MINORANȚI, MAJORANȚI, INFIMUMUL, SUPREMUMUL

Fie $A=\{2,3,4\}$

$MIN(A)=(-\infty,2]$

i) mulțimea minoranților: toate numerele din univers (aici $\mathbb{R}$) care sunt $\leq$ decât minimul din A (aici 2)

$MAJ(A)=[4,\infty)$ ii) analog i)

[Axioma infimumului]

dacă A este mărginită inferior atunci posedă un cel mai mare minorant notat cu inf A

→ aici, inf A = cel mai mare element din MIN(A)

$= \text{——}\,//\,\text{——} \; (-\infty,2]$

$=2$

[Axioma supremumului]

similar ca la [infim]

→ aici, $\sup A = 4$

[Exemple și exerciții]

a) $\mathbb{Q}$ nu satisface axioma infimumului sau a supremumului

$A=\{x\in\mathbb{Q} \mid x^2<2\}\subseteq\mathbb{Q}$, $A=(-\sqrt{2};\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$

$MIN(A)=(-\infty,-\sqrt{2})\cap\mathbb{Q}$; $MAJ(A)=(\sqrt{2};\infty)\cap\mathbb{Q}$

$\inf A = ?$ $\sup A = ?$ NU EXISTĂ

aici, pt A, nu există inf A sau sup A în $\mathbb{Q}$

! $\inf A = -\sqrt{2}$ dacă lucram în $\mathbb{R}$, dar aici lucrăm în $\mathbb{Q}$

b) $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subseteq \mathbb{R} \Rightarrow A = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$

$\Rightarrow MIN(A) = (-\infty, -\sqrt{2}]$, $MAJ(A) = [\sqrt{2}, \infty)$

$\Rightarrow \inf A = -\sqrt{2}$ $\sup A = \sqrt{2}$

Exemple parțial mărginire

$A = \mathbb{N} \Rightarrow \inf \mathbb{N} = 0$

$\sup \mathbb{N} = ?$, nu există, $\mathbb{N}$ este nemărginit superior

! [convenție]

se consideră două elemente $-\infty$ și $+\infty \notin \mathbb{R}$

cu prop că $\forall x \in \mathbb{R}$ $-\infty < x < +\infty$

PRIN CONVENȚIE,

a) Dacă $A \subseteq \mathbb{R}$ nemărginită inferior atunci $\inf A = -\infty$

b) ——— // — superior atunci $\sup A = \infty$

c) $\inf \phi = -\infty$ $\sup \phi = +\infty$

Ex: $\sup \mathbb{N} = +\infty$

VECINĂTATE

Def: Fie $x \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$. Un interval de forma

a) $(x - \varepsilon; x + \varepsilon) \rightarrow$ vecinătate a lui x

b) $(\varepsilon; +\infty) \rightarrow$ vecinătate a lui $+\infty$

c) $(-\infty; \varepsilon) \rightarrow$ vecinătate a lui $-\infty$

x - centrul vecinătății

ε - raza vecinătății