DANMARKS TEKNISKE UNIVERSITET

Skriftlig 3-timers prøve, 11. maj 2023
Kursus: Matematik 2 01035

Tilladte hjælpemidler: Alle af DTU tilladte.

Vægtning af opgaverne: Sættet består af 3 opgaver, der vægtes som følger:

Opgave 1: 60 %; Opgave 2: 15%; Opgave 3: 25%

Vægtningen er kun vejledende. Sættet bedømmes som en helhed. Opgave 1 er en multiple-choice opgave. Der er kun een korrekt svarmulighed per spørgsmål. For at opnå fuldt point i opgave 2 og 3 kræves at svarene er begrundet, eventuelt med en henvisning til lærebogen, og at mellemregninger medtages i rimeligt omfang.

Eksamensbesvarelsen afleveres på følgende måde:

(1) Svaret på MC-opgaven afleveres elektronisk ved indtastning på det oploadede svarark.

(2) Løsningen til opgave 2 og 3 kan enten afleveres i papirform eller ved oploadning.

Opgave 1

MC-spørgsmål 1 Bestem den fuldstændige komplekse løsning til differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 6\frac{d^2y}{dt^2} + 9\frac{dy}{dt} = 0.$$

Svaret er:

A: $y(t) = c_1 + c_2e^{-3t}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$;

B: $y(t) = c_1e^{-3it} + c_2e^{3it}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$;

C: $y(t) = c_1 + c_2e^{3it} + c_3te^{3it}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

D: $y(t) = c_1 + c_2e^{-3t} + c_3te^{-3t}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

E: $y(t) = c_1 + c_2e^{-3it} + c_3te^{-3it}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

F: $y(t) = c_1 + c_2e^{3t} + c_3te^{3t}$, $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C}$;

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 2 Betragt et differentialligningssystem

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{1}$$

hvor $\mathbf{A}$ er en 2×2 matrix.

Antag nu at systemet (1) er asymptotisk stabilt. Er funktionen

$$\mathbf{x}(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

løsning til systemet?

Svaret er:

A: Ja **B:** Nej **C:** Kan ikke afgøres ud fra de givne oplysninger

Antag nu omvendt at funktionen

$$\mathbf{x}(t) = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

er løsning til systemet. Er systemet stabilt?

1: Ja; **2:** Nej

Det samlede svar er hermed:

A1

A2

B1

B2

C1

C2

MC-spørgsmål 3 Betragt differentialligningen

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 2\frac{dy}{dt} = u' + u,$$

Bestem overføringsfunktionen $H(s)$.

Svaret er:

D: $H(s) = \frac{s^3+3s^2+2s}{s+1}$; **E:** $H(s) = \frac{1}{s(s+2)(s+1)}$; **F:** $H(s) = \frac{1}{s(s+2)}$

Bestem nu de værdier for $s \in \mathbb{C}$ for hvilke overføringsfunktionen er defineret.
Svaret er:

1: $s \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$; **2:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2\}$; **3:** $s \in \mathbb{C} \setminus \{0, -2\}$;

Det samlede svar er hermed

D1

D2

D3

E1

E2

E3

F1

F2

F3

MC-spørgsmål 4 Betragt potensrækken

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^3\, 2^n x^n.$$

Bestem konvergensradius ρ. Svaret er:

G: $\rho = 2$;   **H:** $\rho = 1$;   **I:** $\rho = \frac{1}{2}$.

Sæt nu

$$f(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n^3\, 2^n x^n,\ x \in]-\rho, \rho[,$$

og beregn tallet $f'(0)$. Svaret er:

1: $f'(0) = 0$;   **2:** $f'(0) = 2$.

Det samlede svar er dermed

G1

G2

H1

H2

I1

I2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 5 Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+2)^3}{2^n}$$

er betinget konvergent, absolut konvergent, eller divergent. Svaret er

J: betinget konvergent;   **K:** absolut konvergent;   **L:** divergent

Undersøg nu om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n+4)x^n$$

konvergerer uniformt på det åbne interval $]0,1[$. Svaret er:

1: Ja   **2:** Nej

Det samlede svar er dermed

J1

J2

K1

K2

L1

L2

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 6 Undersøg om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln(x^n),\ x \in [1, \infty[\tag{2}$$

har en majorantrække - og i givet fald om der findes en konvergent majorantrække.

Svaret er:

M: Rækken (2) har en majorantrække, men ikke en konvergent majorantrække;
N: Rækken (2) har ikke en majorantrække;
P: Rækken (2) har en konvergent majorantrække.

Vi undersøger nu om rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \ln(x^n),\ x \in [1, 10] \tag{3}$$

har en majorantrække - og i givet fald om der findes en konvergent majorantrække.

Svaret er:

1: Rækken (3) har en majorantrække, men ikke en konvergent majorantrække;
2: Rækken (3) har ikke en majorantrække;
3: Rækken (3) har en konvergent majorantrække.

Det samlede svar er hermed

M1
M2
M3
N1
N2
N3
P1
P2
P3

MC-spørgsmål 7 Om en 2π-periodisk funktion f oplyses at Fourierrækken på reel form er

$$f \sim 3 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} \cos(nx).$$

Bestem koefficienten c_0 i Fourierrækken på kompleks form. Svaret er

Q: $c_0 = 6$; **R:** $c_0 = 3/2$; **S:** $c_0 = 3$.

Bestem koefficienten c_{-2} i Fourierrækken på kompleks form. Svaret er

1: $c_{-2} = \frac{-i}{6}$; **2:** $c_{-2} = \frac{i}{6}$; **3:** $c_{-2} = \frac{1}{6}$;

Det samlede svar er hermed

Q1

Q2

Q3

R1

R2

R3

S1

S2

S3

Opgaven fortsætter - Vend!

MC-spørgsmål 8 Om en differentialligning

$$\frac{d^2y}{dt^2} + a_1(t)\frac{dy}{dt} + a_2(t)y = 0 \tag{4}$$

vides, at indsættelse af en potensrække

$$y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$$

leder til rekursionsformlen

$$(n+1)c_{n+1} - c_n = 0, \;\; n = 0, 1, 2 \ldots.$$

Hvad er konvergensradius ρ for potensrækkeløsningerne til differentialligningen? Svaret er

T: $\rho = 0$; **U:** $\rho = 1$; **V:** $\rho = \infty$.

Undersøg nu om funktionen $y(t) = t^2$ er løsning til differentialligningen. Svaret er

1: Ja **2:** Nej

Det samlede svar er dermed

T1

T2

U1

U2

V1

V2

Opgave 2 Det oplyses (skal IKKE vises), at en differentialligning på formen

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{t}\frac{dy}{dt} + a(t)y = 0, \; t \in]0, \infty[,$$

har løsningen

$$y(t) = t^2.$$

(i) Bestem funktionen $a(t)$.

(ii) Bestem nu den fuldstændige reelle løsning til differentialligningen.

Opgave 3 Betragt den 2π-periodiske funktion f, der er givet ved

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & \text{for } x \in [-\pi, 0] \\ x^{1.1}, & \text{for } x \in]0, \pi[\end{cases} \quad .$$

(i) Skitser grafen for funktionen f på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$.

(ii) Er funktionen f lige?

(iii) Beregn Fourierkoefficienten a_0 i Fourierrækken for f på reel form.

(iv) Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = \frac{\pi}{2}$?

(v) Hvad konvergerer Fourierrækken imod for $x = \pi$?

(vi) Konvergerer Fourierrækken uniformt?

Opgavesættet er slut.

Husk at

(1) indtaste svaret på MC-opgaven på det oploadede svarark

(2) aflevere eller oploade løsningen til opgave 2 & 3.