DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 18. august 2023
Kursus: Matematik 2 01034/01035/01037

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.
Vægtning af opgaverne: Del A: Opgave 1 (Multiple-choice): 65%, Del B: Opgave 2: 21%, Opgave 3: 14%.

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed.

Del A (Opgave 1) er en multiple-choice opgave med 10 delspørgsmål (kun et korrekt svar pr delspørgsmål), mens Del B (opgaverne 2 og 3) er skriftlige opgaver.

I del B skal alle svar derfor begrundes, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og mellemregninger skal medtages i rimeligt omfang, for at opnå fuldt point.

Alle opgaver (del A og del B) stilles herunder, startende på side 2.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

- **Del A: Opgave 1 (Multiple choice) *besvares alene* elektronisk i svararket. Alternative skriftlige svar godtages (som udgangspunkt) ikke.**
- **Del B: Opgaverne 2 og 3 afleveres elektronisk eller evt på papirform, hvis din besvarelse er håndskrevet.**

Opgavesættet fortsætter - Vend!

Del A Opgave 1

1.I.

Betragt nu et homogent lineært differentialligningssystem $\dot{x} = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, hvorom det gælder, at det karakteriske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = -(\lambda + 1)(\lambda^2 + 2).$$

Bestem stabiliteten af systemet.

A Stabilt, men ikke asymptotisk stabilt.

B Asymptotisk stabilt.

C Ustabilt.

D Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

1.II.

Om et homogent lineært differentialligningssystem $\dot{x} = Ax$ med $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, der afhænger af en parameter $a \in \mathbb{R}$, oplyses det, at det karakteriske polynomium er givet ved

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + (a + 2)\lambda^2 + (a + 2)\lambda + a$$

Bestem værdierne af $a \in \mathbb{R}$ for hvilke systemet er asymptotisk stabilt.

E $a > 2$,

F $a > 4$.

G $a < -4$.

H $a > -2$.

I Utilstrækkelig information.

Indtast nu dit svar.

Opgavesættet fortsætter!

1.III.

Afgør konvergens af den uendelige række $R = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+e^n}$. Svaret er:

- **J** R er divergent.
- **K** R er betinget konvergent.
- **L** R er absolut konvergent.

Lad $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ være givet ved

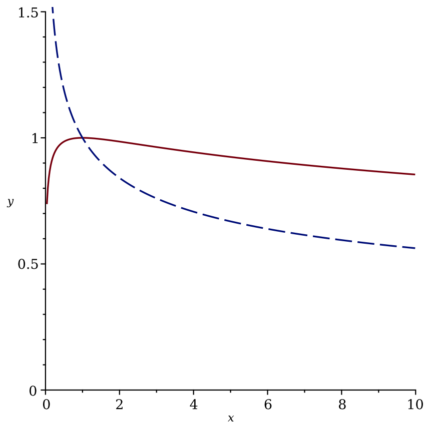
$$f(x) = \frac{2x^{\frac{1}{4}}}{1+\sqrt{x}}.$$

Grafen for f (rød) vises i Figur 1 nedenfor. Til sammenligningen vises også grafen for funktionen $\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$, $x > 0$ (blå og stiplet).

Afgør konvergens af rækken $T = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n f(n)$. Svaret er:

- **1** T er divergent.
- **2** T er betinget konvergent.
- **3** T er absolut konvergent.

Indtast nu dit samlede svar.



Figur 1: Grafen for f (rød). Til sammenligningen vises også grafen for funktionen $\frac{1}{x^{\frac{1}{4}}}$ (blå og stiplet). (Figuren er kun relevant for opgave 1. III.)

1.IV.

Vi betragter funktionen h givet som en potensrække

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^5 x^n.$$

Bestem en potensrækkeforskrift for en funktion H, hvorom der gælder, at $H'(x) = h(x)$ og $H(0) = 1$.

M $H(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} n^4 x^n$.

N $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^4 x^n$.

O $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^6 x^{n-1}$.

P $H(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^4 x^n$.

1.V.

Om en anden-ordens lineær inhomogen differentialligning med konstante koefficienter og påvirkning u, dvs

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b_0 u' + b_1, \tag{1}$$

oplyses det, at overføringsfunktionen H er givet ved

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}, \quad s \neq \pm 1.$$

Bestem en løsning y til (1) med $u(t) = 35e^{6t}$.

- **Q** $y(t) = e^{-t}$.
- **R** $y(t) = \frac{1}{35}e^{6t}$.
- **S** $y(t) = e^{6t}$.
- **T** $y(t) = \frac{1}{1224}e^{35t}$.
- **U** $y(t) = \frac{1}{3}e^{35t}$.

Indtast dit svar.

1.VI.

Antag igen, at

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s-1)}, \quad s \neq \pm 1.$$

er en overføringsfunktion hørende til ligning (1) i opgave 1.V.

Bestem nu en påvirkning u således, at $y(t) = \cos(t)$ er en løsning til (1).

A $u(t) = -2e^{it}$.

B $u(t) = -\sin(t)$.

C $u(t) = \cos(t)$.

D $u(t) = 2\sin(t)$.

E $u(t) = -2\cos(t)$.

F $u(t) = 1$.

G Informationen er utilstrækkelig.

Indtast nu dit svar.

1.VII.

Om en ukendt n'te-ordens lineær homogen differentialligning for $y(t)$, oplyses det, at potensrækkemetoden, dvs. indsættelse af

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n,$$

i ligningen, medfører, at

$$2c_0 + c_1 + c_2 t - c_0 t + \sum_{n=2}^{\infty} ((n+1)c_{n+1} - 4c_n - 5c_{n-1})t^n = 0,$$

for alle $t \in \mathbb{R}$.

Idet det yderligere oplyses, at $y'(0) = 1$, bestem da c_0 og c_3.

H $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 2$.

I $c_0 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = 1$.

J $c_0 = 0$, $c_3 = 3$.

K $c_0 = \frac{1}{2}$, $c_3 = 1$.

L $c_0 = -\frac{1}{2}$, $c_3 = 2$.

M c_0 og c_3 kan antage arbitrære værdier.

Indtast nu dit svar.

1.VIII.

Vi betragter en funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ givet som en uendelig række af funktioner

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\cos(x)\cos(nx) - \frac{2(-1)^n}{n^2x^2+1} \right).$$

Afgør hvilken række der er en majorantrække for den uendelige række af funktioner.

N $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{2}{n^2+1} \right)$.

O $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{2}{x^2+1} \right)$.

P $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{n^2}$.

Q $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(1 + \frac{2}{n^2x^2+1} \right)$.

R Der findes ingen majorantrække.

Er funktionen f kontinuert?

1: Nej.

2: Ja.

Indtast nu dit samlede svar.

1.IX.

Vi betragter funktionen f, der er ulige og 2π-periodisk, og givet ved forskriften

$$f(x) = \begin{cases} -\sqrt{-x} & x \in [-\pi, -\frac{\pi}{2}[\\ 0 & x \in [-\frac{\pi}{2}, 0], \end{cases}$$

i intervallet $[-\pi, 0]$. Lad

$$f \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nt) + b_n \sin(nt)),$$

være Fourierrækken hørende til f.

Bestem $A = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2$.

- **S** $A = \frac{3\pi}{8}$.
- **T** $A = \frac{3\pi}{4}$.
- **U** $A = \frac{3\pi^2}{8}$.
- **V** $A = \frac{3}{4}$.

Indtast dit svar.

1.X.

Betragt funktionerne $h : I \to \mathbb{R}$ og $g : I \to \mathbb{R}$ givet som potensrækkerne

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(n+1)^2} + 2 \right) x^n,$$
$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n,$$

på intervallet

$$I = [0, 1[.$$

Bestem den korrekte ulighed.

W $h(x) \leq g(x)$ for alle $x \in I$.

X $h(x) \geq g(x)$ for alle $x \in I$.

Y Hverken **W** eller **X** er korrekt.

Afgør konvergens af rækken h på intervallet $I = [0, 1[$.

1: h er uniform konvergent på intervallet I.

2: $h(x)$ er divergent for et $x \in I$.

3: h er punktvis konvergent, men ikke uniform konvergent, på intervallet I.

Indtast nu dit samlede svar.

Slut på del A.

Del B påbegyndes herunder.

Opgavesættet fortsætter!

Del B

Opgave 2

For ethvert $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$, definerer vi en lige og 2π-periodiske funktion $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vha forskriften

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{2k-x}{k} & x \in [0, 2k[, \\ 0 & x \in [2k, \pi], \end{cases}$$

på intervallet $[0, \pi]$.

Vi betragter først den lige og 2π-periodiske funktion f_1 med $k = 1$, som specifikt er givet ved følgende forskrift

$$f_1(x) = \begin{cases} 2 - x & x \in [0, 2[, \\ 0 & x \in [2, \pi], \end{cases}$$

på intervallet $[0, \pi]$.

1. Skitser grafen for f_1 på intervallet $x \in [-3\pi, 3\pi]$.
2. Konvergerer Fourierrækken for f_1 uniformt?

Vi betragter nu f_k i det generelle tilfælde med Fourierrækken

$$f_k \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

for $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

3. Bestem a_0, a_1 og alle b_n, $n \in \mathbb{N}$.

Lad

$$S_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

for $N \in \mathbb{N}$ være afsnitssummen hørende til Fourierrækken for f_k, $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

Det oplyses (skal ikke vises), at der gælder

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{2}{kn^2},$$

for alle $N \in \mathbb{N}$, alle $x \in \mathbb{R}$ og alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$.

4. Bestem et heltal $N \in \mathbb{N}$, således at følgende ulighed gælder for alle $k \in [1, \frac{\pi}{2}]$ og alle $x \in \mathbb{R}$:

$$|f_k(x) - S_N(x)| \leq \frac{1}{10}.$$

Opgave 3

Vi betragter differentialligningssystemet

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \tag{2}$$

med $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Vis, at

$$x(t) = \begin{pmatrix} 2t \\ 1 \end{pmatrix} e^{-t},$$

   er en løsning til det homogene system.

Det oplyses nu, at

$$x(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

er en partikulær løsning til det inhomogene system (2).

2. Bestem a og b.
3. Opskriv den fuldstændige løsning til det inhomogene system (2).

——————oooOooo——————

Opgaven er slut. Husk at svare på del A: opgave 1 (Multiple Choice) i det elektroniske svarark.