DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 23 august 2024
Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Del A: Opgave 1 (Multiple-choice): 55%, Del B: Opgave 2: 10%, Opgave 3: 20%, Opgave 4: 15%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed.

Del A (Opgave 1) er en multiple-choice opgave med syv delspørgsmål (kun et korrekt svar pr delspørgsmål), mens Del B (opgaverne 2, 3 og 4) er skriftlige opgaver.

I del B skal alle svar derfor begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang, for at opnå fuldt point.

Alle opgaver (del A og del B) stilles herunder, startende på side 2.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

- **Del A: Opgave 1 (Multiple choice)** ***besvares alene*** **elektronisk i svararket. Alternative skriftlige svar godtages (som udgangspunkt) ikke.**
- **Del B: Opgaverne 2, 3 og 4 afleveres elektronisk (PDF) eller evt på papirform, hvis din besvarelse er håndskrevet.**

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Del A Opgave 1

1.I.

Betragt et homogent lineært differentialligningssystem $\dot{x} = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{4\times4}$, hvorom følgende gælder:

(i) Det karakteriske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = \lambda^2(\lambda^2 + 1).$$

(ii) Systemmatricen A opfylder, at

$$A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Bestem nu stabiliteten af systemet.

A Stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

B Asymptotisk stabilt.

C Ustabilt.

D Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

1.II.

Om et homogent lineært differentialligningssystem $\dot{x} = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, der afhænger af en parameter $a \in \mathbb{R}$, oplyses det, at det karakteriske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + a\lambda^2 + a\lambda + a.$$

Bestem alle værdierne af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt.

E $a > 0$,

F $a < 0$.

G $-1 < a < 0$.

H $a < -1$.

I Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

1.III.

Om en anden-ordens lineær inhomogen differentialligning med konstante koefficienter og påvirkning u:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u' + b_1 u, \tag{1}$$

oplyses det, at overføringsfunktionen H er givet ved

$$H(s) = \frac{s+1}{s^2}, \quad s \neq 0.$$

Bestem en løsning y til (1) med $u(t) = e^{-t} + 2e^{2t}$.

Svaret er:

J $y(t) = e^{-t} + 2e^{2t}$.

K $y(t) = \frac{3}{2}e^{2t}$.

L $y(t) = \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{2t}$.

M $y(t) = 0$.

N Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

1.IV.

Betragt rækken

$$A = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n,$$

hvorom det oplyses, at

$$0 \leq b_n \leq e^{-n} \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Afgør konvergens af rækken A.

- **O** Rækken A er divergent.
- **P** Rækken A er betinget konvergent.
- **Q** Rækken A er absolut konvergent.
- **R** Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

1.V.

Vi betragter følgende funktioner $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, givet som uendelige rækker:

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} e^{-x^2} \quad \text{og} \quad h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} e^{x^2} \quad \text{for alle} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Vi søger først efter en majorantrække for rækken for g.

Svaret er:

S g har ikke en majorantrække.

T g har en majorantrække, men ikke en konvergent majorantrække.

U g har en konvergent majorantrække.

Vi søger dernæst efter en majorantrække for rækken for h.

Svaret er:

1 h har ikke en majorantrække.

2 h har en majorantrække, men ikke en konvergent majorantrække.

3 h har en konvergent majorantrække.

Indtast nu dit samlede svar.

1.VI.

I denne opgave betragter vi følgende differentialligning

$$x^2y'(x) + y(x) = f(x), \tag{2}$$

for y med f kendt.

Vi betragter først $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ for $x \in]-1,1[$ i ligning (2).

Indsæt nu en potensrække $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$ i den pågældende ligning og bestem en rekursionsformel for c_n, $n \in \mathbb{N}$.

(Antag, at $c_0 = 0$ i formlerne herunder).

V $c_n + nc_{n-1} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

W $nc_n + c_{n-1} = (-1)^n$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

X $c_n + (n-1)c_{n-1} = 1$ for alle $n \in \mathbb{N}$.

Vi betragter dernæst $f(x) = x$ for alle $x \in \mathbb{R}$ i ligning (2).

Det oplyses nu, at potensrækkemetoden i dette tilfælde leder til

$$c_n = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Bestem konvergensradius ρ for den tilhørende række $y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n$.

Svaret er:

1 $\rho = 0$.

2 $\rho = 1$.

3 $\rho = \infty$.

Indtast nu dit samlede svar.

1.VII.

Om en uendelig række

$$B = \sum_{n=0}^{\infty} b_n, \tag{3}$$

med afsnitssum

$$S_N = \sum_{n=0}^{N} b_n, \quad N \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\},$$

oplyses det, at

$$|B - S_N| < 2^{-N-1} \quad \text{for alle} \quad N \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}. \tag{4}$$

Bestem – udfra de givne oplysninger – det **mindste heltal** N_0 således, at

$$|B - S_N| < 0.1 \quad \text{for alle} \quad N \geq N_0.$$

Svaret er:

A $N_0 = 1$

B $N_0 = 2$

C $N_0 = 3$

D $N_0 = 4$

E Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

Slut på del A.

Del B påbegyndes herunder.

Opgavesættet fortsætter!

Del B

Opgave 2

Betragt rækken

$$R = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n \ln(2n)}.$$

Det oplyses (SKAL IKKE VISES), at

$$\int_1^t \frac{1}{x \ln(2x)} dx = \ln\left(\frac{\ln(2t)}{\ln(2)}\right) \quad \text{for alle} \quad t \geq 1.$$

Undersøg om rækken R er divergent, betinget konvergent eller absolut konvergent. Svaret skal begrundes med referencer til sætninger i lærebogen.

Opgave 3

Vi betragter funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, som er lige, 2π-periodisk, og givet i intervallet $[0, \pi]$ ved:

$$f(0) = 5 \quad \text{og} \quad f(x) = \sinh(x) \quad \text{for alle} \quad x \in]0, \pi],$$

hvor $\sinh(x) = \frac{1}{2}e^x - \frac{1}{2}e^{-x}$ er sinus hyperbolsk.

1. Skitser grafen for f på intervallet $x \in [-3\pi, 3\pi]$.

Lad

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \tag{5}$$

angive Fourierrækken for f. Det oplyses herom (SKAL IKKE VISES), at

$$a_n = \frac{2((-1)^n \cosh(\pi) - 1)}{\pi(n^2 + 1)} \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\},$$

hvor $\cosh(x) = \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^{-x}$ er cosinus hyperbolsk.

2. Bestem et $k > 0$ således, at

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k}{n^2 + 1},$$

er en majorantrække for rækken af variable led

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Opgavesættet fortsætter - Vend!

3. Konvergerer Fourierrækken for f uniformt?
4. Kan $\sim$ i (5) erstattes med lighedstegn, så f er lig sin Fourierrække?

Opgave 4

Betragt differentialligningssystemet

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \tag{6}$$

hvor $x(t) \in \mathbb{R}^2$.

Det oplyses (SKAL IKKE VISES), at

$$x(t) = \begin{pmatrix} 3t \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t},$$

er en løsning til det homogene system hørende til (6).

1. Bestem den fuldstændige reelle løsning til det homogene system hørende til (6).
2. Bestem $a \in \mathbb{R}$ og $b \in \mathbb{R}$ således, at
$$x(t) = \begin{pmatrix} at^2 \\ bt \end{pmatrix} e^{2t},$$
er en partikulær løsning til (6).
3. Opskriv den fuldstændige reelle løsning til (6).

—————oooOooo—————

Opgaven er slut. Husk at svare på del A: opgave 1 (Multiple Choice) i det elektroniske svarark.