2001, 180)). Como pelo exercício (d) temos que $\forall x Lxb$ é verdadeira em $\mathcal{C}$, a fórmula aberta Lxb é verdadeira, pois seu fecho é exatamente $\forall x Lxb$.

Exercício 10.9.
Considere uma linguagem L = {a, b, P, Q} e uma estrutura $\mathcal{A}$ = <A, I> tal que A = {1, 2} e tal que a função interpretação I é como segue:

I(a) = 1
I(b) = 2
I(P) = {1}
I(Q) = {<2,2>}

Com relação a essa estrutura, dê exemplos de:

a) Uma fórmula que seja falsa.

R. Pb

Como I(b) $\notin$ I(P), temos que $\mathcal{A}$(Pb) = F.

b) Uma fórmula com uma negação que seja verdadeira.

R. $\neg$Pb

De (a), temos que $\mathcal{A}$(Pb) = F. Logo, $\mathcal{A}$($\neg$Pb) = V.

c) Uma conjunção verdadeira

R. Pa $\wedge$ $\neg$Pb

Como I(a) $\in$ I(P), temos que $\mathcal{A}$(Pa) = V. De (b), temos que $\mathcal{A}$($\neg$Pb) = V. Logo, será verdadeira na estrutura a conjunção destas duas fórmulas: $\mathcal{A}$(Pa $\wedge$ $\neg$Pb) = V.

d) Uma fórmula universalmente quantificada que seja verdadeira.

R. $\forall$x$\neg$Qxa

Pela interpretação dada, nenhum indivíduo tem a relação Q com o indivíduo I(a) = 1, já que o único par ordenado em I(Q) é {<2,2>}. Logo, $\mathcal{A}$($\forall$x$\neg$Qxa) = V.

Também é verdadeira a fórmula $\neg\forall$xPx, pois como I(b) $\notin$ I(P), não é o caso que "todo indivíduo **i** tem a propriedade P".

e) Uma fórmula existencialmente quantificada que seja falsa.

R. $\exists$xQxa

Nenhum indivíduo tem a relação Q com I(a) = 1, pois I(Q) = {<2,2>}. Logo, é falso que "existe alguém que tem a relação Q com a". Logo, $\mathcal{A}$($\exists$xQxa) = F.

f) Uma fórmula com um quantificador universal e um existencial que seja verdadeira.

R. $\neg\forall x\exists yQxy$

A fórmula "diz" que *não é o caso que* "para qualquer x, existe algum y tal que x tem a relação Q com y".

De fato, não há um indivíduo **i** no Universo com o qual todos os indivíduos (incluindo ele próprio) tenham a relação Q. Por exemplo, se **i** = a, temos que I(a) = 1 não tem a relação Q com ninguém, já que pela interpretação dada $\langle 1,1\rangle \notin I(Q)$ e $\langle 1,2\rangle \notin I(Q)$.

g) Uma fórmula aberta que seja verdadeira.

R. $(Pb \rightarrow \neg Qbx)$

Uma fórmula aberta será verdadeira se seu fecho for verdadeiro na estrutura. Assim, por exemplo, a fórmula $(Pb \rightarrow \neg Qbx)$ é verdadeira, pois seu fecho $\forall x(Pb \rightarrow \neg Qbx)$ é verdadeiro.

Temos que $\mathtt{A}(\forall x(Pb \rightarrow \neg Qbx)) = V$ sse a condicional $\mathtt{A}(Pb \rightarrow \neg Qb\mathbf{i})) = V$ para todo i.

Porém, o antecedente Pb do condicional é falso, pois $I(b) \notin I(P)$.

Logo, $\mathtt{A}(Pb \rightarrow \neg Qb\mathbf{i})) = V$ qualquer que seja o valor de verdade do conseqüente, de onde $\mathtt{A}(\forall x(Pb \rightarrow \neg Qbx)) = V$.

Exercício 10.10.
Considere as fórmulas $\exists x(Gx \wedge Lcx)$ e $\forall y(Gy \leftrightarrow \neg Lyy)$, onde G é uma propriedade, e L uma relação binária. Construa:

a) Uma estrutura na qual essas fórmulas sejam ambas verdadeiras.

R. Queremos encontrar uma estrutura $\mathtt{A}$ tal que:

$\mathtt{A}(\exists x(Gx \wedge Lcx)) = V$ [1]
$\mathtt{A}(\forall y(Gy \leftrightarrow \neg Lyy)) = V$ [2]

Seja L = {a, c, L, G} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A} = \langle A, I\rangle$ uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2}
Seja I uma função de interpretação tal que:

I(a) = 1
I(c) = 2
I(G) = {1}
$I(L) = \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$

Temos que $\mathtt{A}(\exists x(Gx \wedge Lcx)) = V$ sse $\mathtt{A}(G\mathbf{i} \wedge Lc\mathbf{i})) = V$ para algum **i**.
Se **i** = a, como $I(a) \in I(G)$, temos que $\mathtt{A}(Ga) = V$
E como $\langle I(c), I(a) \in I(L)$, $(\langle 2,1\rangle \in \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\}$, temos que $\mathtt{A}(Lca)) = V$.
Logo, $\mathtt{A}(Ga \wedge Lca)) = V$, de onde decorre que [1] é verdadeira em $\mathtt{A}$.

Temos que $\mathtt{A}(\forall y(Gy \leftrightarrow \neg Lyy)) = V$ sse $\mathtt{A}(G\mathbf{i} \leftrightarrow \neg L\mathbf{ii}) = V$ para *todo* **i.**
Pela verdade do bicondicional, isto ocorre sse $\mathtt{A}(G\mathbf{i}) = \mathtt{A}(\neg L\mathbf{ii})$ para *todo* **i**.
Temos dois indivíduos, denotados por a e c.

Vimos que se **i** = a, $\mathtt{A}(Ga) = V$. Como $\langle I(a), I(a)\rangle \notin I(L)$, $(\langle 1,1\rangle \notin \{\langle 1,2\rangle, \langle 2,1\rangle\})$, temos que $\mathtt{A}(Laa) = F$. Logo, $\mathtt{A}(\neg Laa) = V$, e portanto $\mathtt{A}(Ga \leftrightarrow \neg Laa) = V$

Se **i** = c, temos que $I(c) \notin I(G)$, logo $\mathtt{A}(Gc) = F$.
Como $\langle I(c), I(c)\rangle \in I(L)$, $(\langle 2,2\rangle \in \{\langle 2,2\rangle, \langle 2,1\rangle\})$, temos que $\mathtt{A}(Lcc) = V$.
Logo, $\mathtt{A}(\neg Lcc) = F$, e portanto $\mathtt{A}(Gc \leftrightarrow \neg Lcc) = V$
Assim, para todos os indivíduos **i**, $\mathtt{A}(G\mathbf{i}) = \mathtt{A}(\neg L\mathbf{ii})$, de onde [2] é verdadeira em $\mathtt{A}$.

Graficamente,

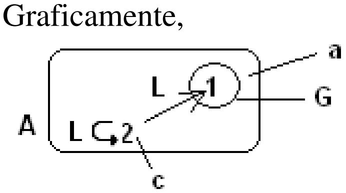


Figura 10.3

b) Uma estrutura na qual essas fórmulas sejam ambas falsas

R. Queremos encontrar uma estrutura $\mathtt{A}$ tal que:

$\mathtt{A}(\exists x(Gx \wedge Lcx)) = F$ [1]
$\mathtt{A}(\forall y(Gy \leftrightarrow \neg Lyy)) = F$ [2]

Seja L = {a, c, L, G} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2}
Seja I uma função de interpretação tal que:

I(a) = 1
I(c) = 2
I(G) = ∅
I(L) = {<2,1>}

Temos que $\mathtt{A}(\exists x(Gx \wedge Lcx)) = F$ sse $\mathtt{A}$(G**i** ∧ Lc**i**)) = F para *todo* **i**. Como a fórmula é uma conjunção, basta que um dos lados seja falso para que toda a conjunção seja falsa. Como I(G) = ∅, se **i** = a, I(a) ∉ I(G), logo $\mathtt{A}$(Ga) = F. Se **i** = c, I(c) ∉ I(G), e temos que $\mathtt{A}$(Gc) = F. Assim, $\mathtt{A}(\exists x(Gx \wedge Lcx)) = F$ na interpretação sugerida.

De (MORTARI 2001, 173), temos que $\mathtt{A}(\forall y(Gy \leftrightarrow \neg Lyy)) = F$ sse $\mathtt{A}$(G**i** ↔ ¬L**ii**) = F para *algum* **i.** Pela verdade do bicondicional, isto ocorre sse $\mathtt{A}$(G**i**) ≠ $\mathtt{A}$(¬L**ii**) para *algum* **i**.

Como I(G) = ∅, temos que $\mathtt{A}$(G**i**) é falso para todos os indivíduos:
$\mathtt{A}$(Ga) = F
$\mathtt{A}$(Gc) = F
Um dos lados da bicondicional, portanto, é sempre falso.

Vejamos o outro lado.
Se **i** = a, $\mathtt{A}$(Laa) = F, pois <I(a), I(a) ∉ I(L).
Logo, $\mathtt{A}$(¬Laa) = V.
Neste caso, $\mathtt{A}$(Ga) ≠ $\mathtt{A}$(¬Laa).
Assim, $\mathtt{A}$(Ga ↔ ¬Laa) = F, de onde decorre que $\mathtt{A}(\forall y(Gy \leftrightarrow \neg Lyy)) = F$.

Na interpretação sugerida, portanto, ambas as fórmulas são falsas.

Capítulo 11 - Validade e Conseqüência Lógica

Ver *soluções do gabarito* deste capítulo em http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ11.pdf

Exercício 11.1.
As fórmulas na lista seguinte são exemplos de fórmulas válidas no CQC, porém, nenhuma delas é uma tautologia. Tente provar que elas são de fato válidas, demonstrando que não é possível haver uma estrutura onde elas sejam falsas.

a) $\forall xPx \rightarrow Pa$

R. Vamos utilizar o método de prova por absurdo. Como hipótese inicial, assumimos que a fórmula é inválida, ou seja, existe alguma estrutura $\mathtt{A}$ onde ela é falsa

[1] $\mathtt{A}(\forall xPx \rightarrow Pa) = F$

A expressão [1] é condicional, logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F:
[2] $\mathtt{A}(\forall xPx) = V$
[3] $\mathtt{A}(Pa) = F$

Pela verdade do universal, [2] será V sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [2] para x = a:

[4] $\mathtt{A}(Pa) = V$

Temos contradição entre [3] e [4]. Logo, a hipótese inicial é incorreta: não existe estrutura onde a fórmula seja falsa. Logo, a fórmula é válida (verdadeira em todas as estruturas).

b) $Pa \rightarrow \exists xPx$

R. Prova por absurdo

Hipótese inicial: a fórmula inválida, ou seja, existe estrutura $\mathtt{A}$ onde ela é falsa.
[1] $\mathtt{A}(Pa \rightarrow \exists xPx) = F$

De [1], condicional falso, temos que:

[2] $\mathtt{A}(Pa) = V$
[3] $\mathtt{A}(\exists xPx) = F$

De [3], existencial falso, temos que $\mathtt{A}(\exists xPx) = F$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = F$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [3] para x = a:

[4] $\mathtt{A}(Pa) = F$
Contradição entre [2] e [4]. Logo, a hipótese inicial é incorreta: a fórmula é válida.

c) $\forall x(Px \rightarrow Px)$

R. Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathcal{A}$.

[1] $\mathcal{A}(\forall x(Px \rightarrow Px)) = F$

Pela falsidade do universal, [1] será F sse $\mathcal{A}(P\mathbf{i} \rightarrow P\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [1] para x = a:

[2] $\mathcal{A}(Pa \rightarrow Pa) = F$

O condicional [2] será F sse o antecedente for verdadeiro e o conseqüente falso, ou seja:

[3] $\mathcal{A}(Pa) = V$
[4] $\mathcal{A}(Pa) = F$

Da contradição entre [3] e [4], concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, a fórmula é válida (verdadeira em qualquer estrutura).

d) $\neg\exists x(Px \land \neg Px)$

Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathcal{A}$.

[1] $\mathcal{A}(\neg\exists x(Px \land \neg Px)) = F$

De [1], temos

[2] $\mathcal{A}(\exists x(Px \land \neg Px)) = V$

De [2], existencial verdadeiro, temos que $\mathcal{A}(\exists x(Px \land \neg Px)) = V$ sse $\mathcal{A}(P\mathbf{i} \land \neg P\mathbf{i}) = V$ para algum indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [2] para x = a:

[3] $\mathcal{A}(Pa \land \neg Pa) = V$

Da verdade da conjunção, temos:

[4] $\mathcal{A}(Pa) = V$
[5] $\mathcal{A}(\neg Pa) = V$

De [5], temos

[6] $\mathcal{A}(Pa) = F$

Da contradição entre [4] e [6], concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, a fórmula é válida (verdadeira em qualquer estrutura).

e) $\forall x\, \neg(Px \wedge \neg Px)$

R. Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathtt{A}$.

[1] $\mathtt{A}(\forall x\, \neg(Px \wedge \neg Px)) = F$

Pela falsidade do universal, [1] será F sse $\mathtt{A}(\neg(P\mathbf{i} \wedge \neg P\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [1] para x = a:

[2] $\mathtt{A}(\neg(Pa \wedge \neg Pa)) = F$

De [2], temos

[3] $\mathtt{A}(Pa \wedge \neg Pa) = V$

Da verdade da conjunção, temos:

[4] $\mathtt{A}(Pa) = V$
[5] $\mathtt{A}(\neg Pa) = V$

[6] $\mathtt{A}(Pa) = F$ de [5]

Da contradição entre [4] e [6], concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, a fórmula é válida (verdadeira em qualquer estrutura).

f) $\forall x(\neg Px \vee Px)$

Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathtt{A}$.

[1] $\mathtt{A}(\forall x(\neg Px \vee Px)) = F$

Da falsidade do universal, [1] será F sse $\mathtt{A}(\neg P\mathbf{i} \vee P\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo[4] **i**. Em particular, podemos instanciar [1] para x = a:

[2] $\mathtt{A}(\neg Pa \vee Pa) = F$

Da falsidade da disjunção, temos:

[3] $\mathtt{A}(\neg Pa) = F$
[4] $\mathtt{A}(Pa) = F$
[5] $\mathtt{A}(Pa) = V$ de [3]

Contradição entre [4] e [5]! A fórmula é válida.

---

[4] Já poderíamos parar aqui, pois $\neg P\mathbf{i} \vee P\mathbf{i}$ é uma tautologia, logo não pode ser falsa.

g) $\forall x(Ax \to Bx) \to (\forall xAx \to \forall xBx)$

R. Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathbb{A}$.

[1] $\mathbb{A}(\forall x(Ax \to Bx) \to (\forall xAx \to \forall xBx)) = F$

A expressão [1] é condicional, logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F:

[2] $\mathbb{A}(\forall x(Ax \to Bx)) = V$
[3] $\mathbb{A}(\forall xAx \to \forall xBx) = F$

A expressão [3] é condicional, logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F:

[4] $\mathbb{A}(\forall xAx) = V$
[5] $\mathbb{A}(\forall xBx) = F$

Pela falsidade do universal, [5] será F sse $\mathbb{A}(B\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [5] para x = a:

[6] $\mathbb{A}(Ba) = F$

Pela verdade do universal, [4] será V sse $\mathbb{A}(A\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [4] para o mesmo indivíduo, fazendo x = a:

[7] $\mathbb{A}(Aa) = V$

Pela verdade do universal, [2] será F sse $\mathbb{A}(A\mathbf{i} \to B\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [2] para x = a:

[8] $\mathbb{A}(Aa \to Ba) = V$

A expressão [8] é condicional, logo será V se o antecedente for F e/***ou*** o conseqüente for V:

[9] $\mathbb{A}(Aa) = F$ **OU** [10] $\mathbb{A}(Ba) = V$

No primeiro caso, temos contradição entre [7] e [9].
No segundo caso, temos contradição entre [6] e [10].

Como em todos os casos ocorrem contradições, concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, a fórmula é válida (verdadeira em qualquer estrutura).

h) $(\forall xAx \lor \forall xBx) \to \forall x(Ax \lor Bx)$

R. Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathtt{A}$.

[1] $\mathtt{A}((\forall xAx \lor \forall xBx) \to \forall x(Ax \lor Bx)) = F$

A expressão [1] é condicional, logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F:

[2] $\mathtt{A}(\forall xAx \lor \forall xBx) = V$
[3] $\mathtt{A}(\forall x(Ax \lor Bx)) = F$

Da falsidade do universal, [3] será F sse $\mathtt{A}(A\mathbf{i} \lor B\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [3] para x = a:

[4] $\mathtt{A}(Aa \lor Ba) = F$

Da falsidade da disjunção, de [4] temos que:

[5] $\mathtt{A}(Aa) = F$
[6] $\mathtt{A}(Ba) = F$

Da verdade da disjunção, de [2] temos que:

[7] $\mathtt{A}(\forall xAx) = V$ OU [8] $\mathtt{A}(\forall xBx) = V$

Da verdade do universal, [7] será V sse $\mathtt{A}(A\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [7] para x = a:

[9] $\mathtt{A}(Aa) = V$

Neste caso, temos contradição entre [5] e [9].

Da verdade do universal, [8] será V sse $\mathtt{A}(B\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [8] para x = a:

[10] $\mathtt{A}(Ba) = V$

Neste caso, temos contradição entre [6] e [10].

Como em todos os casos ocorrem contradições, concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, a fórmula é válida (verdadeira em qualquer estrutura).

i) $\exists x(Ax \wedge Bx) \rightarrow (\exists xAx \wedge \exists xBx)$

R. Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathbb{A}$.

[1] $\mathbb{A}(\exists x(Ax \wedge Bx) \rightarrow (\exists xAx \wedge \exists xBx)) = F$

A expressão [1] é condicional, logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F:

[2] $\mathbb{A}(\exists x(Ax \wedge Bx)) = V$
[3] $\mathbb{A}(\exists xAx \wedge \exists xBx) = F$

Da verdade do universal, [2] será V sse $\mathbb{A}(A\mathbf{i} \wedge B\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [2] para x = a:

[4] $\mathbb{A}(Aa \wedge Ba) = V$

Da verdade da conjunção, de [4] temos que:

[5] $\mathbb{A}(Aa) = V$
[6] $\mathbb{A}(Ba) = V$

Da falsidade da conjunção, de [3] temos que:

[7] $\mathbb{A}(\exists xAx) = F$ OU [8] $\mathbb{A}(\exists xBx) = F$

Da falsidade do existencial, [7] será F sse $\mathbb{A}(A\mathbf{i}) = F$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [7] para x = a:

[9] $\mathbb{A}(Aa) = F$

Neste caso, temos contradição entre [5] e [9].

Da falsidade do existencial, [8] será F sse $\mathbb{A}(B\mathbf{i}) = F$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [8] para x = a:

[10] $\mathbb{A}(Ba) = F$

Neste caso, temos contradição entre [6] e [10].

Como em todos os casos ocorrem contradições, concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, a fórmula é válida (verdadeira em qualquer estrutura).

j) $\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$

R. Por absurdo, assumimos a hipótese de que a fórmula é falsa em alguma estrutura $\mathbb{A}$.

[1] $\mathbb{A}(\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy) = F$

A expressão [1] é condicional, logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F:

[2] $\mathbb{A}(\exists x \forall y Rxy) = V$
[3] $\mathbb{A}(\forall y \exists x Rxy) = F$

Da verdade do existencial, [2] será V sse $\mathbb{A}(\forall y R\mathbf{i}y) = V$ para algum indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [2] para x = a:

[4] $\mathbb{A}(\forall y Ray) = V$

Da falsidade do universal, [3] será F sse $\mathbb{A}(\exists x Rx\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [3] para y = b:

[5] $\mathbb{A}(\exists x Rxb) = F$

Da verdade do universal, [4] será V sse $\mathbb{A}(Ra\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [4] para y = b:

[6] $\mathbb{A}(Rab) = V$

Da falsidade do existencial, [5] será F sse $\mathbb{A}(R\mathbf{i}b) = F$ para todo indivíduo **i**. Em particular, podemos instanciar [5] para x = a:

[7] $\mathbb{A}(Rab) = F$

Temos contradição entre [6] e [7]. Logo, concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, a fórmula é válida (verdadeira em qualquer estrutura).

Exercício 11.2.
As fórmulas abaixo são todas inválidas. Mostre isso construindo uma estrutura onde sejam falsas.

a) $Pa \rightarrow \forall xPx$

R. Nosso objetivo é encontrar um contra-exemplo, ou seja, encontrar uma estrutura $\mathcal{A}$ onde a fórmula seja falsa. Vejamos em que condições isso pode ocorrer.

Analisando a estrutura da fórmula, vemos que é uma condicional. Logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F em alguma estrutura $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}(Pa) = V$, de onde decorre que $I(a) \in I(P)$, ou seja, "a tem P"
$\mathcal{A}(\forall xPx) = F$, ou seja, "alguém não tem P".

Pela falsidade do universal, temos que $\mathcal{A}(\forall xPx) = F$ sse $\mathcal{A}(P\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Como $\mathcal{A}(Pa) = V$, vamos imaginar que exista algum outro indivíduo denotado por "b" que não tenha a propriedade P, ou seja, para o qual $\mathcal{A}(Pb) = F$. Nestas condições, a fórmula será falsa. Vamos formalizar em seguida estas condições.

Seja $L = \{a, b, P\}$ uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{A} = \langle A, I\rangle$ uma estrutura para L.
Seja $A = \{1, 2\}$ o universo de $\mathcal{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:

$I(a) = 1$
$I(b) = 2$
$I(P) = \{1\}$

Daí, temos que

$\mathcal{A}(Pa) = V$, pois $I(a) \in I(P)$
$\mathcal{A}(Pb) = F$, pois $I(b) \notin I(P)$, logo, $\mathcal{A}(\forall xPx) = F$

Nesta interpretação, a fórmula $(Pa \rightarrow \forall xPx)$ é falsa.
Graficamente:

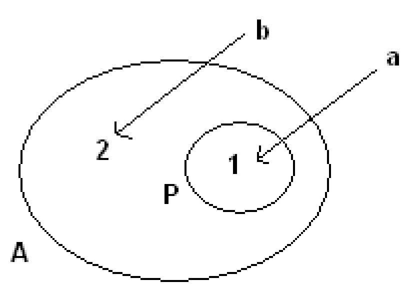


Figura 11.1

b) $\exists xPx \to Pa$

R. A fórmula é intuitivamente falsa: o fato de alguém ser filósofo, por exemplo, não implica que o indivíduo "a" seja. Vamos procurar uma estrutura $\mathcal{A}$ onde a fórmula seja falsa.

A fórmula é uma condicional. Logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F em alguma estrutura $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}(\exists xPx) = V$, ou seja, "alguém tem a propriedade P"
$\mathcal{A}(Pa) = F$, ou seja, "a não tem P".

Pela verdade do existencial, temos que $\mathcal{A}(\exists xPx) = V$ sse $\mathcal{A}(P\mathbf{i}) = V$ para algum indivíduo i. Como $\mathcal{A}(Pa) = F$, vamos imaginar que exista algum outro indivíduo (denotado por "b") que tenha a propriedade P, ou seja, para o qual $\mathcal{A}(Pb) = V$. Nestas condições, a fórmula será falsa. Vamos formalizar em seguida estas condições.

Seja L = {a, b, P} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2} o universo de $\mathcal{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:

I(a) = 1
I(b) = 2
I(P) = {2}

Daí, temos que

$\mathcal{A}(Pa) = F$, pois $I(a) \notin I(P)$
$\mathcal{A}(Pb) = V$, pois $I(b) \in I(P)$, logo, $\mathcal{A}(\exists xPx) = V$

Nesta interpretação, a fórmula $(\exists xPx \to Pa)$ é falsa.

Graficamente:

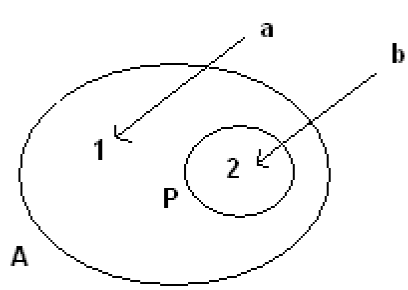


Figura 11.2

c) $(\exists x Px \wedge \exists x Qx) \rightarrow \exists x(Px \wedge Qx)$

R. A fórmula é intuitivamente falsa. "Existe alguém que é medico E existe alguém que é filósofo" não implica que "existe alguém que é médico E filósofo". Vamos procurar uma estrutura $\mathtt{A}$ onde a fórmula seja falsa.

A fórmula é uma condicional. Logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F em alguma estrutura $\mathtt{A}$:

$\mathtt{A}(\exists x Px \wedge \exists x Qx) = V$
$\mathtt{A}(\exists x(Px \wedge Qx)) = F$

Pela verdade da conjunção, temos que $\mathtt{A}(\exists x Px \wedge \exists x Qx) = V$ sse $\mathtt{A}(\exists x Px) = V$ e $\mathtt{A}(\exists x Qx) = V$ Da verdade do existencial, temos que $\mathtt{A}(\exists x Px) = V$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = V$ para algum indivíduo **i**. Instanciando a fórmula geral para x = a, por exemplo, temos $\mathtt{A}(Pa) = V$. Analogamente, temos que $\mathtt{A}(\exists x Qx) = V$ sse $\mathtt{A}(Q\mathbf{i}) = V$ para algum indivíduo i. Instanciando para x = b, temos $\mathtt{A}(Qb) = V$. Logo, uma interpretação onde "a tem P" e "b tem Q" torna o antecedente do condicional verdadeiro.

Pela falsidade do existencial, temos que o conseqüente do condicional $\mathtt{A}(\exists x(Px \wedge Qx)) = F$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i} \wedge Q\mathbf{i}) = F$ para *todo* indivíduo **i**. Supondo que o universo de $\mathtt{A}$ tem apenas dois indivíduos denotados por "a" e "b", precisamos obter $\mathtt{A}(Pa \wedge Qa) = F$ e $\mathtt{A}(Pb \wedge Qb) = F$

Pela falsidade da conjunção, pelo menos um ou ambos os lados da conjunção devem ser falsos, ou seja, nem a nem b podem ter *ambas* as propriedades P e Q. Vamos resumir estas condições em uma estrutura formalizada:

Seja L = {a, b, P, Q} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2} o universo de $\mathtt{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que: I(a) = 1, I(b) = 2, I(P) = {1}, I(Q) = {2}

Neste caso, temos que $\mathtt{A}(Pa) = V$, pois $I(a) \in I(P)$, e $\mathtt{A}(Qb) = V$, pois $I(b) \in I(Q)$. Além disso, como $I(a) \notin I(Q)$, $\mathtt{A}(Pa \wedge Qa) = F$, e como $I(b) \notin I(P)$, $\mathtt{A}(Pb \wedge Qb) = F$. Nestas condições a fórmula é falsa em $\mathtt{A}$, logo, é inválida.

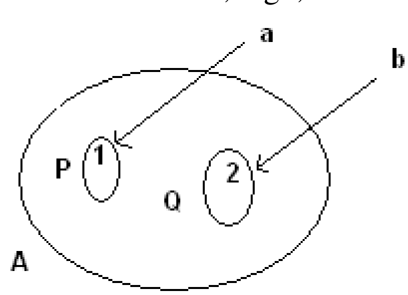


Figura 11.3

d) $\forall x(Ax \vee Bx) \rightarrow (\forall xAx \vee \forall xBx)$

R. A fórmula é intuitivamente inválida. "Todos são médicos OU filósofos" não implica que "Todos são médicos" OU "Todos são filósofos". Vamos procurar um contra-exemplo, uma estrutura onde a fórmula seja falsa.

A fórmula é uma condicional. Logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F em alguma estrutura $\mathcal{D}$:

$\mathcal{D}(\forall x(Ax \vee Bx)) = V$
$\mathcal{D}(\forall xAx \vee \forall xBx) = F$

Pela verdade do universal, temos que $\mathcal{D}(\forall x(Ax \vee Bx)) = V$ sse $\mathcal{D}(A\mathbf{i} \vee B\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**, ou seja, todo indivíduo **i** do universo de discurso tem que ter a propriedade A *ou* a propriedade B.

Da falsidade da disjunção temos que $\mathcal{D}(\forall xAx \vee \forall xBx) = F$ se $\mathcal{D}(\forall xAx) = F$ e $\mathcal{D}(\forall xBx) = F$
Pela falsidade do universal, temos que $\mathcal{D}(\forall xAx) = F$ sse $\mathcal{D}(A\mathbf{i}) = F$ para algum **i** (precisamos de algum indivíduo que não tenha a propriedade A). Analogamente, temos que $\mathcal{D}(\forall xBx) = F$ sse $\mathcal{D}(B\mathbf{i}) = F$ para algum **i** (pelo menos um indivíduo não deve ter a propriedade B).

Vamos formalizar as condições que identificamos acima para tornar a fórmula falsa:

Seja L = {a, b, c, A, B} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{D}$ = <D, I> uma estrutura para L.
Seja D = {1, 2, 3} o universo de $\mathcal{D}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = 1, I(b) = 2, I(c) =3, I(A) = {1, 2}, I(B) = {3}

Neste caso, todos os indivíduos {1, 2, 3} possuem *ou* a propriedade A, *ou* a propriedade B, já que $I(a) \in I(A)$, $I(b) \in I(A)$, e $I(c) \in I(B)$. Isso torna verdadeiro o antecedente da expressão que estamos analisando, $\mathcal{D}(\forall x(Ax \vee Bx)) = V$. Ao mesmo tempo, existe pelo menos um indivíduo que não tem A ($I(c) \notin I(A)$), e também existem indivíduos que não têm B ($I(a) \notin I(B)$ e $I(b) \notin I(B)$). Isso torna falso o conseqüente da expressão, ou seja, $\mathcal{D}(\forall xAx \vee \forall xBx) = F$. Nestas condições, a fórmula é falsa (e portanto, inválida).

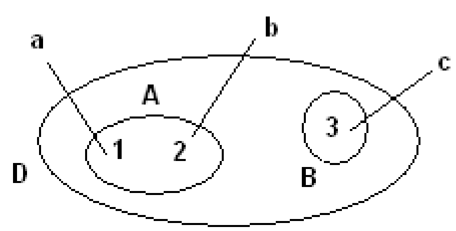


Figura 11.4
e) $\forall x \exists yRxy \rightarrow \exists y \forall xRxy$

R. A fórmula é inválida em função da inversão dos quantificadores. Se R é, por exemplo, a relação "x gosta de y", $\forall x \exists y Rxy$ "diz" que "para todo x, existe um y do qual x gosta", ou seja, "todos gostam de alguém". Já a forma $\exists y \forall x Rxy$ "diz" que "existe um indivíduo qual todos gostam", o que é diferente. Logo, a fórmula condicional é inválida, pois há contextos em que o antecedente pode ser verdadeiro e o conseqüente falso.

Vamos tentar formalizar um destes contextos onde a fórmula falsa:

Seja L = {a, b, c, R} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{A} = \langle A, I \rangle$ uma estrutura para L.
Seja A = {João, José, Maria} o universo de $\mathcal{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = João
I(b) = José
I(c) = Maria
$I(R) = \{x \in A \,/\, x \text{ gosta de } y\} = \{\langle \text{João, Maria} \rangle, \langle \text{José, Maria} \rangle, \langle \text{Maria, João} \rangle\}$

Pela verdade do universal, temos que $\mathcal{A}(\forall x \exists y Rxy) = V$ sse $\mathcal{A}(\exists y R\mathbf{i}y) = V$ para todo indivíduo **i**, ou seja, "se existe pelo menos um indivíduo do qual todos os indivíduos **i** gostam". Na interpretação acima, todos os indivíduos do universo de discurso (João, José, Maria) gostam de alguém, logo $\mathcal{A}(\forall x \exists y Rxy) = V$.

Pela falsidade do existencial, temos que $\mathcal{A}(\exists y \forall x Rxy) = F$ sse $\mathcal{A}(\forall x Rx\mathbf{i}) = F$ para todo **i**, ou seja, o conseqüente da expressão em análise será falso se não existir um indivíduo com o qual *todos* os indivíduos tenham a relação R.

Em uma notação algo informal, na interpretação sugerida, podemos notar que não existe um indivíduo **i** tal que:

$\langle I(a), I(\mathbf{i}) \rangle \in I(R)$
$\langle I(b), I(\mathbf{i}) \rangle \in I(R)$
$\langle I(c), I(\mathbf{i}) \rangle \in I(R)$

Ou seja, é falso que exista alguém de quem *todos* gostam. Por exemplo, João e José gostam de Maria, mas ela não gosta de si própria, já que o par $\langle I(c), I(c) \rangle \notin I(R)$.

Assim, a fórmula é falsa na estrutura $\mathcal{A}$, pois tem antecedente verdadeiro e conseqüente falso, e portanto a fórmula é inválida.

f) $(\forall xPx \to A) \to \forall x(Px \to A)$

R. Vejamos em que condições esta fórmula pode ser falsa. A fórmula é uma condicional. Logo, será F sse o antecedente for V e o conseqüente for F em alguma estrutura B:

B$(\forall xPx \to A) = V$
B$(\forall x(Px \to A)) = F$

Pela falsidade do universal, temos que B$(\forall x(Px \to A)) = F$ sse B(P**i** $\to$ A) = F para algum indivíduo **i**. Instanciando a fórmula para x = a, por exemplo, temos B$(Pa \to A) = F$. Esta é uma fórmula condicional, logo será F sse:

B(Pa) = V
B(A) = F   Onde A é uma letra sentencial

Pela verdade do condicional, temos que B$(\forall xPx \to A) = V$ em dois casos:

Antecedente falso	**OU**	Conseqüente verdadeiro
B$(\forall xPx) = F$		B(A) = V

Como precisamos preservar B(A) = F para evitar contradições (estamos procurando um contra-exemplo!), vamos seguir pelo caminho B$(\forall xPx) = F$. Pela falsidade do universal, temos que B$(\forall xPx) = F$ sse B(P**i**) = F para algum indivíduo **i**. Instanciando a fórmula para x = b, por exemplo, temos B(Pb) = F.

Nesta interpretação (B(Pa) = V, B(A) = F, B(Pb) = F) temos todas as condições necessárias para que a fórmula em análise (f) seja falsa:

Seja L = {a, b, A, P} uma linguagem de primeira ordem.
Seja B = <B, I> uma estrutura para L.
Seja B = {1, 2} o universo de A
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = 1, I(b) = 2, I(A) = F, I(P) = {1}

Nessa interpretação, B(Pa) = V, pois $I(a) \in I(P)$, e como I(A) = F, o conseqüente de (f) é verdadeiro: B$(\forall x(Px \to A)) = F$. Ao mesmo tempo, o antecedente de (f) B$(\forall xPx \to A)$ é verdadeiro, pois é um condicional cujo antecedente $\forall xPx$ é falso: como $I(b) \notin I(P)$, não é o caso que "todos tem P". Assim, (f) é falsa nesta interpretação, e portanto é inválida.

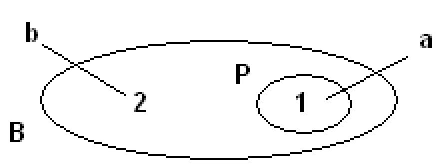


Figura 11.5

Exercício 11.3.

Mostre que cada um dos conjuntos de fórmulas abaixo é satisfatível, construindo uma estrutura que seja modelo dele.

a) $\Gamma = \{Pa, \neg Rab, \neg Pb\}$

R. Se Γ é satisfatível, então existe alguma estrutura $\mathtt{A}$ tal que $\mathtt{A} \models \Gamma$ ($\mathtt{A}$ é modelo de Γ), ou seja, uma estrutura onde todas as fórmulas de Γ são verdadeiras:

[1] $\mathtt{A}(Pa) = V$

[2] $\mathtt{A}(\neg Rab) = V$

[3] $\mathtt{A}(\neg Pb) = V$

De [2], temos:

[4] $\mathtt{A}(Rab) = F$

De [3], temos:

[5] $\mathtt{A}(Pb) = F$

Ou seja, precisamos construir uma estrutura onde "a tem P", "b não tem P" e "a não tem a relação R com b".

Seja L = {a, b, P, R} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A} = \langle A, I \rangle$ uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2} o universo de $\mathtt{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
$I(a) = 1$, $I(b) = 2$, $I(P) = \{1\}$, $I(R) = \{\langle 2,1 \rangle\}$

Nesta interpretação,

$\mathtt{A}(Pa) = V$	pois $I(a) \in I(P)$	
$\mathtt{A}(Pb) = F$	pois $I(b) \notin I(P)$	logo, $\mathtt{A}(\neg Pb) = V$
$\mathtt{A}(Rab) = F$	pois $\langle I(a), I(b) \rangle \notin I(R)$	logo, $\mathtt{A}(\neg Rab) = V$

Esta estrutura é modelo para Γ ($\mathtt{A} \models \Gamma$), logo, Γ é satisfatível.

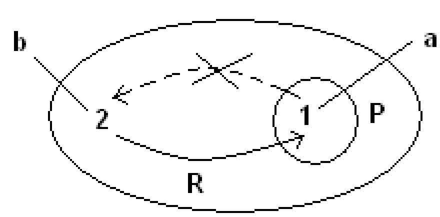


Figura 11.6

b) $\Gamma = \{\exists xQx, \exists xPx, \neg Pa \wedge \neg Qa\}$

R. Se Γ é satisfatível, então existe alguma estrutura $\mathtt{A}$ tal que $\mathtt{A} \models \Gamma$ ($\mathtt{A}$ é modelo de Γ), ou seja, uma estrutura onde todas as fórmulas de Γ são verdadeiras:

[1] $\mathtt{A}(\exists xQx) = V$
[2] $\mathtt{A}(\exists xPx) = V$
[3] $\mathtt{A}(\neg Pa \wedge \neg Qa) = V$

De [3], pela verdade da conjunção, temos que $\mathtt{A}(\neg Pa) = V$ e $\mathtt{A}(\neg Qa) = V$, ou seja:

[4] $\mathtt{A}(Pa) = F$
[5] $\mathtt{A}(Qa) = F$

De [1], pela verdade do existencial, temos que $\mathtt{A}(\exists xQx) = V$ sse $\mathtt{A}(Q\mathbf{i}) = V$ para algum **i**.
De [2], pela verdade do existencial, temos que $\mathtt{A}(\exists xPx) = V$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = V$ para algum **i**.

Ou seja, precisamos construir uma estrutura onde "alguém tem Q" e "alguém tem P" (pode ser o mesmo "alguém"!), mas "a não tem P nem Q".

Seja L = {a, b, c, P, Q} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A} = \langle A, I \rangle$ uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2, 3} o universo de $\mathtt{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = 1, I(b) = 2, I(c) = 3, I(P) = {2}, I(Q) = {3}

Nessa interpretação,

$\mathtt{A}(Pa) = F$ pois $I(a) \notin I(P)$
$\mathtt{A}(Qa) = F$ pois $I(a) \notin I(Q)$, logo, $\mathtt{A}(\neg Pa \wedge \neg Qa) = V$
$\mathtt{A}(Q\mathbf{i}) = V$ para algum **i** pois $I(c) \in I(Q)$, logo $\mathtt{A}(\exists xQx) = V$
$\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = V$ para algum **i** pois $I(b) \in I(P)$, logo $\mathtt{A}(\exists xPx) = V$

Esta estrutura é modelo para Γ ($\mathtt{A} \models \Gamma$), logo, Γ é satisfatível.

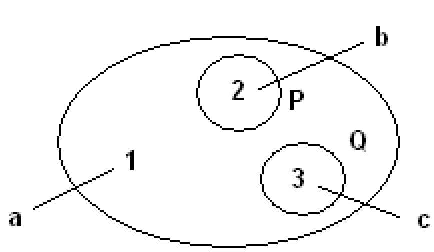


Figura 11.7

c) $\Gamma = \{\forall x(Ax \to Bx), Am, \neg Bp\}$

R. Se Γ é satisfatível, então existe alguma estrutura $\mathcal{D}$ tal que $\mathcal{D} \models \Gamma$ ($\mathcal{D}$ é modelo de Γ), ou seja, uma estrutura onde todas as fórmulas de Γ são verdadeiras:

[1] $\mathcal{D}(\forall x(Ax \to Bx)) = V$
[2] $\mathcal{D}(Am) = V$
[3] $\mathcal{D}(\neg Bp) = V$

De [3], temos:
[4] $\mathcal{D}(Bp) = F$

De [1], pela verdade do universal, temos que $\mathcal{D}(\forall x(Ax \to Bx)) = V$ sse $\mathcal{D}(A\mathbf{i} \to B\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Ou seja, "*qualquer indivíduo*: se ele tem A, então tem B".

De [2], "m tem A", logo precisamos criar uma estrutura onde "m tem B" para satisfazer [1], e onde "p não tem B" para satisfazer [4].

Seja L = {m, p, A, B} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{D}$ = <D, I> uma estrutura para L.
Seja D = {1, 2} o universo de $\mathcal{D}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(m) = 1, I(p) = 2, I(A) = {1}, I(B) = {1}

Nessa interpretação,

$\mathcal{D}(Am) = V$ pois $I(a) \in I(M)$
$\mathcal{D}(Bp) = F$ pois $I(p) \notin I(B)$, logo $\mathcal{D}(\neg Bp) = V$

$\mathcal{D}(A\mathbf{i} \to B\mathbf{i}) = V$ para todo **i**, pois o único indivíduo do universo que tem A é m, e m tem B, pois $I(m) \in I(A)$ e $I(m) \in I(B)$. Observe que p não tem A, logo não se requer que p tenha B, e de fato p *não pode* ter B.

Esta estrutura é modelo para Γ ($\mathcal{D} \models \Gamma$), logo, Γ é satisfatível.

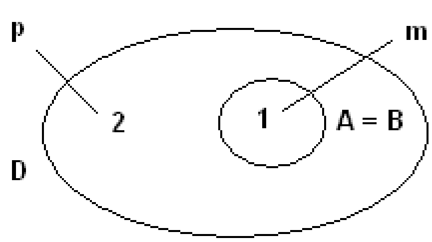


Figura 11.8

d) $\Gamma = \{\forall xPx, \neg\exists xQx\}$

R. Se Γ é satisfatível, então existe alguma estrutura $\mathtt{A}$ tal que $\mathtt{A} \models \Gamma$ ($\mathtt{A}$ é modelo de Γ), ou seja, uma estrutura onde todas as fórmulas de Γ são verdadeiras:

[1] $\mathtt{A}(\forall xPx) = V$
[2] $\mathtt{A}(\neg\exists xQx) = V$

De [2], temos
[3] $\mathtt{A}(\exists xQx) = F$

De [1], pela verdade do universal, temos que $\mathtt{A}(\forall xPx) = V$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = V$ para todo **i**.
De [3], pela falsidade do existencial, temos que $\mathtt{A}(\exists xQx) = F$ sse $\mathtt{A}(Q\mathbf{i}) = F$ para todo **i**.

Logo, logo precisamos criar uma estrutura onde "todos têm P"e "ninguém tem Q".

Seja L = {a, b, P, Q} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2} o universo de $\mathtt{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = 1, I(b) = 2, I(P) = {1, 2}, I(Q) = $\varnothing$

Nessa interpretação,

$\mathtt{A}(Pa) = V$ pois $I(a) \in I(P)$
$\mathtt{A}(Pb) = V$ pois $I(b) \in I(P)$, logo, $\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = V$ para todo **i** **,** ou $\mathtt{A}(\forall xPx) = V$

$\mathtt{A}(Qa) = F$ pois $I(a) \notin I(Q)$
$\mathtt{A}(Qb) = F$ pois $I(b) \notin I(Q)$, $\mathtt{A}(Q\mathbf{i}) = F$ para todo **i** , ou $\mathtt{A}(\exists xQx) = F$

Esta estrutura é modelo para Γ ($\mathtt{A} \models \Gamma$), logo, Γ é satisfatível.

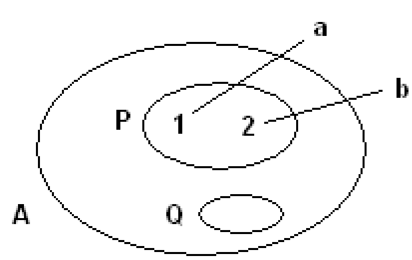


Figura 11.9

e) $\Gamma = \{Pa, \exists xPx \rightarrow \forall x\forall yLxy\}$

R. Se Γ é satisfatível, então existe alguma estrutura $\mathbb{A}$ tal que $\mathbb{A} \models \Gamma$ ($\mathbb{A}$ é modelo de Γ), ou seja, uma estrutura onde todas as fórmulas de Γ são verdadeiras:

[1] $\mathbb{A}(Pa) = V$
[2] $\mathbb{A}(\exists xPx \rightarrow \forall x\forall yLxy) = V$

Da verdade do condicional, [2] pode ser verdadeira em dois casos:

Antecedente falso...	OU	Conseqüente verdadeiro
[3] $\mathbb{A}(\exists xPx) = F$		[4] $\mathbb{A}(\forall x\forall yLxy) = V$

Da falsidade do existencial, temos que temos que $\mathbb{A}(\exists xPx) = F$ sse $\mathbb{A}(P\mathbf{i}) = F$ para todo **i**. Porém, este não pode ser o caso, pois de [1] temos que $\mathbb{A}(Pa) = V$, logo, "a tem P", de modo que o antecedente do condicional é verdadeiro. Assim, para satisfazer [2], temos que fazer com que seu conseqüente também seja verdadeiro.

De [4], da verdade do universal temos que $\mathbb{A}(\forall x\forall yLxy) = V$ sse $\mathbb{A}(\forall yL\mathbf{i}y) = V$ para todo **i**. Daí, temos que $\mathbb{A}(\forall yL\mathbf{i}y) = V$ sse $\mathbb{A}(L\mathbf{ij}) = V$ para todo indivíduo **j** (podendo ser **i = j**). Ou seja, a expressão será verdadeira se "todos tiverem a relação L com todos".

Seja L = {a, P, L} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathbb{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1} o universo de $\mathbb{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = 1, I(P) = {1}, I(L) = {<1,1>}

Nessa interpretação, o (único) indivíduo existente (denotado por "a") tem a relação L com si próprio, pois $\langle I(a), I(a)\rangle \in I(L)$. Além disso, $\mathbb{A}(Pa) = V$ pois $I(a) \in I(P)$.

Esta estrutura é modelo para Γ ($\mathbb{A} \models \Gamma$), logo, Γ é satisfatível.

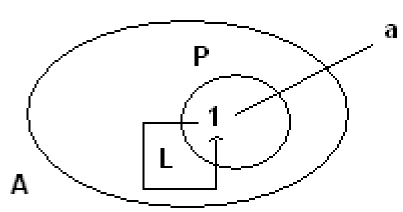


Figura 11.10

Exercício 11.4.
Mostre que:

a) $\neg A \vee Qb, \neg Qb \models \neg A$

R. De acordo com a Definição 11.3 (MORTARI 2001, 186), se Γ é um conjunto de fórmulas, e α é uma fórmula, dizemos que $\Gamma \models \alpha$ (α é conseqüência lógica de Γ) sse toda estrutura que é modelo de Γ é também modelo de α, ou seja, se $\mathtt{A} \models \Gamma$, então $\mathtt{A}(\alpha) = V$.

Uma maneira de provar que $\Gamma \models \alpha$ é utilizar a prova por absurdo: adotamos a hipótese inicial de que é *falso* que $\Gamma \models \alpha$. Neste caso, deve existir alguma estrutura $\mathtt{A}$ tal que $\mathtt{A} \models \Gamma$, e $\mathtt{A}(\alpha) = F$. Se esta hipótese nos levar a uma contradição, então ela é errônea, e assim fica provado que $\Gamma \models \alpha$. Esta técnica será utilizada em todos os exercícios desta seção.

Prova por absurdo:
Hipótese inicial: Existe $\mathtt{A}$ tal que $\mathtt{A} \models \Gamma$, e $\mathtt{A}(\alpha) = F$. Logo,

[1] $\mathtt{A}(\neg A \vee Qb) = V$
[2] $\mathtt{A}(\neg Qb) = V$
[3] $\mathtt{A}(\neg A) = F$

De [2], temos
[4] $\mathtt{A}(Qb) = F$

De [3], temos
[5] $\mathtt{A}(A) = V$

De [1], pela verdade da disjunção, temos:
[6] $\mathtt{A}(\neg A) = V$ OU [7] $\mathtt{A}(Qb) = V$

De [6], temos
[8] $\mathtt{A}(A) = F$

Em um caso, temos contradição entre [4] e [7], no outro temos contradição entre [5] e [8]. *Como em todos os casos ocorrem contradições*, concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, não existe uma estrutura que seja modelo de Γ e onde $\mathtt{A}(\alpha) = F$. Logo, Γ implica logicamente α (ou α é uma conseqüência lógica de Γ).

Em particular, (a) é uma instanciação da regra de inferência lógica *Silogismo Disjuntivo*:

$$\frac{\begin{array}{l}\alpha \vee \beta \\ \neg\beta\end{array}}{\alpha}$$

b) $\exists x(Fx \wedge Gx) \models \exists xFx$

R. Intuitivamente: "existe algo que tem F e tem G, logo, existe algo que tem F"

Por absurdo, hipótese inicial: Existe $\mathbb{A}$ tal que $\mathbb{A} \models \Gamma$, e $\mathbb{A}(\alpha) = F$. Logo,

[1] $\mathbb{A}(\exists x(Fx \wedge Gx)) = V$
[2] $\mathbb{A}(\exists xFx) = F$

De [1], pela verdade do existencial, temos que $\mathbb{A}(\exists x(Fx \wedge Gx)) = V$ sse $\mathbb{A}(F\mathbf{i} \wedge G\mathbf{i}) = V$ para algum **i**. Supondo que "a" denota algum indivíduo do universo de $\mathbb{A}$, instanciando a fórmula para x = a temos:

[3] $\mathbb{A}(Fa \wedge Ga) = V$

Da verdade da conjunção, temos:
[4] $\mathbb{A}(Fa) = V$
[5] $\mathbb{A}(Ga) = V$

De [2], pela falsidade do existencial, temos que $\mathbb{A}(\exists xFx) = F$ sse $\mathbb{A}(F\mathbf{i}) = F$ para todo **i**. Em particular, instanciando para x = a, temos:
[6] $\mathbb{A}(Fa) = F$

Assim, temos contradição entre [4] e [6]. Logo, α é uma conseqüência lógica de Γ.

c) $Pa \rightarrow \forall xLxa, \neg Lba \models \neg Pa$

R. Por absurdo, hipótese inicial: Existe $\mathbb{A}$ tal que $\mathbb{A} \models \Gamma$, e $\mathbb{A}(\alpha) = F$. Logo,

[1] $\mathbb{A}(Pa \rightarrow \forall xLxa) = V$
[2] $\mathbb{A}(\neg Lba) = V$
[3] $\mathbb{A}(\neg Pa) = F$

[4] $\mathbb{A}(Lba) = F$ *de [2]*
[5] $\mathbb{A}(Pa) = V$ *de [3]*

Da verdade do condicional, temos que [1] é verdadeira em dois casos:
[6] $\mathbb{A}(Pa) = F$ OU [7] $\mathbb{A}(\forall xLxa) = V$

De [7], da verdade do universal temos que $\mathbb{A}(\forall xLxa) = V$ sse $\mathbb{A}(L\mathbf{i}a) = V$ para todo **i**. Em particular, instanciando para x = b, temos:

[8] $\mathbb{A}(Lba) = V$

Contradição entre [5] e [6], e entre [4] e [8]. Logo, α é uma conseqüência lógica de Γ.

d) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall yPy \models \forall zQz$

R. Intuitivamente: "Qualquer x: se tem P, então tem Q. Todos têm P. Logo, todos têm Q"

Prova por absurdo:

Hipótese inicial: Existe $\mathtt{A}$ tal que $\mathtt{A} \models \Gamma$, e $\mathtt{A}(\alpha) = F$. Logo,

[1] $\mathtt{A}(\forall x(Px \rightarrow Qx)) = V$
[2] $\mathtt{A}(\forall yPy) = V$
[3] $\mathtt{A}(\forall zQz) = F$

De [3], pela falsidade do universal, temos que $\mathtt{A}(\forall zQz) = F$ sse $\mathtt{A}(Q\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, instanciando para z = a, temos:

[4] $\mathtt{A}(Qa) = F$

De [2], da verdade do universal temos que $\mathtt{A}(\forall yPy) = V$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Em particular, instanciando para y = a, temos:

[5] $\mathtt{A}(Pa) = V$

De [1], da verdade do universal temos que $\mathtt{A}(\forall x(Px \rightarrow Qx)) = V$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i} \rightarrow Q\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Em particular, instanciando para x = a, temos:

[6] $\mathtt{A}(Pa \rightarrow Qa) = V$

Pela verdade do condicional, [6] será V em dois casos:

Antecedente falso		Conseqüente verdadeiro
[7] $\mathtt{A}(Pa) = F$	OU	[8] $\mathtt{A}(Qa) = V$

Em um caso, temos contradição entre [5] e [7].
No outro caso, temos contradição entre [4] e [8].

Como em todos os casos ocorrem contradições, concluímos que a hipótese inicial é incorreta, portanto, não existe uma estrutura que seja modelo de Γ e onde $\mathtt{A}(\alpha) = F$. Logo, α é uma conseqüência lógica de Γ, conforme se pretendia demonstrar.

Exercício 11.5.
Mostre que:

a) $\neg A \vee Qb, Qb \not\models \neg A$

R. Se Γ é um conjunto de fórmulas, e α é uma fórmula. Neste e nos próximos exercícios desta seção, desejamos mostrar que $\Gamma \not\models \alpha$ (α não é conseqüência lógica de Γ), ou seja, queremos uma estrutura que seja modelo de Γ e na qual $\mathtt{A}(\alpha) = F$.

Ou seja, desejamos encontrar uma estrutura $\mathtt{A}$ tal que:

[1] $\mathtt{A}(\neg A \vee Qb) = V$
[2] $\mathtt{A}(Qb) = V$
[3] $\mathtt{A}(\neg A) = F$

De [3], temos:
[4] $\mathtt{A}(A) = V$

De [1], pela verdade da disjunção, temos que:
[5] $\mathtt{A}(\neg A) = V$ OU [6] $\mathtt{A}(Qb) = V$

O caso [5] vai produzir contradição com [4], mas o caso [6] é compatível com [2] e *não produz contradição*.

Seja $L = \{b, A, Q\}$ uma linguagem de primeira ordem, onde A é uma letra sentencial e Q uma propriedade.
Seja $\mathtt{A} = \langle A, I \rangle$ uma estrutura para L.
Seja $A = \{1\}$ o universo de $\mathtt{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
$I(b) = 1$
$I(A) = V$
$I(Q) = \{1\}$

Nessa estrutura, $\mathtt{A}(Qb) = V$ pois $I(b) \in I(Q)$, e daí $\mathtt{A}(\neg A \vee Qb) = V$. Como $\mathtt{A}(A) = V$, temos que $\mathtt{A}(\neg A) = F$. Assim, as fórmulas de Γ são todas verdadeiras e a fórmula α é falsa, portanto, α não é conseqüência lógica de Γ.

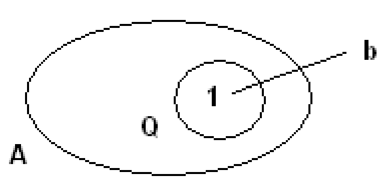


Figura 11.11

b) $\exists xFx \not\models \exists x(Fx \wedge Gx)$

R. Desejamos encontrar uma estrutura $\mathcal{A}$ tal que:

[1] $\mathcal{A}(\exists xFx) = V$
[2] $\mathcal{A}(\exists x(Fx \wedge Gx)) = F$

De [1], pela verdade do existencial, temos que $\mathcal{A}(\exists xFx) = V$ sse $\mathcal{A}(F\mathbf{i}) = V$ para algum **i**. Supondo que "a" denota algum indivíduo do universo de $\mathcal{A}$, instanciando para x = a temos:

[3] $\mathcal{A}(Fa) = V$

De [2], da falsidade do existencial, temos que $\mathcal{A}(\exists x(Fx \wedge Gx)) = F$ sse $\mathcal{A}(F\mathbf{i} \wedge G\mathbf{i}) = F$ para todo **i**. Em particular, se x = a, temos:

[4] $\mathcal{A}(Fa \wedge Ga) = F$

De [4], da falsidade da conjunção, temos que $\mathcal{A}(Fa \wedge Ga) = F$ em dois casos:

[5] $\mathcal{A}(Fa) = F$ OU [6] $\mathcal{A}(Ga) = F$

O caso [5] vai produzir contradição com [3], logo não nos interessa, mas o caso [6] *não produz contradição*. Logo precisamos de uma estrutura onde $\mathcal{A}(Fa) = V$ para satisfazer [1] e onde $\mathcal{A}(Ga) = F$, que satisfaz [2] sem contradizer [1].

Seja L = {a, F, G} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1} o universo de $\mathcal{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(b) = 1
I(F) = {1}
I(G) = $\varnothing$

Nessa estrutura, $\mathcal{A}(Fa) = V$, pois $I(a) \in I(F)$, e $\mathcal{A}(Ga) = F$, pois $I(G) = \varnothing$. Observar que definir uma propriedade como sendo $\varnothing$ é aceitável, pois o vazio é subconjunto de qualquer conjunto. Assim, a fórmula $\exists xFx$ é verdadeira e a fórmula $\exists x(Fx \wedge Gx)$ é falsa, portanto, a segunda não é conseqüência lógica da primeira.

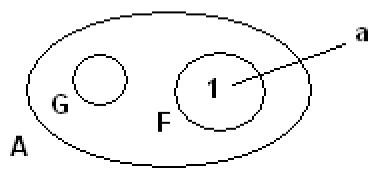


Figura 11.12

c) $Pa \rightarrow \forall xLxa, \exists x\neg Lax \not\models \neg Pa$

R. Desejamos encontrar uma estrutura $\mathcal{A}$ tal que:

[1] $\mathcal{A}(Pa \rightarrow \forall xLxa) = V$
[2] $\mathcal{A}(\exists x\neg Lax) = V$
[3] $\mathcal{A}(\neg Pa) = F$

[4] $\mathcal{A}(Pa) = V$ *de [3]*

De [2], da verdade do existencial, temos que $\mathcal{A}(\exists x\neg Lax) = V$ sse $\mathcal{A}(\neg La\mathbf{i}) = V$ para algum **i**. Supondo que "b" denota algum indivíduo do universo, instanciando para x = b temos:

[5] $\mathcal{A}(\neg Lab) = V$
[6] $\mathcal{A}(Lab) = F$ *de [5]*

De [1], pela verdade do condicional, temos que $\mathcal{A}(Pa \rightarrow \forall xLxa) = V$ em dois casos:

Antecedente falso		Conseqüente verdadeiro
[7] $\mathcal{A}(Pa) = F$	OU	[8] $\mathcal{A}(\forall xLxa) = V$

O caso [7] não nos interessa, pois produz contradição com [4] e estamos procurando um contra-exemplo onde não decorram contradições das hipóteses iniciais. Logo, vamos seguir pela opção [8]. Pela verdade do universal temos que $\mathcal{A}(\forall xLxa) = V$ sse $\mathcal{A}(L\mathbf{i}a) = V$ para todo **i**. Ou seja, "todo indivíduo do universo tem a relação L com o indivíduo a (inclusive ele próprio)". Supondo que no universo só existam dois indivíduos, denotados por "a" e "b", temos que $\mathcal{A}(Laa) = V$ e $\mathcal{A}(Lba) = V$

Seja L = {a, b, P, L} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2} o universo de $\mathcal{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = 1, I(b) = 2, I(P) = {1} e I(L) = {<1,1>, <2,1>}

Nessa estrutura, $\mathcal{A}(Pa) = V$, pois $I(a) \in I(P)$, e $\mathcal{A}(Lab) = F$, pois $\langle 1,2\rangle \notin I(L)$. Ao mesmo tempo, $\mathcal{A}(Laa) = V$ e $\mathcal{A}(Lba) = V$ pois $\langle 1,1\rangle \in I(L)$ e $\langle 2,1\rangle \in I(L)$. Neste exemplo, as fórmulas $\{Pa \rightarrow \forall xLxa, \exists x\neg Lax\}$ são verdadeiras e a fórmula $\neg Pa$ é falsa, logo $\neg Pa$ não é conseqüência lógica das fórmulas anteriores.

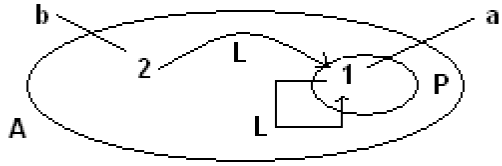


Figura 11.13

d) $\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall yQy \not\models \forall zPz$

R. Desejamos encontrar uma estrutura $\mathcal{A}$ tal que:

[1] $\mathcal{A}(\forall x(Px \rightarrow Qx)) = V$
[2] $\mathcal{A}(\forall yQy) = V$
[3] $\mathcal{A}(\forall zPz) = F$

De [3], da falsidade do universal, temos que $\mathcal{A}(\forall zPz) = F$ sse $\mathcal{A}(P\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, instanciando para z = a, temos:

[4] $\mathcal{A}(Pa) = F$

De [2], da verdade do universal temos que $\mathcal{A}(\forall yQy) = V$ sse $\mathcal{A}(Q\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Ou seja, para que [2] seja satisfeita, "Todos têm Q".

De [1], da verdade do universal temos que $\mathcal{A}(\forall x(Px \rightarrow Qx)) = V$ sse $\mathcal{A}(P\mathbf{i} \rightarrow Q\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Ou seja, para que [1] seja satisfeita, "qualquer indivíduo: Se tem P, então tem Q".

Seja L = {a, b, P, Q} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {1, 2} o universo de $\mathcal{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = 1, I(b) = 2, I(P) = {2} e I(Q) = A

Neste caso, $\mathcal{A}(Pa) = F$, pois $I(a) \notin I(P)$, o que satisfaz a hipótese de que $\mathcal{A}(\forall zPz) = F$. Como I(Q) = A = {1, 2}, a hipótese de que $\mathcal{A}(\forall yQy) = V$ também é satisfeita, pois "Todos têm Q". Notar que não há problema em que a interpretação de uma propriedade seja o próprio conjunto universo, isto apenas significa que todos os indivíduos têm tal propriedade. Finalmente, $\mathcal{A}(\forall x(Px \rightarrow Qx)) = V$ também é satisfeita, pois o único indivíduo que tem P (denotado por "b") também tem Q, já que $I(b) \in I(P)$ e $I(b) \in I(Q)$.

Neste exemplo, as fórmulas $\{\forall x(Px \rightarrow Qx), \forall yQy\}$ são verdadeiras e a fórmula $\forall zPz$ é falsa, logo esta última não é conseqüência lógica das anteriores.

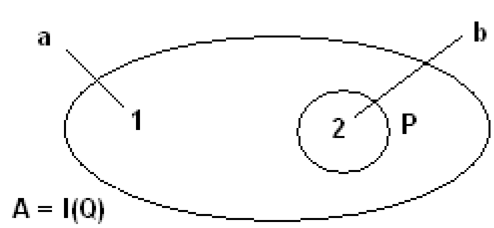


Figura 11.14

Exercício 11.6.
Os argumentos a seguir são bem simples. Transcreva-os para a linguagem do CQC, usando a notação sugerida, e tente determinar sua validade - ou construindo uma estrutura onde as premissas são verdadeiras e a conclusão, falsa, ou demonstrando que não é possível construir uma tal estrutura.

a) Beethoven é um músico alemão,
Logo, Beethoven é um músico.
(b: Beethoven, M: x é um músico, A: x é alemão)

R. Simbolizando:

[P] $Mb \wedge Ab$ (Beethoven é músico E Beethoven é alemão)

[C] Mb

O argumento é intuitivamente válido. Vamos tentar demonstrar sua validade utilizando uma prova por absurdo, supondo que existe alguma estrutura $\mathbb{A}$ que é modelo para o conjunto das premissas (onde todas as premissas são verdadeiras) e onde a conclusão é falsa, e tentando derivar desta hipótese uma contradição:

Prova por absurdo: hipótese inicial

[1] $\mathbb{A}(Mb \wedge Ab) = V$
[2] $\mathbb{A}(Mb) = F$

De [1], pela verdade da conjunção, temos que $\mathbb{A}(Mb \wedge Ab) = V$ sse:

[3] $\mathbb{A}(Mb) = V$
[4] $\mathbb{A}(Ab) = V$

Temos contradição entre [2] e [3], logo, a hipótese inicial é falsa: não existe uma estrutura onde a premissa seja verdadeira e a conclusão possa ser falsa. Logo, o argumento é válido.

Formalmente, se Γ é o conjunto das premissas de um argumento e α é a sua conclusão, temos que $\Gamma \models \alpha$ (a conclusão é uma conseqüência lógica das premissas) em um argumento válido.

b) Romeu ama Julieta.
Logo, alguém ama Julieta.
(r: Romeu, j:Julieta, A: x ama y)

R. Simbolizando:

[P] Arj

[C] ∃xAxj

O argumento é intuitivamente válido. Vamos demonstrar sua validade por meio de uma prova por absurdo, supondo que existe alguma estrutura A onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, e tentando derivar desta hipótese uma contradição:

Hipótese inicial

[1] A(Arj) = V
[2] A(∃xAxj) = F

De [2], da falsidade do existencial, temos que A(∃xAxj) = F sse A(A**i**j) = F para todo indivíduo **i**. Em particular, se x = r, temos:

[3] A(Arj) = F

Como temos contradição entre [1] e [3], a hipótese inicial é falsa. Não existe uma estrutura onde a premissa seja verdadeira e a conclusão possa ser falsa. Logo, o argumento é válido.

c) Alguém assassinou Kennedy.
Logo, Oswald assassinou Kennedy.
(k: Kennedy, o: Oswald, A: x assassina y)

R. Simbolizando:

[P] $\exists xAxk$

[C] Aok

O argumento é intuitivamente inválido, pois do fato de alguém ter assassinado Kennedy não se segue logicamente que o assassino foi Oswald (poderia ter sido, digamos, Albert).

Vamos demonstrar a invalidade procurando um contra-exemplo, ou seja, construindo uma estrutura $\mathtt{A}$ onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa sem que ocorram contradições.

Procuramos uma estrutura onde:

[1] $\mathtt{A}(\exists xAxk) = V$
[2] $\mathtt{A}(Aok) = F$

De [1], da verdade do existencial, temos que $\mathtt{A}(\exists xAxk) = V$ sse $\mathtt{A}(A\mathbf{i}k) = V$ para algum **i**. Supondo que "a" denota um indivíduo cujo nome é "Albert", instanciando para x = a temos:

[3] $\mathtt{A}(Aak) = V$

Não há qualquer contradição nesta hipótese, e neste exemplo o argumento é inválido, o que prova que sua *forma lógica* é inválida, de modo que qualquer outro argumento da mesma forma também será inválido. Vamos formalizar esta interpretação.

Seja $L = \{a, k, o, A\}$ uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A} = \langle A, I \rangle$ uma estrutura para L.
Seja A = {Albert, Kennedy, Oswald} o universo de $\mathtt{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = Albert
I(k) = Kennedy
I(o) = Oswald
I(A) = {<Albert, Kennedy>}

Como $\langle I(a), I(k) \rangle \in I(A)$, a premissa é verdadeira (Albert assassinou Kennedy satisfaz a premissa de que alguém o fez). Ao mesmo tempo, como $\langle I(o), I(k) \rangle \notin I(A)$, temos que $\mathtt{A}(Aok) = F$, de modo que a conclusão é falsa.

Logo, o argumento é inválido em função de sua forma lógica.

d) Todos os gregos são mortais.
Logo, Sócrates é mortal.
(s: Sócrates, G: x é um grego, M: x é mortal)

R. Simbolizando:

[P] $\forall x(Gx \rightarrow Mx)$

[C] Ms

O argumento parece intuitivamente válido, pois *sabemos* que Sócrates era grego e que ele naturalmente também era mortal. Porém, é logicamente inválido. O problema é que o argumento não afirma em suas premissas que "Sócrates era grego", e assim não estamos autorizados a inferir *logicamente* da premissa dada que ele era mortal (embora *saibamos* que era, contingencialmente). Esta diferença entre o que parece ser "informalmente válido" mas é "logicamente inválido" decorre da definição da implicação material ($\alpha \rightarrow \beta$).

Vejamos: pela verdade do universal, da premissa dada temos que:

$\forall x(Gx \rightarrow Mx) = V$ sse $(G\mathbf{i} \rightarrow M\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Instanciando, por exemplo, para x = s, temos $(Gs \rightarrow Ms) = V$. Observar que a premissa pode ser verdadeira em dois casos: se o conseqüente é verdadeiro ("Sócrates é mortal") ou se o antecedente é falso ("Sócrates não é grego").

Vamos assumir, por absurdo, que existe uma estrutura A onde a premissa é verdadeira e a conclusão é falsa. Neste caso, teremos uma contradição com o caso onde o conseqüente do condicional da premissa é verdadeiro. Porém, no caso onde o antecedente é falso (Sócrates não é grego), nenhuma contradição é gerada. Isso pode ser visualizado mais facilmente através de um tablô:

hipóteses	[1]	**V** $\forall x(Gx \rightarrow Mx)$		
iniciais	[2]	**F** Ms		
		|		
de [1], **UV**, x=a	[3]	√ **V** $(Gs \rightarrow Ms)$		
de [3]	[4]	**F** Gs	**V** Ms	[5] *de [3]*
		?	**x**	
			CTR (2, 5)	

O tablô está completo e há um ramo que termina aberto (sem contradição). Logo, a conclusão Ms *não é* conseqüência lógica da premissa $\forall x(Gx \rightarrow Mx)$, pois a primeira pode ser verdadeira e a segunda, falsa. Para exercícios sobre tablôs, ver Capítulo 12.

e) Todos os marcianos são verdes. Todos os gatos são marcianos.
Logo, todos os gatos são verdes.
(M: x é marciano, G: x é um gato, B: x é verde).

R. Simbolizando:

[P1] $\forall x(Mx \rightarrow Bx)$
[P2] $\forall x(Gx \rightarrow Mx)$

[C] $\forall x(Gx \rightarrow Bx)$

O argumento é formalmente e intuitivamente válido. É da forma AAA-1 (BARBARA), um silogismo categórico de forma típica. Vamos provar sua validade formal por absurdo, construindo uma estrutura $\mathtt{A}$ onde por hipótese as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, e derivando uma contradição:

[1] $\mathtt{A}(\forall x(Mx \rightarrow Bx)) = V$
[2] $\mathtt{A}(\forall x(Gx \rightarrow Mx)) = V$
[3] $\mathtt{A}(\forall x(Gx \rightarrow Bx)) = F$

De [3], da falsidade do universal, temos que $\mathtt{A}(\forall x(Gx \rightarrow Bx)) = F$ sse $\mathtt{A}(G\mathbf{i} \rightarrow B\mathbf{i}) = F$ para algum indivíduo **i**. Em particular, instanciando para x = a, temos:
[4] $\mathtt{A}(Ga \rightarrow Ba) = F$ Da falsidade do condicional, temos:
[5] $\mathtt{A}(Ga) = V$
[6] $\mathtt{A}(Ba) = F$ Nestas condições a conclusão será falsa.

De [2], pela verdade do universal, temos que $\mathtt{A}(\forall x(Gx \rightarrow Mx)) = V$ sse $\mathtt{A}(G\mathbf{i} \rightarrow M\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Em particular, se instanciamos para x = a, temos

[7] $\mathtt{A}(Ga \rightarrow Ma) = V$. Pela verdade do condicional,
[8] $\mathtt{A}(Ga) = F$ OU [9] $\mathtt{A}(Ma) = V$
Observar que o caso [8] gera contradição com [5]. Logo, para que esta premissa seja verdadeira e a conclusão falsa, temos que aceitar [9] e supor $\mathtt{A}(Ma) = V$.

De [1], da verdade do universal temos que $\mathtt{A}(\forall x(Mx \rightarrow Bx)) = V$ sse $\mathtt{A}(M\mathbf{i} \rightarrow B\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Em particular, se instanciamos para x = a, temos

[10] $\mathtt{A}(Ma \rightarrow Ba) = V$. Pela verdade do condicional,
[11] $\mathtt{A}(Ma) = F$ OU [12] $\mathtt{A}(Ba) = V$

Observar que o caso [12] gera contradição com [6]. Logo, para que esta premissa seja verdadeira e a conclusão falsa, temos que aceitar [11] e supor $\mathtt{A}(Ma) = F$. Porém, isso é contraditório com as condições de verdade da premissa anterior, que requer $\mathtt{A}(Ma) = V$. Assim, em todos os casos temos contradições. Logo, a hipótese inicial é falsa, não existe uma estrutura onde as premissas sejam V e a conclusão F, e portanto, o argumento é válido.

f) Gatos e cachorros são mamíferos. Miau é um gato. Logo, Miau é mamífero.
(m: Miau, G: x é um gato, C: x é um cachorro, M: x é mamífero)

R. Simbolizando:

[P1] $\forall x((Gx \vee Cx) \rightarrow Mx)$
[P2] Gm

[C] Mm

Observar que na tradução da primeira premissa o "e" do português foi traduzido como "OU" lógico. Não existe nada que seja gato E cachorro ao mesmo tempo, logo se alguma coisa é um gato OU é um cachorro, então é um mamífero. O argumento é intuitivamente válido, como se pode visualizar graficamente:

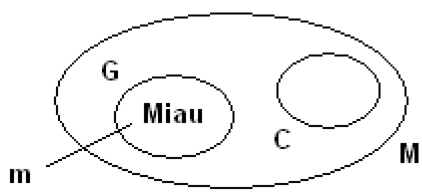


Figura 11.15

Prova de validade: Por absurdo, vamos supor que existe alguma estrutura $\mathbb{A}$ onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, e daí tentar derivar uma contradição.

[1] $\mathbb{A}(\forall x((Gx \vee Cx) \rightarrow Mx)) = V$
[2] $\mathbb{A}(Gm) = V$
[3] $\mathbb{A}(Mm) = F$

De [1], temos que $\mathbb{A}(\forall x((Gx \vee Cx) \rightarrow Mx)) = V$ sse $\mathbb{A}((G\mathbf{i} \vee C\mathbf{i}) \rightarrow M\mathbf{i}) = V$ para todo indivíduo **i**. Em particular, se instanciamos para x = m, temos
[4] $\mathbb{A}((Gm \vee Cm) \rightarrow Mm) = V$

Pela verdade do condicional, [4] será verdadeira em dois casos:
[5] $\mathbb{A}(Gm \vee Cm) = F$ OU [6] $\mathbb{A}(Mm) = V$

Como [6] e [3] são contraditórias, vejamos onde nos leva o caso [5]. Pela falsidade da disjunção, temos que $\mathbb{A}(Gm \vee Cm) = F$ sse:
[7] $\mathbb{A}(Gm) = F$
[8] $\mathbb{A}(Cm) = F$

Mas [7] contradiz [2], de modo que neste caso também temos contradição. Assim, a hipótese inicial é falsa. Não existe estrutura onde as premissas possam ser verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é formalmente válido.

g) Stefan e Mathias gostam de chocolate. Todos os que gostam de pipoca gostam de chocolate. Logo, Stefan e Mathias gostam de pipoca.
(s: Stefan, m: Mathias, C: x gosta de chocolate, P: x gosta de pipoca).

R. Simbolizando:

[P1] $Cs \wedge Cm$
[P2] $\forall x(Px \rightarrow Cx)$

[C] $Ps \wedge Pm$

O argumento é intuitivamente inválido. Stefan e Mathias podem perfeitamente gostar de chocolate e não gostar de pipoca, ou pode ser que apenas um deles goste de pipoca e de chocolate. Também pode se que não existam indivíduos que gostem de pipoca, e ainda neste caso a premissa [P2] seria verdadeira. Vamos tentar produzir um contra-exemplo, isto é, construir uma estrutura onde as premissas sejam verdadeiras e a conclusão seja falsa.

Seja L = {s, m, C, P} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathtt{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {Stefan, Mathias} o universo de $\mathtt{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(s) = Stefan
I(m) = Mathias
I(C) = $\{x \in A$ / x gosta de chocolate$\}$ = {Stefan, Mathias}
I(P) = $\{x \in A$ / x gosta de pipoca$\} = \varnothing$

Nesta interpretação, $\mathtt{A}(Cs) = V$ pois $I(s) \in I(C)$, e também $\mathtt{A}(Cm) = V$ pois $I(m) \in I(C)$. Logo, pela verdade da conjunção, a premissa [P1] é verdadeira: $\mathtt{A}(Cs \wedge Cm) = V$.

Com relação à premissa [P2], pela verdade do universal, temos que $\mathtt{A}(\forall x(Px \rightarrow Cx)) = V$ sse $\mathtt{A}(P\mathbf{i} \rightarrow C\mathbf{i}) = V$ para todo i. Como $I(P) = \varnothing$, o antecedente do condicional será sempre falso, e portanto a premissa [P2] também será verdadeira nesta interpretação.

Finalmente, a conclusão ($Ps \wedge Pm$) é falsa, pois $\mathtt{A}(Ps) = F$ e $\mathtt{A}(Pm) = F$, já que $I(P) = \varnothing$.

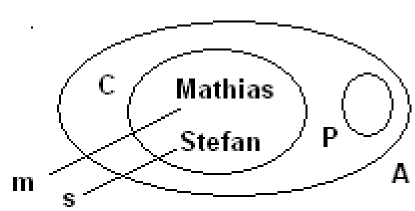


Figura 11.16

Como existem estruturas onde as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão pode ser falsa, a forma do argumento é inválida.

h) Se Stefan gosta de chocolate, então Mathias gosta de chocolate.
Quem gosta de chocolate não gosta de espinafre.
Logo, se Stefan gosta de chocolate, então Mathias não gosta de espinafre.
(s: Stefan, m: Mathias, C: x gosta de chocolate, E: x gosta de espinafre).

R. Simbolizando:

[P1] $Cs \rightarrow Cm$
[P2] $\forall x(Cx \rightarrow \neg Ex)$

[C] $Cs \rightarrow \neg Em$

Argumento intuitivamente válido. Vamos tentar provar a validade por absurdo, supondo supor que existe alguma estrutura $\mathbb{A}$ onde as premissas são verdadeiras e a conclusão é falsa, e daí tentar derivar uma contradição.

[1] $\mathbb{A}(Cs \rightarrow Cm) = V$
[2] $\mathbb{A}(\forall x(Cx \rightarrow \neg Ex)) = V$
[3] $\mathbb{A}(Cs \rightarrow \neg Em) = F$

De [3], pela falsidade do condicional, temos:

[4] $\mathbb{A}(Cs) = V$
[5] $\mathbb{A}(\neg Em) = F$
[6] $\mathbb{A}(Em) = V$ *de [5]*

De [2], pela verdade do universal, temos que $\mathbb{A}(\forall x(Cx \rightarrow \neg Ex)) = V$ sse $\mathbb{A}(C\mathbf{i} \rightarrow \neg E\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Em particular, se instanciamos para x = m, temos:

[7] $\mathbb{A}(Cm \rightarrow \neg Em) = V$

Pela verdade do condicional, [7] será verdadeira em dois casos:

[8] $\mathbb{A}(Cm) = F$ OU [9] $\mathbb{A}(\neg Em) = V$

De [9], obtemos
[10] $\mathbb{A}(Em) = F$, o que contradiz [6].

Pela verdade do condicional, [1] será verdadeira em dois casos:

[11] $\mathbb{A}(Cs) = F$ OU [12] $\mathbb{A}(Cm) = V$

Em todos os casos nos deparamos com contradições: [11] contradiz [4], [12] contradiz [8]. Assim, a hipótese inicial é falsa. Não existe estrutura onde as premissas possam ser verdadeiras e a conclusão falsa. Portanto, o argumento é formalmente válido.

i) Todos os filósofos são malucos. Todo mundo é maluco.
Logo, todos são filósofos.
(F: x é um filósofo, M: x é maluco).

R. Simbolizando:

[P1] $\forall x(Fx \rightarrow Mx)$
[P2] $\forall xMx$

[C] $\forall xFx$

O argumento é intuitivamente inválido. Podem existir indivíduos que sejam malucos e não sejam filósofos, a conclusão não se segue das premissas. Vamos produzir um contra-exemplo, construindo uma estrutura onde as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa.

Para que a conclusão [C] seja falsa, pela falsidade do universal, temos que $\mathcal{A}(\forall xMx) = F$ sse $\mathcal{A}(F\mathbf{i}) = F$ para algum i. Em particular, supondo que exista um indivíduo no universo denotado por "a" que não é filósofo, temos $\mathcal{A}(Fa) = F$. Para que a premissa [P2] seja V, pela verdade do universal, temos que $\mathcal{A}(\forall xMx) = V$ sse $\mathcal{A}(M\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Em particular, para x = a, temos $\mathcal{A}(Ma) = V$. Finalmente, para que a premissa [P1] seja V, pela verdade do universal, temos que $\mathcal{A}(\forall x(Fx \rightarrow Mx)) = V$ sse $\mathcal{A}(F\mathbf{i} \rightarrow M\mathbf{i}) = V$ para todo **i**. Em particular, para x = a, temos $\mathcal{A}(Fa \rightarrow Ma) = V$. Observar que se o antecedente (Fa) for falso e o conseqüente (Ma) for verdadeiro, a condicional será verdadeira na estrutura. Formalmente:

Seja L = {a, F, M} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathcal{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {Bill Gates} o universo de $\mathcal{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = Bill Gates
$I(F) = \{x \in A \mid x \text{ é filósofo}\} = \emptyset$
$I(M) = \{x \in A \mid x \text{ é maluco}\} = A$

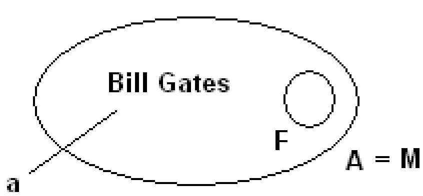


Figura 11.17

Nessa estrutura, $\mathcal{A}(Fa) = F$, pois $I(a) \notin I(F)$. Logo, a conclusão $\forall xFx$ é falsa. Ao mesmo tempo, o único indivíduo existente no universo é maluco ($I(a) \in I(M)$), logo, a segunda premissa $\forall xMx$ é verdadeira. Como neste modelo não existem filósofos ($I(F) = \emptyset$), a primeira premissa $\forall x(Fx \rightarrow Mx)$ também é verdadeira, pois seu antecedente é falso. Como nesta estrutura as premissas são verdadeiras e a conclusão falsa, o argumento é inválido.

j) As rosas são vermelhas, e as violetas são azuis. Logo, existem coisas vermelhas e existem coisas azuis. (R: x é uma rosa, A: x é vermelha, L: x é uma violeta, B: x é azul).

R. Simbolizando:

[P1] $\forall x(Rx \rightarrow Ax) \land \forall x(Lx \rightarrow Bx)$

[C] $\exists xAx \land \exists xBx$

O argumento é intuitivamente inválido. Não se declara que *existem* rosas e que *existem* violetas, apenas que, "se algo *é* uma rosa, então *é* vermelho", e "se algo *é* uma violeta, então *é* azul". Por analogia, se declaramos que "As fadas são vermelhas, e os centauros são azuis", não se segue *logicamente* que "existem coisas vermelhas e existem coisas azuis". Para obter um contra-exemplo, vamos construir uma estrutura onde a premissa é verdadeira e a conclusão falsa, o que prova que a forma do argumento é inválida.

Seja L = {a, R, A, L, B} uma linguagem de primeira ordem.
Seja $\mathbb{A}$ = <A, I> uma estrutura para L.
Seja A = {Immanuel Kant} o universo de $\mathbb{A}$
Seja I uma função de interpretação tal que:
I(a) = Immanuel Kant
$I(R) = \{x \in A \,/\, x \text{ é uma rosa}\} = \varnothing$
$I(A) = \{x \in A \,/\, x \text{ é vermelha}\} = \varnothing$
$I(L) = \{x \in A \,/\, x \text{ é uma violeta}\} = \varnothing$
$I(B) = \{x \in A \,/\, x \text{ é azul}\} = \varnothing$

Com relação a I(a) = Immanuel Kant, estamos supondo que este é o único indivíduo existente em nosso universo de discurso. Observar que, de acordo com (MORTARI 2001, 158), o universo A de uma estrutura $\mathbb{A}$ precisa ter ao menos um elemento, ou seja, o universo de discurso não pode ser vazio. Nesta interpretação, a conclusão do argumento é falsa, pois como $I(a) \notin I(A)$ e $I(a) \notin I(B)$, as fórmulas existenciais $\exists xAx$ e $\exists xBx$ são ambas falsas, não existem coisas vermelhas e nem coisas azuis em nosso universo. Para a premissa, pela verdade da conjunção temos que $\mathbb{A}(\forall x(Rx \rightarrow Ax) \land \forall x(Lx \rightarrow Bx)) = V$ sse:

$\mathbb{A}(\forall x(Rx \rightarrow Ax)) = V$
$\mathbb{A}(\forall x(Lx \rightarrow Bx)) = V$

Em ambos os casos, temos universais verdadeiros:
$\mathbb{A}(\forall x(Rx \rightarrow Ax)) = V$ sse $\mathbb{A}(R\mathbf{i} \rightarrow A\mathbf{i}) = V$ para todo **i**.
$\mathbb{A}(\forall x(Lx \rightarrow Bx)) = V$ sse $\mathbb{A}(L\mathbf{i} \rightarrow B\mathbf{i}) = V$ para todo **i**.

Como $I(R) = \varnothing$ e $I(L) = \varnothing$ (em nosso modelo não existem rosas nem violetas), os antecedentes de ambos os condicionais são falsos, o que torna ambos verdadeiros, e disso decorre que a premissa [P1] é verdadeira. Como nesta interpretação a premissa é verdadeira e a conclusão falsa, a forma lógica do argumento é inválida.

Capítulo 12 - Tablôs Semânticos

Exercício 12.1.

Determine, usando tablôs, se as fórmulas seguintes são tautologias ou não.

a) $(A \wedge B) \rightarrow B$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $(A \wedge B) \rightarrow B$
		$\vert$
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(A \wedge B)$
de [1]	[3]	**F** B
de [2]	[4]	**V** A
de [2]	[5]	**V** B
		x
R. Tautologia		CTR (3, 5)

Nota: o tablô está *completo*, pois todas as fórmulas foram reduzidas, restando apenas fórmulas atômicas. No caso, o tablô tem um único ramo e surgiu uma contradição. Logo a hipótese inicial (de que a fórmula (a) é falsa) está errada, de modo que podemos concluir que a fórmula é uma tautologia. O método de tablô, portanto, é uma prova por absurdo.

b) $B \rightarrow (\neg A \vee B)$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $B \rightarrow (\neg A \vee B)$
		$\vert$
de [1]	[2]	**V** B
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $(\neg A \vee B)$
de [3]	[4]	**F** $\neg A$
de [3]	[5]	**F** B
		x
R. Tautologia		CTR (2, 5)

Nota: o tablô não está *completo*, pois nem todas as fórmulas moleculares foram reduzidas. Observe que a fórmula **F** $\neg A$ não foi marcada ($\surd$). Ou seja, da negação em [4], ainda poderíamos obter **V** A, o que completaria o tablô, pois todas as fórmulas restantes seriam fórmulas atômicas.

O resultado final, entretanto, não seria alterado com este passo adicional, pois o tablô tem um único ramo e já surgiu uma contradição entre as fórmulas [2] e [5]. Isto nos permite concluir que a hipótese inicial (de que a fórmula (a) é falsa) está errada, de modo que podemos concluir que a fórmula é uma tautologia.

c) $(Fa \vee \neg Fa) \rightarrow \neg Qb$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $(Fa \vee \neg Fa) \rightarrow \neg Qb$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(Fa \vee \neg Fa)$		
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $\neg Qb$		
de [3]	[4]	**V** Qb		
de [2]	[5]	**V** Fa	$\surd$ **V** $\neg Fa$	[6] *de [2]*
		?	**F** Fa	[7] *de [6]*
			?	

Nota: o tablô está *completo* (não há mais fórmulas a reduzir), mas não está *fechado* (isto é, nem todos os ramos terminaram em contradição). Logo, a hipótese inicial é correta: a fórmula $(Fa \vee \neg Fa) \rightarrow \neg Qb$ pode ser tornada falsa, logo, não é uma tautologia.

Que interpretações tornam falsa a fórmula (c) ? Observando o tablô, vemos que na interpretação I(Qb) = V e I(Fa) = V a fórmula é falsa, e também é falsa na interpretação I(Qb) = V e I(Fa) = F. Ou seja, se I(Qb) = V, a fórmula é falsa, independentemente do valor de verdade da fórmula Fa. Isso é esperado, pois a fórmula (c) é um condicional $(\alpha \rightarrow \beta)$. O antecedente $(Fa \vee \neg Fa)$ será verdadeiro em qualquer caso (seja I(Fa) = V ou F), e o conseqüente $\neg Qb$ será falso se I(Qb) = V. Nestas condições, o condicional será falso.

d) $(A \wedge B) \rightarrow \neg\neg B$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $(A \wedge B) \rightarrow \neg\neg B$
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(A \wedge B)$
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $\neg\neg B$
de [3]	[4]	$\surd$ **V** $\neg B$
de [4]	[5]	**F** B
de [2]	[6]	**V** A
de [2]	[7]	**V** B
		x
		CTR (5, 7)

R. Tautologia

e) $\neg\neg A \wedge (A \to B)$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $(\neg\neg A \wedge (A \to B))$		
de [1]	[2]	$\surd$ **F** $\neg\neg A$	$\surd$ **F** $(A \to B)$	[3] *de [1]*
de [2]	[4]	$\surd$ **V** $\neg A$	**V** A	[6] *de [3]*
de [4]	[5]	**F** A	**F** B	[7] *de [3]*
		?	?	

R. O tablô está completo e há ramos que terminam sem contradição. Logo, a hipótese inicial é correta: a fórmula pode ser falsa, e portanto não é uma tautologia.

f) $\neg\neg Pa \leftrightarrow (Pa \vee Pa)$

hipótese	[1]	$\surd$ **F** $(\neg\neg Pa \leftrightarrow (Pa \vee Pa))$			
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $\neg\neg Pa$	$\surd$ **F** $\neg\neg Pa$		[3] *de [1]*
de [1]	[4]	$\surd$ **F** $(Pa \vee Pa)$	$\surd$ **V** $(Pa \vee Pa)$		[5] *de [1]*
de [2]	[6]	$\surd$ **F** $\neg Pa$	$\surd$ **V** $\neg Pa$		[10] *de [3]*
de [6]	[7]	**V** Pa	**F** Pa		[11] *de [10]*
de [4]	[8]	**F** Pa			
de [4]	[9]	**F** Pa	**V** Pa	**V** Pa	[12] e [13], *de [5]*
		x	x	x	
		CTR (7, 8)	CTR (11,12)	CTR (11,13)	

R. A fórmula é uma tautologia. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição.

g) $Lc \vee \neg(Lc \wedge Ts)$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $(Lc \vee \neg(Lc \wedge Ts))$
de [1]	[2]	**F** Lc
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $\neg(Lc \wedge Ts)$
de [3]	[4]	$\surd$ **V** $(Lc \wedge Ts)$
de [4]	[5]	**V** Lc
de [4]	[6]	**V** Ts
		x
R. Tautologia		CTR (2, 5)

h) $(A \wedge A) \leftrightarrow A$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $((A \wedge A) \leftrightarrow A)$			
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(A \wedge A)$	$\surd$ **F** $(A \wedge A)$		[4] *de [1]*
de [1]	[3]	**F** A	**V** A		[5] *de [1]*
de [2]	[6]	**V**A			
de [2]	[7]	**V**A	**F** A	**F** A	[8] e [9], *de [4]*
		x	x	x	
		CTR (3, 6)	CTR (5, 8)	CTR (5, 9)	

R. Tautologia

i) $A \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg A)$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $(A \rightarrow (B \rightarrow \neg\neg A))$
de [1]	[2]	**V** A
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $(B \rightarrow \neg\neg A)$
de [3]	[4]	**V** B
de [3]	[5]	$\surd$ **F** $\neg\neg A$
de [5]	[6]	$\surd$ **V** $\neg A$
de [6]	[7]	**F** A
		x
R. Tautologia		CTR (2, 7)

j) $((A \rightarrow Qb) \wedge \neg Qb) \rightarrow \neg A$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $((A \rightarrow Qb) \wedge \neg Qb) \rightarrow \neg A$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $((A \rightarrow Qb) \wedge \neg Qb)$		
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $\neg A$		
de [3]	[4]	**V** A		
de [2]	[5]	$\surd$ **V** $(A \rightarrow Qb)$		
de [2]	[6]	$\surd$ **V** $\neg Qb$		
de [6]	[7]	**F** Qb		
de [5]	[8]	**F** A	**V** Qb	[9] *de [5]*
		x	x	
R. Tautologia		CTR (4, 8)	CTR (7, 9)	

k) $\neg(A \lor Pb) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg Pb)$

hipótese inicial	[1]	√ **F** $(\neg(A \lor Pb) \leftrightarrow (\neg A \lor \neg Pb))$					
de [1]	[2]	√ **V** $\neg(A \lor Pb)$		√ **F** $\neg(A \lor Pb)$			[4] *de [1]*
de [1]	[3]	√ **F** $(\neg A \lor \neg Pb)$		√ **V** $(\neg A \lor \neg Pb)$			[5] *de [1]*
de [3]	[6]	√ **F** $\neg A$		√ **V** $(A \lor Pb)$			[13] *de [4]*
de [3]	[7]	√ **F** $\neg Pb$					
de [6]	[8]	**V** A	**V** A		**V** Pb		[14], [15] *de [13]*
de [7]	[9]	**V** Pb					
							de [5]
de [2]	[10]	√ **F** $(A \lor Pb)$	√ **V** $\neg A$	√ **V** $\neg Pb$	√ **V** $\neg A$	√ **V** $\neg Pb$	[16], [17], [18], [19]
de [10]	[11]	**F** A	**F** A	**F** Pb	**F** A	**F** Pb	[20], [21], [22], [23]
de [10]	[12]	**F** Pb	x	?	?	x	
		x CTR (8, 11) CTR (9, 12)	CTR (14,20)			CTR (15, 23)	

R. A fórmula não é tautologia, pois nem todos os ramos do tablô fecham em contradição. Na interpretação I(A) = V e I(Pb) = F, a fórmula é falsa.
Na interpretação I(A) = F e I(Pb) = V, a fórmula é falsa.

l) $\neg(B \to B) \lor (A \land \neg A)$

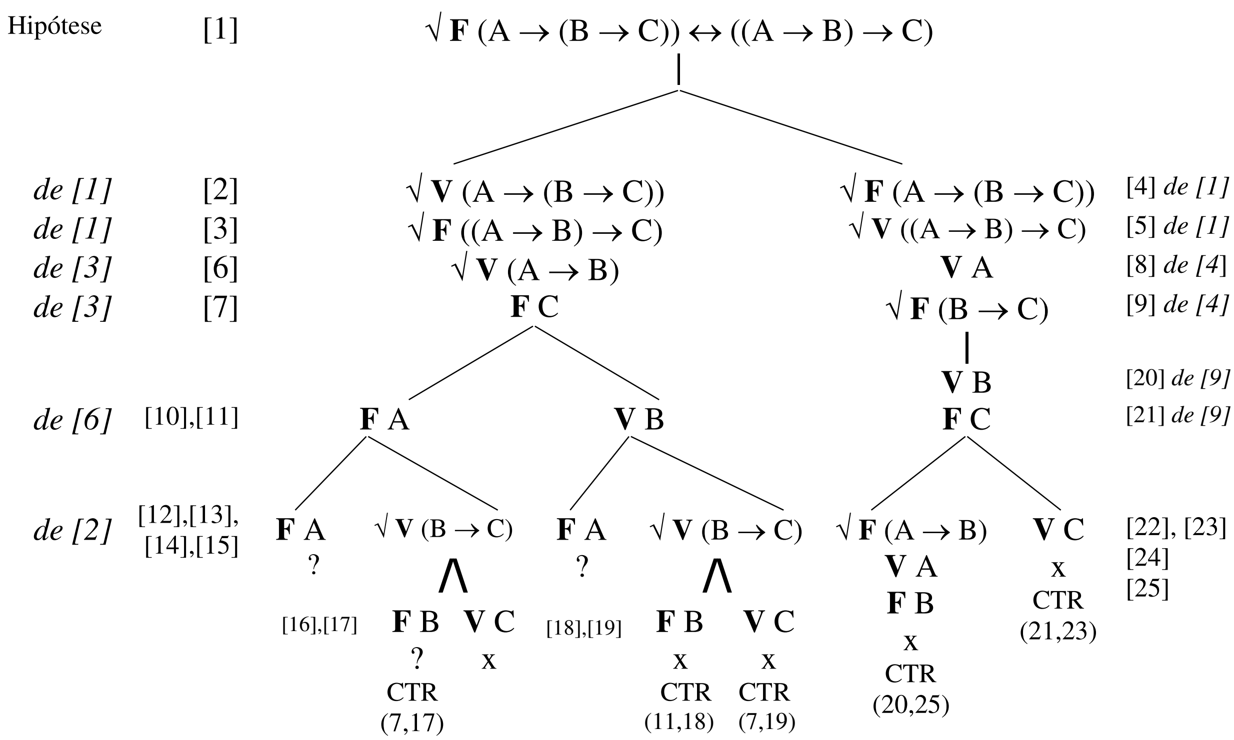
Hipótese	[1]	√ **F** $(\neg(B \to B) \lor (A \land \neg A))$				
de [1]	[2]	√ **F** $(\neg(B \to B))$				
de [1]	[3]	√ **F** $(A \land \neg A)$				
de [2]	[4]	√ **V** $(B \to B)$				
de [3]	[5]	**F** A		**F** $\neg A$ **V** A		[6] *de [3]* [7] *de [6]*
de [4]	[8], [9]	**F** B ?	**V** B ?	**F** B ?	**V** B ?	[10], [11] *de [4]*

R. A fórmula não é tautologia. Na verdade, trata-se de uma contradição, falsa em qualquer interpretação. Pois é uma disjunção onde os dois disjuntos $\neg(B \to B)$, e $(A \land \neg A)$, são sempre falsos. A prova por tablôs confirma isso, já que todos os ramos terminam abertos (sem contradição).

m) ¬(¬A → B) → (¬B ∨ ¬A)

hipótese inicial	[1]	√ **F** (¬(¬A → B) → (¬B ∨ ¬A))
de [1]	[2]	√ **V** (¬(¬A → B))
de [1]	[3]	√ **F** (¬B ∨ ¬A)
de [2]	[4]	√ **F** (¬A → B)
de [4]	[5]	√ **V** ¬A
de [4]	[6]	**F** B
de [5]	[7]	**F** A
de [3]	[8]	√ **F** ¬B
de [3]	[9]	√ **F** ¬A
de [8]	[10]	**V** B
de [9]	[11]	**V** A
		x
R. Tautologia		CTR (6, 10)

n) (A → (B → C)) ↔ ((A → B) → C)



R. Não é tautologia. O tablô está completo, e alguns ramos terminam abertos, sem produzir contradição. Observar que na prática não era necessário terminar *todo* o tablô, como foi feito acima. Basta que um único ramo termine aberto (sem produzir contradição) para que se possa concluir que a hipótese inicial é correta, ou seja, a fórmula pode ser tornada falsa em alguma interpretação, e portanto não é uma tautologia.

o) (A → (B → C)) → ((B ∧ A) → C)

hipótese inicial	[1]	√ **F** (A → (B → C)) → ((B ∧ A) → C)		
de [1]	[2]	√ **V** (A → (B → C))		
de [1]	[3]	√ **F** ((B ∧ A) → C)		
de [3]	[4]	√ **V** (B ∧ A)		
de [3]	[5]	**F** C		
de [4]	[6]	**V** B		
de [4]	[7]	**V** A		
de [2]	[8]	**F** A	√ **V** (B → C)	[9] *de [2]*
		x		
		CTR (7 , 8)	**F** B / **V** C	[10] e [11], *de [9]*
			x / x	
R. Tautologia			CTR (6, 10) / CTR (5, 11)	

p) ¬Pa → (¬Pa ∨ Qb)

hipótese inicial	[1]	√ **F** (¬Pa → (¬Pa ∨ Qb))
de [1]	[2]	√ **V** ¬Pa
de [1]	[3]	√ **F** (¬Pa ∨ Qb)
de [2]	[4]	**F** Pa
de [3]	[5]	√ **F** ¬Pa
de [3]	[6]	**F** Qb
de [5]	[7]	**V** Pa
		x
R. Tautologia		CTR (4, 7)

q) $(\neg(A \vee B) \wedge (C \leftrightarrow A)) \rightarrow \neg C$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $((\neg(A \vee B) \wedge (C \leftrightarrow A)) \rightarrow \neg C)$	
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(\neg(A \vee B) \wedge (C \leftrightarrow A))$	
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $\neg C$	
de [3]	[4]	**V** C	
de [2]	[5]	$\surd$ **V** $\neg(A \vee B)$	
de [2]	[6]	$\surd$ **V** $(C \leftrightarrow A)$	
de [5]	[7]	$\surd$ **F** $(A \vee B)$	
de [7]	[8]	**F** A	
de [7]	[9]	**F** B	

de [6]	[10]	**V** C	**F** C	[12] *de 6*
de [6]	[11]	**V** A	**F** A	[13] *de 6*
		x	x	
R. Tautologia		CTR (8, 11)	CTR (4, 12)	

r) $(A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C))$

Hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $((A \vee (B \wedge C)) \rightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)))$	
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(A \vee (B \wedge C))$	
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $((A \vee B) \wedge (A \vee C))$	

de [2]	[4]	**V** A	$\surd$ **V** $(B \wedge C)$	[5] *de [2]*
			V B	[6] *de [5]*
			V C	[7] *de [5]*

de [3]	[8], [9]	$\surd$**F** $(A \vee B)$	$\surd$**F** $(A \vee C)$	$\surd$**F** $(A \vee B)$	$\surd$**F** $(A \vee C)$	[10], [11] *de [3]*
	[12], [14]	**F** A	**F** A	**F** A	**F** A	[16], [18]
	[13], [15]	**F** B	**F** C	**F** B	**F** C	[17], [19]
		x	x	x	x	
		CTR (4, 12)	CTR (4, 14)	CTR (6, 17)	CTR (7, 19)	

R. Tautologia

Exercício 12.2.

Determine, nos casos abaixo, se as conclusões indicadas são conseqüência lógica das demais, usando tablôs.

a) $A \vee B, \neg A \models B$

hipóteses iniciais:	[1]	$\surd$ **V** $(A \vee B)$		
	[2]	$\surd$ **V** $\neg A$		
	[3]	**F** B		
de [2]	[4]	**F** A		
de [1]	[5]	**V** A	**V** B	[6] *de [1]*
		x	x	
		CTR (4, 5)	CTR (3, 6)	

Seja Γ um conjunto de fórmulas e seja α uma fórmula qualquer. Desejamos provar por tablôs que $\Gamma \models \alpha$, ou seja, prova que a fórmula α é conseqüência lógica das fórmulas do conjunto Γ. Como o tablô é um método de prova por absurdo, nossa hipótese inicial é que Γ *não* implica logicamente α, ou seja, supomos que é possível que as fórmulas de Γ sejam verdadeiras e que α seja falsa em alguma interpretação. No exemplo acima, como o tablô termina com todos os ramos em contradição, nossa hipótese inicial é absurda, ou seja, não existe uma interpretação onde as fórmulas de Γ sejam todas verdadeiras e α seja falsa. Logo, α é conseqüência lógica das fórmulas de Γ, ou $\Gamma \models \alpha$. Esta técnica (assumir que as fórmulas de Γ são **V** e que α é **F**) será utilizada em todos os exercícios seguintes.

b) $Pa \leftrightarrow Qb, \neg Pa \models \neg Qb$?

hipóteses iniciais:	[1]	$\surd$ **V** $(Pa \leftrightarrow Qb)$		
	[2]	$\surd$ **V** $\neg Pa$		
	[3]	$\surd$ **F** $\neg Qb$		
de [2]	[4]	**F** Pa		
de [3]	[5]	**V** Qb		
de [1]	[6]	**V** Pa	**F** Pa	[8] *de [1]*
de [1]	[7]	**V** Qb	**F** Qb	[9] *de [1]*
		x	x	
		CTR (4, 6)	CTR (5, 9)	

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$), pois o tablô está completo e todos os ramos terminam em contradição.

c) $\neg(B \wedge A) \models \neg B \wedge \neg A$

hipóteses	[1]		$\surd$ **V** $\neg(B \wedge A)$				
iniciais:	[2]		$\surd$ **F** $(\neg B \wedge \neg A)$				
	[3]		$\surd$ **F** $(B \wedge A)$				
de [3]	[4]	**F** B		**F** A			[5] *de [3]*
de [1]	[6], [7]	$\surd$ **F** $\neg B$	$\surd$ **F** $\neg A$	$\surd$ **F** $\neg B$	$\surd$ **F** $\neg A$		[8], [9] *de [1]*
de [6], [7]	[10], [11]	**V** B	**V** A	**V** B	**V** A		[12], [13] *de [8], [9]*
		x	?	?	x		
		CTR (4, 10)			CTR (5, 13)		

R. O tablô está completo e há ramos que terminam abertos (sem contradição). Logo, a fórmula $(\neg B \wedge \neg A)$ *não é* conseqüência lógica da fórmula anterior $\neg(B \wedge A)$, pois a primeira pode ser verdadeira e a segunda, falsa (as hipóteses iniciais estão corretas).

d) $A \rightarrow B \models A \vee B$

hipóteses	[1]	$\surd$ **V** $(A \rightarrow B)$		
iniciais:	[2]	$\surd$ **F** $(A \vee B)$		
de [2]	[3]	**F** A		
de [2]	[4]	**F** B		
de [1]	[5]	**F** A	**V** B	[6] *de [1]*
		?	x	
			CTR (4, 6)	

R. O tablô está completo e há ramos que não fecharam (não terminaram em contradição). Logo, a fórmula $A \vee B$ não é conseqüência lógica da fórmula anterior $A \rightarrow B$, pois a primeira pode ser verdadeira e a segunda, falsa, em alguma interpretação.

e) ¬Pa → ¬Qb ⊨ Pa → Qb

hipóteses	[1]	√ **V** (¬Pa → ¬Qb)			
iniciais:	[2]	√ **F** (Pa → Qb)			
de [2]	[3]	**V** Pa			
de [2]	[4]	**F** Qb			
de [1]	[5]	√ **F** ¬Pa	√ **V** ¬Qb	[6] *de [1]*	
de [5]	[7]	**V** Pa	**F** Qb	[8] *de [6]*	
		?	?		

R. A fórmula Pa → Qb não é conseqüência lógica da fórmula ¬Pa → ¬Qb, pois a primeira pode ser verdadeira e a segunda, falsa, em alguma interpretação. Por exemplo, na interpretação I(Pa) = V e I(Qb) = F, temos que I (¬Pa → ¬Qb) = V e I(Pa → Qb) = F.

f) Pa, Pa → C ⊨ Pa ↔ C

hipóteses	[1]	**V** Pa			
iniciais:	[2]	√ **V** (Pa → C)			
	[3]	√ **F** (Pa ↔ C)			
de [2]	[4]	**F** Pa	**V** C		[5] *de [2]*
		x			
		CTR (1,4)			
de [3]	[6]		**V** Pa	**F** Pa	[8] *de [3]*
de [3]	[7]		**F** C	**V** C	[9] *de [3]*
			x	x	
			CTR (5, 7)	CTR (1, 8)	

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores (Γ ⊨ α).

g) $B \to \neg Cb \models \neg(B \wedge Cb)$

hipóteses	[1]	$\surd$ **V** $(B \to \neg Cb)$		
iniciais:	[2]	$\surd$ **F** $\neg(B \wedge Cb)$		
de [2]	[3]	$\surd$ **V** $(B \wedge Cb)$		
de [3]	[4]	**V** B		
de [3]	[5]	**V** Cb		
de [1]	[6]	**F** B	$\surd$ **V** $\neg$Cb	[7] *de [1]*
		x	**F** Cb	[8] *de [7]*
		CTR (4, 6)	x	
			CTR (5, 8)	

R. A fórmula $\neg(B \wedge Cb)$ é conseqüência lógica da fórmula $(B \to \neg Cb)$.

h) $A \models (A \to (Qb \wedge A)) \to (A \wedge Qb)$

hipóteses	[1]	**V** A			
iniciais:	[2]	$\surd$ **F** $(A \to (Qb \wedge A)) \to (A \wedge Qb)$			
de [2]	[3]	$\surd$ **V** $(A \to (Qb \wedge A))$			
de [2]	[4]	$\surd$ **F** $(A \wedge Qb)$			
de [4]	[5]	**F** A	**F** Qb		[6] *de [4]*
		x			
		CTR (1, 5)			
		de [3] [7]	**F** A	$\surd$ **V** $(Qb \wedge A)$	[8] *de [3]*
			x	**V** Qb	[9] *de [8]*
				V A	[10] *de [8]*
				x	
				CTR (6, 9)	

R. A fórmula $(A \to (Qb \wedge A)) \to (A \wedge Qb)$ é conseqüência lógica da fórmula atômica A.

i) (Ba ∧ Ca) → Fb, ¬Ba, ¬Ca ⊨ ¬Fb

hipóteses	[1]	√ **V** ((Ba ∧ Ca) → Fb)		
iniciais:	[2]	√ **V** ¬Ba		
	[3]	√ **V** ¬Ca		
	[4]	√ **F** ¬Fb		
de [2]	[5]	**F** Ba		
de [3]	[6]	**F** Ca		
de [4]	[7]	**V** Fb		
de [1]	[8]	√ **F** (Ba ∧ Ca)	**V** Fb ?	[9] *de [1]*
		F Ba **F** Ca ? ?		

R. A conclusão não é conseqüência lógica das fórmulas anteriores.

j) ¬(A ∨ B), Fa ↔ A ⊨ ¬Fa

hipóteses	[1]	√ **V** ¬(A ∨ B)		
iniciais:	[2]	√ **V** Fa ↔ A		
	[3]	√ **F** ¬Fa		
de [3]	[4]	**V** Fa		
de [1]	[5]	√ **F** (A ∨ B)		
de [5]	[6]	**F** A		
de [5]	[7]	**F** B		
de [2]	[8]	**V** Fa	**F** Fa	[10] *de [2]*
de [2]	[9]	**V** A	**F** A	[11] *de [2]*
		x CTR (4, 6)	x CTR (4, 6)	

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores (Γ ⊨ α).

k) $\neg(A \wedge B), Fa \leftrightarrow A \not\models \neg Fa$

hipóteses	[1]		$\surd$ **V** $\neg(A \wedge B)$				
iniciais:	[2]		$\surd$ **V** $(Fa \leftrightarrow A)$				
	[3]		$\surd$ **F** $\neg Fa$				
de [3]	[4]		**V** Fa				
de [1]	[5]		$\surd$ **F** $(A \wedge B)$				
de [5]	[6]	**F** A		**F** B			[7] *de [5]*
de [2]	[8], [9]	**V** Fa	**F** Fa	**V** Fa	**F** Fa		[10],[11] *de [2]*
	[12],[13]	**V** A	**F** A	**V** A	**V** A		[14,15]
		x	x	?	x		
		CTR	CTR		CTR		
		(6, 12)	(4, 9)		(4, 11)		

R. A conclusão não é conseqüência lógica das fórmulas anteriores, pois o tablô está completo e um dos ramos termina sem contradição. Logo, há alguma interpretação onde as hipóteses inicias são corretas.

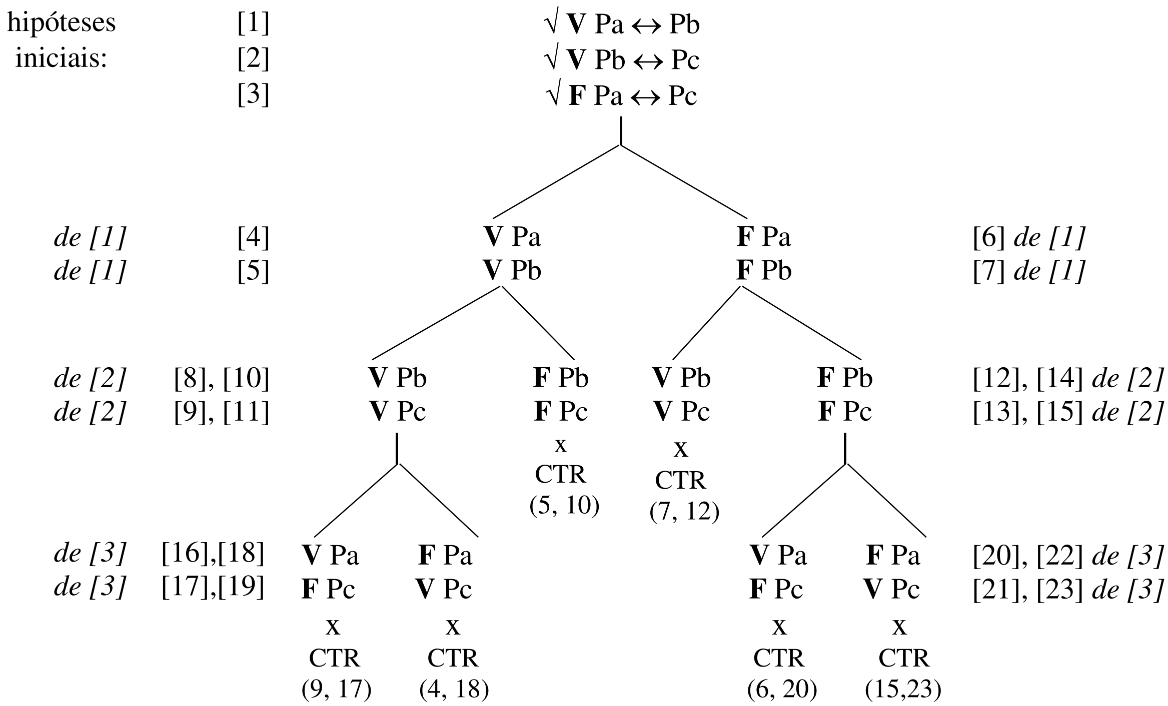
Podemos confirmar o resultado da prova por tablôs acima fazendo uma tabela de verdade:

A	B	Fa	$(A \wedge B)$	$\neg(A \wedge B)$	$Fa \leftrightarrow A$	$\neg Fa$	
V	V	V	V	F	V	F	
V	V	F	V	F	F	V	
V	F	V	F	**V**	**V**	**F**	I_k
V	F	F	F	V	F	V	
F	V	V	F	V	F	F	
F	V	F	F	**V**	**V**	**V**	
F	F	V	F	V	F	F	
F	F	F	F	V	F	V	

Podemos observar que existe uma interpretação I_k onde $I_k(A) = V$, $I_k(B) = F$ e $I_k(Fa) = V$ tal que I_k é modelo para o conjunto Γ de premissas (isto é, uma interpretação onde as premissas são todas verdadeiras) e onde a conclusão α é falsa: $I_k(\alpha) = F$. Logo, a conclusão não é conseqüência lógica do conjunto de premissas.

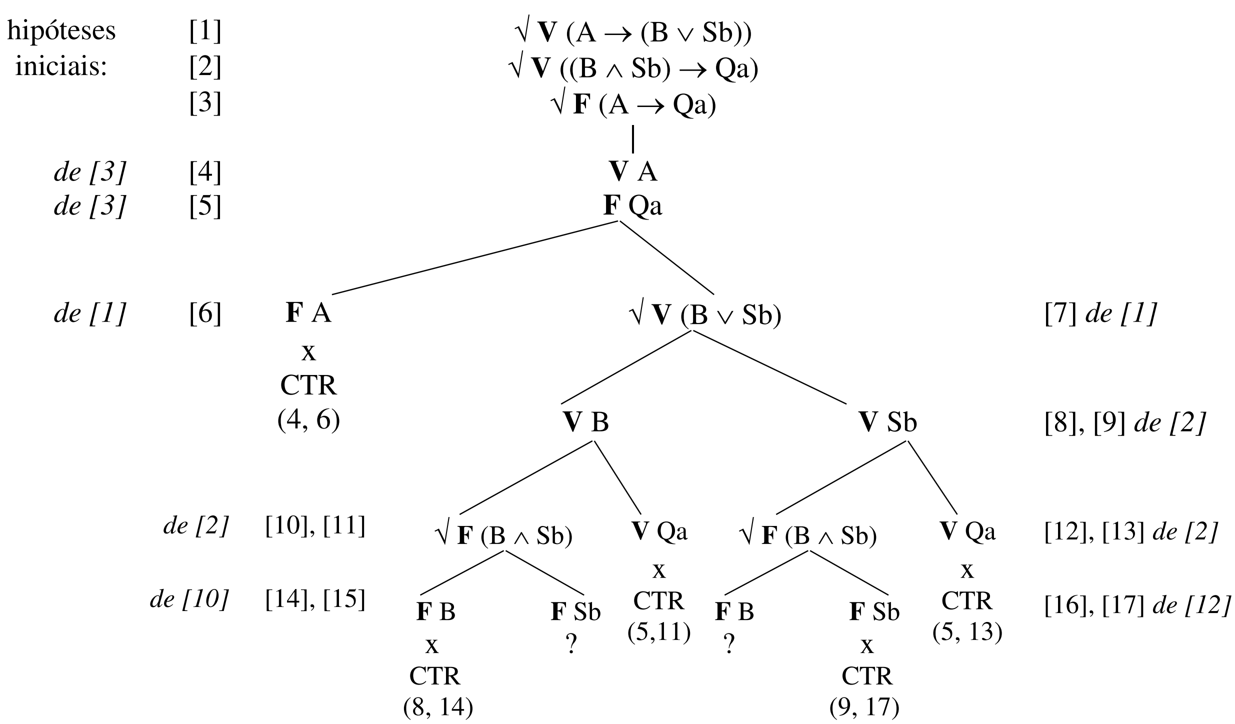
Note que os valores de verdade $I_k(A) = V$, $I_k(B) = F$ e $I_k(Fa) = V$ são exatamente os que aparecem no ramo do tablô que não fecha em contradição, como era de se esperar.

l) Pa ↔ Pb, Pc ↔ Pc ╞ Pa ↔ Pc



R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores (Γ ╞ α).

m) A → (B ∨ Sb), (B ∧ Sb) → Qa ╞ A → Qa



R. O tablô está completo, e há ramos abertos. Logo, as hipóteses iniciais são corretas, e a conclusão não é conseqüência lógica das fórmulas anteriores.

n) $(\neg A \vee B) \vee C, (B \vee C) \rightarrow D \models A \rightarrow D$

hipóteses iniciais:	[1]	$\surd$ **V** $((\neg A \vee B) \vee C)$		
	[2]	$\surd$ **V** $((B \vee C) \rightarrow D)$		
	[3]	$\surd$ **F** $(A \rightarrow D)$		
de [3]	[4]	**V** A		
de [3]	[5]	**F** D		
de [2]	[6]	$\surd$ **F** $(B \vee C)$	**V** D	[7] *de [2]*
de [6]	[8]	**F** B	x	
de [6]	[9]	**F** C	CTR (5, 7)	

de [1]	[10]	**V** $(\neg A \vee B)$		**V** C	[11] *de [1]*
				x	
				CTR (9, 11)	
de [10]	[12], [13]	$\surd$ **V** $\neg A$	**V** B		
de [12]	[14]	**F** A	x		
		x	CTR (8, 13)		
		CTR (4, 14)			

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

o) $(A \rightarrow B) \rightarrow A \models A$

hipóteses iniciais:	[1]	$\surd$ **V** $((A \rightarrow B) \rightarrow A)$		
	[2]	**F** A		
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $(A \rightarrow B)$	**V** A	[4] *de [1]*
de [3]	[5]	**V** A	x	
de [3]	[6]	**F** B	CTR (2, 4)	
		x		
		CTR (2, 5)		

R. A fórmula A é conseqüência lógica da fórmula $(A \rightarrow B) \rightarrow A$. Trata-se de uma forma de uma tautologia, denominada Lei de Pierce: $((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$.

Exercício 12.3.

Mostre, usando tablôs, que as fórmulas seguintes são todas válidas.

Nota: Nos execícios seguintes serão utilizadas as legendas **UV**, **EF**, **UF** e **EV** para representar as regras de quantificadores nas provas por tablôs. Ver (MORTARI 2001, 215).

<table>
<tr><td>UV (Universal Verdadeira)</td><td>EF (Existencial Falsa)</td><td>UF (Universal Falsa)</td><td>EV (Existencial Verdadeira)</td></tr>
<tr><td>$\dfrac{\mathbf{V}\ \forall x\alpha}{\mathbf{V}\ \alpha\ [x/c]}$
para qualquer c</td><td>$\dfrac{\mathbf{F}\ \exists x\alpha}{\mathbf{F}\ \alpha\ [x/c]}$
para qualquer c</td><td>$\dfrac{\mathbf{F}\ \forall x\alpha}{\mathbf{F}\ \alpha\ [x/c]}$
para algum c novo no ramo</td><td>$\dfrac{\mathbf{V}\ \exists x\alpha}{\mathbf{V}\ \alpha\ [x/c]}$
para algum c novo no ramo</td></tr>
<tr><td colspan="2">Não marcadas (reutilizáveis)</td><td colspan="2">√ Marcadas (não reutilizáveis)</td></tr>
<tr><td colspan="4">α [x/c] representa a substituição em α das ocorrências livres[5] de x pela constante c</td></tr>
</table>

Tabela 12.1 - Regras para quantificadores em provas por tablôs

a) $\forall xRxx \rightarrow Raa$

hipótese inicial	[1]	√ **F** ($\forall xRxx \rightarrow Raa$)
de [1]	[2]	**V** $\forall xRxx$
de [1]	[3]	**F** Raa
de [2], **UV** x/a	[4]	**V** Raa
		x
		CTR (3, 4)

R. A fórmula é válida, pois o tablô está completo e seu único ramo fecha em contradição. Logo, a hipótese inicial de que a fórmula pode ser falsa é absurda.

b) $\neg\exists xRxx \rightarrow \neg Raa$

hipótese inicial	[1]	√ **F** ($\neg\exists xRxx \rightarrow \neg Raa$)
de [1]	[2]	√ **V** $\neg\exists xRxx$
de [1]	[3]	√ **F** $\neg Raa$
de [3]	[4]	**V** Raa
de [2]	[5]	**F** $\exists xRxx$
de[5], **EF** x/a	[6]	**F** Raa
		x
		CTR (4, 6)

R. Tablô completo, único ramo fechado, fórmula válida.

[5] Embora o livro do prof. Mortari fale de "ocorrências livres" da variável x na explicação das regras para fórmulas quantificadas em tablôs (ver MORTARI 2001, 212-215), na verdade não há ocorrências "livres" de variáveis, pois os exercícios só contêm fórmulas fechadas, onde todas as variáveis são ligadas.

c) $\forall x\,(Px \to Px)$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $\forall x\,(Px \to Px)$
de [1], **UF** x/a	[2]	$\surd$ **F** $(Pa \to Pa)$
	[3]	**V** Pa
	[4]	**F** Pa
		x
		CTR (3, 4)

R. Tablô completo, único ramo em contradição, fórmula válida.

d) $\neg\exists x\,(Px \wedge \neg Px)$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $(\neg\exists x\,(Px \wedge \neg Px))$	
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $\exists x\,(Px \wedge \neg Px)$	
de[2], **EV** x/a	[3]	$\surd$ **V** $(Pa \wedge \neg Pa)$	
	[4]	**V** Pa	*de [3]*
	[5]	$\surd$ **V** $\neg$Pa	*de [3]*
	[6]	**F** Pa	*de [5]*
		x	
		CTR (4, 6)	

R. Tablô completo, fórmula válida.

e) $\forall x\,(Ax \to Bx) \to (\forall x Ax \to \forall x Bx)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $(\forall x\,(Ax \to Bx) \to (\forall x Ax \to \forall x Bx))$		Ver Nota
de [1]	[2]	**V** $\forall x\,(Ax \to Bx)$		**UV**
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $(\forall x Ax \to \forall x Bx)$		
de [3]	[4]	**V** $\forall x Ax$		**UV**
de [3]	[5]	$\surd$ **F** $\forall x Bx$		**UF**
de [5], **UF** x/a	[6]	**F** Ba		
de [4], **UV** x/a	[7]	**V** Aa		
de [2], **UV** x/a	[8]	**V** $(Aa \to Ba)$		
de [8]	[9]	**F** Aa	**V** Ba	[10] *de [8]*
		x	x	
		CTR (7, 9)	CTR (6, 10)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição, fórmula válida.

Nota: No exercício (e), em [2] e [4] temos duas fórmulas tipo **UV** (Universal Verdadeira), e em [5] temos uma fórmula **UF** (Universal Falsa). Observe que optamos por reduzir primeiro a fórmula [5], e depois as fórmulas [4] e [2]. O motivo desta escolha é que, na prática, o tablô é geralmente menos trabalhoso se as fórmulas gerais forem reduzidas na seguinte ordem:

- Primeiro, reduzimos as fórmulas **UF** (Universal Falsa) e **EV** (Existencial Verdadeira), definindo as constantes (a, b, c, etc) que desejamos incluir na prova. Estas fórmulas só podem ser "utilizadas" uma vez na prova, logo, são marcadas (√) após o uso.

- Depois, reduzimos as fórmulas **UV** (Universal Verdadeira) e **EF** (Existencial Falsa), fazendo as substituições de variáveis da forma mais conveniente. Estas fórmulas podem ser reutilizadas quantas vezes forem necessárias, logo, não são marcadas com o símbolo "√".

Este critério será utilizado, sempre que possível, nos exercícios seguintes.

f) ∀x (Ax → Bx) → (∃xAx → ∃xBx)

hipótese:	[1]	√ **F** (∀x (Ax → Bx) → (∃xAx → ∃xBx))			
de [1]	[2]	**V** ∀x (Ax → Bx)			**UV**
de [1]	[3]	√ **F** (∃xAx → ∃xBx)			
de [3]	[4]	√ **V** ∃xAx			**EV**
de [3]	[5]	**F** ∃xBx			**EF**
de [4], **EV** x/a	[6]	**V** Aa			
de [5], **EF** x/a	[7]	**F** Ba			
de [2], **UV** x/a	[8]	**V** Aa → Ba			
de [8]	[9]	**F** Aa	**V** Ba	[10] *de [8]*	
		x	x		
		CTR (6, 9)	CTR (7, 10)		

R. Tablô completo, todos os ramos fechados, fórmula válida.

g) ∀x (Ax ∧ Bx) → (∀xAx ∧ ∀xBx)

hipótese:	[1]	√ **F** ((Ax ∧ Bx) → (∀xAx ∧ ∀xBx))		
de [1]	[2]	**V** ∀x (Ax ∧ Bx)		**UV**
de [1]	[3]	√ **F** (∀xAx ∧ ∀xBx)		
de [3]	[4]	√ **F** ∀xAx	√ **F** ∀xBx	[5] *de [3]*
de [4], **UF** x/a	[6]	**F** Aa	**F** Ba	[7] *de [5],* **UF** x/a
de [2], **UV** x/a	[8]	√ **V** (Aa ∧ Ba)	√ **V** (Aa ∧ Ba)	[9] *de [2],* **UV** x/a
de [8]	[10]	**V** Aa	**V** Aa	[12] *de [9]*
de [8]	[11]	**V** Ba	**V** Ba	[13] *de [9]*
		x	x	
		CTR (6, 10)	CTR (7, 13)	

R. Tablô completo, todos os ramos fechados, fórmula válida.

h) (∀xAx ∧ ∀xBx) → ∀x (Ax ∧ Bx)

hipótese:	[1]	√ **F** ((∀xAx ∧ ∀xBx) → ∀x (Ax ∧ Bx))		
de [1]	[2]	√ **V** (∀xAx ∧ ∀xBx)		
de [1]	[3]	√ **F** ∀x (Ax ∧ Bx)		**UF**
de [3], **UF** x/a	[4]	√ **F** (Aa ∧ Ba)		
de [2]	[5]	**V** ∀xAx		**UV**
de [2]	[6]	**V** ∀xBx		**UV**
de [5], **UV** x/a	[7]	**V** Aa		
de [6], **UV** x/a	[8]	**V** Ba		
de [4]	[9]	**F** Aa	**V** Ba	[10] *de [4]*
		x	x	
		CTR (7, 9)	CTR (8, 10)	

R. Tablô completo, todos os ramos fechados, fórmula válida.

i) $(\exists xAx \lor \exists xBx) \to \exists x\,(Ax \lor Bx)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $((\exists xAx \lor \exists xBx) \to \exists x\,(Ax \lor Bx))$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(\exists xAx \lor \exists xBx)$		
de [1]	[3]	**F** $\exists x\,(Ax \lor Bx)$		**EF**
de [2]	[4]	$\surd$ **V** $\exists xAx$	$\surd$ **V** $\exists xBx$	[5] *de [2],* **EV**
de [4], **EV** x/a	[6]	**V** Aa	**V** Ba	[7] *de [5],* **EV** x/a
de [3], **EF** x/a	[8]	$\surd$ **F** $(Aa \lor Ba)$	$\surd$ **F** $(Aa \lor Ba)$	[9] *de [3],* **EF** x/a
de [8]	[10]	**F** Aa	**F** Aa	[11] *de [9]*
de [8]	[12]	**F** Ba	**F** Ba	[13] *de [9]*
		x	x	
		CTR (6, 10)	CTR (7, 13)	

R. Tablô completo, todos os ramos fechados, fórmula válida.

Nota: Ao instanciar a fórmula $\exists xBx$ em [5], que é **EV**, podemos escolher outra constante (por exemplo, x **=** **b**), mas também podemos utilizar novamente a constante **a** que já havia sido escolhida na redução de $\exists xAx$ em [4], pois são *ramos diferentes*. A regra do **EV** (ver Tabela 12.1) diz que a constante **c** que vai substituir as ocorrências de x na fórmula a ser reduzida deve ser alguma constante c nova *no ramo*.

j) $\exists x\,(Ax \lor Bx) \to (\exists xAx \lor \exists xBx)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $(\exists x\,(Ax \lor Bx) \to (\exists xAx \lor \exists xBx))$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $\exists x\,(Ax \lor Bx)$		**EV**
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $(\exists xAx \lor \exists xBx)$		
de [3]	[4]	**F** $\exists xAx$		**EF**
de [3]	[5]	**F** $\exists xBx$		**EF**
de [2], **EV** x/a	[6]	$\surd$ **V** $(Aa \lor Ba)$		
de [6]	[7]	**V** Aa	**V** Ba	[8] *de [6]*
de [4], **EF** x/a	[9]	**F** Aa	**F** Ba	[10] *de [5],* **EF** x/a
		x	x	
		CTR (7, 9)	CTR (8, 10)	

R. Tablô completo, fórmula válida.

k) $\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$

hipótese inicial	[1]	$\surd$ **F** $\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$
de [1], **UF** x/a	[2]	$\surd$ **F** $\neg(Pa \wedge \neg Pa)$
de [2]	[3]	$\surd$ **V** $(Pa \wedge \neg Pa)$
de [3]	[4]	**V** Pa
de [3]	[5]	$\surd$ **V** $\neg$Pa
de [5]	[6]	**F** Pa
		x
		CTR (4, 6)

R. Tablô completo, único ramo fechado, fórmula válida.

l) $\forall xPx \leftrightarrow \neg\exists x\neg Px$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $(\forall xPx \leftrightarrow \neg\exists x\neg Px)$		
de [1], **UV**	[2]	**V** $\forall xPx$	$\surd$ **F** $\forall xPx$	[3] *de [1],* **UF**
de [1]	[4]	$\surd$ **F** $\neg\exists x\neg Px$	$\surd$ **V** $\neg\exists x\neg Px$	[5] *de [1]*
de [4], **EV**	[6]	$\surd$ **V** $\exists x\neg Px$	**F** $\exists x\neg Px$	[7] *de [5],* **EF**
de [6], **EV** x/a	[8]	$\surd$ **V** $\neg$Pa	**F** Pa	[11] *de [3],* **UF** x/a
de [8]	[9]	**F** Pa	$\surd$ **F** $\neg$Pa	[12] *de [7],* **EF** x/a
de [2], **UV** x/a	[10]	**V** Pa	**V** Pa	[13] *de [2]*
		x	x	
		CTR (9, 10)	CTR (11, 13)	

R. Tablô completo, todos os ramos fechados, fórmula válida.

m) ∃xPx ↔ ¬∀x¬Px

hipótese:	[1]	√ **F** (∃xPx ↔ ¬∀x¬Px)		
de [1], **EV**	[2]	√ **V** ∃xPx	**F** ∃xPx	[4] *de [1],* **EF**
de [1]	[3]	√ **F** ¬∀x¬Px	√ **V** ¬∀x¬Px	[5] *de [1]*
de [3], **UV**	[6]	**V** ∀x¬Px	√ **F** ∀x¬Px	[7] *de [5],* **UF**
de [2], **EV** x/a	[8]	**V** Pa	√ **F** ¬Pa	[11] *de [7],* **UF** x/a
de [6], **UV** x/a	[9]	√ **V** ¬Pa	**V** Pa	[12] *de [11]*
de [9]	[10]	**F** Pa	**F** Pa	[13] *de [4],* **EF** x/a
		x	x	
		CTR (8, 10)	CTR (12, 13)	

R. Tablô completo, fórmula válida.

n) ∃y∀xRxy → ∀x∃yRxy

hipótese:	[1]	√ **F** (∃y∀xRxy → ∀x∃yRxy)	
de [1]	[2]	√ **V** ∃y∀xRxy	**EV**
de [1]	[3]	√ **F** ∀x∃yRxy	**UF**
de [3], **UF** x/a	[4]	**F** ∃yRay	**EF**
de [2], **EV** x/b *b nova no ramo!*	[5]	**V** ∀xRxb	**UV**
de [5], **UV** x/a	[6]	**V** Rab	
de [4], **EF** y/a	[7]	**F** Rab	
		x	
		CTR (6, 7)	

R. Tablô completo, fórmula válida.

o) $(\forall xPx \vee \forall xQx) \rightarrow \forall x(Px \vee Qx)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $((\forall xPx \vee \forall xQx) \rightarrow \forall x(Px \vee Qx))$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(\forall xPx \vee \forall xQx)$		
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $\forall x(Px \vee Qx)$		**UF**
de [2], **UV**	[4]	**V** $\forall xPx$	**V** $\forall xQx$	[5], *de [2]* **UV**
de [3], **UF** x/a	[6]	$\surd$ **F** $(Pa \vee Qa)$	$\surd$ **F** $(Pa \vee Qa)$	[7], *de [3]* **UF** x/a
de [6]	[8]	**F** Pa	**F** Pa	[10] *de [7]*
de [6]	[9]	**F** Qa	**F** Qa	[11] *de [7]*
de [4], **UV** x/a	[12]	**V** Pa	**V** Qa	[13], *de [5]* **UV** x/a
		x	x	
		CTR (8, 12)	CTR (11, 13)	

R. Tablô completo, fórmula válida.

p) $\exists x\, (Px \wedge Qx) \rightarrow (\exists xPx \wedge \exists xQx)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $(\exists x\, (Px \wedge Qx) \rightarrow (\exists xPx \wedge \exists xQx))$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $\exists x\, (Px \wedge Qx)$		**EV**
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $(\exists xPx \wedge \exists xQx)$		
de [2], **EV** x/a	[4]	$\surd$ **V** $(Pa \wedge Qa)$		
de [4]	[5]	**V** Pa		
de [4]	[6]	**V** Qa		
de [3], **EF**	[7]	**F** $\exists xPx$	**F** $\exists xQx$	[8] *de [3]* **EF**
de [7], **EF** x/a	[9]	**F** Pa	**F** Qa	[10] *de [8],* **EF** x/a
		x	x	
		CTR (5, 9)	CTR (6, 10)	

R. Tablô completo, fórmula válida.

Exercício 12.4.

Mostre, usando tablôs, que as conclusões indicadas são de fato conseqüência lógica das premissas.

a) $\exists xAx \rightarrow \exists xBx, \neg\exists xBx \models \neg\exists xAx$

hipóteses iniciais:	[1]	√ **V** ($\exists xAx \rightarrow \exists xBx$)		
	[2]	√ **V** $\neg\exists xBx$		
	[3]	√ **F** $\neg\exists xAx$		
de [3]	[4]	√ **V** $\exists xAx$		**EV**
de [2]	[5]	**F** $\exists xBx$		**EF**
de [4], **EV** x/a	[6]	**V** Aa		
de [1], **EF**	[7]	**F** $\exists xAx$	√ **V** $\exists xBx$	[8] *de [1],* **EV**
de [7], **EF** x/a	[9]	**F** Aa	**V** Bb	[10] *de [8],* **EV** x/b
		x	**F** Bb	[11] *de [5],* **EF** x/b
		CTR (6, 9)	x	
			CTR (10, 11)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. Logo, as hipóteses iniciais são absurdas. Não existe uma interpretação onde as fórmulas de Γ sejam todas verdadeiras e α seja falsa. Logo, a conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

b) $\forall xPx \rightarrow \forall xQx, \forall xPx \models Qb$

hipóteses iniciais:	[1]	√ **V** ($\forall xPx \rightarrow \forall xQx$)		
	[2]	**V** $\forall xPx$		**UV**
	[3]	**F** Qb		
de [1], **UF**	[4]	√ **F** $\forall xPx$	**V** $\forall xQx$	[5] *de [1],* **UV**
de [4], **UF** x/a	[6]	**F** Pa	**V** Qb	[7] *de [5],* **UV** x/b
de [2], **UV** x/a	[8]	**V** Pa	x	
		x	CTR (3, 7)	
		CTR (6, 8)		

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

c) $\exists xPx \rightarrow \forall xQx, \neg\exists xQx \models \neg Pa$

hipóteses	[1]	$\surd$ **V** $(\exists xPx \rightarrow \forall xQx)$		
iniciais:	[2]	$\surd$ **V** $\neg\exists xQx$		
	[3]	$\surd$ **F** $\neg Pa$		
de [3]	[4]	**V** Pa		
de [2]	[5]	**F** $\exists xQx$		**EF**
de [1], **EF**	[6]	**F** $\exists xPx$	**V** $\forall xQx$	[7] *de [1],* **UV**
de [6], **EF** x/a	[8]	**F** Pa	**V** Qa	[9] *de [7],* **UV** x/a
		x	**F** Qa	[10] *de [5],* **EF** x/a
		CTR (4, 8)	x	
			CTR (9, 10)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

d) $\forall x\,(Ax \rightarrow Bx), \exists x\neg Bx \models \exists x\neg Ax$

hipóteses	[1]	**V** $\forall x\,(Ax \rightarrow Bx)$		**UV**
iniciais:	[2]	$\surd$ **V** $\exists x\neg Bx$		**EV**
	[3]	**F** $\exists x\neg Ax$		**EF**
de [2], **EV** x/a	[4]	$\surd$ **V** $\neg Ba$		
de [4]	[5]	**F** Ba		
de [3], **EF** x/a	[6]	$\surd$ **F** $\neg Aa$		
de [6]	[7]	**V** Aa		
de [1], **UV** x/a	[8]	$\surd$ **V** $(Aa \rightarrow Ba)$		
de [8]	[9]	**F** Aa	**V** Ba	[10] *de [8]*
		x	x	
		CTR (7, 9)	CTR (5, 10)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

e) $\forall x\,(Px \to Qx),\ Pa \models Qa$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\,(Px \to Qx)$		**UV**
	[2]	**V** Pa		
	[3]	**F** Qa		
de [1], **UV** x/a	[4]	√ **V** $(Pa \to Qa)$		
de [4]	[5]	**F** Pa	**V** Qa	[6] *de [4]*
		x	x	
		CTR (2, 5)	CTR (3, 6)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

f) $\forall x\,(Px \to Qx),\ \neg Qb \models \neg Pb$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\,(Px \to Qx)$		**UV**
	[2]	√ **V** $\neg Qb$		
	[3]	√ **F** $\neg Pb$		
de [3]	[4]	**V** Pb		
de [2]	[5]	**F** Qb		
de [1], **UV** x/b	[6]	√ **V** $(Pb \to Qb)$		
de [6]	[7]	**F** Pb	**V** Qb	[8] *de [6]*
		x	x	
		CTR (4, 7)	CTR (5, 8)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

g) $\forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx),\ Fc \models Gc$

hipóteses iniciais:	[1]	$\mathbf{V}\ \forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx)$			**UV**
	[2]	$\mathbf{V}\ Fc$			
	[3]	$\mathbf{F}\ Gc$			
de [1], **UV** x/c	[4]	$\surd\ \mathbf{V}\ (\neg Gc \to \neg Fc)$			
de [4]	[5]	$\surd\ \mathbf{F}\ \neg Gc$	$\surd\ \mathbf{V}\ \neg Fc$	[6] *de [4]*	
de [5]	[7]	$\mathbf{V}\ Gc$	$\mathbf{F}\ Fc$	[8] *de [6]*	
		x	x		
		CTR (3, 7)	CTR (2, 8)		

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

h) $\forall x\,(Px \lor Qx),\ \neg Qb \models Pb$

hipóteses iniciais:	[1]	$\mathbf{V}\ \forall x\,(Px \lor Qx)$			**UV**
	[2]	$\surd\ \mathbf{V}\ \neg Qb$			
	[3]	$\mathbf{F}\ Pb$			
de [2]	[4]	$\mathbf{F}\ Qb$			
de [1], **UV** x/b	[5]	$\surd\ \mathbf{V}\ (Pb \lor Qb)$			
de [5]	[6]	$\mathbf{V}\ Pb$	$\mathbf{V}\ Qb$	[7] *de [5]*	
		x	x		
		CTR (3, 6)	CTR (4, 7)		

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

i) $\forall x\,((Ax \lor Bx) \to Cx),\ Ab \models Cb$

hipóteses iniciais:	[1]	$\mathbf{V}\ \forall x\,((Ax \lor Bx) \to Cx)$			**UV**
	[2]	$\mathbf{V}\ Ab$			
	[3]	$\mathbf{F}\ Cb$			
de [1], **UV** x/b	[4]	$\surd\ \mathbf{V}\ ((Ab \lor Bb) \to Cb)$			
de [4]	[5]	$\surd\ \mathbf{F}\ (Ab \lor Bb)$	$\mathbf{V}\ Cb$	[6] *de [4]*	
de [5]	[7]	$\mathbf{F}\ Ab$	x		
de [5]	[8]	$\mathbf{F}\ Bb$	CTR (3, 6)		
		x			
R. $\Gamma \models \alpha$		CTR (2, 7)			

j) $\forall x\,(Px \rightarrow Qx),\ \forall x\,(Qx \rightarrow Rxb) \models Pa \rightarrow Rab$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$		**UV**
	[2]	**V** $\forall x\,(Qx \rightarrow Rxb)$		**UV**
	[3]	√ **F** $Pa \rightarrow Rab$		
de [3]	[4]	**V** Pa		
de [3]	[5]	**F** Rab		
de [1], **UV** x/a	[6]	√ **V** $(Pa \rightarrow Qa)$		
de [6]	[7]	**F** Pa	**V** Qa	[8] *de [6]*
		x		
		CTR (4, 7)	√ **V** $(Qa \rightarrow Rab)$	[9] *de [2]*, **UV** x/a

de [9]	[10]	**F** Qa	**V** Rab	[11] *de [9]*
		x	x	
		CTR (8, 10)	CTR (5, 11)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

k) $\forall xFx \wedge \forall yHy,\ \forall z\forall xTzx \models Fa \wedge Tab$

hipóteses iniciais:	[1]	√ **V** $(\forall xFx \wedge \forall yHy)$		
	[2]	**V** $\forall z\forall xTzx$		
	[3]	√ **F** $(Fa \wedge Tab)$		
de [1]	[4]	**V** $\forall xFx$		**UV**
de [1]	[5]	**V** $\forall yHy$		**UV**
de [3]	[6]	**F** Fa	**F** Tab	[7] *de [3]*
de [4], **UV** x/a	[8]	**V** Fa	**V** $\forall xTax$	[9] *de [2],* **UV** z/a
		x	**V** Tab	[10] *de [9],* **UV** x/b
		CTR (6, 8)	x	
			CTR (7, 10)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

l) $\forall x \neg Px,\ \forall x\,(Cx \rightarrow Px),\ Fa \vee Cb \models Fa$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x \neg Px$		**UV**
	[2]	**V** $\forall x\,(Cx \rightarrow Px)$		**UV**
	[3]	√ **V** $(Fa \vee Cb)$		
	[4]	**F** Fa		

de [3]	[5]	**V** Fa		**V** Cb	[6] *de [3]*
		x			
		CTR (4, 5)		√ **V** $(Cb \rightarrow Pb)$	[7] *de [2]*, **UV** x/b

de [7]	[8]	**F** Cb	**V** Pb	[9] *de [7]*
		x	√ **V** $\neg Pb$	[10] *de [1]*, **UV** x/b
		CTR (6, 8)	**F** Pb	[11] *de [10]*
			x	
			CTR (9, 11)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

m) $\forall x\,(Px \wedge Qx) \models \forall x Px \wedge \forall x Qx$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\,(Px \wedge Qx)$	**UV**
	[2]	√ **F** $(\forall x Px \wedge \forall x Qx)$	

de [2], **UF**	[3]	√ **F** $\forall x Px$	√ **F** $\forall x Qx$	[4] *de [2],* **UF**
de [3], **UF** x/a	[5]	**F** Pa	**F** Qa	[6] *de [4]*, **UF** x/a (outro ramo!)
de [1], **UV** x/a	[7]	√ **V** $(Pa \wedge Qa)$	√ **V** $(Pa \wedge Qa)$	[8] *de [1]*, **UV** x/a
de [7]	[9]	**V** Pa	**V** Pa	[11] *de [8]*
de [7]	[10]	**V** Qa	**V** Qa	[12] *de [8]*
		x	x	
		CTR (5, 9)	CTR (6, 12)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

n) $\forall x Px \rightarrow \forall x Qx, \neg Qa \models \neg\forall x Px$

hipóteses iniciais:	[1]	√ **V** $(\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$		
	[2]	√ **V** $\neg Qa$		
	[3]	√ **F** $\neg\forall x Px$		
de [3]	[4]	**V** $\forall x Px$		**UV**
de [2]	[5]	**F** Qa		
de [1], **UF**	[6]	√ **F** $\forall x Px$	**V** $\forall x Qx$	[7] *de [1],* **UV**
de [6], **UF** x/a	[8]	**F** Pa	**V** Qa	[10] *de [7],* **UV** x/a
			x	
de [4], **UV** x/a	[9]	**V** Pa	CTR (5, 10)	
		x		
		CTR (8, 9)		

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

o) $\forall x (Px \rightarrow Qx), \forall x Px \models \forall x Qx$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x (Px \rightarrow Qx)$		**UV**
	[2]	**V** $\forall x Px$		**UV**
	[3]	√ **F** $\forall x Qx$		**UF**
de [3], **UF** x/a	[4]	**F** Qa		
de [2], **UV** x/a	[5]	**V** Pa		
de [1], **UV** x/a	[6]	√ **V** $(Pa \rightarrow Qa)$		
de [6]	[7]	**F** Pa	**V** Qa	[8] *de [6]*
		x	x	
		CTR (5, 7)	CTR (4, 8)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

p) $\forall x\,(Sx \rightarrow \neg Rx),\ \forall x\,(Px \rightarrow Sx) \models \forall x\,(Px \rightarrow \neg Rx)$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\,(Sx \rightarrow \neg Rx)$	**UV**
	[2]	**V** $\forall x\,(Px \rightarrow Sx)$	**UV**
	[3]	√ **F** $\forall x\,(Px \rightarrow \neg Rx)$	**UF**
de [3], **UF** x/a	[4]	√ **F** $(Pa \rightarrow \neg Ra)$	
de [4]	[5]	**V** Pa	
de [4]	[6]	√ **F** $\neg Ra$	
de [6]	[7]	**V** Ra	
de [2], **UV** x/a	[8]	√ **V** $(Pa \rightarrow Sa)$	

de [8]	[9]	**F** Pa	**V** Sa	[10] *de [8]*
		x		
		CTR (5, 9)	√ **V** $(Sa \rightarrow \neg Ra)$	[11] *de [1],* **UV** x/a

de [11],	[12]	**F** Sa	√ **V** $\neg Ra$	[13] *de [12]*
		x	**F** Ra	[14] *de [13]*
		CTR	x	
		(10, 12)	CTR	
			(7, 14)	

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

q) $\forall x Pbx,\ \forall x \forall y\,(Pxy \rightarrow Syx) \models \forall x Sxb$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x Pbx$	**UV**
	[2]	**V** $\forall x \forall y\,(Pxy \rightarrow Syx)$	**UV**
	[3]	√ **F** $\forall x Sxb$	**UF**
de [3], **UF** x/a	[4]	**F** Sab	
de [1], **UV** x/a	[5]	**V** Pba	
de [2], **UV** x/b	[6]	**V** $\forall y\,(Pby \rightarrow Syb)$	**UV**
de [6], **UV** y/a	[7]	√ **V** $(Pba \rightarrow Sab)$	

de [7]	[8]	**F** Pba	**V** Sab	[9] *de [7]*
		x	x	
		CTR (5, 8)	CTR (4, 9)	

R. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

r) $\forall x\ (Px \to Qx), \exists x Px \models \exists x Qx$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\ (Px \to Qx)$	**UV**
	[2]	$\surd$ **V** $\exists x Px$	**EV**
	[3]	**F** $\exists x Qx$	**EF**
de [2], **EV** x/a	[4]	**V** Pa	
de [3], **EF** x/a	[5]	**F** Qa	
de [1], **UV** x/a	[6]	$\surd$ **V** (Pa $\to$ Qa)	

de [6]	[7]	**F** Pa	**V** Qa	[8] *de [6]*
		x	x	
		CTR (4, 7)	CTR (5, 8)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

s) $\forall x\ (Px \to Qx), \exists x \neg Qx \models \exists x \neg Px$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\ (Px \to Qx)$	**UV**
	[2]	$\surd$ **V** $\exists x \neg Qx$	**EV**
	[3]	**F** $\exists x \neg Px$	**EF**
de [2], **EV** x/a	[4]	$\surd$ **V** $\neg$Qa	
de [4]	[5]	**F** Qa	
de [3], **EF** x/a	[6]	$\surd$ **F** $\neg$Pa	
de [6]	[7]	**V** Pa	
de [1], **UV** x/a	[8]	$\surd$ **V** (Pa $\to$ Qa)	

de [8]	[9]	**F** Pa	**V** Qa	[10] *de [8]*
		x	x	
		CTR (7, 9)	CTR (5, 10)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

t) $\forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx), \exists xFx \models \exists xGx$

hipóteses iniciais:	[1]	$\mathbf{V}\ \forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$		**UV**
	[2]	$\surd\ \mathbf{V}\ \exists xFx$		**EV**
	[3]	$\mathbf{F}\ \exists xGx$		**EF**
de [2], **EV** x/a	[4]	$\mathbf{V}\ Fa$		
de [3], **EF** x/a	[5]	$\mathbf{F}\ Ga$		
de [1], **UV** x/a	[6]	$\surd\ \mathbf{V}\ (\neg Ga \rightarrow \neg Fa)$		
de [6]	[7]	$\surd\ \mathbf{F}\ \neg Ga$	$\surd\ \mathbf{V}\ \neg Fa$	[8] *de [6]*
de [7]	[9]	$\mathbf{V}\ Ga$	$\mathbf{F}\ Fa$	[10] *de [8]*
		x	x	
		CTR (5, 9)	CTR (4, 10)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

u) $\forall x\,(Px \vee Qx), \exists y\neg Qy \models \exists zPz$

hipóteses iniciais:	[1]	$\mathbf{V}\ \forall x\,(Px \vee Qx)$		**UV**
	[2]	$\surd\ \mathbf{V}\ \exists y\neg Qy$		**EV**
	[3]	$\mathbf{F}\ \exists zPz$		**EF**
de [2], **EV** y/a	[4]	$\surd\ \mathbf{V}\ \neg Qa$		
de [4]	[5]	$\mathbf{F}\ Qa$		
de [1], **UV** x/a	[6]	$\surd\ \mathbf{V}\ (Pa \vee Qa)$		
de [6]	[7]	$\mathbf{V}\ Pa$	$\mathbf{V}\ Qa$	[8] *de [6]*
de [3], **EF** z/a	[9]	$\mathbf{F}\ Pa$	x	
		x	CTR (5, 8)	
		CTR (7, 9)		

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

v) $\forall x\ ((Ax \vee Bx) \rightarrow Cx),\ \exists xAx \models \exists xCx$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\ ((Ax \vee Bx) \rightarrow Cx)$		**UV**
	[2]	$\surd$ **V** $\exists xAx$		**EV**
	[3]	**F** $\exists xCx$		**EF**
de [2], **EV** x/a	[4]	**V** Aa		
de [3], **EF** x/a	[5]	**F** Ca		
de [1], **UV** x/a	[6]	$\surd$ **V** $((Aa \vee Ba) \rightarrow Ca)$		
de [6]	[7]	$\surd$ **F** $(Aa \vee Ba)$	**V** Ca	[8] *de [6]*
de [7]	[9]	**F** Aa	x	
de [7]	[10]	**F** Ba	CTR (5, 8)	
		x		
		CTR (4, 9)		

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

Exercício 12.5.
As fórmulas seguintes são todas inválidas. Mostre isso usando tablôs.

a) $Pa \rightarrow \forall xPx$

hipótese inicial	[1]	√ **F** $Pa \rightarrow \forall xPx$	
		|	
de [1]	[2]	**V** Pa	
de [1]	[3]	√ **F** $\forall xPx$	**UF**
		|	
de [3], **UF** x/a	[4]	**F** Pb	
		?	

R. O tablô está terminado: todas as fórmulas moleculares e a fórmula **UF** em [3] foram marcadas, não há mais o que possa ser reduzido. Porém, há um ramo aberto (sem contradição). Observar que como [3] é uma fórmula **UF**, a variável x em $\forall xPx$ pode ser substituída uma única vez, por uma constante **c** *nova no ramo*. Como a constante **a** já aparece em [2], ela não pode ser utilizada, e qualquer outra constante que se escolha em [4] (**b**, **c**, **d**, ... **t**) jamais produzirá contradição. Assim, a hipótese inicial é correta: a fórmula é inválida, pois pode ser falsa em alguma estrutura.

b) $\exists xPx \rightarrow Pa$

hipótese inicial	[1]	√ **F** $\exists xPx \rightarrow Pa$	
		|	
de [1]	[2]	√ **V** $\exists xPx$	**EV**
de [1]	[3]	**F** Pa	
		|	
de [2], **UF** x/a	[4]	**V** Pb	
		?	

R. O tablô está terminado (não há mais fórmulas a reduzir), mas tem um ramo aberto (sem contradição). Como [2] é uma fórmula **EV**, a variável x em $\exists xPx$ pode ser substituída uma única vez, por uma constante **c** *nova no ramo*. Como a constante **a** já aparece em [3], ela não pode ser utilizada, e qualquer outra constante que se escolha em [4] (**b**, **c**, **d**, ... **t**) não vai produzir contradição. Assim, a hipótese inicial é correta: a fórmula é inválida, pois pode ser falsa em alguma estrutura.

Condições semelhantes às dos exercícios (a) e (b) ocorrerão nos próximos exercícios, de modo que os comentários acima não serão mais reproduzidos. Além do emprego correto das regras para fórmulas quantificadas, o importante nestes exercícios de prova de invalidade por tablôs é a noção de *tablô terminado* (ver MORTARI 2001, 220).

c) (∃xPx ∧ ∃xQx) → ∃x (Px ∧ Qx)

hipótese inicial:	[1]	√ **F** ((∃xPx ∧ ∃xQx) → ∃x (Px ∧ Qx))	
de [1]	[2]	√ **V** (∃xPx ∧ ∃xQx)	
de [1]	[3]	**F** ∃x (Px ∧ Qx)	**EF**
de [2]	[4]	√ **V** ∃xPx	**EV**
de [2]	[5]	√ **V** ∃xQx	**EV**
de [4], **EV** x/a	[6]	**V** Pa	
de [5], **EV** x/b	[7]	**V** Qb	b é nova no ramo ...
de [3], **EF** x/a	[8]	√ **F** (Pa ∧ Qa)	

de [8]	[9]	**F** Pa	**F** Qa	[10] *de [8]*
		x		
		CTR (6, 9)	√ **F** (Pb ∧ Qb)	[11] *de [3]*, **EF** x/b

de [11],	[12]	**F** Pb	**F** Qb	[13] *de [11]*
		?	x	
			CTR (7, 13)	

R. Tablô terminado com um ramo aberto, logo, a fórmula é inválida.

d) ∀x (Ax ∨ Bx) → (∀xAx ∨ ∀xBx)

hipótese inicial:	[1]	√ **F** (∀x (Ax ∨ Bx) → (∀xAx ∨ ∀xBx))	
de [1]	[2]	**V** ∀x (Ax ∨ Bx)	**UV**
de [1]	[3]	√ **F** (∀xAx ∨ ∀xBx)	
de [3]	[4]	√ **F** ∀xAx	**UF**
de [3]	[5]	√ **F** ∀xBx	**UF**
de [4], **UF** x/a	[6]	**F** Aa	
de [5], **UF** x/b	[7]	**F** Bb	b é nova no ramo ...
de [2], **UV** x/a	[8]	√ **V** (Aa ∨ Ba)	

de [8]	[9]	**V** Aa	**V** Ba	[10] *de [8]*
		x		
		CTR (6, 9)	√ **V** (Ab ∨ Bb)	[11] *de [2]*, **UV** x/b

de [11],	[12]	**V** Ab	**V** Bb	[13] *de [11]*
		?	x	
			CTR (7, 13)	

R. Tablô terminado com um ramo aberto, logo, a fórmula é inválida.

e) $\exists x\,(Px \to Qa) \to (\exists x Px \to Qa)$

hipótese inicial:	[1]	$\surd$ **F** $(\exists x\,(Px \to Qa) \to (\exists x Px \to Qa))$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $\exists x\,(Px \to Qa)$		**EV**
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $(\exists x Px \to Qa)$		
de [3]	[4]	$\surd$ **V** $\exists x Px$		**EV**
de [3]	[5]	**F** Qa		
de [4], **EV** x/b	[6]	**V** Pb		b é nova no ramo
de [2], **EV** x/c	[7]	$\surd$ **V** $(Pc \to Qa)$		c é nova no ramo
de [7]	[8]	**F** Pc	**V** Qa	[9] *de [7]*
		?	x	
			CTR (5, 9)	

R. Tablô terminado com um ramo aberto, logo, a fórmula é inválida. A hipótese inicial está correta (a fórmula é falsa em alguma estrutura).

f) $(\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x\,(Px \to Qx)$

hipótese inicial:	[1]	$\surd$ **F** $((\forall x Px \to \forall x Qx) \to \forall x\,(Px \to Qx))$		
de [1]	[2]	$\surd$ **V** $(\forall x Px \to \forall x Qx)$		
de [1]	[3]	$\surd$ **F** $\forall x\,(Px \to Qx)$		**UF**
de [3], **UF** x/a	[4]	$\surd$ **F** $(Pa \to Qa)$		
de [4]	[5]	**V** Pa		
de [4]	[6]	**F** Qa		
de [2], **UF**	[7]	$\surd$ **F** $\forall x Px$	**V** $\forall x Qx$	[8] *de [2],* **UV**
de [7], **UF** x/b	[9]	**F** Pb	**V** Qa	[10] *de [8],* **UV** x/a
b é nova no ramo		?	x	
			CTR (6, 10)	

R. Tablô terminado com um ramo aberto, logo, a fórmula é inválida.

Exercício 12.6.

Determine se as fórmulas à direita de '$\models$' são conseqüência lógica ou não das demais.

a) $\exists xFx \lor \exists xHx \models \exists x\,(Fx \lor Hx)$

hipóteses	[1]	$\surd$ **V** $(\exists xFx \lor \exists xHx)$		
iniciais:	[2]	**F** $\exists x\,(Fx \lor Hx)$		**EF**
de [1]	[3]	$\surd$ **V** $\exists xFx$	$\surd$ **V** $\exists xHx$	[4] *de [1],* **EV**
de [3], **EV** x/a	[5]	**V** Fa	**V** Ha	[6] *de [4],* **EV** x/a (outro ramo!)
de [2], **EF** x/a	[7]	$\surd$ **F** $(Fa \lor Ha)$	$\surd$ **F** $(Fa \lor Ha)$	[8] *de [2],* **EF** x/a
de [7]	[9]	**F** Fa	**F** Fa	[11] *de [8]*
de [7]	[10]	**F** Ha	**F** Ha	[12] *de [8]*
		x	x	
		CTR (5, 10)	CTR (6, 12)	

R. Tablô completo, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica da fórmula anterior ($\alpha \models \beta$).

b) $\exists xPbx,\ \forall x\forall y\,(Pxy \to Syx) \models \exists xSxb$

hipóteses	[1]	$\surd$ **V** $\exists xPbx$		**EV**
iniciais:	[2]	**V** $\forall x\forall y\,(Pxy \to Syx)$		**UV**
	[3]	**F** $\exists xSxb$		**EF**
de [1], **EV** x/a	[4]	**V** Pba		
de [3], **EF** x/a	[5]	**F** Sab		
de [2], **UV** x/b	[6]	**V** $\forall y\,(Pby \to Syb)$		**UV** Como temos Pba em [4], é uma boa escolha trocar x/b ao instanciar [2] pela primeira vez, e depois trocar y/a ao instanciar [2] pela segunda vez.
de [2], **UV** y/a	[7]	$\surd$ **V** $(Pba \to Sab)$		
	[8]	**F** Pba	**V** Sab	[9]
		x	x	
		CTR (4, 8)	CTR (5, 9)	

R. Tablô terminado, todos os ramos fecham em contradição. As hipóteses iniciais são absurdas, e portanto a conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

c) $\forall xPx \rightarrow \forall xQx, \exists x\neg Qx \models \neg\forall xPx$

hipóteses	[1]	√ **V** $(\forall xPx \rightarrow \forall xQx)$		
iniciais:	[2]	√ **V** $\exists x\neg Qx$		**EV**
	[3]	√ **F** $\neg\forall xPx$		
de [3]	[4]	**V** $\forall xPx$		**UV**
de [2], **EV** x/a	[5]	√ **V** $\neg Qa$		
de [5]	[6]	**F** Qa		
de [1], **UF**	[7]	√ **F** $\forall xPx$	**V** $\forall xQx$	[8] *de [1],* **UV**
de [7], **UF** x/b	[9]	**F** Pb	**V** Qa	[10] *de [8],* **UV** x/a
de [4], **UV** x/b	[11]	**V** Pb	x	
		x	CTR (6, 10)	
		CTR (9, 11)		

R. Tablô terminado, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

d) $\exists xAx \rightarrow \exists xBx, \exists x\neg Bx \models \exists x\neg Ax$

hipóteses	[1]	√ **V** $(\exists xAx \rightarrow \exists xBx)$		
iniciais:	[2]	√ **V** $\exists x\neg Bx$		**EV**
	[3]	**F** $\exists x\neg Ax$		**EF**
de [2], **EV** x/a	[4]	√ **V** $\neg Ba$		
de [4]	[5]	**F** Ba		
de [1], **EF**	[6]	**F** $\exists xAx$	√ **V** $\exists xBx$	[7] *de [1],* **EV**
de [6], **EF** x/a	[8]	**F** Aa	**V** Bb	[11] *de [7],* **EV** x/ b
de [3], **EF** x/a	[9]	√ **F** $\neg Aa$	?	
de [9]	[10]	**V** Aa		
		x		
		CTR (8, 10)		

R. O tablô está terminado: não há mais fórmulas que possam ser reduzidas. Porém, há um ramo aberto (sem contradição). Como [7] é uma fórmula **EV**, a variável x em $\exists xBx$ pode ser substituída uma única vez, por uma constante *nova no ramo*. Como a constante **a** já foi utilizada na redução de $\exists x\neg Bx$ em [4], ela não pode ser utilizada, e qualquer outra constante que se escolha em [11] (**b**, **c**, **d**, ... **t**) jamais produzirá uma contradição. Assim, a hipótese inicial é correta: a conclusão pode ser falsa e as fórmulas verdadeiras em alguma estrutura. Logo, a conclusão não conseqüência lógica das fórmulas anteriores.

e) $\forall x\,(Px \wedge \neg Rxb), \exists x\,(\neg Qx \vee Rxb), \forall x\,(\neg Rxb \rightarrow Qx) \models \exists yRyb$

hipóteses	[1]	**V** $\forall x\,(Px \wedge \neg Rxb)$	**UV**
iniciais:	[2]	√ **V** $\exists x\,(\neg Qx \vee Rxb)$	**EV**
	[3]	**V** $\forall x\,(\neg Rxb \rightarrow Qx)$	**UV**
	[4]	**F** $\exists yRyb$	**EF**
de [2], **EV** x/a	[5]	√ **V** $(\neg Qa \vee Rab)$	

de [5]	[6]	√ **V** $\neg Qa$	**V** Rab	[7] *de [5]*
de [6]	[8]	**F** Qa	**F** Rab	[9] *de [4],* **EF** y/a
de [3], **UV** x/a	[10]	√ **V** $(\neg Rab \rightarrow Qa)$	x	
			CTR (7, 9)	

de [10]	[11]	√ **F** $\neg Rab$	**V** Qa	[12] *de [10]*
de [11]	[13]	**V** Rab	x	
de [4], **EF** y/a	[14]	**F** Rab	CTR (8, 12)	
		x		
		CTR (13, 14)		

R. Tablô terminado. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

f) $\forall x\,(Fx \rightarrow Cx), \exists x\,(Ax \wedge Fx) \models \exists x\,(Ax \wedge Cx)$

hipóteses	[1]	**V** $\forall x\,(Fx \rightarrow Cx)$	**UV**
iniciais:	[2]	√ **V** $\exists x\,(Ax \wedge Fx)$	**EV**
	[3]	**F** $\exists x\,(Ax \wedge Cx)$	**EF**
de [2], **EV** x/a	[4]	√ **V** $(Aa \wedge Fa)$	
de [4]	[5]	**V** Aa	
de [4]	[6]	**V** Fa	
de [3], **EF** x/a	[7]	√ **F** $(Aa \wedge Ca)$	

de [7]	[8]	**F** Aa	**F** Ca	[9] *de [7]*
		x	√ **V** $(Fa \rightarrow Ca)$	[10] *de [1],* **UV** x/a
		CTR (5, 8)		

de [10],	[11]	**F** Fa	**V** Ca	[12] *de [10]*
		x	x	
		CTR (6, 11)	CTR (9, 12)	

R. Tablô terminado. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

g) ∀x (Fx → Hx), ∀z (Tz → Fz), ∃y (Ty ∧ Qy) ⊨ ∃x (Hx ∧ Qx)

hipóteses iniciais:	[1]	**V** ∀x (Fx → Hx)	**UV**
	[2]	**V** ∀z (Tz → Fz)	**UV**
	[3]	√ **V** ∃y (Ty ∧ Qy)	**EV**
	[4]	**F** ∃x (Hx ∧ Qx)	**EF**
de [3], **EV** y/a	[5]	√ **V** (Ta ∧ Qa)	
de [5]	[6]	**V** Ta	
de [5]	[7]	**V** Qa	
de [4], **EF** x/a	[8]	√ **F** (Ha ∧ Qa)	

de [8] [9] **F** Ha | **F** Qa [10] *de [8]*
x
CTR (7, 10)

de [1], **UV** x/a [11] √ **V** (Fa → Ha)

de [11] [12] **F** Fa | **V** Ha [13] *de [11]*
x
CTR (9, 13)

de [2], **UV** x/a [14] √ **V** (Ta → Fa)

de [14] [15] **F** Ta | **V** Fa [16] *de [14]*
x | x
CTR (6, 15) | CTR (12, 16)

R. Tablô terminado, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores (Γ ⊨ α).

h) ∀x (Fx → Cx), ∃x (Ax ∧ Fx) ⊨ ∃x (Ax ∧ Cx)

Ver exercício (f) - repetido!

i) $\exists xPx \wedge \exists xQx \models \exists x\,(Px \wedge Qx)$

hipóteses	[1]	$\surd$ **V** $(\exists xPx \wedge \exists xQx)$	
iniciais:	[2]	**F** $\exists x\,(Px \wedge Qx)$	**EF**
de [1]	[3]	$\surd$ **V** $\exists xPx$	**EV**
de [1]	[4]	$\surd$ **V** $\exists xQx$	**EV**
de [3], **EV** x/a	[5]	**V** Pa	
de [4], **EV** x/b	[6]	**V** Qb	**a** já usada, **b** nova no ramo
de [2], **EF** x/a	[7]	$\surd$ **F** $(Pa \wedge Qa)$	

de [7] [8] **F** Pa — **F** Qa [9] *de [7]*

F Pa: x CTR (5, 8)

F Qa: $\surd$ **F** $(Fb \wedge Qb)$ [10] *de [2],* **EF** x/b

de [10], [11] **F** Pb — **F** Qb [12] *de [10]*

F Pb: ?

F Qb: x CTR (6, 12)

R. Tablô terminado. Como há um ramo aberto (sem contradição) as hipóteses iniciais são corretas: a fórmula $\exists x\,(Px \wedge Qx)$ pode ser falsa e a fórmula $(\exists xPx \wedge \exists xQx)$ pode ser verdadeira em alguma estrutura. Logo, a segunda não é conseqüência lógica da primeira.

j) $\forall xPx \rightarrow \forall xQx, \exists x\neg Qx \models \neg\forall xPx$

Ver exercício (c) - (repetido) !

k) $\forall x\,(Px \rightarrow Qx), \exists xPx \models \forall xQx$

hipóteses	[1]	**V** $\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$	**UV**
iniciais:	[2]	$\surd$ **V** $\exists xPx$	**EV**
	[3]	$\surd$ **F** $\forall xQx$	**UF**
de [2], **EV** x/a	[4]	**V** Pa	
de [3], **UF** x/b	[5]	**F** Qb	**a** já usada, **b** nova no ramo
de [1], **UV** x/a	[6]	$\surd$ **V** $(Pa \rightarrow Qa)$	

de [6] [7] **F** Pa — **V** Qa [8] *de [6]*

F Pa: x CTR (4, 7)

V Qa: $\surd$ **V** $(Pb \rightarrow Qb)$ [9] *de [1],* **UV** x/b

de [9], [10] **F** Pb — **V** Qb [11] *de [10]*

F Pb: ?

V Qb: x CTR (5, 11)

R. A conclusão não é conseqüência lógica das fórmulas anteriores.

l) $\forall x\,(Px \wedge \neg Rxb),\ \exists x\,(\neg Qx \vee Rxb),\ \forall x\,(\neg Rxb \rightarrow Qx) \models \exists y Ryb$

Ver exercício (e) - (repetido) !

m) $\forall x\,(Px \rightarrow Qx),\ \forall x Px \models \exists x Qx$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\,(Px \rightarrow Qx)$		**UV**
	[2]	**V** $\forall x Px$		**UV**
	[3]	**F** $\exists x Qx$		**EF**
de [3], **EF** x/a	[4]	**F** Qa		
de [2], **UV** x/a	[5]	**V** Pa		
de [1], **UV** x/a	[6]	√ **V** (Pa → Qa)		
de [6]	[7]	**F** Pa	**V** Qa	[8] *de [6]*
		x	x	
		CTR (5, 7)	CTR (4, 8)	

R. Tablô terminado, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é conseqüência lógica das fórmulas anteriores ($\Gamma \models \alpha$).

n) $\forall x\,(Sx \rightarrow \neg Rx),\ \forall x\,(Px \rightarrow Sx),\ Pa \models \exists x\,(Px \rightarrow \neg Rx)$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\,(Sx \rightarrow \neg Rx)$		**UV**
	[2]	**V** $\forall x\,(Px \rightarrow Sx)$		**UV**
	[3]	**V** Pa		
	[4]	**F** $\exists x\,(Px \rightarrow \neg Rx)$		**EF**
de [4], **EF** x/a	[5]	√ **F** (Pa → ¬Ra)		
de [5]	[6]	**V** Pa		
de [5]	[7]	√ **F** ¬Ra		
de [7]	[8]	**V** Ra		
de [2], **UV** x/a	[9]	√ **V** (Pa → Sa)		
de [9]	[10]	**F** Pa	**V** Sa	[11] *de [9]*
		x	√ **V** (Sa → ¬Ra)	[12] *de [1],* **UV** x/a
		CTR (3, 10)		

de [12],	[13]	**F** Sa	√ **V** ¬Ra	[14] *de [12]*
		x	**F** Ra	[15] *de [14]*
			x	
		CTR (11, 13)	CTR (8, 15)	

R. Tablô terminado, ($\Gamma \models \alpha$).

o) $\forall x\, (Sx \rightarrow \neg\neg Rx), \forall x\, (\neg Px \rightarrow Sx), Pa \models \exists x\, (Px \rightarrow \neg Rx)$

hipóteses iniciais:	[1]	**V** $\forall x\, (Sx \rightarrow \neg\neg Rx)$	**UV**
	[2]	**V** $\forall x\, (\neg Px \rightarrow Sx)$	**UV**
	[3]	**V** Pa	
	[4]	**F** $\exists x\, (Px \rightarrow \neg Rx)$	**EF**
de [4], **EF** x/a	[5]	√ **F** $(Pa \rightarrow \neg Ra)$	
de [5]	[6]	**V** Pa	
de [5]	[7]	√ **F** $\neg Ra$	
de [7]	[8]	**V** Ra	
de [2], **UV** x/a	[9]	√ **V** $(\neg Pa \rightarrow Sa)$	

de [9]	[10]	√ **F** $\neg Pa$	**V** Sa	[11] *de [9]*
de [10]	[12]	**V** Pa		
de [2], **UV** x/a	[13]	√ **V** $(Sa \rightarrow \neg\neg Ra)$	√ **V** $(Sa \rightarrow \neg\neg Ra)$	[14] *de [2],* **UV** x/a

de [13], [15], [16]	**F** Sa	√ **V** $\neg\neg Ra$	**F** Sa	**V** $\neg\neg Ra$	[17], [18] *de [14]*
	?		x		
[19]		√ **F** $\neg Ra$	CTR	√ **F** $\neg Ra$	[21] *de [18]*
[20]		**V** Ra	(11, 17)	**V** Ra	[22] *de [21]*
		?		?	

R. O tablô está terminado, não há mais fórmulas que possam ser reduzidas. Como há ramos abertos (sem contradição), as hipóteses iniciais são corretas: existe alguma estrutura que é modelo para o conjunto Γ formado pelas fórmulas nas linhas [1], [2] e [3], e na qual a conclusão α da linha [4] é falsa. Logo, α não é uma conseqüência lógica de Γ.

p) $\neg\exists xFx \vee \neg\exists xHx \models \neg\exists x\,(Fx \vee Hx)$

hipóteses iniciais:	[1]	√ **V** $(\neg\exists xFx \vee \neg\exists xHx)$				
	[2]	√ **F** $\neg\exists x\,(Fx \vee Hx)$				
de [2]	[3]	√ **V** $\exists x\,(Fx \vee Hx)$				**EV**
de [3], **EV** x/a	[4]	√ **V** $(Fa \vee Ha)$				
de [4]	[5]	**V** Fa		**V** Ha		[6] *de [4]*
de [1],	[7], [8]	√ **V** $\neg\exists xFx$	√ **V** $\neg\exists xHx$	√ **V** $\neg\exists xFx$	√ **V** $\neg\exists xHx$	[9], [10] *de [1]*
de [7], [8]	[11], [12]	**F** $\exists xFx$	**F** $\exists xHx$	**F** $\exists xFx$	**F** $\exists xHx$	[13], [14] *de [9], [10]*
de [11], [12] **EF** x/a	[15], [16]	**F** Fa	**F** Ha	**F** Fa	**F** Ha	[17], [18] *de [13], [14]* **EF** x/a
		x CTR (5, 15)	?	?	x CTR (6, 18)	

R. Tablô terminado, não há mais fórmulas a reduzir. Como há ramos abertos (sem contradição), as hipóteses iniciais são corretas: existe alguma estrutura onde a fórmula $(\neg\exists xFx \vee \neg\exists xHx)$ é verdadeira e onde a fórmula $(\neg\exists x\,(Fx \vee Hx))$ é falsa, de modo que a segunda não é conseqüência lógica da primeira.

q) $\exists xPbx, \forall x\forall y\,(Pxy \rightarrow Syx) \models \exists xSxb$

Ver exercício (b) - (repetido) !

r) $\forall x\,(Fx \rightarrow Hx), \forall z\,(Tz \rightarrow Fz), \exists y\,(Ty \wedge Qy) \models \exists x\,(Hx \wedge Qx)$

Ver exercício (g) - (repetido) !

s) $\forall xPx \models \forall y\,(Ryb \rightarrow Py)$

hipóteses	[1]	**V** $\forall xPx$	**UV**
iniciais:	[2]	√ **F** $\forall y\,(Ryb \rightarrow Py)$	**UF**
de [2], **UF** x/a	[3]	√ **F** $(Rab \rightarrow Pa)$	
	[4]	**V** Rab	
	[5]	**F** Pa	
de [1], **UV** x/a	[6]	**V** Pa	
		x	
		CTR (5, 6)	

R. Tablô terminado. A conclusão é conseqüência lógica da fórmula anterior.

t) $\forall z\,(Qz \rightarrow \forall y\,(Ry \rightarrow Szy)), \forall z\,(Qz \rightarrow \forall y\,(Szy \rightarrow Py)), \exists xQx \models \forall y\,(Ry \rightarrow Py)$

hipóteses	[1]	**V** $\forall z\,(Qz \rightarrow \forall y\,(Ry \rightarrow Szy))$	**UV**
iniciais:	[2]	**V** $\forall z\,(Qz \rightarrow \forall y\,(Szy \rightarrow Py))$	**UV**
	[3]	√ **V** $\exists xQx$	**EV**
	[4]	√ **F** $\forall y\,(Ry \rightarrow Py)$	**UF**
de [3], **EV** x/a	[5]	**V** Qa	
de [4], **UF** x/b	[6]	√ **F** $(Rb \rightarrow Pb)$	b é nova no ramo
de [6]	[7]	**V** Rb	
de [6]	[8]	**F** Pb	
de [1], **UV** z/a	[9]	√ **V** $(Qa \rightarrow \forall y\,(Ry \rightarrow Say))$	

de [9] [10] **F** Qa — x — CTR (5, 10)

V $\forall y\,(Ry \rightarrow Say))$ — [11] *de [9],* **UV**

√ **V** $(Rb \rightarrow Sab)$ — [12] *de [11],* **UV** y/b

de [12] [13] **F** Rb — x — CTR (7, 13)

V Sab — [14] *de [12]*

√ **V** $(Qa \rightarrow \forall y\,(Say \rightarrow Py))$ — [15] *de [2],* **UV** z/a

de [15] [16] **F** Qa — x — CTR (5, 16)

V $\forall y\,(Say \rightarrow Py))$ — [17] *de [15]*, **UV**

√ **V** $(Sab \rightarrow Pb)$ — [18] de [17], **UV** y/b

de [18], [19] **F** Sab — x — CTR (14, 19)

V Pb — x — CTR (8, 20) — [20] *de [18]*

Capítulo 13 - Sistemas Axiomáticos e Sistemas Formais

Sem exercícios.

Capítulo 14 - Dedução Natural (Parte I)

Exercício 14.1.

Em cada um dos casos abaixo, diga qual foi a regra utilizada para deduzir a conclusão das premissas.

a) $Pa \wedge Pb \vdash Qb$	Separação (S)
b) $Rab \rightarrow Pc, Rab \vdash Pc$	Modus Ponens (MP)
c) $Qa \vdash Qa \vee \neg Pb$	Expansão (E)
d) $Qa, Rab \vdash Rab \wedge Qa$	Conjunção (C)
e) $\neg Qa, Rab \vee Qa \vdash Rab$	Silogismo Disjuntivo (SD)
f) $Pa \rightarrow Pb, Pb \rightarrow Pa \vdash Pa \leftrightarrow Pb$	Conds p/ Bicond (CB)
g) $\neg\neg(Rac \vee Qb) \vdash Rac \vee Qb$	Dupla Negação (DN)
h) $Sabc \leftrightarrow Tp \vdash Tp \rightarrow Sabc$	Bicond p/ Conds (BC)
i) $Pa \wedge (Qb \vee Rab) \vdash Qb \vee Rab$	Separação (S)
j) $\neg Pa, Pa \rightarrow Qb \vdash (Pa \rightarrow Qb) \wedge \neg Pa$	Conjunção (C)
k) $(Qb \vee Rab) \rightarrow (\neg A \wedge C), Qb \vee Rab \vdash \neg A \wedge C$	Modus Ponens (MP)
l) $\neg\neg(A \rightarrow (Qb \vee C)) \vdash A \rightarrow (Qb \vee C)$	Dupla Negação (DN)
m) $(Pa \wedge Tc) \leftrightarrow \neg(Rab \rightarrow C) \vdash (Pa \wedge Tc) \rightarrow \neg(Rab \rightarrow C)$	Bicond p/ Conds (BC)
n) $Pa \rightarrow Qb \vdash (A \leftrightarrow B) \vee (Pa \rightarrow Qb)$	Expansão (E)
o) $(Pa \rightarrow Tp) \wedge (A \vee \neg\neg Rab) \vdash A \vee \neg\neg Rab$	Separação (S)
p) $\neg Pa \rightarrow (Qb \vee Tc), (Qb \vee Tc) \rightarrow \neg Pa \vdash (Qb \vee Tc) \leftrightarrow \neg Pa$	Conds p/ Bicond (CB)

Exercício 14.2

Abaixo você encontra uma série de deduções já feitas. Dê a justificativa para cada linha que falta.

a)

1. $(A \vee B) \rightarrow C$	P
2. $C \wedge A$	P
3. A	2 S
4. $A \vee B$	3 E
5. C	2 S ou 1,4 MP
6. $A \wedge C$	3, 5 C
7. $(A \vee B) \wedge (A \wedge C)$	4, 6 C

b)

1. $A \rightarrow B$	P
2. $C \vee (B \rightarrow A)$	P
3. $D \rightarrow \neg C$	P
4. $E \wedge D$	P
5. D	4 S
6. $\neg C$	3, 5 MP
7. $B \rightarrow A$	2, 6 SD
8. $A \leftrightarrow B$	1, 7 CB

c)

1. $\neg\neg A \wedge (B \rightarrow C)$	P
2. $E \wedge D$	P
3. $((B \rightarrow C) \wedge (D \vee F)) \rightarrow G$	P
4. $B \rightarrow C$	1 S
5. D	2 S
6. $D \vee F$	5 E
7. $(B \rightarrow C) \wedge (D \vee F)$	4, 6 C
8. G	3, 7 MP
9. E	2 S
10. $\neg\neg A$	1 S
11. A	10 DN
12. $G \wedge A$	8, 11 C
13. $(G \wedge A) \wedge E$	9, 12 C

d)

1. $B \leftrightarrow A$	P
2. $(B \vee C) \rightarrow (E \vee Q)$	P
3. $(B \wedge A) \rightarrow C$	P
4. $\neg E$	P
5. B	P
6. $B \rightarrow A$	1 BC
7. A	5, 6 MP
8. $B \wedge A$	5, 7 C
9. C	3, 8 MP
10. $B \vee C$	5 E
11. $E \vee Q$	2, 10 MP
12. Q	4, 11 SD

e)

1. $(\neg B \rightarrow \neg A) \leftrightarrow (C \vee D)$	P
2. D	P
3. $\neg B$	P
4. $A \vee (T \vee \neg\neg Q)$	P
5. $(C \vee D) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$	1 BC
6. $C \vee D$	2 E
7. $\neg B \rightarrow \neg A$	5, 6 MP
8. $\neg A$	3, 7 MP
9. $T \vee \neg\neg Q$	4, 8 SD
10. $(T \vee \neg\neg Q) \vee R$	9 E

f)

1. $\neg(P \wedge B) \rightarrow \neg T$	P
2. $T \vee (\neg\neg A \wedge \neg C)$	P
3. $A \rightarrow \neg E$	P
4. $\neg(P \wedge B)$	P
5. $\neg T$	1, 4 MP
6. $\neg\neg A \wedge \neg C$	2, 5 SD
7. $\neg\neg A$	6 S
8. A	7 DN
9. $\neg E$	3, 8 MP
10. $(A \rightarrow \neg E) \wedge \neg E$	3, 9 C

Exercício 14.3
Prove a validade das formas de argumentos seguintes, utilizando dedução natural.

a) $Pa \vee Pb, \neg Pa \vdash Pb$

1. $Pa \vee Pb$	P
2. $\neg Pa$	P /? Pb
3. Pb	1, 2 SD

b) $Pa, Pb \vdash Pb \wedge Pa$

1. Pa	P
2. Pb	P /? $Pb \wedge Pa$
3. $Pb \wedge Pa$	1, 2 C

c) $Pa \rightarrow Pb, Pa \vdash Pa \wedge Pb$

1. $Pa \rightarrow Pb$	P
2. Pa	P /? $Pa \wedge Pb$
3. Pb	1, 2 MP
4. $Pa \wedge Pb$	2, 3 C

d) $Pa \leftrightarrow Pb, Pa \vdash Pb$

1. $Pa \leftrightarrow Pb$	P
2. Pa	P /? Pb
3. $Pa \rightarrow Pb$	1 BC
4. Pb	2, 3 MP

e) $Qa \wedge Qc \vdash Qa \vee B$

1. $Qa \wedge Qc$	P /? $Qa \vee B$
2. Qa	1 S
2. $Qa \vee B$	2 E

f) $Rab \vee \neg Pa, \neg\neg Pa \vdash Rab$

1. $Rab \vee \neg Pa$	P
2. $\neg\neg Pa$	P /? Rab
3. Rab	1, 2 SD

g) $Pa \wedge Pb \vdash Pb \wedge Pa$

1. $Pa \wedge Pb$	P /? $Pb \wedge Pa$
2. Pb	1 S
3. Pa	2 S
4. $Pb \wedge Pa$	2, 3 C

h) $(Pa \rightarrow Rab) \wedge (Pa \rightarrow Fb), Pa \vdash Rab \wedge Fb$

1. $(Pa \rightarrow Rab) \wedge (Pa \rightarrow Fb)$	P
2. Pa	P /? $Rab \wedge Fb$
3. $Pa \rightarrow Rab$	1 S
4. Rab	2, 3 MP
5. $Pa \rightarrow Fb$	1 S
6. Fb	2, 5 MP
7. $Rab \wedge Fb$	4, 6 C

i) $(Rab \vee C) \rightarrow \neg\neg Pa, C \vdash Pa$

1. $(Rab \vee C) \rightarrow \neg\neg Pa$	P
2. C	P /? Pa
3. $Rab \vee C$	2 E
4. $\neg\neg Pa$	1, 3 MP
5. Pa	4 DN

j) $(Pa \vee Qb) \wedge C, \neg Qb \vdash Pa$

1. $(Pa \vee Qb) \wedge C$	P
2. $\neg Qb$	P /? Pa
3. $Pa \vee Qb$	1 S
4. Pa	2, 3 SD

k) $(\neg A \rightarrow Pb) \wedge (Pb \rightarrow \neg A) \vdash \neg A \leftrightarrow Pb$

1. $(\neg A \rightarrow Pb) \wedge (Pb \rightarrow \neg A)$	P /? $\neg A \leftrightarrow Pb$
2. $\neg A \rightarrow Pb$	1 S
3. $Pb \rightarrow \neg A$	1 S
4. $\neg A \leftrightarrow Pb$	2, 3 CB

l) $\neg Pa \vee (Qb \vee Rab), \neg\neg Pa \wedge \neg Qb, Rab \rightarrow D \vdash D$

1. $\neg Pa \vee (Qb \vee Rab)$	P
2. $\neg\neg Pa \wedge \neg Qb$	P
3. $Rab \rightarrow D$	P /? D
4. $\neg\neg Pa$	2 S
5. $Qb \vee Rab$	1, 4 SD
6. $\neg Qb$	2 S
7. Rab	5, 6 SD
8. D	3, 7 MP

m) $A \leftrightarrow Qb, Fa \leftrightarrow Rab, A \wedge Rab \vdash Fa \wedge Qb$

1. $A \leftrightarrow Qb$	P
2. $Fa \leftrightarrow Rab$	P
3. $A \wedge Rab$	P /? $Fa \wedge Qb$
4. $Rab \rightarrow Fa$	2 BC
5. Rab	3 S
6. Fa	4, 5 MP
7. $A \rightarrow Qb$	1 BC
8. A	3 S
9. Qb	7, 8 MP
10. $Fa \wedge Qb$	6, 9 C

n) $Pa \rightarrow (Apq \leftrightarrow Bcd), Cs \vee D, D \rightarrow \neg\neg Pa, \neg Cs \wedge Bcd \vdash Apq$

1. $Pa \rightarrow (Apq \leftrightarrow Bcd)$	P
2. $Cs \vee D$	P
3. $D \rightarrow \neg\neg Pa$	P
4. $\neg Cs \wedge Bcd$	P /? Apq
5. $\neg Cs$	4 S
6. D	2, 5 SD
7. $\neg\neg Pa$	3, 6 MP
8. Pa	7 DN
9. $Apq \leftrightarrow Bcd$	1, 8 MP
10. $Bcd \rightarrow Apq$	9 BC
11. Bcd	4 S
12. Apq	10, 11 MP

Comentário: Observar que a conclusão Apq aparece em uma parte da primeira premissa. Logo, a estratégia é tentar "arrancar" Apq do bicondicional ($Apq \leftrightarrow Bcd$). Uma boa forma de fazer isso é posicionar Apq como o conseqüente do condicional $Bcd \rightarrow Apq$, pois podemos separar Bcd de (4) e obter a conclusão Apq por MP. Os demais passos têm como objetivo viabilizar esta estratégia, e são todos razoavelmente intuitivos.

Exercício 14.4

Abaixo você encontra algumas deduções já feitas. Dê a justificativa para as linhas que não a tem.

a)			Comentários
1.	$(Pa \vee Rb) \rightarrow (D \wedge \neg Cb)$	P /? $Rb \rightarrow (\neg Cb \vee E)$	Conclusão $(\alpha \rightarrow \beta)$, uso RPC
2.	Rb	H /? $(\neg Cb \vee E)$	Introduzo α como H
3.	$Pa \vee Rb$	2 E	Expando Rb para $Pa \vee Rb$
4.	$D \wedge \neg Cb$	1, 3 MP	Obtenho $D \wedge \neg Cb$ por MP
5.	$\neg Cb$	4 S	Separo $\neg Cb$, já tenho parte de β
6.	$\neg Cb \vee E$	5 E	Expando $\neg Cb$ e obtenho β
7.	$Rb \rightarrow (\neg Cb \vee E)$	2 - 6 RPC	H descartada, concluo $(\alpha \rightarrow \beta)$

b)			Comentários
1.	$Ca \rightarrow Qb$	P	
2.	$\neg Qb \wedge Sp$	P /? $\neg Ca$	Conclusão $\neg\alpha$, uso RAA
3.	$\neg Qb$	2 S	Separo $\neg Qb$ de 2
4.	Ca	H /? CTR	Introduzo α como H
5.	Qb	1, 4 MP	Obtenho Qb por MP
6.	$Qb \wedge \neg Qb$	3, 5 C	Contradição! $(\beta \wedge \neg\beta)$
7.	$\neg Ca$	4 - 6 RAA	H descartada, concluo $\neg\alpha$

c)			Comentários
1.	$Ap \rightarrow (Rs \leftrightarrow (Bq \vee Tc))$	P	
2.	$Cs \vee Lb$	P	
3.	$Lb \rightarrow Ap$	P /? $\neg Cs \rightarrow (Bq \rightarrow Rs)$	Conclusão $(\alpha \rightarrow \beta)$, uso RPC
4.	$\neg Cs$	H /? $(Bq \rightarrow Rs)$	β tem forma $(\delta \rightarrow \gamma)$, uso RPC
5.	Bq	H /? Rs	Introduzo δ para deduzir γ
6.	Lb	2, 4 SD	
7.	Ap	3, 6 MP	
8.	$Rs \leftrightarrow (Bq \vee Tc)$	1, 7 MP	
9.	$(Bq \vee Tc) \rightarrow Rs$	8 BC	
10.	$Bq \vee Tc$	5 E	
11.	Rs	9, 10 MP	De δ consegui γ ...
12.	$Bq \rightarrow Rs$	5 - 11 RPC	H descartada, concluo $(\delta \rightarrow \gamma)$
13.	$\neg Cs \rightarrow (Bq \rightarrow Rs)$	4 - 12 RPC	H descartada, concluo $(\alpha \rightarrow \beta)$

d)

1.	$Ta \rightarrow Nsp$	P	
2.	$Ta \vee Fp$	P	
3.	$E \rightarrow \neg Fp$	P	
4.	$\neg Nsp$	P /? $\neg E$	
5.	Ta	H /?	H para obter Nsp
6.	Nsp	1, 5 MP	
7.	$Nsp \wedge \neg Nsp$	4, 6 C	
8.	$\neg Ta$	5 - 7 RAA	
9.	Fp	2, 8 SD	
10.	E	H /? CTR	H para obter $\neg E$
11.	$\neg Fp$	3, 10 MP	
12.	$Fp \wedge \neg Fp$	9, 11 C	
13.	$\neg E$	10 - 12 RAA	

Exercício 14.5

Prove a validade das formas de argumento abaixo. Você vai precisar introduzir apenas uma hipótese.

a) $Pa \to Qb, Qb \to C \vdash Pa \to C$ Forma do Silogismo Hipotético (SH)

1.	$Pa \to Qb$	P
2.	$Qb \to C$	P /? $Pa \to C$
3.	Pa	H /? C
4.	Qb	1, 3 MP
5.	C	2, 4 MP
6.	$Pa \to C$	3 - 5 RPC

b) $Pa \to \neg Qb, Qb \vee Rab \vdash Pa \to Rab$

1.	$Pa \to \neg Qb$	P
2.	$Qb \vee Rab$	P /? $Pa \to Rab$
3.	Pa	H /? Rab
4.	$\neg Qb$	1, 3 MP
5.	Rab	2, 4 SD
6.	$Pa \to Rab$	3 - 5 RPC

c) $Fa \to Ga, \neg Ga \vdash \neg Fa$ Forma do Silogismo Disjuntivo (SD)

1.	$Fa \to Ga$	P
2.	$\neg Ga$	P /? $\neg$ Fa
3.	Fa	H /? CTR
4.	Ga	1, 3 MP
5.	$Ga \wedge \neg Ga$	2, 4 C
6.	$\neg Fa$	3 - 5 RAA

d) $Pa \vdash (Pa \to Qb) \to Qb$

1.	Pa	P /? $(Pa \to Qb) \to Qb$
2.	$Pa \to Qb$	H /? Qb
3.	Qb	1, 2 MP
4.	$(Pa \to Qb) \to Qb$	2 - 3 RPC

e) $Pa \vee Pa \vdash Pa$

1.	$Pa \vee Pa$	P /? Pa
2.	$\neg Pa$	H /? CTR
3.	Pa	1, 2 SD
4.	$Pa \wedge \neg Pa$	2, 3 C
5.	$\neg\neg Pa$	2 - 4 RAA
6.	Pa	5 DN

f) $Pa, \neg Pa \vdash Qb$ De uma contradição ($\beta \wedge \neg\beta$) se conclui qualquer coisa ...

1.	Pa	P
2.	$\neg Pa$	P /? Qb
3.	$\neg Qb$	H /? CTR
4.	$Pa \wedge \neg Pa$	1, 2 C
5.	$\neg\neg Qb$	3 - 4 RAA
6.	Qb	5 DN

g) $Pa \rightarrow (Qb \rightarrow C) \vdash (Pa \wedge Qb) \rightarrow C$

1.	$Pa \rightarrow (Qb \rightarrow C)$	P /? $(Pa \wedge Qb) \rightarrow C$
2.	$Pa \wedge Qb$	H /? C
3.	Pa	2 S
4.	$Qb \rightarrow C$	1, 3 MP
5.	Qb	2 S
6.	C	4, 5 MP
7.	$(Pa \wedge Qb) \rightarrow C$	2 - 6 RPC

h) $\neg Lbca \rightarrow Lbca \vdash Lbca$

1.	$\neg Lbca \rightarrow Lbca$	P /? Lbca
2.	$\neg Lbca$	H /? CTR
3.	$Lbca$	1, 2 MP
4.	$Lbca \wedge \neg Lbca$	2, 3 C
5.	$\neg\neg Lbca$	2 - 4 RAA
6.	$Lbca$	5 DN

i) $Fs \wedge Ga \vdash \neg(Fs \rightarrow \neg Ga)$

1.	$Fs \wedge Ga$	P /? $\neg(Fs \rightarrow \neg Ga)$
2.	$Fs \rightarrow \neg Ga$	H /? CTR
3.	Fs	1 S
4.	$\neg Ga$	2, 3 MP
5.	Ga	1 S
6.	$Ga \wedge \neg Ga$	4, 5 C
7.	$\neg(Fs \rightarrow \neg Ga)$	2 - 6 RAA

Exercício 14.6

Prove a validade das formas de argumento abaixo. Agora será necessário introduzir mais de uma hipótese em cada caso.

a) $(Ts \wedge Pc) \rightarrow Qa \vdash Ts \rightarrow (Pc \rightarrow Qa)$

1.	$(Ts \wedge Pc) \rightarrow Qa$	P /? $Ts \rightarrow (Pc \rightarrow Qa)$
2.	$\mid\ Ts$	H /? $(Pc \rightarrow Qa)$
3.	$\mid\ \mid\ Pc$	H /? Qa
4.	$\mid\ \mid\ Ts \wedge Pc$	2, 3 C
5.	$\mid\ \mid\ Qa$	1, 4 MP
6.	$\mid\ Pc \rightarrow Qa$	3 - 5 RPC
7.	$Ts \rightarrow (Pc \rightarrow Qa)$	2 - 6 RPC

b) $A \rightarrow (Ms \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow Ms) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1.	$A \rightarrow (Ms \rightarrow C)$	P /? $(A \rightarrow Ms) \rightarrow (A \rightarrow C)$
2.	$\mid\ A \rightarrow Ms$	H /? $(A \rightarrow C)$
3.	$\mid\ \mid\ A$	H /? C
4.	$\mid\ \mid\ Ms$	2, 3 MP
5.	$\mid\ \mid\ Ms \rightarrow C$	1, 3 MP
6.	$\mid\ \mid\ C$	4, 5 MP
7.	$\mid\ A \rightarrow C$	3 - 6 RPC
8	$(A \rightarrow Ms) \rightarrow (A \rightarrow C)$	2 - 7 RPC

c) $Pa \rightarrow ((Qb \rightarrow D) \rightarrow Rab) \vdash (Qb \rightarrow D) \rightarrow (Pa \rightarrow Rab)$

1.	$Pa \rightarrow ((Qb \rightarrow D) \rightarrow Rab)$	P /? $(Qb \rightarrow D) \rightarrow (Pa \rightarrow Rab)$
2.	$\mid\ Qb \rightarrow D$	H /? $Pa \rightarrow Rab$
3.	$\mid\ \mid\ Pa$	H /? Rab
4.	$\mid\ \mid\ (Qb \rightarrow D) \rightarrow Rab$	1, 3 MP
5.	$\mid\ \mid\ Rab$	2, 4 MP
6.	$\mid\ Pa \rightarrow Rab$	3 - 5 RPC
7.	$(Qb \rightarrow D) \rightarrow (Pa \rightarrow Rab)$	2 - 6 RPC

d) $Qa \to Rb, Cp \to \neg Rb \vdash Qa \to \neg Cp$

1.	$Qa \to Rb$	P
2.	$Cp \to \neg Rb$	P /? $Qa \to \neg Cp$
3.	$\mid Qa$	H /? $\neg Cp$
4.	$\mid \mid Cp$	H /? CTR
5.	$\mid \mid \neg Rb$	2, 4 MP
6.	$\mid \mid Rb$	1, 3 MP
7.	$\mid \mid Rb \wedge \neg Rb$	5, 6 C
8.	$\mid \neg Cp$	4 - 7 RAA
9.	$Qa \to \neg Cp$	3 - 8 RPC

e) $\neg Ap \vee Bsa \vdash Ap \to Bsa$

1.	$\neg Ap \vee Bsa$	P /? $Ap \to Bsa$
2.	$\mid Ap$	H /? Bsa
3.	$\mid \mid \neg Bsa$	H/? CTR
4.	$\mid \mid \neg Ap$	1, 3 SD
5.	$\mid \mid Ap \wedge \neg Ap$	2, 4 C
6.	$\mid \neg\neg Bsa$	3 - 5 RAA
7.	$\mid Bsa$	6 DN
8.	$Ap \to Bsa$	2 - 7 RPC

f) $\neg Qa \to \neg A \vdash (\neg Qa \to A) \to Qa$

1.	$\neg Qa \to \neg A$	P /? $(\neg Qa \to A) \to Qa$
2.	$\mid \neg Qa \to A$	H /? Qa
3.	$\mid \mid \neg Qa$	H /? CTR
4.	$\mid \mid A$	2, 3 MP
5.	$\mid \mid \neg A$	1, 3 MP
6.	$\mid \mid A \wedge \neg A$	4, 5 C
7.	$\mid \neg\neg Qa$	3 - 6 RAA
8.	$\mid Qa$	7 DN
9.	$(\neg Qa \to A) \to Qa$	2 - 8 RPC

Exercício 14.7

Simbolize os argumentos abaixo na linguagem do CQC e mostre sua validade, usando dedução natural.

a) Miau não é, ao mesmo tempo, um gato e um cachorro.
Miau é um gato.
Logo, Miau não é um cachorro.
(m: Miau, G: x é um gato, C: x é um cachorro)

1.	$\neg(Gm \wedge Cm)$	P	Premissa 1
2.	Gm	P /? $\neg Cm$	Premissa 2 /? Conclusão
3.	Cm	H /? CTR	
4.	$Gm \wedge Cm$	2, 3 C	
5.	$(Gm \wedge Cm) \wedge \neg(Gm \wedge Cm)$	1, 4 C	
6.	$\neg Cm$	3 - 5 RAA	

b) Se Miau é um gato e Cléo é um peixinho, então Fido não é um cachorro.
Ou Fido é um cachorro, ou Miau e Cléo gostam de nadar.
Miau é um gato se e somente se Cléo é um peixinho.
Logo, se Miau é um gato, Miau gosta de nadar.
(m: Miau, c: Cléo, f: Fido, G: x é um gato, P: x é um peixinho, C: x é um cachorro, N: x gosta de nadar)

1.	$(Gm \wedge Pc) \rightarrow \neg Cf$	P
2.	$Cf \vee (Nm \wedge Nc)$	P
3.	$Gm \leftrightarrow Pc$	P /? $Gm \rightarrow Nm$
4.	Gm	H /? Nm
5.	$Gm \rightarrow Pc$	3 BC
6.	Pc	4, 5 MP
7.	$Gm \wedge Pc$	4, 6 C
8.	$\neg Cf$	1, 7 MP
9.	$Nm \wedge Nc$	2, 8 SD
10.	Nm	9 S
11.	$Gm \rightarrow Nm$	4 - 10 RPC

c) Se Miau caça, ele apanha ratos.
Se ele não dorme bastante, então ele caça.
Se ele não apanha ratos, ele não dorme bastante.
Logo, Miau apanha ratos.
(m: Miau, C: x caça, R: x apanha ratos, D: x dorme bastante)

1.	$Cm \rightarrow Rm$	P
2.	$\neg Dm \rightarrow Cm$	P
3.	$\neg Rm \rightarrow \neg Dm$	P /? Rm
4.	| $\neg Rm$	H /? CTR
5.	| $\neg Dm$	3, 4 MP
6.	| Cm	2, 5 MP
7.	| Rm	1, 6 MP
8.	| $Rm \wedge \neg Rm$	4, 7 C
9.	$\neg\neg Rm$	4 - 8 RAA
10.	Rm	9 DN

d) Se Stefan está doente, Mathias não vai à escola.
Se Mathias está doente, Stefan não vai à escola.
Stefan e Mathias vão à escola.
Logo, nem Stefan nem Mathias estão doentes.
(s: Stefan, m: Mathias, D: x está doente, E: x vai à escola)

1.	$Ds \rightarrow \neg Em$	P
2.	$Dm \rightarrow \neg Es$	P
3.	$Es \wedge Em$	P /? $\neg Ds \wedge \neg Dm$
4.	| Ds	H /? CTR
5.	| $\neg Em$	1, 4 MP
6.	| Em	3 S
7.	| $Em \wedge \neg Em$	5, 6 C
8.	$\neg Ds$	4 - 7 RAA
9.	| Dm	H /? CTR
10.	| $\neg Es$	2, 9 MP
11.	| Es	3 S
12.	| $Es \wedge \neg Es$	10, 11 C
13.	$\neg Dm$	9 - 12 RAA
14.	$\neg Ds \wedge \neg Dm$	8, 13 C

e) Se a Lua gira em torno da Terra e a Terra gira em torno do Sol, então Copérnico tinha razão.
Se Copérnico tinha razão, então Ptolomeu não tinha razão.
A Terra gira em torno do Sol.
Logo, se a Lua gira em torno da Terra, Ptolomeu não tinha razão.
(l: a Lua, t: a Terra, s: o Sol, c: Copérnico, p: Ptolomeu, G: x gira em torno de y, R: x tem razão).

1.	$(Glt \land Gts) \to Rc$	P
2.	$Rc \to \neg Rp$	P
3.	Gts	P /? $Glt \to \neg Rp$
4.	Glt	H /? $\neg Rp$
5.	$Glt \land Gts$	3, 4 C
6.	Rc	1, 5 MP
7.	$\neg Rp$	2, 6 MP
8.	$Glt \to \neg Rp$	4 - 7 RPC

f) Se a Lua gira em torno da Terra, então a Terra gira em torno do Sol.
Se a Terra gira em torno do Sol, então, se a Lua gira em torno da Terra, ou Copérnico ou Ptolomeu tinham razão.
Copérnico tinha razão, se Ptolomeu não tinha razão.
Nem Copérnico nem Ptolomeu tinham razão.
Logo, a Lua não gira em torno da Terra.
(l: a Lua, t: a Terra, s: o Sol, c: Copérnico, p: Ptolomeu, G: x gira em torno de y, R: x tem razão).

1.	$Glt \to Gts$	P
2.	$Gts \to (Glt \to (Rc \lor Rp))$	P
3.	$\neg Rp \to Rc$	P
4.	$\neg Rc \land \neg Rp$	P /? $\neg Glt$
5.	Glt	H /? CTR
6.	Gts	1, 5 MP
7.	$Glt \to (Rc \lor Rp)$	2, 6 MP
8.	$Rc \lor Rp$	5, 7 MP
9.	$\neg Rc$	4 S
10.	$\neg Rp$	4 S
11.	Rp	8, 9 SD
12.	$Rp \land \neg Rp$	10, 11 C
13.	$\neg Glt$	5 - 12 RAA

Obs! O gabarito[6] também apresenta uma solução mais simples, com apenas 10 linhas, já que as premissas 3 e 4 são inconsistentes.

[6] http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ14.pdf

Capítulo 15 - Dedução Natural (Parte II)

Exercício 15.1.
Demonstre, como fizemos com a MT, as demais regras de inferência apresentadas na figura 15.1 (no caso de regras reversíveis, demonstre que elas funcionam mesmo nas duas direções).

a) Dupla Negação (DN)

Direta	Derivada
$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$	$\dfrac{\alpha}{\neg\neg\alpha}$

A regra de Dupla Negação Direta (DN) é uma das regras primitivas de inferência, e portanto é aceita sem demonstração (axioma). A regra da Dupla Negação Derivada (também DN) pode ser provada facilmente por RAA:

1.	α	P /? $\neg\neg\alpha$
2.	$\mid\ \neg\alpha$	H /? CTR
3.	$\mid\ \alpha \wedge \neg\alpha$	1, 2 C
4.	$\neg\neg\alpha$	2 - 3 RAA

b) Silogismo Hipotético (SH)

Forma lógica

$$\begin{array}{l} \alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma \\ \hline \alpha \to \gamma \end{array}$$

Prova

1.	$\alpha \to \beta$	P
2.	$\beta \to \gamma$	P /? $\alpha \to \gamma$
3.	$\mid\ \alpha$	H /? γ
4.	$\mid\ \beta$	1, 3 MP
5.	$\mid\ \gamma$	2, 4 MP
6.	$\alpha \to \gamma$	3 - 5 RPC

c) Contradição (CTR)

Forma lógica

$$\begin{array}{l} \alpha \\ \neg\alpha \\ \hline \beta \end{array}$$

Prova

1.	α	P
2.	$\neg\alpha$	P /? β
3.	$\alpha \vee \beta$	1 E
4.	β	2, 3 SD

d) Contraposição (CT)

$$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \hline\hline \neg\beta \to \neg\alpha \end{array}$$

No sentido

$$\frac{\alpha \to \beta}{\neg\beta \to \neg\alpha}$$

Prova

1.	$\alpha \to \beta$	P /? $\neg\beta \to \neg\alpha$
2.	$\mid \neg\beta$	H /? $\neg\alpha$
3.	$\mid \neg\alpha$	1, 2 MT
4.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	2, 3 SD

Prova alternativa, sem usar Modus Tollens (usando somente regras diretas)

1.	$\alpha \to \beta$	P /? $\neg\beta \to \neg\alpha$
2.	$\mid \neg\beta$	H /? $\neg\alpha$
3.	$\mid \mid \alpha$	H /? CTR
4.	$\mid \mid \beta$	1, 3 MP
5.	$\mid \mid \beta \land \neg\beta$	2, 4 C
6.	$\mid \neg\alpha$	3 - 5 RAA
7.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	2 - 6 RPC

No sentido

$$\frac{\neg\beta \to \neg\alpha}{\alpha \to \beta}$$

Prova

1.	$\neg\beta \to \neg\alpha$	P /? $\alpha \to \beta$
2.	$\mid \alpha$	H /? β
3.	$\mid \mid \neg\beta$	H /? CTR
4.	$\mid \mid \neg\alpha$	1, 3 MP
5.	$\mid \mid \alpha \land \neg\alpha$	2, 4 C
6.	$\mid \neg\neg\beta$	3 - 5 RAA
7.	$\mid \beta$	6 DN
8.	$\alpha \to \beta$	2 - 7 RPC

e) De Morgan (parte 1)

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$$

No sentido

$$\frac{\neg(\alpha \wedge \beta)}{\neg\alpha \vee \neg\beta}$$

Prova

1.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	P /? $\neg\alpha \vee \neg\beta$
2.	$\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	H /? CTR
3.	$\neg\alpha$	H /? CTR
4.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	3 E
5.	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	2, 4 C
6.	$\neg\neg\alpha$	3 - 5 RAA
7.	α	6 DN
8.	$\neg\beta$	H /? CTR
9.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	8 E
10.	$(\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	2, 9 C
11.	$\neg\neg\beta$	8 - 10 RAA
12.	β	11 DN
13.	$\alpha \wedge \beta$	7, 12 C
14.	$(\alpha \wedge \beta) \wedge \neg(\alpha \wedge \beta)$	1, 13 C
15.	$\neg\neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$	2 - 14 RAA
16.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	15 DN

No sentido

$$\frac{\neg\alpha \vee \neg\beta}{\neg(\alpha \wedge \beta)}$$

Prova

1.	$\neg\alpha \vee \neg\beta$	P /? $\neg(\alpha \wedge \beta)$
2.	$\alpha \wedge \beta$	H /? CTR
3.	α	2 S
4.	β	2 S
5.	$\neg\neg\alpha$	3 DN derivada
6.	$\neg\beta$	1, 5 SD
7.	$\beta \wedge \neg\beta$	4, 6 C
8.	$\neg(\alpha \wedge \beta)$	2 - 7 RAA

f) De Morgan (parte 2)

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

No sentido

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

Prova

1.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	P /? $\neg\alpha \wedge \neg\beta$
2.	$\mid \alpha$	H /? CTR
3.	$\mid \alpha \vee \beta$	2 E
4.	$\mid (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta)$	1, 3 C
5.	$\neg\alpha$	2 - 4 RAA
6.	$\mid \beta$	H /? CTR
7.	$\mid \alpha \vee \beta$	6 E
8.	$\mid (\alpha \vee \beta) \wedge \neg(\alpha \vee \beta)$	1, 7 C
9.	$\neg\beta$	6 - 8 RAA
10.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	5, 9 C

No sentido

$$\frac{\neg\alpha \wedge \neg\beta}{\neg(\alpha \vee \beta)}$$

Prova

1.	$\neg\alpha \wedge \neg\beta$	P /? $\neg(\alpha \vee \beta)$
2.	$\mid \alpha \vee \beta$	H /? CTR
3.	$\mid \neg\alpha$	1 S
4.	$\mid \neg\beta$	1 S
5.	$\mid \beta$	2, 3 SD
6.	$\mid \beta \wedge \neg\beta$	4, 5 C
7.	$\neg(\alpha \vee \beta)$	2 - 6 RAA

Exercício 15.2.

Demonstre a validade das seguintes formas de argumento.

a) $\forall x\,(Px \to Qx), \neg Qb \vdash \neg Pb$

1.	$\forall x\,(Px \to Qx)$	P
2.	$\neg Qb$	P /? $\neg Pb$
3.	$Pb \to Qb$	1 E$\forall$ [x/b]
4.	$\neg Pb$	2, 3 MT

Comentário: observar que ao eliminar o Universal da premissa 1 a escolha mais adequada é substituir a variável x por **b**, já que a constante **b** já aparece na premissa 2 e isso permite a aplicação direta de MT. Este mesmo critério para "substituição de variáveis por constantes" será utilizado também nas outras demonstrações que seguem, quando aplicável.

b) $\forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx), Fc \vdash Gc$

1.	$\forall x\,(\neg Gx \to \neg Fx)$	P
2.	Fc	P /? Gc
3.	$\neg Gc \to \neg Fc$	1 E$\forall$ [x/c]
4.	$Fc \to Gc$	3 CT (contraposição)
5.	Gc	2, 4 MP

c) $\forall x\,(Px \to Qx), \forall x\,(Qx \to Rxb) \vdash Pa \to Rab$

1.	$\forall x\,(Px \to Qx)$	P
2.	$\forall x\,(Qx \to Rxb)$	P /? $Pa \to Rab$
3.	$Pa \to Qa$	1 E$\forall$ [x/a]
4.	$Qa \to Rab$	2 E$\forall$ [x/a]
5.	$Pa \to Rab$	3, 4 SH

d) $\forall xFx \wedge \forall yHy, \forall z\forall xTzx \vdash Fa \wedge Tab$

1.	$\forall xFx \wedge \forall yHy$	P
2.	$\forall z\forall xTzx$	P /? $Fa \wedge Tab$
3.	$\forall xTax$	2 E$\forall$ [z/a]
4.	Tab	3 E$\forall$ [x/b]
5.	$\forall xFx$	1 S
6.	Fa	5 E$\forall$ [x/a]
7.	$Fa \wedge Tab$	4, 6 C

e) $\forall x\,(Px \land Qx) \vdash \forall x Px$

1.	$\forall x\,(Px \land Qx)$	P /? $\forall x Px$
2.	$Pa \land Qa$	1 E$\forall$ [x/a]
3.	Pa	2 S
4.	$\forall x Px$	3 I$\forall$ [a/x]

Comentários: Observar que a generalização de Pa (atômica) para $\forall x Px$ (geral) é permitida pois a é "qualquer a", não aparece em premissa anterior ou hipótese vigente, e é substituível por x. Informalmente, podemos dizer sobre a regra de Introdução do Universal que "se tal propriedade vale para um indivíduo c *qualquer*, sem nada de especial, então vale para *qualquer* indivíduo", ou seja, $\forall x$.

Este exercício, embora bastante simples, representa bem a "estratégia básica" para se lidar com premissas que têm quantificadores, que é a seguinte: Primeiro, eliminar os quantificadores com as regras E$\forall$ ou E$\exists$. Em seguida, manipular as fórmulas não quantificadas proposicionalmente, aplicando as regras de inferência diretas e derivadas. Finalmente, reintroduzir os quantificadores com as regras I$\forall$ ou I$\exists$, respeitando as restrições em cada caso.

Por exemplo, no caso acima (f), primeiro eliminamos o Universal (1 E$\forall$), em seguida aplicamos as regras de inferência nas fórmulas não quantificadas (2 S), e finalmente reintroduzimos o quantificador (3 I$\forall$) para obter a conclusão diretamente.

Em alguns casos será necessário introduzir hipóteses (para RPC ou para RAA).

f) $\forall x\,(Ax \to Bx) \vdash \forall x\,(\neg Bx \to \neg Ax)$

1.	$\forall x\,(Ax \to Bx)$	P /? $\forall x\,(\neg Bx \to \neg Ax)$
2.	$Aa \to Ba$	1 E$\forall$ [x/a]
3.	$\neg Ba \to \neg Aa$	2 CT (contraposição)
4.	$\forall x\,(\neg Bx \to \neg Ax)$	3 I$\forall$ [a/x]

g) $\forall x Px \to \forall x Qx,\ \neg Qa \vdash \neg\forall x Px$

1.	$\forall x Px \to \forall x Qx$	P
2.	$\neg Qa$	P /? $\neg\forall x Px$
3.	│ $\forall x Px$	H /? CTR
4.	│ $\forall x Qx$	1, 3 MP
5.	│ Qa	4 E$\forall$ [x/a]
6.	│ $Qa \land \neg Qa$	2, 5 C
7.	$\neg\forall x Px$	3 - 6 RAA

h) $\forall x \forall y Lxy \vdash \forall y \forall x Lxy$

1.	$\forall x \forall y Lxy$	P /? $\forall y \forall x Lxy$
2.	$\forall y Lay$	1 E$\forall$ [x/a]
3.	Lab	2 E$\forall$ [y/b]
4.	$\forall x Lxb$	3 I$\forall$ [a/x] **a** pode ser generalizado, pois é "qualquer **a**"
5.	$\forall y \forall x Lxy$	4 I$\forall$ [b/y] **b** pode ser generalizado, pois é "qualquer **b**"

Exercício 15.3.

Traduza, usando a notação sugerida, e demonstre a validade.

a)

Todo papagaio é vermelho.
Currupaco é um papagaio.
Logo, Currupaco é vermelho.
(c: Currupaco, P: x é um papagaio, R: x é vermelho)

1.	$\forall x\,(Px \to Rx)$	P	Premissa 1
2.	Pc	P /? Rc	Premissa 2 /? Conclusão
3.	$Pc \to Rc$	1 E$\forall$ [x/c]	
4.	Rc	2, 3 MP	

b)

Nenhuma arara é vermelha.
Todos os papagaios são vermelhos.
Logo, nenhuma arara é um papagaio.
(A: x é uma arara, P: x é um papagaio, R: x é vermelho)

1.	$\forall x\,(Ax \to \neg Rx)$	P
2.	$\forall x\,(Px \to Rx)$	P /? $\forall x\,(Ax \to \neg Px)$
3.	$Aa \to \neg Ra$	1 E$\forall$ [x/a]
4.	$Pa \to Ra$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	$\mid$ Aa	H /? $\neg Pa$ vamos tentar provar $Aa \to \neg Pa$, e depois generalizar
6.	$\mid$ $\neg Ra$	3, 5 MP
7.	$\mid$ $\neg Pa$	4, 6 MT
8.	$Aa \to \neg Pa$	5 - 7 RPC
9.	$\forall x\,(Ax \to \neg Px)$	8 I$\forall$ [a/x] como **a** é "qualquer **a**", podemos universalizar ...

c)

Todo papagaio é vermelho ou verde.
Currupaco não é verde.
Logo, se Currupaco é um papagaio, então é vermelho.
(c: Currupaco, P: x é um papagaio, R: x é vermelho, G: x é verde)

1.	$\forall x\,(Px \to (Rx \lor Gx))$	P
2.	$\neg Gc$	P /? $Pc \to Rc$
3.	$Pc \to (Rc \lor Gc)$	1 E$\forall$ [x/c]
4.	$\mid$ Pc	H /? Rc
5.	$\mid$ $Rc \lor Gc$	3, 4 MP
6.	$\mid$ Rc	2, 5 SD
7.	$Pc \to Rc$	4 - 6 RPC

d)
Todos amam todos.
Logo, Romeu ama Julieta e Julieta ama Romeu.
(r: Romeu, j: Julieta, A: x ama y)

1.	$\forall x \forall y Axy$	P /? $Arj \wedge Ajr$
2.	$\forall y Ary$	1 E$\forall$ [x/r] Se todos amam todos, Romeu ama todos.
3.	Arj	2 E$\forall$ [y/j] Se Romeu ama todos, ama Julieta.
4.	$\forall y Ajy$	1 E$\forall$ [x/j] Se todos amam todos, Julieta ama todos
5.	Ajr	4 E$\forall$ [y/j] Se Julieta ama todos, Julieta ama Romeu.
6.	$Arj \wedge Ajr$	3, 5 C

e)
Todos os papagaios amam Julieta.
Quem ama Julieta detesta Romeu.
Quem detesta Romeu tem bom gosto.
Logo, todos os papagaios têm bom gosto.
(D: x detesta y, G: x tem bom gosto, P: x é um papagaio, A: x ama y, r: Romeu, j: Julieta)

1.	$\forall x\ (Px \rightarrow Axj)$	P
2.	$\forall x\ (Axj \rightarrow Dxr)$	P
3.	$\forall x\ (Dxr \rightarrow Gx)$	P /? $\forall x\ (Px \rightarrow Gx)$
4.	$Pa \rightarrow Aaj$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	$Aaj \rightarrow Dar$	2 E$\forall$ [x/a]
6.	$Dar \rightarrow Ga$	3 E$\forall$ [x/a]
7.	$Pa \rightarrow Dar$	4, 5 SH
8.	$Pa \rightarrow Ga$	6, 7 SH
9.	$\forall x\ (Px \rightarrow Gx)$	8 I$\forall$ [a/x]

Exercício 15.4.

A constante c introduzida por E∃ na verdade não precisa ser necessariamente nova, isto é, uma constante que ainda não havia ocorrido na dedução. Quais são os dois casos em que você pode usar uma constante que já apareceu na dedução ?

R. A regra de E∃ diz:

j	$\exists x\alpha$	P
j + 1	α [x/c]	H para E∃
	.	
	.	
k	β	c não mais aparece
k + 1	β	j, (j + 1- k) E∃

Na substituição de x por c em α [x/c] acima, a constante c pode já ter aparecido em uma hipótese anterior, desde que esta hipótese não seja mais vigente, ou seja, já tenha sido descartada. Este, portanto, é um dos casos acima mencionados: se c já foi utilizada em alguma hipótese, e esta hipótese não vale mais, então c pode ser reintroduzida na E∃. Ver explicações adicionais em (MORTARI 2001, 279).

O segundo caso em que uma constante que já aparece antes pode ser usado em H para E∃ ocorre quando a constante em questão não aparece em premissas anteriores nem em hipóteses vigentes, mas foi introduzida na dedução pela eliminação de um Universal, como uma constante c genérica qualquer. Por exemplo, suponha que temos um Universal em uma premissa em uma linha k qualquer de uma dedução, seguido de um existencial em (k + 1) ...

k.	$\forall x\,(Pbx \rightarrow Sxb)$	P
k + 1	$\exists xPbx$	P /? $\exists xSbx$

Podemos eliminar o Universal em k substituindo as ocorrências de x por uma constante a qualquer, e em seguida, podemos eliminar o existencial em (k + 1) usando a novamente:

k.	$\forall x\,(Pbx \rightarrow Sxb)$	P
k + 1	$\exists xPbx$	P /? $\exists xSbx$
k + 2	$Pba \rightarrow Sab$	k E∀ [x/a]
k + 3	Pba	H (para E∃)
k + 4	Sab	(k + 2), (k + 3) MP
k + 5	$\exists xSbx$	(k + 4) I∃ [a/x] Como **a** não aparece mais, descartamos H
k + 6	$\exists xSbx$	(k + 1), ((k + 3) - (k + 5)) E∃

Na linha (k + 5), a constante a introduzida na eliminação do Universal e *reutilizada na eliminação do Existencial* em (k + 3) é eliminada, obtendo-se uma fórmula β ($\exists xSbx$) onde não mais aparece, de modo que a hipótese para E∃ pode ser descartada.

Exercício 15.5.
Demonstre a validade dos seguintes argumentos:

a) Rab $\vdash \exists x \exists y Rxy$

1.	Rab	P /? $\exists x \exists y Rxy$	
2.	$\exists x Rxb$	1 I$\exists$ [a/x]	Se **a** tem R com **b**, então alguém tem R com **b**
3.	$\exists x \exists y Rxy$	2 I$\exists$ [b/y]	Se alguém tem R com **b**, alguém tem R com alguém ...

b) $\forall x\ (Px \to Qx)$, Pa $\vdash \exists x Qx$

Intuitivamente: se todo indivíduo que tem P tem Q, e **a** tem P, então alguém tem Q ...

1.	$\forall x\ (Px \to Qx)$	P
2.	Pa	P /? $\exists x Qx$
3.	$Pa \to Qa$	1 E$\forall$ [x/a]
4.	Qa	2, 3 MP
5.	$\exists x Qx$	4 I$\exists$ [a/x]

c) $\forall x\ (Px \lor Qx)$, $\neg Qb \vdash \exists y Py$

Intuitivamente: se todo indivíduo tem P ou Q, e **b** não tem Q, então alguém tem P ...

1.	$\forall x\ (Px \lor Qx)$	P
2.	$\neg Qb$	P /? $\exists y Py$
3.	$Pb \lor Qb$	1 E$\forall$ [x/b]
4.	Pb	2, 3 SD
5.	$\exists y Py$	4 I$\exists$ [b/y]

d) $\exists x Px \to \forall x \neg Qx$, Pa $\vdash \neg Qa$

Intuitivamente: se existe alguém que tem P, ninguém tem Q, **a** tem P, logo **a** não tem Q

1.	$\exists x Px \to \forall x \neg Qx$	P
2.	Pa	P /? $\neg Qa$
3.	$\exists x Px$	2 I$\exists$ [a/x]
4.	$\forall x \neg Qx$	1, 3 MP
5.	$\neg Qa$	4 E$\forall$ [x/a]

e) $\forall x\ (Px \rightarrow Qx), \exists x \neg Qx \vdash \exists x \neg Px$

Intuitivamente: se algo tem (a propriedade) P, então tem (a propriedade) Q. Existe algo (pelo menos um) que não tem Q. Logo, existe algo que não tem P.

1.	$\forall x\ (Px \rightarrow Qx)$	P
2.	$\exists x \neg Qx$	P /? $\exists x \neg Px$
3.	$\mid \neg Qa$	H (para E$\exists$) [x/a]
4.	$\mid Pa \rightarrow Qa$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	$\mid \neg Pa$	3, 4 MT
6.	$\mid \exists x \neg Px$	5 I$\exists$ [a/x] **a** não aparece mais, descartamos H em seguida
7.	$\exists x \neg Px$	2, (3 - 6) E$\exists$

Comentários: Relembrando a regra para Eliminação do Existencial (ver Anexo 3):

j	$\exists x \alpha$	P
j + 1	$\mid \alpha$ [x/c]	H para E$\exists$
	$\mid$.	
	$\mid$.	
k	$\mid \beta$	c não mais aparece
k + 1	β	j, (j + 1- k) E$\exists$

Onde c deve ser nova (não aparece em premissa anterior ou hipótese vigente)

No exercício (e), o existencial que foi eliminado foi o da fórmula $\exists x \neg Qx$, da segunda premissa (esta é portanto a fórmula representada por $\exists x \alpha$ na formulação da regra acima).

A variável x foi substituída por uma constante a qualquer (que não aparece antes na dedução), o que na regra é representado por α [x/c].

A dedução prossegue, e na linha k = 6, conseguimos obter uma fórmula ($\exists x \neg Px$) onde a constante a introduzida não aparece mais. Esta fórmula é representada pela metavariável β na notação da regra.

Neste ponto, na linha k + 1 = 7 podemos descartar a hipótese e repetir β, ou seja, inserimos $\exists x \neg Px$ na dedução.

Como esta fórmula era a conclusão desejada, a prova está terminada.

f) $\forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx), \exists xFx \vdash \exists xGx$

1.	$\forall x\,(\neg Gx \rightarrow \neg Fx)$	P
2.	$\exists xFx$	P /? $\exists xGx$
3.	Fa	H (para E$\exists$) [x/a] **a** é uma cte qualquer (não aparece antes)
4.	$\neg Ga \rightarrow \neg Fa$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	$Fa \rightarrow Ga$	4 CT (contraposição)
6.	Ga	3, 5 MP
7.	$\exists xGx$	6 I$\exists$ [a/x] **a** não aparece mais, descartamos H em seguida
8.	$\exists xGx$	2, (3 - 7) E$\exists$

g) $\forall x\,(Px \vee Qx), \exists y\neg Py \vdash \exists zQz$

Intuitivamente: qualquer indivíduo tem P ou tem Q. Existe alguém que não tem P. Logo, existe alguém que tem Q.

1.	$\forall x\,(Px \vee Qx)$	P
2.	$\exists y\neg Py$	P /? $\exists zQz$
3.	$\neg Pa$	H (para E$\exists$) [y/a] **a** é uma cte qualquer, nova (não aparece antes)
4.	$Pa \vee Qa$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	Qa	3, 4 SD
6.	$\exists zQz$	5 I$\exists$ [a/z] a não aparece mais, descartamos H em seguida
7.	$\exists zQz$	2, (3 - 6) E$\exists$

h) $\forall x\,((Ax \vee Bx) \rightarrow Cx), \exists xAx \vdash \exists xCx$

Intuitivamente: qualquer indivíduo, se ele tem A ou B, então ele também tem C. Existe alguém que tem A, logo, existe alguém que tem C.

1.	$\forall x\,((Ax \vee Bx) \rightarrow Cx)$	P
2.	$\exists xAx$	P /? $\exists xCx$
3.	Aa	H (para E$\exists$) [x/a] **a** é uma cte qualquer (não aparece antes)
4.	$(Aa \vee Ba) \rightarrow Ca$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	$Aa \vee Ba$	3 E
6.	Ca	4, 5 MP
7.	$\exists xCx$	6 I$\exists$ [a/x] **a** não aparece mais, descartamos H em seguida
8.	$\exists xCx$	2, (3 - 7) E$\exists$

Exercício 15.6.

Traduza, usando a notação sugerida, e demonstre a validade.

a) Todo papagaio é vermelho.
Existem papagaios.
Logo, existem coisas vermelhas.
(P: x é um papagaio, R: x é vermelho)

1.	$\forall x\,(Px \rightarrow Rx)$	P
2.	$\exists xPx$	P /? $\exists xRx$
3.	Pa	H (para E$\exists$) [x/a]
4.	$Pa \rightarrow Ra$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	Ra	3, 4 MP
6.	$\exists xRx$	5 I$\exists$ [a/x]
7.	$\exists xRx$	2, (3 - 6) E$\exists$

b) Nenhuma arara é um papagaio.
Currupaco é um papagaio.
Logo, algo não é uma arara.
(c: Currupaco, A: x é uma arara, P: x é um papagaio)

1.	$\forall x\,(Ax \rightarrow \neg Px)$	P
2.	Pc	P /? $\exists x\neg Ax$
3.	$Ac \rightarrow \neg Pc$	1 E$\forall$ [x/c]
4.	$\neg\neg Pc$	2 DN
5.	$\neg Ac$	3, 4 MT
6.	$\exists x\neg Ax$	5 I$\exists$ [c/x]

c) Nenhum papagaio é cor-de-laranja.
Algumas aves são papagaios.
Logo, algumas aves não são cor-de-laranja.
(B: x é uma ave, L: x é cor-de-laranja, P: x é um papagaio)

1.	$\forall x\,(Px \rightarrow \neg Lx)$	P
2.	$\exists x\,(Bx \wedge Px)$	P /? $\exists x\,(Bx \wedge \neg Lx)$
3.	$Ba \wedge Pa$	H (para E$\exists$)
4.	$Pa \rightarrow \neg La$	1 E$\forall$ [x/a]
5.	Pa	3 S
6.	$\neg La$	4, 5 MP
7.	Ba	3 S
8.	$Ba \wedge \neg La$	6, 7 C
9.	$\exists x\,(Bx \wedge \neg Lx)$	8 I$\exists$ [a/x]
10.	$\exists x\,(Bx \wedge \neg Lx)$	2, (3 - 9) E$\exists$

d) Alguém é amado por todos.
Logo, todos amam alguém.
(A: x ama y)

1.	$\exists x \forall y Ayx$	P /? $\forall y \exists x Ayx$
2.	$\forall y Aya$	H (para E$\exists$) [x/a]
3.	Aba	2 E$\forall$ [y/b]
4.	$\exists x Abx$	3 I$\exists$ [a/x]
5.	$\exists x Abx$	1, (2 - 4) E$\exists$
6.	$\forall y \exists x Ayx$	5 I$\forall$ [b/y]

e) Qualquer um que seja mais perigoso que Natasha é mais perigoso que Bóris.
Há espiões mais perigosos que Natasha.
Logo, há espiões mais perigosos que Bóris.
(b: Bóris, n: Natasha, E: x é um espião, D: x é mais perigoso que y)

1.	$\forall x\,(Dxn \rightarrow Dxb)$	P
2.	$\exists x\,(Ex \wedge Dxn)$	P /? $\exists x\,(Ex \wedge Dxb)$
3.	$Ec \wedge Dcn$	H (para E$\exists$) observar que **c** não ocorre antes ($\neq$ n, $\neq$ b)
4.	$Dcn \rightarrow Dcb$	1 E$\forall$ [x /c]
5.	Dcn	3 S
6.	Dcb	4, 5 MP
7.	Ec	3 S
8.	$Ec \wedge Dcb$	6, 7 C
9.	$\exists x\,(Ex \wedge Dxb)$	8 I$\exists$ [c/x] **c** não ocorre mais, descartamos H em seguida
10.	$\exists x\,(Ex \wedge Dxb)$	2, (3 - 9) E$\exists$

f) As pessoas românticas são inspiradas pela Lua. Quem é inspirado pela Lua não gosta de rosas. Mas todos gostam de rosas ou de flores do campo. Logo, pessoas românticas gostam de flores do campo. (P: x é uma pessoa romântica, L: x é inspirada pela Lua, R: x gosta de rosas, F: x gosta de flores do campo)

1.	$\forall x\,(Px \rightarrow Lx)$	P
2.	$\forall x\,(Lx \rightarrow \neg Rx)$	P
3.	$\forall x\,(Rx \vee Fx)$	P /? $\forall x\,(Px \rightarrow Fx)$
4.	Pa	H /? Fa (vamos tentar obter $Pa \rightarrow Fa$, e depois generalizar $\forall x$)
5.	$Pa \rightarrow La$	1 E$\forall$ [x/a]
6.	$La \rightarrow \neg Ra$	2 E$\forall$ [x/a]
7.	$Ra \vee Fa$	3 E$\forall$ [x/a]
8.	$Pa \rightarrow \neg Ra$	5, 6 SH
9.	$\neg Ra$	4, 8 MP
10.	Fa	7, 9 SD
11.	$Pa \rightarrow Fa$	4 - 10 RPC
12.	$\forall x\,(Px \rightarrow Fx)$	11 I$\forall$ [a/x]

g)
Alberto é amigo daqueles que não são amigos de si mesmos.
Logo, alguém é amigo de si mesmo.
(a: Alberto, F: x é amigo de y)

1.	$\forall x\ (\neg Fxx \rightarrow Fax)$	P /? $\exists xFxx$
2.	$\neg Faa \rightarrow Faa$	1 E$\forall$ [x/a]
3.	$\mid \neg Faa$	H /? CTR
4.	$\mid Faa$	2, 3 MP
5.	$\mid Faa \wedge \neg Faa$	3, 4 C
6.	$\neg\neg Faa$	3 - 5 RAA
7.	Faa	6 DN
8.	$\exists xFxx$	7 I$\exists$ [a/x]

Comentário: Este argumento produz um paradoxo: $\neg\alpha \rightarrow \alpha$ (ver linha 2)
Se Alberto não é amigo de si mesmo, então Alberto é amigo de si mesmo.

h) Tudo deve estar em movimento ou em repouso, mas um objeto em vôo sempre ocupa um espaço igual a si mesmo.
Mas o que sempre ocupa um espaço igual a si mesmo não está em movimento.
Como o que não está em movimento está em repouso, segue-se que um objeto em vôo está na verdade em repouso. (Este é um dos paradoxos de Zenão)
(M: x está em movimento, R: x está em repouso, O: x é um objeto em vôo, E: x sempre ocupa um espaço igual a si mesmo).

1.	$\forall x\ (Mx \vee Rx)$	P
2.	$\forall x\ (Ox \rightarrow Ex)$	P
3.	$\forall x\ (Ex \rightarrow \neg Mx)$	P
4.	$\forall x\ (\neg Mx \rightarrow Rx)$	P /? $\forall x\ (Ox \rightarrow Rx)$ forma $(\alpha \rightarrow \beta)$, usar RPC
5.	| Oa	H /? Ra (vamos tentar obter $Oa \rightarrow Ra$, e depois generalizar $\forall x$)
6.	| $Ma \vee Ra$	1 E$\forall$ [x/a]
7.	| $Oa \rightarrow Ea$	2 E$\forall$ [x/a]
8.	| $Ea \rightarrow \neg Ma$	3 E$\forall$ [x/a]
9.	| $\neg Ma \rightarrow Ra$	4 E$\forall$ [x/a]
10.	| Ea	5, 7 MP
11.	| $\neg Ma$	8, 10 MP
12.	| Ra	9, 11 MP
13.	$Oa \rightarrow Ra$	5 - 12 RPC
14.	$\forall x\ (Ox \rightarrow Rx)$	13 I$\forall$ [a/x]

Exercício 15.7.

Provar os demais casos da regra de intercâmbio de quantificadores.

a)

Regra IQ

$$\frac{\neg\forall x\alpha}{\exists x\neg\alpha}$$

Prova

Esta regra está provada em (MORTARI 2001, 280).

b)

Regra IQ

$$\frac{\exists x\neg\alpha}{\neg\forall x\alpha}$$

Prova

1.	$\exists x\neg\alpha$	P /? $\neg\forall x\alpha$
2.	$\neg\alpha(c)$	H (para E$\exists$)
3.	$\forall x\alpha$	H /? CTR
4.	$\alpha(c)$	3 E$\forall$
5.	$\alpha(c) \wedge \neg\alpha(c)$	2, 4 C
6.	$\neg\forall x\alpha$	3 - 5 RAA
7.	$\neg\forall x\alpha$	1, (2 - 6) E$\exists$

c)

Regra IQ

$$\frac{\neg\exists x\alpha}{\forall x\neg\alpha}$$

Prova

1.	$\neg\exists x\alpha$	P /? $\forall x\neg\alpha$
2.	$\neg\forall x\neg\alpha$	H /? CTR
3.	$\alpha(c)$	H /? CTR
4.	$\exists x\alpha$	3 IE
5.	$\exists x\alpha \wedge \neg\exists x\alpha$	1, 4 C
6.	$\neg\alpha(c)$	3 - 5 RAA
7.	$\forall x\neg\alpha$	6 I$\forall$
8.	$\forall x\neg\alpha \wedge \neg\forall x\neg\alpha$	2, 7 C
9.	$\neg\neg\forall x\neg\alpha$	2 - 8 RAA
10.	$\forall x\neg\alpha$	9 DN

d)

Regra IQ

$$\frac{\forall x\neg\alpha}{\neg\exists x\alpha}$$

Prova

1.	$\forall x\neg\alpha$	P /? $\neg\exists x\alpha$
2.	$\exists x\alpha$	H /? CTR
3.	$\alpha(c)$	H (E$\forall$)
4.	$\neg\alpha(c)$	1 E$\forall$
5.	$A \wedge \neg A$	3, 4 CTR
6.	$A \wedge \neg A$	2, 3 - 5 RAA
7.	$\neg\exists x\alpha$	2 - 6 RAA

Exercício 15.8.
Demonstre:

a) $\neg\forall x\neg Px \vdash \exists xPx$

1.	$\neg\forall x\neg Px$	P /? $\exists xPx$
2.	$\mid\ \neg\exists xPx$	H /? CTR
3.	$\mid\ \forall x\neg Px$	2 IQ (*)
4.	$\mid\ \forall x\neg Px \wedge \neg\forall x\neg Px$	1, 3 C
5.	$\neg\neg\exists xPx$	2 - 4 RAA
6.	$\exists xPx$	5 DN

(*)

$$\frac{\neg\exists x\alpha}{\forall x\neg\alpha}$$

b) $\neg\exists x\neg Px \vdash \forall xPx$

1.	$\neg\exists x\neg Px$	P /? $\forall xPx$
2.	$\mid\ \neg\forall xPx$	H /? CTR
3.	$\mid\ \exists x\neg Px$	2 IQ (*)
4.	$\mid\ \exists x\neg Px \wedge \neg\exists x\neg Px$	1, 3 C
5.	$\neg\neg\forall xPx$	2 - 4 RAA
6.	$\forall xPx$	5 DN

(*)

$$\frac{\neg\forall x\alpha}{\exists x\neg\alpha}$$

c) $\forall x\,(Px \wedge Qx) \vdash \forall xPx \wedge \forall xQx$

1.	$\forall x\,(Px \wedge Qx)$	P /? $\forall xPx \wedge \forall xQx$
2.	$Pa \wedge Qa$	1 E$\forall$ [x/a]
3.	Pa	2 S
4.	Qa	2 S
5.	$\forall xPx$	3 I$\forall$ [a/x], pois **a** é "qualquer", não aparece antes
6.	$\forall xQx$	4 I$\forall$ [a/x], pois **a** é "qualquer", não aparece antes
7.	$\forall xPx \wedge \forall xQx$	5, 6 C

d) $\forall xFx \wedge \forall xHx \vdash \forall x\,(Fx \wedge Hx)$

1.	$\forall xFx \wedge \forall xHx$	P /? $\forall x\,(Fx \wedge Hx)$
2.	$\forall xFx$	1 S
3.	$\forall xHx$	1 S
4.	Fa	2 E$\forall$ [x/a]
5.	Ha	3 E$\forall$ [x/a]
6.	$Fa \wedge Ha$	4, 5 C
7.	$\forall x\,(Fx \wedge Hx)$	6 I$\forall$ [a/x]

e) $\forall x\,(Px \wedge \neg Rxb), \exists x\,(\neg Qx \vee Rxb), \forall x\,(\neg Rxb \rightarrow Qx) \vdash \exists yRyb$

1.	$\forall x\,(Px \wedge \neg Rxb)$	P
2.	$\exists x\,(\neg Qx \vee Rxb)$	P
3.	$\forall x\,(\neg Rxb \rightarrow Qx)$	P /? $\exists yRyb$
4.	$\neg Qa \vee Rab$	H (para eliminação do existencial na segunda premissa) [x/a]
5.	$Pa \wedge \neg Rab$	1 E$\forall$ [x/a]
6.	$\neg Rab$	5 S
7.	$\neg Qa$	4, 6 SD
8.	$\neg Rab \rightarrow Qa$	3 E$\forall$ [x/a]
9.	Qa	6, 8 MP
10.	$\exists yRyb$	7, 9 CTR
12.	$\exists yRyb$	2, (4 - 10) E$\exists$

f) $\forall x\,(Fx \rightarrow Hx), \forall z\,(Tz \rightarrow Fz), \exists y\,(Ty \wedge Qy) \vdash \exists x\,(Hx \wedge Qx)$

1.	$\forall x\,(Fx \rightarrow Hx)$	P
2.	$\forall z\,(Tz \rightarrow Fz)$	P
3.	$\exists y\,(Ty \wedge Qy)$	P /? $\exists x\,(Hx \wedge Qx)$
4.	$Ta \wedge Qa$	H (para E$\exists$, linha 3) [y/a]
5.	$Fa \rightarrow Ha$	1 E$\forall$ [x/a]
6.	$Ta \rightarrow Fa$	2 E$\forall$ [z/a]
7.	$Ta \rightarrow Ha$	5, 6 SH
8.	Ta	4 S
9.	Ha	7, 8 MP
10.	Qa	4 S
11.	$Ha \wedge Qa$	9, 10 C
12.	$\exists x\,(Hx \wedge Qx)$	11 I$\exists$ [a/x]
13.	$\exists x\,(Hx \wedge Qx)$	3, (4 - 12) E$\exists$

g) $\exists x\,(Px \wedge Qx) \vdash \exists xPx \wedge \exists xQx$

1.	$\exists x\,(Px \wedge Qx)$	P /? $\exists xPx \wedge \exists xQx$
2.	$Pa \wedge Qa$	H (para E$\exists$, linha 1) [x/a]
3.	Pa	2 S
4.	Qa	2 S
5.	$\exists xPx$	3 I$\exists$ [a/x]
6.	$\exists xQx$	4 I$\exists$ [a/x]
7.	$\exists xPx \wedge \exists xQx$	5, 6 C A constante introduzida não aparece mais, descartamos H
8.	$\exists xPx \wedge \exists xQx$	1, (2 - 7) E$\exists$

h) $\forall xPx \rightarrow \forall xQx, \exists x\neg Qx \vdash \neg\forall xPx$

1.	$\forall xPx \rightarrow \forall xQx$	P
2.	$\exists x\neg Qx$	P /? $\neg\forall xPx$
3.	$\neg\forall xQx$	2 IQ (*)
4.	$\neg\forall xPx$	1, 3 MT

(*)

$$\frac{\exists x\neg\alpha}{\neg\forall x\alpha}$$

i) $\exists xPbx, \forall x\forall y\,(Pxy \rightarrow Syx) \vdash \exists xSxb$

1.	$\exists xPbx$	P
2.	$\forall x\forall y\,(Pxy \rightarrow Syx)$	P /? $\exists xSxb$
3.	Pba	H (para E$\exists$), linha 1, introduzindo **a** como constante nova
4.	$\forall y\,(Pby \rightarrow Syb)$	2 E$\forall$ [x/b]
5.	$Pba \rightarrow Sab$	2 E$\forall$ [y/a]
6.	Sab	3, 5 MP
7.	$\exists xSxb$	6 I$\exists$ [a/x], como **a** não aparece mais, podemos descartar H
8.	$\exists xSxb$	1, (3 - 7) E$\exists$

Exercício 15.9.
Mostre que as fórmulas abaixo são teoremas do CQC:

a) $\neg Pa \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)$

1.	$\neg Pa$	H /? $Pa \rightarrow Qb$
2.	Pa	H /? Qb
3.	$Pa \wedge \neg Pa$	1, 2 C
4.	Qb	3 CT (contradição)
5.	$Pa \rightarrow Qb$	2 - 4 RPC
6.	$\neg Pa \rightarrow (Pa \rightarrow Qb)$	2 - 6 RPC

b) $A \rightarrow (\exists xQx \vee A)$

1.	A	H /? $(\exists xQx \vee A)$
2.	$\exists xQx \vee A$	1 E
3.	$A \rightarrow (\exists xQx \vee A)$	1, 2 RPC

c) $\neg\neg Pa \leftrightarrow Pa$

1.	$\neg\neg Pa$	H /? Pa
2.	Pa	1 DN
3.	$\neg\neg Pa \rightarrow Pa$	1, 2 RPC
4.	Pa	H /? $\neg\neg Pa$
5.	$\neg\neg Pa$	4 DN
6.	$Pa \rightarrow \neg\neg Pa$	4, 5 RPC
7.	$\neg\neg Pa \leftrightarrow Pa$	3, 6 CB

d) $A \leftrightarrow (A \wedge A)$

1.	A	H /? $(A \wedge A)$
2.	$A \wedge A$	1, 1 C
3.	$A \rightarrow (A \wedge A)$	1 - 2 RPC
4.	$A \wedge A$	H /? A
5.	A	4 S
6.	$(A \wedge A) \rightarrow A$	4 - 5 RPC
7.	$A \leftrightarrow (A \wedge A)$	4, 6 CB

e) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$

1.	A	H /? $(B \rightarrow A)$
2.	B	H /? A
3.	$\neg A$	H /? CTR
4.	$A \wedge \neg A$	1, 3 C
5.	$\neg\neg A$	3, 4 RAA
6.	A	5 DN
7.	$B \rightarrow A$	2 - 6 RPC
8.	$A \rightarrow (B \rightarrow A)$	1 - 7 RPC

f) $A \vee \neg A$

1.	$\neg(A \vee \neg A)$	H /? CTR
2.	$\neg A \wedge \neg\neg A$	1 DM (*)
3.	$\neg\neg(A \vee \neg A)$	1, 2 RAA
4.	$(A \vee \neg A)$	3 DN

(*) DM = De Morgan

$$\frac{\neg(\alpha \vee \beta)}{\neg\alpha \wedge \neg\beta}$$

g) $\forall x Rxx \rightarrow Raa$

1.	$\forall x Rxx$	H /? Raa
2.	Raa	1 E$\forall$ [x/a]
3.	$\forall x Rxx \rightarrow Raa$	1, 2 RPC

h) $\neg\exists x Rxx \rightarrow \neg Raa$

1.	$\neg\exists x Rxx$	H /? $\neg Raa$
2.	$\forall x \neg Rxx$	1 IQ (*)
3.	$\neg Raa$	2 E$\forall$ [x/a]
4.	$\neg\exists x Rxx \rightarrow \neg Raa$	1, 3 RPC

(*) IQ = Inversão de Quantificador

$$\frac{\neg\exists x\alpha}{\forall x\neg\alpha}$$

i) $\forall x(Px \rightarrow Px)$

1.	$\mid$ Pa	H /? CTR
2.	$Pa \rightarrow Pa$	1 - 1 RPC
3.	$\forall x(Px \rightarrow Px)$	2 I∀

j) $\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$

1.	$\mid \neg\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$	H /? CTR
2.	$\mid \neg\neg(Pa \wedge \neg Pa)$	1 E∀ [x/a]
3.	$\mid Pa \wedge \neg Pa$	2 DN
4.	$\neg\neg\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$	1 - 3 RAA
5.	$\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$	4 DN

Solução do gabarito

1.	$\mid Pa \wedge \neg Pa$	H /? CTR
2.	$\neg(Pa \wedge \neg Pa)$	1 - 1 RAA
3.	$\forall x \neg(Px \wedge \neg Px)$	2 I∀

k) $\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$

1.	$\mid \exists x \forall y Rxy$	H /? $\forall y \exists x Rxy$
2.	$\mid \mid \forall y Ray$	H (para E∃) [x/a]
3.	$\mid \mid Rab$	2 E∀ [y/b]
4.	$\mid \mid \exists x Rxb$	3 I∃ [a/x]
5.	$\mid \exists x Rxb$	1, 2 - 4 E∃
6.	$\mid \forall y \exists x Rxy$	5 I∀ [b/y] (pois b é "qualquer b")
7.	$\exists x \forall y Rxy \rightarrow \forall y \exists x Rxy$	1 - 6 RPC

l) $\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$

1.	$\mid \forall x(Px \rightarrow Qx)$	H /? $(\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$
2.	$\mid Pa \rightarrow Qa$	1 E∀ [x/a]
3.	$\mid \forall x Px \rightarrow \forall x Qx$	2 I∀ (pois a é "qualquer a")
4.	$\forall x(Px \rightarrow Qx) \rightarrow (\forall x Px \rightarrow \forall x Qx)$	1 - 3 RPC

Ver também s*olução do gabarito*[7]*:*

[7] http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ15.pdf

Capítulo 16 - Identidade e Símbolos Funcionais

Exercício 16.1.
Transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do $CQC^{=}$, usando = sempre que necessário, e a notação sugerida.

a) Alberto Caeiro é Fernando Pessoa
(a: Alberto Caeiro, f: Fernando Pessoa)

R. $a = f$

b) Sócrates não é Aristóteles
(a: Aristóteles, s: Sócrates)

R. $s \neq a$

c) Platão existe.
(p: Platão)

R. $\exists x(x = p)$

d) Sócrates e Platão existem.

R. $\exists x(x = s) \wedge \exists x(x = p)$

Para traduzir melhor o sentido que Sócrates e Platão existem e são indivíduos diferentes:
$\exists x \exists y((x = s) \wedge (y = p) \wedge (x \neq y))$

e) Platão existe, mas não é um jogador de futebol.
(J: x é um jogador de futebol)

R. $\exists x((x = p) \wedge \neg Jx)$ ou $\exists x(x = p) \wedge \neg Jp$

f) Se João é o 'bandido da luz vermelha', então João é um criminoso.
(b: o bandido da luz vermelha, j: João, C: x é um criminoso).

R. $(j = b) \rightarrow Cj$

No caso, a igualdade $(j = b)$ pretende traduzir o fato de que temos um nome (João, simbolizado pela constante individual 'j') e uma descrição definida (o 'bandido da luz vermelha', simbolizada pela constante 'b') que são denotam um mesmo indivíduo. Se este é o caso, ENTÃO, João é um criminoso (pois o bandido da luz vermelha era um criminoso).

g) Ou a Estrela da Manhã é a Estrela da Tarde, ou os astrônomos babilônicos estavam enganados. (m: a Estrela da Manhã, t: a Estrela da Tarde, A: x é um astrônomo babilônico, E: x estava enganado).

R. $(m = t) \vee \forall x(Ax \rightarrow Ex)$

No caso, $(m = t)$ significa que as constantes 'm' e 't' são duas descrições definidas diferentes para um mesmo objeto. OU isto é o caso, OU é o caso que $\forall x(Ax \rightarrow Ex)$ ("para todo x, se x é um astrônomo babilônico, então x estava enganado"), que é a notação Fregeana adotada na lógica clássica para a proposição categórica universal afirmativa "Todos os astrônomos babilônicos estavam enganados".

h) Existe algo.

R. $\exists x(x = x)$

Nota: Não estou certo, mas talvez uma solução alternativa seja $\exists x(Fx \vee \neg Fx)$. Em uma interpretação objetual do quantificador existencial, $\exists x(Fx \vee \neg Fx)$ significa que "há pelo menos um objeto x que tem F ou não tem F", ou seja, há pelo menos um objeto (existe algo). Para uma discussão filosófica sobre o compromisso ontológico do quantificador existencial na interpretação objetual ver (HAACK 1998, 82).

i) Existe alguém que não é Sócrates.

R. $\exists x(x \neq s)$

j) Se Diana não é Ártemis, então existe alguém que não é Ártemis.
(d: Diana, a: Ártemis)

R. $(d \neq a) \rightarrow \exists x(x \neq a)$

k) Todo objeto é idêntico a si mesmo.

R. $\forall x(x = x)$ Princípio da Identidade.
A relação de identidade é reflexiva.

l) Se alguma coisa é igual a uma segunda coisa, então esta é igual à primeira coisa.

R. $\forall x \forall y((x = y) \rightarrow (y = x))$
A relação de identidade é simétrica.

m) Se uma coisa é igual a uma segunda, e esta a uma terceira, então a primeira é igual à terceira.

R. $\forall x \forall y \forall z(((x = y) \wedge (y = z)) \rightarrow (x = z))$
A relação de identidade é transitiva.

n) Se Hegel é incompreensível, então existe um indivíduo idêntico a Hegel que é incompreensível.
(h: Hegel, I: x é incompreensível)

R. $Ih \rightarrow \exists x((x = h) \wedge Ix)$

o) Se dois indivíduos quaisquer são idênticos, e um deles é um poeta, então o outro também é poeta.
(P: x é um poeta)

R. $\forall x \forall y(((x = y) \wedge Px) \rightarrow Py)$

p) Se um indivíduo qualquer é poeta, e outro não, então eles não são idênticos.
(P: x é um poeta)

R. $\forall x \forall y((Px \wedge \neg Py) \rightarrow (x \neq y))$

Exercício 16.2.
Transcreva as sentenças abaixo para a linguagem do $CQC^{=}$, usando = sempre que necessário, e a notação sugerida.

a) Somente Colombo descobriu a América.
(a: América, c: Colombo, D: x descobriu y)

R. $Dca \wedge \neg\exists x(Dxa \wedge (x \neq c))$

b) O descobridor da América era genovês.
(G: x é genovês)

R. $\exists x(Dxa \wedge \forall y(Dyz \rightarrow (y = x)) \wedge Gx)$

Nota: Solução alternativa ... $\exists x((Dxa \wedge Gx) \wedge \neg\exists y(Dya \wedge (y \neq x)))$

c) Sócrates é o filósofo mais conhecido.
(s: Sócrates, F: x é um filósofo, C: x é mais conhecido que y).

R. $Fs \wedge \forall x((Fx \wedge (x \neq s)) \rightarrow Csx)$

Pode-se interpretar que o sentido da sentença é de que Sócrates é o filósofo mais conhecido *em relação a todos os demais, excluindo ele próprio.*

d) O inventor da pólvora nasceu na China.
(I: x inventou a pólvora, C: x nasceu na China).

R. $\exists x((Ix \wedge Cx) \wedge \neg\exists y(Iy \wedge (y \neq x))$ ou $\exists x(Ix \wedge \forall y(Iy \rightarrow (y =x)) \wedge Cx)$

Na hipótese de que *apenas uma pessoa* inventou a pólvora, a tradução proposta sugere que alguém inventou a pólvora e é chinês, e que não existe outro indivíduo diferente desta pessoa que tenha inventado a pólvora (embora possam existir outros chineses).

e) Existem exatamente dois indivíduos.

R. $\exists x\exists y((x \neq y) \wedge \forall z((z = x) \vee (z = y)))$

f) Existem ao menos três indivíduos.

R. $\exists x\exists y\exists z((x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (y \neq z))$

g) Existem no máximo três indivíduos.

R. $\forall x\forall y\forall z\forall w((x = y) \vee (x = z) \vee (x = w) \vee (y = z) \vee (y = w) \vee (z = w))$
ou
$\neg\exists x\exists y\exists z\exists w((x \neq y) \wedge (x \neq z) \wedge (x \neq w) \wedge (y \neq z) \wedge (y \neq w) \wedge (z \neq w))$

h) Todas as crianças, exceto Pedrinho, gostam de sorvete.
(p: Pedrinho, C: x é uma criança, G: x gosta de sorvete)

R. $\forall x((Cx \wedge (x \neq p)) \rightarrow Gx)$

i) Pelo menos duas crianças gostam de sorvete.

R. $\exists x\exists y(Cx \wedge Cy \wedge Gx \wedge Gy \wedge (x \neq y))$

j) Se existe exatamente um indivíduo, então Sócrates é Platão.
(s: Sócrates, p: Platão).

R. $\forall x\forall y(x = y) \rightarrow (s = p)$, ou, segundo o gabarito, $\exists x\forall y((x = y) \rightarrow (s = p))$

Observar que a expressão $\forall x\forall y(x = y)$ diz que *existe no máximo um indivíduo*, mas como o universo da estrutura precisa ter ao menos um indivíduo, dizer "existe no máximo um" equivale a dizer "existe exatamente um". Uma outra tradução alternativa talvez seja ...

$\neg\exists x\exists y(x \neq y) \rightarrow (s = p)$

k) Todo filósofo tem ao menos dois discípulos.
(F: x é um filósofo, D: x é um discípulo de y)

R. $\forall x(Fx \rightarrow \exists y\exists z((y \neq z) \wedge Dyx \wedge Dzx))$

l) Ninguém que seja discípulo de Sócrates é Sócrates.
(s: Sócrates, D: x é discípulo de y)

R. $\forall x(Dxs \rightarrow (x \neq s))$ ou $\neg\exists x(Dxs \wedge (x = s))$

m) Há um papagaio que é vermelho, e um outro que é azul.
(P: x é um papagaio, R: x é vermelho, B: x é azul)

R. $\exists x\exists y((x \neq y) \wedge Px \wedge Rx \wedge Py \wedge By)$

n) Há exatamente dois papagaios vermelhos.

R. $\exists x\exists y((x \neq y) \wedge Px \wedge Py \wedge Rx \wedge Ry \wedge \forall z((z = x) \vee (z = y)))$
Solução gabarito: $\exists x\exists y(Px \wedge Py \wedge Rx \wedge Ry \wedge x \neq y \wedge \forall z((Pz \wedge Rz) \rightarrow (z = x) \vee (z = y))$

Exercício 16.3.
Usando *p* para 'o pai de x', *m* para 'a mãe de x', *e* para 'a esposa de x' e *a* para Aristóteles, diga a quem as expressões abaixo se referem.

a) m(a)

R. Termo que denota a mãe de Aristóteles.

b) p(m(a))

R. Denota o pai da mãe de Aristóteles (avô materno).

c) m(p(a))

R. Denota a mãe do pai de Aristóteles (avó paterna).

d) m(m(a))

R. Denota a mãe da mãe de Aristóteles (avó materna).

e) p(p(m(m(a))))

R. O pai do pai da mãe da mãe de Aristóteles (pai do bisavô).

f) m(e(a))

R. Denota a mãe da esposa (sogra) de Aristóteles. Ver Nota.

g) p(e(a))

R. Denota o pai da esposa (sogro) de Aristóteles.

h) e(p(a))

R. Denota a esposa do pai de Aristóteles.

i) m(m(e(a)))

R. Denota a mãe da mãe da esposa (mãe da sogra) de Aristóteles.

Nota: Estamos adotando a hipótese de que e(x) = 'a esposa de x' é uma função no universo, ou seja, assumindo que todos os indivíduos têm uma única esposa. Caso contrário, e(x) aplicada a um indivíduo x que seja solteiro não denota ninguém. Analogamente, se um indivíduo puder ter mais de uma esposa, então e(x) não vai denotar univocamente um único indivíduo, e neste caso não será uma função.

Exercício 16.4.

Simbolize as sentenças abaixo, usando *p* para 'o pai de x', *m* para 'a mãe de x', e o símbolos de predicado sugeridos.

a) O pai de Alexandre é um filósofo.
(F: x é um filósofo)

R. $Fp(a)$ (a: Alexandre)

b) Felipe é o pai de Alexandre.

R. $f = p(a)$ (f: Felipe)

c) Felipe não é a mãe de Alexandre.

R. $f \neq m(a)$

d) O pai de Carlos é também o pai de Denise.

R. $p(c) = p(d)$ (c: Carlos, d: Denise)

e) O avô paterno de Denise não é um filósofo.

R. $\neg Fp(p(d))$

f) Alguém é o pai de Adão.

R. $\exists x(x = p(a))$ (a: Adão)
Na tradução acima, existe *pelo menos um* indivíduo que é o pai de Adão. Para capturar melhor o sentido de que Adão tem *apenas um* pai, podemos traduzir como:

$\exists x(x = p(a) \wedge \forall y(y = p(a) \rightarrow y = x))$

g) Alguém é o pai de Carlos e Denise.

R. $\exists x(x = p(c) \wedge x = p(d))$
Na hipótese de que Carlos e Denise tenham o *mesmo pai*...
ou
$\exists x \exists y\ (x = p(c) \wedge y = p(d) \wedge x \neq y)$
Caso Denise e Carlos tenham pais *diferentes*.

Em qualquer dos casos, as traduções sugeridas não capturam precisamente a idéia de que Carlos e Denise têm um *único* pai cada um, seja ele o mesmo pai ou pais diferentes. A palavra "alguém" é ambígua neste sentido ("alguém é dono de uma padaria" não implica que uma padaria tenha um único dono, mas ninguém pode ter dois pais diferentes).

h) Se alguém é a mãe de Adão, então Adão não é o primeiro humano.
(H: x é o primeiro humano)

R. $\exists x(x = m(a)) \rightarrow \neg Ha$ (a: Adão)

i) Se dois indivíduos têm a mesma mãe, então eles são irmãos.
(I: x é irmão de y)

R. $\forall x \forall y((m(x) = m(y)) \rightarrow Ixy)$

Para adicionar o fato de que "ninguém é irmão de si mesmo", podemos traduzir (i) por...
$\forall x \forall y((m(x) = m(y)) \rightarrow Ixy \wedge x \neq y)$

j) Todos têm um pai.

R. $\forall x \exists y(y = p(x))$

Para reforçar a idéia de que todos têm *apenas um* pai, podemos traduzir como.
$\forall x \exists y(y = p(x) \wedge \forall z(z = p(x) \rightarrow z = y)$

Observar que em qualquer dos casos acima um mesmo indivíduo poderia ser o pai de todos, pois não é realista exigir que todos tenham um pai *diferente*, já que um mesmo indivíduo pode ser pai de mais de uma pessoa.

k) Todos têm mãe, mas nem todos têm filhos.
(F: x é filho de y)

R. *Solução do gabarito*[8]: $\forall x \exists y(y = m(x)) \wedge \neg \forall x \exists y Fyx$

Talvez uma solução alternativa seja $\forall x \exists y(y = m(x)) \wedge \exists y \forall x \neg Fxy$
A primeira parte da tradução [$\forall x \exists y(y = m(x))$] diz que "todos têm mãe" (na verdade, *pelo menos uma*). A segunda parte [$\exists y \forall x \neg Fxy$] tenta traduzir "nem todos têm filhos", que tem o mesmo significado que "existe alguém que não é pai de niguém" (ou seja, existe pelo menos um indivíduo y para o qual a relação Fxy é falsa para todos os indivíduos x). A tradução alternativa sugerida deixa a desejar pois não afirma que todos têm *apenas* uma mãe. Além disso, não impõe a restrição de que ninguém pode ser a mãe de si próprio. Assim, podemos tentar melhorar a tradução da seguinte forma:

$$\forall x \exists y(y = m(x) \wedge x \neq y \wedge \forall z(z = m(x) \rightarrow z = y)) \wedge \exists y \forall x \neg Fxy$$

l) A avó materna de Pedro mora em Ituporanga, mas seu avô materno não.
(M: x mora em Ituporanga).

R. $Mm(m(e)) \wedge \neg Mp(m(e))$

---

[8] http://www.cfh.ufsc.br/~cmortari/answ16.pdf

m) Se dois indivíduos têm o mesmo pai e a mesma mãe, então eles são irmãos.
(I: x é irmão de y)

R. $\forall x \forall y((p(x) = p(y) \wedge m(x) = m(y)) \rightarrow Ixy)$

n) Se Felipe é o pai de Alexandre, então Felipe não é a mãe de niguém.

R. $f = p(a) \rightarrow \forall x(f \neq m(x))$ ou $f = p(a) \rightarrow \neg\exists x(f = m(x))$

o) Nenhum pai é mãe.

R. $\forall x(\exists y(x = p(y)) \rightarrow \neg\exists z(x = m(z)))$

Qualquer x: se x é pai de alguém, então não existe alguém de que x seja mãe.

p) Todos os avós paternos são pais.

R. $\forall x(\exists y(x = p(p(y)) \rightarrow \exists z(x = p(z) \wedge y \neq z)))$

Qualquer x: se x é avô paterno de alguém, então existe *outro* alguém de que x seja pai, pois ninguém é pai e avô de uma mesma pessoa.

q) O pai de qualquer pessoa é filho de algúém.
(F: x é filho de y)

R. Solução do gabarito: $\forall x \exists y Fp(x)y$

Talvez uma alternativa seja $\forall x(\exists y(x = p(y) \rightarrow \exists zFxz) \wedge y \neq z)$

Qualquer x: se x é pai de alguém, então existe algum *outro* indivídio z tal que x é filho de z, pois ninguém é pai e filho de uma mesma pessoa.

Exercício 16.5.
Idem, usando s para 'a soma de x e y', p para 'o produto de x e y', q para 'o quadrado de x', G para 'x é maior que y', L para 'x é menor que y', a para zero, e a_n para cada número natural n > 0.

Nota: Para os exercícios seguintes, valem as seguintes convenções de notação:

Seja L uma linguagem de primeira ordem
Seja $\mathbb{A} = \langle N, I\rangle$ uma estrutura para L.
Seja N o conjunto dos números naturais
Seja I uma função de Interpretação tal que:

I(a) = zero
$I(a_n)$ = cada número número natural n > 0.

I(s) = a soma de x e y = $\{\langle x,y,z\rangle / x + y = z\} = \{\langle 0,0,0\rangle,\langle 0,1,1\rangle, ...,\langle 1,2,3\rangle..\}$
Para dois naturais denotados por $\mathbf{t}_1$e $\mathbf{t}_2$: $I(s(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)) = I(s)(I(\mathbf{t}_1), I(\mathbf{t}_2)) = I(s)(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2) = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$

I(p) = o produto de x e y = $\{\langle x,y,z\rangle / x \mathbf{x} y = z\} = \{\langle 0,0,0\rangle,\langle 0,1,0\rangle, ...,\langle 1,2,2\rangle..\}$
Para dois naturais denotados por $\mathbf{t}_1$e $\mathbf{t}_2$: $I(p(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2)) = I(p)(I(\mathbf{t}_1), I(\mathbf{t}_2)) = I(p)(\mathbf{t}_1,\mathbf{t}_2) = \mathbf{t}_1 \text{ x } \mathbf{t}_2$

I(q) = o quadrado de x =$\{\langle x,y\rangle / x^2 = y\} = \{\langle 0,0\rangle,\langle 1,1\rangle,\langle 2,4\rangle...,\langle 3,9\rangle..\}$
Para um número natural denotado por $\mathbf{t}_1$: $I(q(\mathbf{t}_1)) = I(q)(I(\mathbf{t}_1)) = I(q)(\mathbf{t}_1) = \mathbf{t}_1^2$

I(L) = x é menor que y = $\{\langle x,y\rangle / x < y\}$
I(G) = x é maior que y = $\{\langle x,y\rangle / x > y\}$

Observar que as propriedades G ('x é maior que y') e L ('x é menor que y') não são *funções*, pois um mesmo elemento do domínio pode ter mais de uma imagem no contradomínio (um número natural qualquer pode ser maior e menor que muitos outros números naturais).

a) A soma de dois e dois é quatro.

R. $s(a_2, a_2) = a_4$

b) O produto de dois e dois é menor que cinco.

R. $Lp(a_2, a_2),a_5 = p(a_2, a_2) < a_5$

c) O quadrado de cinco é vinte e cinco.

R. $q(a_5) = a_{25}$

d) A soma de dois números é menor que seu produto.

R. $\forall x\forall y(Ls(x,y),p(x,y))$

e) Nem sempre o produto de dois números é maior que sua soma.

R. $\neg\forall x\forall y(Gp(x,y),s(x,y))$

f) O produto de um número pela soma de dois outros é igual ao produto do primeiro pelo segundo somado ao produto do primeiro pelo terceiro.

R. $\forall x\forall y\forall x(p(x,s(y,z)) = s(p(x,y),p(x,z))$

g) Zero é menor que o produto de quaisquer números.

R. $\forall x\forall y(La,p(x,y))$

h) Zero não é o quadrado de nenhum número.

R. $\neg\exists x(a = q(x))$ ou $\forall x(a \neq q(x))$

i) Se o quadrado de dois é quatro, e o de três é nove, então dois é menor que três.

R. $q(a_2)=a_4 \wedge q(a_3) = a_9 \rightarrow L(a_2,a_3)$

j) Dados dois números quaisquer, ou o primeiro é menor que o segundo, ou o segundo é menor que o primeiro.

R. $\forall x\forall y(L(x,y) \vee L(y,x) \vee x = y)$

Exercício 16.6.
Seja L uma linguagem de primeira ordem contendo, entre outras coisas, o símbolo funcional unário q, e os símbolos funcionais binários s e p. Seja a estrutura Seja A = <N, I> e tal que a função I associa *a* a zero, a_n a cada número natual n > 0, e tal que:

I(q) = {<x,y>/x^2 = y}
I(s) = {<x,y,z>/x + y = z}
I(p) = {<x,y,z>/x X y = z}

Calcule o valor dos termos abaixo:

a) q(a_2) R. 4

b) s(a_1,a_3) R. 4

c) p(a_2,a_5) R. 10

d) s(a_2,q(a_3)) R. 11

e) p(a,a_8) R. 0

f) p(s(a_1,a_3),s(a_2,a_5)) R. 28

g) q(q(a_3)) R. 81

h) q(s(a_3,a_4)) R. 49

Exercício 16.7.
Determine, usando tablôs, se as fórmulas abaixo são válidas, ou conseqüência lógica das premissas indicadas, conforme o caso.

Nota: Nos execícios seguintes serão utilizadas as legendas **UV**, **EF**, **UF** e **EV** para representar as regras de quantificadores nas provas por tablôs adaptadas para o cálculo de predicados com identidade e símbolos funcionais. Ver (MORTARI 2001, 215).

Estes exercícios não foram revisados.

Identidade		**UV** (Universal Verdadeira)	**EF** (Existencial Falsa)	**UF** (Universal Falsa)	**EV** (Existencial Verdadeira)
$\dfrac{\mathbf{F}\ \mathbf{t} = \mathbf{t}}{\text{x}}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\mathbf{V/F}\ \alpha(\mathbf{t}_1) \\ \text{V}\ \mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2 \\ \text{ou V}\ \mathbf{t}_2 = \mathbf{t}_1\end{array}}{\mathbf{V/F}\ \alpha\ [\mathbf{t}_1/\mathbf{t}_2]}$	$\dfrac{\mathbf{V}\ \forall x\alpha}{\mathbf{V}\ \alpha\ [x/t]}$ para qualquer termo fechado t	$\dfrac{\mathbf{F}\ \exists x\alpha}{\mathbf{F}\ \alpha\ [x/t]}$ para qualquer termo fechado t	$\dfrac{\mathbf{F}\ \forall x\alpha}{\mathbf{F}\ \alpha\ [x/c]}$ para algum c novo no ramo	$\dfrac{\mathbf{V}\ \exists x\alpha}{\mathbf{V}\ \alpha\ [x/c]}$ para algum c novo no ramo
c é uma constante e **t** é um termo qualquer fechado, conforme a Definição 16.1 (MORTARI 2001, 306)					

Tabela 12.2 - Regras para tablôs no CQC com identidade e símbolos funcionais

a) $\models \exists x(x = x)$

hipótese (*):	[1]	$\mathbf{F}\ \exists x(x = x)$	**EF**
		|	
de [1], **EF** x=a	[2]	$\mathbf{F}\ a = a$	
		x	
		CTR (2)	

R. Pela regra da identidade (Tabela 12.2), dizer que (**t** = **t**) é falso é contraditório, bem como afirmar que (**t** ≠ **t**) é verdadeiro, sendo **t** um termo qualquer. Logo, o tablô se fecha e concluímos que a hipótese inicial de que a fórmula pode ser falsa é incorreta, e portanto a fórmula é válida.

(*) Nota: Uma fórmula α é válida se e somente se é conseqüência lógica de um conjunto vazio de premissas ($\varnothing \models \alpha$). Como os tablôs são provas por absurdo, adotamos a hipótese inicial de que a fórmula pretensamente válida pode ser falsa. Se o tablô fecha em contradição, esta hipótese é incorreta, e portanto a fórmula não pode ser falsa (e portanto é válida, por definição).

b) $\neg Fa, Fb \models a \neq b$

hipóteses:	[1]	$\surd$ **V** $\neg$Fa	
	[2]	**V** Fb	
	[3]	$\surd$ **F** $a \neq b$	
de [1]	[4]	**F** Fa	
de [3]	[5]	**V** $a = b$	Ver Nota 1.
de [4]	[6]	**F** Fb	Ver Nota 2.
		x	
		CTR (2, 6)	

R. A conclusão $a \neq b$ é conseqüência lógica das premissas $\{\neg Fa, Fb\}$. A validade do argumento é intuitiva: se a não tem F e b tem F, então a é diferente de b.

Nota 1: Em termos notacionais, **a** $\neq$ **b** abrevia $\neg$**Iab** (a igualdade **I**xy é uma relação, representada pelo símbolo lógico = e com interpretação fixa). Assim, **F a** $\neq$ **b** (linha [3]) equivale a $\neg\neg$**Iab**, ou **I**ab, ou =**ab**, ou ainda **a** = **b** que é a notação mais usual (linha [5]).

Nota 2: Como temos uma igualdade verdadeira (**a** = **b**) na linha [5], podemos substituir **a** por **b** em [4] e obter [6], o que produz uma contradição e fecha o tablô.

c) $\neg Pa, \neg Pb \models a = b$

hipóteses:	[1]	$\surd$ **V** $\neg$Pa
	[2]	$\surd$ **V** $\neg$Pb
	[3]	**F** $a = b$
de [1]	[4]	**F** Fa
de [2]	[5]	**F** Pb
		?

R. Como não temos uma identidade verdadeira, não há como fazer substituições entre termos. Todas as fórmulas estão marcadas ou são atômicas, logo não há mais o que reduzir. O tablô fica aberto, de modo que as hipóteses iniciais são corretas: a conclusão não é conseqüência lógica das premissas.

Além da prova formal por tablôs, observar que o argumento é intuitivamente inválido. Supondo que a: Aristóteles, b: Platão e P: x é poeta, se Aristóteles não é Poeta e Platão não é poeta, isso não implica que Aristóteles é igual a Platão.

d) $\models \neg\forall x\forall y(x \neq y)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $\neg\forall x\forall y(x \neq y)$	
de [1]	[2]	**V** $\forall x\forall y(x \neq y)$	**UV**
de [2], **UV** x/a	[3]	**V** $\forall y(a \neq y)$	**UV**
de [3], **UV** y/b	[4]	**V** $a \neq b$	
		x	
		CTR (4)	

R. Tablô terminado (contradição), logo a hipótese inicial é incorreta: a fórmula não pode ser falsa, e portanto é válida ($\varnothing \models \neg\forall x\forall y(x \neq y)$).

e) $\models \forall x\forall y(x \neq y \leftrightarrow y \neq x)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $\forall x\forall y(x \neq y \leftrightarrow y \neq x)$		**UF**
de [1], **UF** x/a	[2]	$\surd$ **F** $\forall y(a \neq y \leftrightarrow y \neq a)$		**UF**
de [2], **UF** y/b	[3]	**F** $(a \neq b \leftrightarrow b \neq a)$		
de [3]	[4]	**V** $a \neq b$	$\surd$ **F** $a \neq b$	[6] *de [3]*
de [3]	[5]	$\surd$ **F** $b \neq a$	**V** $b \neq a$	[7] *de [3]*
de [5]	[8]	**V** $b = a$	**V** $a = b$	[10] *de [6]*
de [4], [5] ID	[9]	**V** $a \neq a$	**V** $b \neq b$	[11] *de [7], [10], ID*
		x	x	
		CTR (9)	CTR (11)	

R. Tablô terminado, todos os ramos fecham em contradição. Logo a hipótese inicial é incorreta: a fórmula não pode ser falsa, e portanto é válida ($\varnothing \models \forall x\forall y(x \neq y \leftrightarrow y \neq x)$).

f) $\forall x(Fx \rightarrow Gx), \neg Fa \models \exists x(x \neq a)$

hipóteses:	[1]	**V** $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$		**UV**	
	[2]	√ **V** $\neg Fa$			
	[3]	**F** $\exists x(x \neq a)$		**EF**	
de [2]	[4]	**F** Fa		**UF**	
de [3], **EF** x/a	[5]	√ **F** $(a \neq a)$			
de [5]	[6]	**V** $a = a$			
de [1], **UV** x/a	[7]	√ **V** $(Fa \rightarrow Ga)$			
de [7]	[8]	**F** Fa	**V** Ga	[9] *de [7]*	
		?	?		

R. O tablô está terminado, não há mais fórmulas que possam ser reduzidas. Como há ramos abertos (sem contradição), as hipóteses iniciais são corretas: as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão falsa. Logo, a conclusão não é uma conseqüência lógica das premissas.

g) $\exists x \exists y Rxy \models \exists x \exists y(Rxy \wedge x \neq y)$

hipóteses:	[1]	√ **V** $\exists x \exists y Rxy$		**EV**
	[2]	**F** $\exists x \exists y(Rxy \wedge x \neq y)$		**EF**
de [1], **EV** x/a	[3]	√ **V** $\exists y Ray$		**EV**
de [3], **EV** y/b	[4]	**V** Rab		
de [2], **EF** x/a	[5]	**F** $\exists y(Ray \wedge a \neq y)$		**EF**
de [5], **EF** y/b	[6]	√ **F** $(Rab \wedge a \neq b)$		
de [6]	[7]	**F** Rab	√ **F** $a \neq b$	[8] *de [6]*
		x	**V** $a = b$	[9] *de [8]*
		CTR (4, 7)	?	

R. Tablô está terminado, e há um ramo aberto (sem contradição). Logo, as hipóteses iniciais são corretas: a premissa pode ser verdadeira e a conclusão falsa (no caso em que a = b). Logo, a conclusão não é uma conseqüência lógica da premissa.

h) $\models \forall x \forall y((Gxy \wedge x = y) \rightarrow Gyx)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $\forall x \forall y((Gxy \wedge x = y) \rightarrow Gyx)$	**UF**
de [1], **UF** x/a	[2]	$\surd$ **F** $\forall y((Gay \wedge a = y) \rightarrow Gya)$	**UF**
de [2], **UF** y/b	[3]	$\surd$ **F** $(Gab \wedge a = b) \rightarrow Gba)$	
de [3]	[4]	$\surd$ **V** $(Gab \wedge a = b)$	
de [3]	[5]	**F** Gba	
de [4]	[6]	**V** Gab	
de [4]	[7]	**V** a = b	
de [6], [7], ID	[8]	**V** Gba	
		x	
		CTR (5, 8)	

R. Tablô terminado, fecha em contradição. Logo a hipótese inicial de que a fórmula pode ser falsa é incorreta, e portanto a fórmula é válida ($\varnothing \models \forall x \forall y((Gxy \wedge x = y) \rightarrow Gyx)$)

i) $\forall x(x = a \vee x = b) \models \forall y(y = c \rightarrow y = a \vee y = b)$

hipótese:	[1]	**V** $\forall x(x = a \vee x = b)$		**UV**
	[2]	$\surd$ **F** $\forall y(y = c \rightarrow y = a \vee y = b)$		**UF**
de [2], **UF** y/d	[3]	$\surd$ **F** $(d = c \rightarrow d = a \vee d = b)$		**d** *nova*
de [3]	[4]	**V** d = c		
de [3]	[5]	$\surd$ **F** $d = a \vee d = b$		
de [5]	[6]	**F** d = a		
de [5]	[7]	**F** d = b		
de [1], **UV** x/d	[8]	**V** $(d = a \vee d = b)$		
de [8]	[9]	**V** d = a	**V** d = b	[10] *de [8]*
		x	x	
		CTR (6, 9)	CTR (7, 10)	

R. O tablô está terminado, todos os ramos fecham em contradição. A conclusão é uma conseqüência lógica da premissa.

j) $\neg\exists x(x \neq a \wedge x \neq b), \exists xQx, \neg Qb \models Qa$

hipóteses:	[1]	√ **V** $\neg\exists x(x \neq a \wedge x \neq b)$	
	[2]	√ **V** $\exists xQx$	**EV**
	[3]	√ **V** $\neg Qb$	
	[4]	**F** Qa	
de [1]	[5]	**F** $\exists x(x \neq a \wedge x \neq b)$	**EF**
de [3]	[6]	**F** Qb	
de [2], **EV** x/c	[7]	**V** Qc	c é nova no ramo
de [5], **EF** x/c	[8]	√ **F** $(c \neq a \wedge c \neq b)$	

de [8]	[9]	√ **F** $c \neq a$	√ **F** $c \neq b$	[10] *de [8]*
de [9]	[11]	**V** $c = a$	**V** $c = b$	[13] *de [10]*
de [7], [11], ID	[12]	**V** Qa	**V** Qb	[14] *de [7], [13], ID*
		x	x	
		CTR	CTR	
		(4, 12)	(6, 14)	

R. O tablô está terminado, todos os ramos fecham em contradição. Logo, as hipóteses iniciais são incorretas: não é possível que as premissas sejam verdadeiras e a conclusão falsa, de modo que a conclusão é uma conseqüência lógica das premissas.

Exercício 16.8.

Determine, usando tablôs, se as fórmulas abaixo são válidas, ou conseqüência lógica das premissas indicadas, conforme o caso.

Estes exercícios não foram revisados.

a) $\forall xPx \to \forall xQx,\ \forall xPf(x) \models Qb$

hipóteses:	[1]	$\surd$ **V** $\forall xPx \to \forall xQx$		
	[2]	**V** $\forall xPf(x)$		**UV**
	[3]	**F** Qb		
de [1], **UF**	[4]	$\surd$ **F** $\forall xPx$	**V** $\forall xQx$	[5] *de [1]* **UV**
de [4], **UF** x/a	[6]	**F** Pa	**V** Qb	[7] de [5], **UV** x/b
de [2], **UV** x/a	[8]	**V** Pf(a)	x	
		?	CTR (3, 7)	

R. Não podemos assumir que [6] e [8] produzem uma contradição pois a constante 'a' e o termo 'f(a)' podem denotar indivíduos diferentes. Por exemplo, se informalmente, f é a função 'o quadrado de x', se 'a' denota 2, então 'f(a)' denota 4. O tablô está terminado, e como há um ramo aberto (sem contradição), as hipóteses iniciais são corretas: as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão falsa. Logo, a conclusão não é uma conseqüência lógica das premissas.

b) $\models \forall x\forall y(f(x) \neq f(y) \to x \neq y)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $\forall x\forall y(f(x) \neq f(y) \to x \neq y)$	**UF**
de [1], **UF** x/a	[2]	$\surd$ **F** $\forall y(f(a) \neq f(y) \to a \neq y)$	**UF**
de [2], **UF** y/b	[3]	$\surd$ **F** $(f(a) \neq f(b) \to a \neq b)$	
de [3]	[4]	**V** $f(a) \neq f(b)$	
de [3]	[5]	$\surd$ **F** $a \neq b$	
de [5]	[6]	**V** $a = b$	
de [4], [6], ID	[7]	**V** $f(b) \neq f(b)$	
		x	
		CTR (7)	

R. O tablô fecha em contradição, logo a hipótese inicial é incorreta. A fórmula é válida. Observar que pela definição de função, um mesmo elemento do domínio não pode ter duas imagens diferentes no contradomínio (isto é, se x = y, então f(x) = f(y)). Logo, se f(x) e f(y) são imagens diferentes, elas são de elementos diferentes ($x \neq y$), que é o que afirma (b).

c) $\models \forall x \exists y(y = h(x))$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $\forall x \exists y(y = h(x))$	**UF**
de [1], **UF** x/a	[2]	**F** $\exists y(y = h(a))$	**EF**
de [2], **EF** y/h(a)	[3]	**F** $h(a) = h(a)$	
		x	
		CTR (3)	

R. Nas fórmulas existenciais falsas (bem como nas universais verdadeiras), podemos fazer a substituição da variável quantificada por um termo qualquer (a, f(a), f(f(a)), etc), como mostrado na Tabela 12.2. Observar que pela própria definição de função, se h é uma função, então por definição todo elemento x do domínio tem uma (e somente uma) imagem y no contradomínio ($y = h(x)$), e é isso que $\forall x \exists y(y = h(x))$ afirma. Ao supor que a fórmula pode ser falsa, o tablô fecha em contradição, logo, a fórmula é válida.

d) $\forall x Pf(x) \rightarrow \forall x Qf(x), \neg\exists x Qx \models \neg Pf(f(a))$

hipóteses:	[1]	$\surd$ **V** $\forall x Pf(x) \rightarrow \forall x Qf(x)$		
	[2]	$\surd$ **V** $\neg\exists x Qx$		
	[3]	$\surd$ **F** $\neg Pf(f(a))$		
de [3]	[4]	**V** $Pf(f(a))$		
de [2]	[5]	**F** $\exists x Qx$		**EF**
de [1]	[6]	$\surd$ **F** $\forall x Pf(x)$	**V** $\forall x Qf(x)$	[7] *de [1]* , **UV**
de [6], **UF** x/b	[8]	**F** $Pf(b)$	**V** $Qf(a)$	[9] *de [7]*, **UV** x/a
b nova no ramo		?	**F** $Qf(a)$	[10] *de [5]*, **EF** x/f(a)
			x	
			CTR (9, 10)	

R. O tablô está terminado, e como há um ramo aberto (sem contradição), as hipóteses iniciais são corretas: as premissas podem ser verdadeiras e a conclusão falsa. Logo, a conclusão não é uma conseqüência lógica das premissas.

e) $a = b \models Pf(a) \to Pf(b)$

hipóteses:	[1]	**V** $a = b$	
	[2]	√ **F** $Pf(a) \to Pf(b)$	
		|	
	[3]	√ **F** $Pf(b) \to Pf(b)$	*de [2], [1],* ID
de [3]	[4]	**V** $Pf(b)$	
de [3]	[5]	**F** $Pf(b)$	
		x	
		CTR (4, 5)	

R. O tablô está terminado, seu único ramo fechaem contradição. Logo, as hipóteses iniciais são incorretas: não é possível que a premissa seja verdadeira e a conclusão falsa, de modo que a conclusão é uma conseqüência lógica da premissa.

f) $\forall xPx \models \forall xPf(x)$

hipóteses:	[1]	**V** $\forall xPx$	**UV**
	[2]	√ **F** $\forall xPf(x)$	**UF**
		|	
de [2], **UF** x/a	[3]	**F** $Pf(a)$	
de [1], **UV** x/f(a)	[4]	**V** $Pf(a)$	
		x	
		CTR (3, 4)	

R. Tablô terminado. A conclusão é uma conseqüência lógica da premissa. Intuitivamente, se *todos* os indivíduos x têm P, então o indivíduo denotado pelo termo f(x) também tem P.

g) $\models \forall x(\neg Ph(h(x)) \to \neg Ph(x))$

hipótese:	[1]	√ **F** $\forall x(\neg Ph(h(x)) \to \neg Ph(x))$	**UF**
		|	
de [1], **UF** x/a	[2]	√ **F** $(\neg Ph(h(a)) \to \neg Ph(a))$	
		|	
de [2]	[3]	√ **F** $Ph(a) \to Ph(h(a))$	Contraposição de [2]:
		|	$\alpha \to \beta$ sse $\neg\beta \to \neg\alpha$
de [3]	[4]	**V** $Ph(a)$	
de [3]	[5]	**F** $Ph(h(a))$	
		?	

R. Não podemos assumir que [4] e [5] produzem uma contradição pois os termos h(a) e h(h(a)) podem denotar indivíduos diferentes. Como o tablô termina aberto (sem contradição), a hipótese inicial é correta: a fórmula pode ser falsa em alguma estrutura, e portanto é inválida.

h) $\exists x \exists y(x = f(y) \wedge y = h(x)) \models \exists x(x = f(h(x)))$

hipóteses:	[1]	$\surd$ **V** $\exists x \exists y(x = f(y) \wedge y = h(x))$	**EV**
	[2]	**F** $\exists x(x = f(h(x)))$	**EF**
de [1], **EV** x/a	[3]	$\surd$ **V** $\exists y(a = f(y) \wedge y = h(a))$	**EV**
de [3], **EV** y/b	[4]	$\surd$ **V** $(a = f(b) \wedge b = h(a))$	
de [4]	[5]	**V** $a = f(b)$	
de [4]	[6]	**V** $b = h(a)$	
de [2], **EF** x/a	[7]	**F** $a = f(h(a))$	
de [7], [6], ID	[8]	**F** $a = f(b)$	
		x	
		CTR (5, 8)	

R. Tablô terminado, argumento válido: a conclusão é conseqüência lógica da premissa.

i) Pa $\models \forall x(\neg Ph(h(x)) \rightarrow \neg Ph(x))$

hipóteses:	[1]	**V** Pa	
	[2]	$\surd$ **F** $\forall x(\neg Ph(h(x)) \rightarrow \neg Ph(x))$	**UF**
de [2], **UF** x/b *b nova no ramo*	[3]	$\surd$ **V** $(\neg Ph(h(b)) \rightarrow \neg Ph(b))$	
de [3]	[4]	$\surd$ **F** $\neg Ph(h(b))$	
de [3]	[5]	$\surd$ **V** $\neg Ph(b)$	
de [4]	[6]	**V** $Ph(h(b))$	
de [5]	[7]	**F** $Ph(b)$	
		?	

R. Não podemos assumir que [6] e [7] produzem uma contradição pois os termos h(h(b)) e h(b) podem denotar indivíduos diferentes. Como o tablô termina aberto (sem contradição), as hipóteses iniciais são corretas: a premissa pode ser verdadeira e a conclusão falsa, de modo que a conclusão não é uma conseqüência lógica da premissa.

j) $\forall xPx \models \forall y(Ryb \to Ph(y, b))$

hipóteses:	[1]	**V** $\forall xPx$	**UV**
	[2]	√ **F** $\forall y(Ryb \to Ph(y, b))$	**UF**
de [2], **UF** y/a *a nova no ramo*	[3]	√ **F** $(Rab \to Ph(a, b))$	
de [3]	[4]	**V** Rab	
de [3]	[5]	**F** $Ph(a,b)$	
de [1], **UV** x/h(a, b)	[6]	**V** $Ph(a,b)$	
		x	
		CTR (5, 6)	

R. Tablô terminado, contradição no único ramo. Assim, as hipóteses iniciais são incorretas: não é possível que a premissa seja verdadeira e a conclusão falsa. Logo, a conclusão é uma conseqüência lógica da premissa.

k) $\models \forall x\forall y(x = y \to f(x) = f(y))$

hipótese:	[1]	√ **F** $\forall x\forall y(x = y \to f(x) = f(y))$	**UF**
de [1], **UF** x/a	[2]	√ **F** $\forall y(a = y \to f(a) = f(y))$	**UF**
de [2], **UF** y/b	[3]	√ **F** $(a = b \to f(a) = f(b))$	
de [3]	[4]	**V** $a = b$	
de [3]	[5]	**F** $f(a) = f(b)$	
de [5], [4], ID	[6]	**F** $f(b) = f(b)$	
		x	
		CTR (6)	

R. O tablô fecha em contradição, logo a hipótese inicial é incorreta. A fórmula é válida.

l) $\forall xPx \models \forall y(Ryb \to Ph(y, b))$

Repetido! Ver exercício (j).

m) $\models \forall x \forall y \forall z \forall w((x = y \land z = w) \rightarrow g(x, z) = g(y, w))$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $\forall x \forall y \forall z \forall w((x = y \land z = w) \rightarrow g(x, z) = g(y, w))$	**UF**
de [1], **UF** x/a	[2]	$\surd$ **F** $\forall y \forall z \forall w((a = y \land z = w) \rightarrow g(a, z) = g(y, w))$	**UF**
de [2], **UF** y/b	[3]	$\surd$ **F** $\forall z \forall w((a = b \land z = w) \rightarrow g(a, z) = g(b, w))$	**UF**
de [3], **UF** z/c	[4]	$\surd$ **F** $\forall w((a = b \land c = w) \rightarrow g(a, c) = g(b, w))$	**UF**
de [4], **UF** w/d	[5]	$\surd$ **F** $((a = b \land c = d) \rightarrow g(a, c) = g(b, d))$	
de [5]	[6]	$\surd$ **V** $(a = b \land c = d)$	
de [5]	[7]	**F** $g(a, c) = g(b, d)$	
de [6]	[8]	**V** $a = b$	
de [6]	[9]	**V** $c = d$	
de [7, 8, 9], ID	[10]	**F** $g(a, c) = g(a, c)$	
		x	
		CTR (10)	

R. O tablô fecha em contradição, logo a hipótese inicial é incorreta. A fórmula é válida.

n) $\models \forall z \exists x \exists y(z = h(x,y)) \rightarrow (\forall x \forall y Sh(x, y) \rightarrow \forall y Sy)$

hipótese:	[1]	$\surd$ **F** $\forall z \exists x \exists y(z = h(x,y)) \rightarrow (\forall x \forall y Sh(x, y) \rightarrow \forall y Sy)$	**UF**
de [1], **UF** z/a	[2]	**F** $\exists x \exists y(a = h(x,y)) \rightarrow (\forall x \forall y Sh(x, y) \rightarrow \forall y Sy)$	**EF**
de [2], **EF** x/b	[3]	**F** $\exists y(a = h(b,y)) \rightarrow (\forall x \forall y Sh(x, y) \rightarrow \forall y Sy)$	**EF**
de [3], **EF** y/c	[4]	$\surd$ **F** $(a = h(b,c)) \rightarrow (\forall x \forall y Sh(x, y) \rightarrow \forall y Sy)$	
de [4]	[5]	**V** $a = h(b,c)$	
de [4]	[6]	$\surd$ **F** $\forall x \forall y Sh(x, y) \rightarrow \forall y Sy$	
de [6]	[7]	**V** $\forall x \forall y Sh(x, y)$	**UV**
de [6]	[8]	**F** $\forall y Sy$	**UF**
de [7], **UV** x/b	[9]	**V** $\forall y Sh(b, y)$	**UV**
de [8], **UV** y/c	[10]	**V** $Sh(b, c)$	
de [10], [5], ID	[11]	**V** Sa	
de [6], **UF** y/a	[12]	**F** Sa	
		x	
		CTR (11, 12)	

R. Tablô terminado (contradição), hipótese inicial incorreta, a fórmula é válida.

Exercício 16.9.
Demonstre:

Estes exercícios não foram revisados e podem conter erros (Márcio Galvão)

a) $\vdash \exists x(x = x)$

1.	$\mid \neg(a = a)$	H (RAA) /? CTR
2.	$\mid a = a$	I=
3.	$\mid \neg(a = a) \wedge (a = a)$	1, 2 C *contradiçao!*
4.	$\neg\neg a = a$	1-3 RAA
5.	$a = a$	4 DN
6.	$\exists x(x = x)$	5, I∃

Nota: Nas demonstrações de teoremas ($\varnothing \vdash \alpha$), sempre iniciamos com uma hipótese, para RAA ou RPC.

b) $\neg Pa, Pb \vdash a \neq b$

1.	$\neg Pa$	P
2.	Pb	P /? $a \neq b$
3.	$\mid a = b$	H (RAA) /? CTR
4.	$\mid Pa$	2, 3 E= (se **a** = **b**, troco **b** por **a** em P**b** na linha 2)
5.	$\mid \neg Pa \wedge Pa$	1, 4 C *contradição!* Posso *negar* a hipótese da RAA em seguida
6.	$a \neq b$	Lembrar que $\neg a=b$ é notação alternativa para $a \neq b$

c) $a = b \vdash \exists x(x = a \wedge x = b)$

1.	$a = b$	P /? $\exists x(x = a \wedge x = b)$
2.	$a = a$	I=
3.	$b = b$	I=
4.	$a = a \wedge b = b$	2, 3 C
5.	$a = a \wedge a = b$	1, 4 E= (se **a** = **b**, troco **b** por **a** em **b** = **b** na linha 4)
6.	$\exists x(x = a \wedge x = b)$	5 I∃

Nota: Na linha 6, observar apenas duas ocorrências de **a** da linha 5 foram substituídas por x, o que é permitido pela regra da introdução do existencial.

d) $\vdash \forall x \forall y(x = y \to y = x)$

1.	$a = b$	H (RPC) /? $b = a$
2.	$b = a$	1, E=
3.	$a = b \to b = a$	1, 2 RPC
4.	$\forall y(a = y \to y = a)$	3, I$\forall$ [b / y]
5.	$\forall x \forall y(x = y \to y = x)$	4, I$\forall$ [a / x]

Nota: o teorema acima afirma que a relação de identidade é simétrica. Observar que as constantes a e b foram utilizadas em hipótese, mas a hipótese foi descartada na linha 3, de modo que a generalização universal é possível (as constantes generalizadas não fazem parte de premissas ou hipóteses vigentes).

e) $\vdash \forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$

1.	$a = b \wedge b = c$	H (RPC) /? $a = c$
2.	$a = b$	1 S
3.	$b = c$	1 S
4.	$a \neq c$	H (RAA)
5.	$b \neq c$	2, 4 E=
6.	$b = c \wedge b \neq c$	3, 5 C *contradição!*
7.	$\neg a \neq c$ (ou $a = c$)	4 - 6 RAA
8.	$(a = b \wedge b = c) \to a = c$	1 - 7 RPC
9.	$\forall z((a = b \wedge b = z) \to a = z)$	8 I$\forall$ [c / z]
10.	$\forall y \forall z((a = y \wedge y = z) \to a = z)$	9 I$\forall$ [b / y]
11.	$\forall x \forall y \forall z((x = y \wedge y = z) \to x = z)$	10 I$\forall$ [a / x]

Nota: o teorema acima afirma que a relação de identidade é transitiva. Observar que as constantes a, b e c foram utilizadas em hipóteses, mas as hipóteses já haviam sido descartadas antes da linha 9, de modo que a generalização universal é possível (as constantes generalizadas não fazem parte de premissas ou hipóteses vigentes).

f) $\vdash \forall x \exists y(x = y)$

1.	$a = a$	I=
2.	$\exists y(a = y)$	1 I$\exists$
3.	$\forall x \exists y(x = y)$	2 I$\forall$

g) Lab, $\neg$Lcd, $b = d \vdash a \neq c$

1.	Lab	P
2.	$\neg$Lcd	P
3.	b = d	P /? a $\neq$ c
4.	| a = c	H (RAA) /? CTR
5.	| Lcb	1, 4 E=
6.	| $\neg$Lcb	2, 3 E=
7.	| Lcb $\wedge$ $\neg$ Lcb	5, 6 C *contradição!*
8.	$\neg$(a = c) ou a $\neq$ c	4 - 7 RAA

h) $\forall x(x = a \vee x = b) \vdash \forall y(y = c \rightarrow (y = a \vee y = b))$

1.	$\forall x(x = a \vee x = b)$	P /? $\forall y(y = c \rightarrow (y = a \vee y = b))$
2.	| d = c	H(RPC) /? (d = a $\vee$ d = b)
3.	| (d = a $\vee$ d = b)	1 $\exists\forall$ [x / d]
4.	(d = c) $\rightarrow$ (d = a $\vee$ d = b)	2 - 3 RPC
5.	$\forall y(y = c \rightarrow (y = a \vee y = b))$	4 I$\forall$ (**d** é qualquer, pode ser generalizado)

i) $\neg\exists x(x \neq a \wedge x \neq b), \exists xQx, \neg Qb \vdash Qa$

1.	$\neg\exists x(x \neq a \wedge x \neq b)$	P
2.	$\exists$xQx	P
3.	$\neg$Qb	P /? Qa
4.	$\forall x\neg(x \neq a \wedge x \neq b)$	1 IQ
5.	| Qc	H (E$\exists$) [x / c]
6.	| $\neg(c \neq a \wedge c \neq b)$	4 E$\forall$ [x / c]
7.	| $\neg c \neq a \vee \neg c \neq b$	6 DM
8.	| c = a $\vee$ c = b	7 DN
9.	| Qa $\vee$ Qb	5, 8 E=
10.	| Qa	3, 9 SD
11.	Qa	2, 5-10 E$\exists$

Nota: Não estou certo quanto a justificativa para a linha 9 ... me parece óbvio que se c tem Q e c = a ou c = b, então ou a tem Q ou b tem Q, mas não sei exatamente qual regra se deve usar para justificar esta passagem.

j) $\vdash \forall x \forall y(x = y \to (Px \leftrightarrow Py))$

1.	$a = b$	H /? $Pa \leftrightarrow Pb$
2.	Pa	H /? Pb
3.	Pb	1, 2 E=
4.	$Pa \to Pb$	2-3 RPC
5.	Pb	H /? Pa
6.	Pa	1, 5 E=
7.	$Pb \to Pa$	5 - 6 RPC
8.	$Pa \leftrightarrow Pb$	4, 7 CB
9.	$a = b \to Pa \leftrightarrow Pb$	1 - 8 RPC
10.	$\forall y(a = y) \to (Pa \leftrightarrow Py)$	9 I$\forall$ [b / y]
11.	$\forall x \forall y(x = y \to (Px \leftrightarrow Py))$	10 I$\forall$ [a / x]

k) $\vdash \forall x(Ax \leftrightarrow \exists y(x = y) \wedge Ay))$

1.	Aa	H /? $(a = a \wedge Aa)$
2.	$a = a$	I=
3.	$a = a \wedge Aa$	1, 2 C
4.	$Aa \to (a = a \wedge Aa)$	1 - 3 RPC
5.	$a = a \wedge Aa$	H/? Aa
6.	Aa	5 S
7.	$(a = a \wedge Aa) \to Aa$	5 - 6 RPC
8.	$Aa \leftrightarrow (a = a \wedge Aa)$	4, 7 CB
9.	$Aa \leftrightarrow \exists y(a = y \wedge Ay)$	8 I$\exists$ [a / y], *algumas* ocorrências
10.	$\forall x(Ax \leftrightarrow \exists y(x = y) \wedge Ay))$	9 I$\forall$ [a / x]

l) $\vdash (\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \neg Rxx) \rightarrow \forall x \exists y (x \neq y \wedge Rxy)$ $(\alpha \rightarrow \beta)$

1.	$(\forall x \exists y Rxy \wedge \forall x \neg Rxx)$	H (RPC) /? $\forall x \exists y (x \neq y \wedge Rxy)$
2.	$\forall x \exists y Rxy$	1 S
3.	$\forall x \neg Rxx$	1 S
4.	$\neg Raa$	3 E$\forall$ [x / a]
5.	$\exists y Ray$	2 E$\forall$ [x / a]
6.	Rab	H (E$\exists$) [y / b]
7.	$a = b$	H (RAA) /? CTR
8.	Raa	6, 7 E=
9.	$\neg Raa \wedge Raa$	4, 8 C *contradição*
10.	$\neg(a = b)$ ou $a \neq b$	7 - 9 RAA
11.	$a \neq b \wedge Rab$	6, 10 C
12.	$\exists y (a \neq y \wedge Ray)$	11 I$\exists$
13.	$\exists y (a \neq y \wedge Ray)$	5, 6-12 E$\exists$
14.	$\forall x \exists y (x \neq y \wedge Rxy)$	13 I$\forall$ (a é qualquer, pode ser generalizada)
15.	$\alpha \rightarrow \beta$	1-14 RPC

m) $\vdash (Fa \wedge \forall x (x \neq a \rightarrow Fx)) \leftrightarrow \forall x Fx$

n) $\vdash \exists x \forall y(x = y) \rightarrow (\forall x Fx \vee \forall x \neg Fx)$

o) $\exists x(x \neq a \wedge Qx) \vdash \exists x Qx \wedge (Qa \rightarrow \exists x \exists y(x \neq y \wedge (Qy \wedge Qx)))$

1.	$\exists x(x \neq a \wedge Qx)$	P
2.	$(b \neq a) \wedge Qb$	H (E$\exists$) [x / b]
3.	$b \neq a$	2 S
4.	Qb	2 S
5.	$\exists x Qx$	4 I$\exists$
6.	Qa	H (RPC) /? $b \neq a \wedge (Qa \wedge Qb)$
7.	$Qa \wedge Qb$	4, 6 C
8.	$b \neq a \wedge (Qa \wedge Qb)$	3, 7 C
9.	$Qa \rightarrow (b \neq a \wedge (Qa \wedge Qb))$	6-8 RPC
10.	$Qa \rightarrow \exists x(b \neq x \wedge (Qx \wedge Qb))$	9 I$\exists$ [a / x]
11.	$Qa \rightarrow \exists x \exists y(y \neq x \wedge (Qx \wedge Qy))$	10 I$\exists$ [b / y]
12.	$\exists x Qx \wedge (Qa \rightarrow \exists x \exists y(y \neq x \wedge (Qx \wedge Qy)))$	5, 11 C
13.	$\exists x Qx \wedge (Qa \rightarrow \exists x \exists y(y \neq x \wedge (Qx \wedge Qy)))$	1, 2-12 E$\exists$

Exercício 16.10.
Demonstre:

Estes exercícios não foram revisados e podem conter erros (Márcio Galvão)

a) $\forall x Px \vdash \forall x Pf(x)$

1.	$\forall x Px$	P /? $\forall x Pf(x)$
2.	$Pf(a)$	1 E$\forall$ (se todo x tem P, um termo f(a) *qualquer* tem P)
3.	$\forall x Pf(x)$	2 I$\forall$ (substituindo a constante **a** qualquer por x, generalização universal)

b) $\vdash \forall x \exists y(y = h(x))$

1.	│ $\neg\forall x \exists y(y = h(x))$	H (RAA) /? CTR
2.	│ $\exists x \neg(\exists y(y = h(x))$	1 IQ
3.	│ │ $\neg\exists y(y = h(a)$	H (E$\exists$) [x / a]
4.	│ │ $\forall y \neg(y = h(a))$	3 IQ
5.	│ │ $\neg(h(a) = h(a))$	4 E$\forall$ (y = termo h(a))
6.	│ │ $A \wedge \neg A$	5 CTR
7.	│ $A \wedge \neg A$	2, 3-6 E$\exists$
8.	$\neg\neg\forall x \exists y(y = h(x))$	1-7 RAA
9.	$\forall x \exists y(y = h(x))$	DN

Nota: não estou certo quanto a esta demonstração ...

c) $a = b \vdash Pf(a) \rightarrow Pf(b)$

1.	$a= b$	P /? $Pf(a) \rightarrow Pf(b)$
2.	│ $Pf(a)$	H (RPC) / ? $Pf(b)$
3.	│ $Pf(b)$	1, 2 E=
4.	$Pf(a) \rightarrow Pf(b)$	2, 3 RPC

d) $\vdash \forall x \forall y(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$

1.	$a = b$	H (RPC) /? $f(a) = f(b)$
2.	$f(a) \neq f(b)$	H (RAA)
3.	$f(a) \neq f(a)$	1, 2 E= *contradição*
4.	$\neg(f(a) \neq f(b))$	2 -3 RAA
5.	$f(a) = f(b)$	4 DN
6.	$a = b \rightarrow f(a) = f(b)$	1 - 5 RPC
7.	$\forall y(a = y \rightarrow f(a) = f(y))$	6 I$\forall$ [b / y]
8.	$\forall x \forall y(x = y \rightarrow f(x) = f(y))$	7 I$\forall$ [a / x]

e) $\vdash \forall x \forall y(f(x) \neq f(y) \rightarrow x \neq y)$

1.	$f(a) \neq f(b)$	H (RPC) /? $a \neq b$
2.	$a = b$	H (RAA)
3.	$f(b) \neq f(b)$	1, 2 E= *contradição*
4.	$\neg(a = b)$ ou $(a \neq b)$	2 -3 RAA
5.	$f(a) \neq f(b) \rightarrow a \neq b$	1 - 4 RPC
6.	$\forall y(f(a) \neq f(y) \rightarrow a \neq y)$	5 I$\forall$ [b / y]
7.	$\forall x \forall y(f(x) \neq f(y) \rightarrow x \neq y)$	6 I$\forall$ [a / x]

f) $\vdash \forall x(\neg Ph(h(x)) \rightarrow \neg Ph(x))$

1.	$Ph(a)$	H (RPC) /? $Ph(h(a))$
2.	$\forall x Ph(x)$	1 I$\forall$ [a/x]
3.	$Ph(h(a))$	2 E$\forall$ [x/h(a)]
4.	$Ph(a) \rightarrow Ph(h(a))$	1 - 3 RPC
5.	$\neg Ph(h(a)) \rightarrow \neg Ph(a)$	4 Contraposição
6.	$\forall x(\neg Ph(h(x)) \rightarrow \neg Ph(x))$	1 I$\forall$ [a/x]

Nota: Tenho dúvidas sobre esta dedução...

g) $\exists x \exists y(x = f(y) \wedge y = h(x)) \vdash \exists x(x = f(h(x)))$

1.	$\exists x\exists y(x = f(y) \wedge y = h(x))$	P /? $\exists x(x = f(x))$
2.	$\exists y(a = f(y) \wedge y = h(a))$	H (E$\exists$) [x/a]
3.	$(a = f(b) \wedge b = h(a))$	H (E$\exists$) [y/b]
4.	$a = f(b)$	3 S
5.	$b = h(a)$	3 S
6.	$a = f(h(a))$	4, 5 E=
7.	$\exists x(x=f(h(x))$	6 I$\exists$
8.	$\exists x(x=f(h(x))$	2, 3-7 E$\exists$
9.	$\exists x(x=f(h(x))$	1, 2-8 E$\exists$

h) $\forall xPx \vdash \forall y(Ryb \rightarrow Ph(y,b)$

1.	$\forall xPx$	P /? $\forall y(Ryb \rightarrow Ph(y,b)$
2.	$Ph(a,b)$	1 E$\forall$ [x/h(a,b)]
3.	Rab	H (RPC) /? Ph(a,b)
4.	$\neg Ph(a,b)$	H (RAA) /? CTR
5.	$Ph(a,b) \wedge \neg Ph(a,b)$	2, 4 C *contradição!*
6.	$\neg\neg Ph(a,b)$	4, 5 RAA
7.	$Ph(a,b)$	6DN
8.	$Rab \rightarrow Ph(a,b)$	3-7 RPC
9.	$\forall y(Ryb \rightarrow Ph(y,b)$	I$\forall$ [a/y]

i) $\vdash \forall x\forall y\forall z\forall w((x = y \wedge z = w) \rightarrow g(x,z) = g(y,w))$

1.	$(a = b \wedge c = d)$	H (RPC) /? g(a,c) = g(b,d))
2.	$a = b$	1 S
3.	$c = d$	1 S
4.	$\neg(g(a,c) = g(b,d))$	H (RAA) /? CTR
5.	$g(a,c) \neq g(b,d)$	4 DN
6.	$g(b,d) \neq g(b,d)$	2, 3, 5 E= *contradição!*
7.	$\neg\neg(g(a,c) = g(b,d))$	4 - 6 RAA
8.	$g(a,c) = g(b,d)$	7 DN
9.	$(a = b \wedge c = d) \rightarrow g(a,c) = g(b,d)$	1-8 RPC
10.	$\forall w((a = b \wedge c = w) \rightarrow g(a,c) = g(b,w))$	9 I$\forall$ [d/w] **d** é *qualquer* **d**
11.	$\forall z\forall w((a = b \wedge z = w) \rightarrow g(a,z) = g(b,w))$	10 I$\forall$ [c/z] **c** é *qualquer* **c**
12.	$\forall y\forall z\forall w((a = y \wedge z = w) \rightarrow g(a,z) = g(y,w))$	11 I$\forall$ [b/y] **b** é *qualquer* **b**
13.	$\forall x\forall y\forall z\forall w((x = y \wedge z = w) \rightarrow g(x,z) = g(y,w))$	12 I$\forall$ [a/x] **a** é *qualquer* **a**

j) $\vdash \forall z\exists x\exists y(z = h(x,y)) \rightarrow (\forall x\forall y Sh(x,y) \rightarrow \forall y Sy)$

1.	$\forall z\exists x\exists y(z = h(x,y))$	H (RPC) /? $\forall x\forall y Sh(x,y) \rightarrow \forall y Sy$
2.	$\exists x\exists y(c = h(x,y))$	1 E$\forall$ [z/c]
3.	$\exists y(c = h(a,y))$	H (E$\exists$) [x/a]
4.	$c = h(a,b)$	H (E$\exists$) [y/b]
5.	$\forall x\forall y Sh(x,y)$	H (RPC) /? $\forall y Sy$
6.	$\forall y Sh(a,y)$	5 E$\forall$ [x/a]
7.	$Sh(a,b)$	6 E$\forall$ [y/b]
8.	Sc	4, 7 E=
9.	$\forall y Sy$	8 I$\forall$ [c/y] **c** é *qualquer*
10.	$\forall x\forall y Sh(x,y) \rightarrow \forall y Sy$	5 - 9 RPC
11.	$\forall x\forall y Sh(x,y) \rightarrow \forall y Sy$	3, 4-10 E$\exists$
12.	$\forall x\forall y Sh(x,y) \rightarrow \forall y Sy$	2, 3-11 E$\exists$
13.	$\forall z\exists x\exists y(z = h(x,y)) \rightarrow (\forall x\forall y Sh(x,y) \rightarrow \forall y Sy)$	1-12 RPC

Bibliografia

_HAACK, S. 1998: *Filosofia das Lógicas*. Fundação Editora da UNESP (FEU).

_MATES, B. 1968: *Lógica Elementar*. Companhia Editora Nacional - Editora da Universidade de São Paulo.

_MORTARI, C. 2001: *Introdução à Lógica*. Fundação Editora da UNESP (FEU).

Anexo 1 - Regras de Inferência Diretas Para Dedução Natural

Noção Lógica	Regras de Introdução	Regras de Eliminação
Conjunção ($\alpha \wedge \beta$)	Conjunção (C)	Separação (S)
	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\end{array}}{\alpha \wedge \beta}$	$\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\alpha}$ $\dfrac{\alpha \wedge \beta}{\beta}$
Disjunção ($\alpha \vee \beta$)	Expansão (E)	Silogismo Disjuntivo (SD)
	$\dfrac{\alpha}{\alpha \vee \beta}$ $\dfrac{\alpha}{\beta \vee \alpha\beta}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta\\ \neg\alpha\end{array}}{\beta}$ $\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \vee \beta\\ \neg\beta\end{array}}{\alpha}$
Condicional ($\alpha \rightarrow \beta$)	Teorema da Prova Condicional (RPC)	Modos Ponens (MP)
	$\begin{array}{l\|ll} j & \alpha & H\ /?\ \beta \\ & . & \\ & . & \\ k & \beta & \\ \hline k+1 & \alpha \rightarrow \beta & (j - k)\ RPC \end{array}$	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \rightarrow \beta\\ \alpha\end{array}}{\beta}$
Bicondicional ($\alpha \leftrightarrow \beta$)	Condicionais Para Bicondicional (CB)	Bicondicional Para Condicionais (BC)
	$\dfrac{\begin{array}{c}\alpha \rightarrow \beta\\ \beta \rightarrow \alpha\end{array}}{\alpha \leftrightarrow \beta}$	$\dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\alpha \rightarrow \beta}$ $\dfrac{\alpha \leftrightarrow \beta}{\beta \rightarrow \alpha}$
Negação $\neg\alpha$	Redução ao Absurdo (RAA)	Dupla Negação (DN)
	$\begin{array}{l\|ll} j & \alpha & H\ /?\ CTR \\ & . & \\ & . & \\ k & \beta \wedge \neg\beta & \text{Contradição!} \\ \hline k+1 & \neg\alpha & (j - k)\ RAA \end{array}$	$\dfrac{\neg\neg\alpha}{\alpha}$

Anexo 2 - Regras de Inferência Derivadas Para Dedução Natural

Dupla Negação Derivada (DN)	Modus Tollens (MT)	Silogismo Hipotético (SH)	Contradição (CTR)
$\begin{array}{c} \alpha \\ \hline \neg\neg\alpha \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \neg\beta \\ \hline \neg\alpha \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \beta \to \gamma \\ \hline \alpha \to \gamma \end{array}$	$\begin{array}{c} \alpha \\ \neg\alpha \\ \hline \beta \end{array}$
Contraposição (CT) $\begin{array}{c} \alpha \to \beta \\ \hline\hline \neg\beta \to \neg\alpha \end{array}$	Leis de De Morgan (DM) $\begin{array}{c} \neg(\alpha \wedge \beta) \\ \hline\hline \neg\alpha \vee \neg\beta \end{array}$	$\begin{array}{c} \neg(\alpha \vee \beta) \\ \hline\hline \neg\alpha \wedge \neg\beta \end{array}$	

Anexo 3 - Regras Para Quantificadores Para Dedução Natural

Quantificador	Regra de Introdução	Regra de Eliminação
$\forall$ Universal	Introdução do Universal (I$\forall$) $\begin{array}{c} \alpha(c) \\ \hline \forall x\alpha\ [c/x] \end{array}$ α[x/c] representa a substituição de todas as ocorrências da constante c por x em α(c), desde que c seja nova e seja substituível por x	Eliminação do Universal (E$\forall$) $\begin{array}{c} \forall x\alpha \\ \hline \alpha\ [x/c] \end{array}$ α[x/c] representa a substituição em α das ocorrências livres de x por uma constante c qualquer
$\exists$ Existencial	Introdução do Existencial (I$\exists$) $\begin{array}{c} \alpha(c) \\ \hline \exists x\alpha(c/x) \end{array}$ α(c/x) representa a substituição de uma ou mais ocorrências da constante c por x em α, desde que c seja substituível por x em α	Eliminação do Existencial (E$\exists$) $\begin{array}{l\|l l} j & \exists x\alpha & \text{P} \\ j+1 & \alpha\ [x/c] & \text{H para E}\exists \\ & . & \\ & . & \\ k & \beta & \text{c não mais aparece} \\ \hline k+1 & \beta & j, (j+1-k)\ \text{E}\exists \end{array}$ Onde c deve ser completamente nova