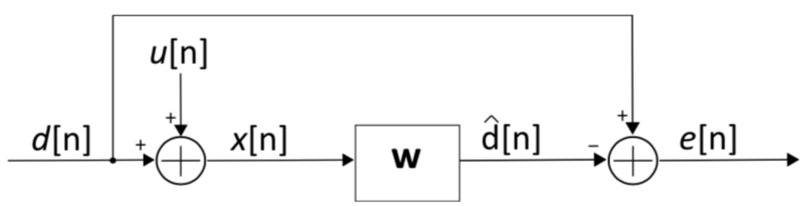
Επεξεργασία Στοχαστικών Σημάτων
2η Άσκηση

Μαστοράκη Αικατερίνα
AM:1115201400100

- **Ερώτημα 1**

Στο πρώτο ερώτημα ζητείται η υλοποίηση ενός FIR φίλτρου $Wiener$ τρειών διαφορετικών τάξεων($p = 10$, 40, 80) προκειμένου να πραγματοποιείται φιλτράρισμα θορύβου στην είσοδο του και να λαμβάνεται ως έξοδος μία προσέγγιση του επιθυμητού αρχικού σήματος ,πρίν την επίδραση του θορύβου σε αυτό. Πιο συγκεκριμένα απαιτείται η ανάκτηση του σήματος $d[n]$ από το σήμα εισόδου $x[n] = d[n] + u[n]$,όπου το σήμα $u[n]$ αναπαριστά λευκό θόρυβο με μηδενική μέση τιμή και μοναδιαία διασπορά. Στην παρακάτω εικόνα παρουσιάζεται η σχηματική απεικόνιση του ζητούμενου φίλτρου.



Οι συντελεστές του ζητούμενου φίλτρου θα είναι: $\mathbf{w} = [w[0], w[1], ..., w[p-1]]^T$, όπου ρ=10,40,80 και είναι η τάξη του φίλτρου. Γνωρίζουμε απο την θεωρία ότι $\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{r}_{d,x}$,όπου $\mathbf{R}_x^{-1}$ είναι ο αντίστροφος του πίνακα αυτοσυσχέτισης του σήματος εισόδου με διαστάσεις $p * p$ και $\mathbf{r}_{d,x}$ είναι η ετεροσυσχέτιση του επιθυμητού σήματος και του σήματος εισόδου με διαστάσεις $p * 1$. Για την ετεροσυσχέτιση των σημάτων $d[n], x[n]$ ισχύει:

$$\mathbf{r}_{d,x}[k] = E_{d,u}[d[n](d^*[n-k] + u^*[n-k])] = r_d(k) + r_{d,u}(k) \quad \mathbf{(1)}$$

Όμως γνωρίζουμε ότι οι δύο τυχαίες διαδικασίες $d[n], u[n]$ είναι ασυσχέτιστες, άρα:

$$c_{d,u}(k) = 0$$

Έπίσης γνωρίζουμε ότι:

$$c_{d,u}(k) = r_{d,u}(k) - \mu_d(k)\mu_u^*(k) \leftrightarrow$$
$$r_{d,u}(k) = \mu_d(k)\mu_u^*(k)$$

Στην περίπτωση μας όμως το σήμα θορύβου $u[n]$ έχει μηδενική μέση τιμή, άρα συμπερένουμε ότι:

$$r_{d,u}(k) = 0$$

Άρα από την σχέση **(1)** καταλήγουμε στο ότι :

$$\mathbf{r}_{d,x}[k] = r_d(k)$$

Τελικά καταλήγουμε στο ότι η βέλτιστη λύση δίνεται απο την σχέση:

$$\mathbf{w}_{opt} = \mathbf{R}_x^{-1}\mathbf{r}_d$$

Αφού βρεθούν οι συντελεστές του φίλτρου τότε η εκτίμηση του σήματος $d[n]$ δίνεται απο την συνέλιξη του σήματος εισόδου με το διάνυσμα των συντελεστών απο τον παρακάτω τύπο:

$$\hat{d[n]} = \sum_{k=0}^{p-1} w[k]x[n-k]$$

Ξεκινώντας την υλοποίηση του FIR φίλτρου $Wiener$ σε περιβάλλον $Matlab$, φορτώνονται μέσω της εντολής $load$ τα διαθέσιμα δείγματα που σχηματίζουν τα σήματα $d[n]$ και $x[n]$. Στην συνέχεια υπολογίζονται οι αυτοσυσχετίσεις των παρπάνω σημάτων μέσω της εντολής $xcorr$ η οποία παράγει ένα διάνυσμα που περιλαμβάνει τις αυτοσυσχετίσεις για τα χρονικά $lags$ $1-p$ έως $p-1$. Όμως για τον υπολογισμό του πίνακα αυτοσυσχέτισης του σήματος εισόδου, καθώς και για την αυτοσυσχέτιση του σήματος $d[n]$ μας ενδιαφέρουν οι τιμές για τα χρονικά $lags$ 0 έως $p-1$,τις οποίες και κρατάμε. Ο πίνακας $\mathbf{R}_x$ είναι ένας συμμετρικός $toeplitz$ πίνακας, φτιάχνεται μέσω της ομόνυμης εντολής, που στην συνέχεια αντιστρέφεται για να πάρουμε τον πίνακα $\mathbf{R}_x^{-1}$ και να υπολογιστούν οι συντελεστές του φίλτρου στον πίνακα w.

Για να υπολογίσουμε την εκτίμηση $\hat{d[n]}$ θα υπολογίσουμε, όπως προαναφέρθηκε την συνέλιξη του σήματος εισόδου $x[n]$ με τον πίνακα w, που περιέχει τους συντελεστές. Σχετικά με την συνέλιξη θα μπορούσε να χρησημοποιηθεί η συνάρτηση $conv$, η οποιά παρέχεται έτοιμη απο την $Matlab$, όμως προτίμησα να την υλοποιήσω με τον δικό μου τρόπο καθώς παρατήρησα ότι έτσι λαμβάνω καλύτερη εκτίμηση για τις αρχικές τιμές του σήματος $\hat{d[n]}$. Πιο συγκεκριμένα, ελέγχω τον δείκτη που διατρέχει τον πίνακα που περιέχει τα δείγματα του σήματος εισόδου, και αν αυτός λαμβάνει αρνητικές τιμές, τότε χρησημοποιείται το συμμετρικό στοιχείο με τον δείκτη να παίρνει την αντίθετη τιμή, ενώ αν είναι ίσος με μηδέν τότε παίρνει την τιμή 1 και χρησημοποιείται το πρώτο διαθέσιμο δείγμα. Ο κώδικας που υλοποιεί την παραπάνω λογική χρησημοποιείται τρείς φορές,ώστε να υλοποιηθεί το απαιτούμενο φίλτρο για τις τάξεις $p1 = 10, p2 = 40, p3 = 80$. Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις απεικονίζεται η έξοδος του φίλτρου, δηλαδή το σήμα $\hat{d[n]}$, σε σύγκριση με το αρχικό σήμα $d[n]$ για κάθε μία απο τις ζητούμενες τάξεις.

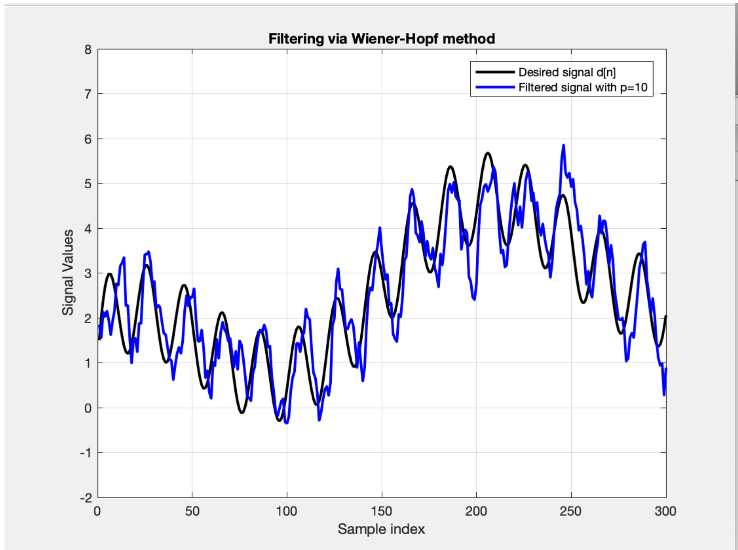


Figure 1: Φιλτάρισμα θορύβου για $p = 10$

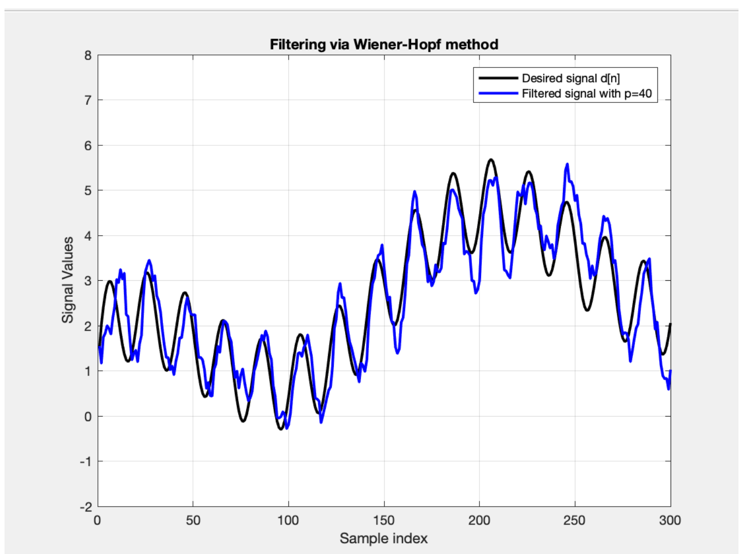


Figure 2: Φιλτάρισμα θορύβου για $p = 40$

Παρατηρούμε ότι παρόλο που η εκτίμηση δεν ταυτίζεται με το αρχικό σήμα, έχει βελτιωθεί αρκετά περνώντας απο την τάξη 10 στην τάξη 40 του φίλτρου.

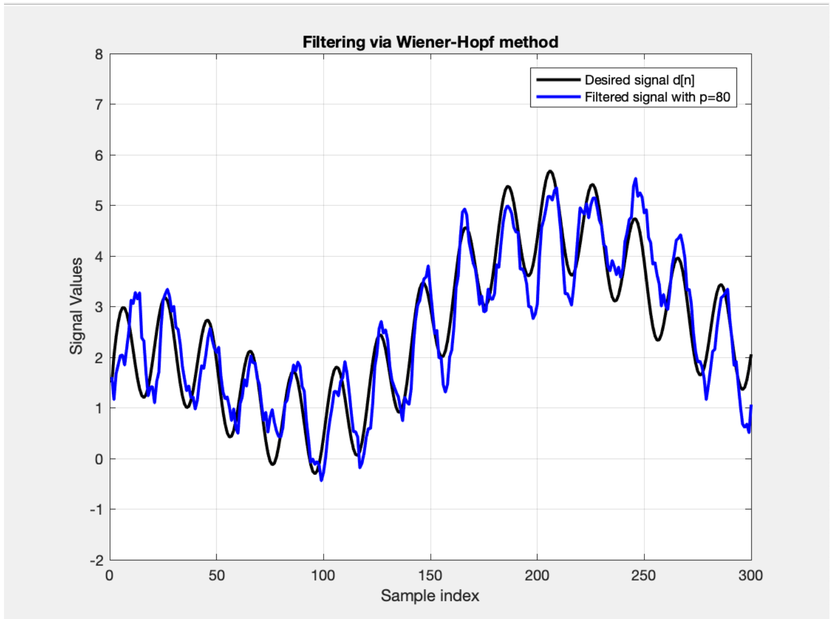


Figure 3: Φιλτάρισμα θορύβου για $p = 80$

Για την μετάβαση απο την τάξη 40 στην τάξη 80 διαπιστώνουμε οτι η εκτίμηση έχει βελτιωθεί σε μικρό βαθμό, ενώ ακόμα δεν ταυτίζεται με το επιθυμητό σήμα. Αυτό ίσως να συμβαίνει λόγω της γρήγορης μεταβολής του σήματος $d[n]$.

- **Ερώτημα 2**

Στο δεύτερο ερώτημα δίνεται το σήμα $y[n]$,το οποίο έχει προκύψει κατόπιν φιλτραρίσματος του σήματος θορύβου $u[n]$ απο ένα αγνώστων συντελεστών FIR φίλτρο και ζητείται η υλοποίηση του προσαρμοστικού αλγορίθμου LMS για την ταυτοποίηση του εν λόγω φίλτρου για τρείς διαφορετικές τάξεις και δύο διαφορετικές τιμές του μεγέθους βήματος.

Η λογική πάνω στην οποία υλοποιούνται οι προσαρμοστικοί αλγόριθμοι είναι ο υπολογισμός για κάθε διαθέσιμο δείγμα n του σήματος εισόδου $x[n]$ (που στην περίπτωσή μας είναι το σήμα λευκού θορύβου $u[n]$) ενός νέου διανύσματος w_{n+1} που περιλαμβάνει p τιμές, και αποτελεί την εκτίμηση των συντελεστών του φίλτρου σε εκείνο το σημείο. Οι τιμές αυτές υπολογίζονται με χρήση των τιμών των συντελεστών που έχουν βρεθεί για το παρελθοντικό δείγμα $n-1$ και ενός διανύσματος Δw_n που υπολογίζεται απο τις παρούσες τιμές. Η αναδρομική σχέση μέσω της οποίας υλοποιείται η παραπάνω διαδικασία είναι η εξής:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu \left(\frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} e[n-l]\mathbf{x}^*[n-l] \right) \quad \mathbf{(2)}$$

όπου $\mathbf{x}[n] = [x[n], x[n-1], ..., x[n-p+1]]^T$

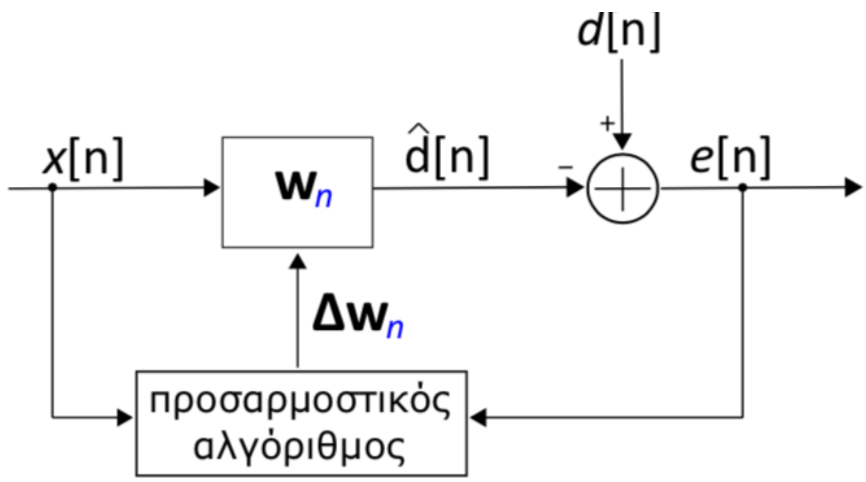


Figure 4: Υλοποίηση φίλτρου με χρήση προσαρμοστικού αλγορίθμου

Η αναδρομική σχέση στην οποία βασίζεται ο αλγόριθμος LMS προκύπτει αν στην σχέση **(2)** τεθεί N=1:

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e[n]\mathbf{x}^*[n] \quad \textbf{(3)}$$

Τα βήματα του αλγορίθμου LMS διαμορφώνονται ως εξής:

- **Αρχικοποίηση:**

$$\mathbf{w}_0 = [w_0[0], w_0[1], ..., w_0[p-1]]^T \text{ και } \mu > 0$$

for n=0,1,...

- **Υπολογισμός της εξόδου του φίλτρου:**

$$\hat{d} = \mathbf{w}_n^T \mathbf{x}[n]$$

- **Υπολογισμός του σφάλματος:**

$$e[n] = d[n] - \hat{d[n]}$$

- **Ανανέωση του διανύσματος των συντελεστών:**

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{w}_n + \mu e[n]\mathbf{x}^*[n]$$

endfor

Η επιλογή του μεγέθους βήματος έχει σημασία καθώς όταν επιλέγεται μεγαλύτερο μ έχουμε μία πιο γρήγορη προσέγγιση της βέλτιστης λύσης, ενώ αν επιλέξουμε μικρότερο μ μπορεί η βέλτιστη λύση να μην προσεγγίζεται τόσο γρήγορα αλλά παρατηρείται μικρότερη απόκλιση κατά την σύγκλιση σε αυτή.

Ξεκινώντας την υλοποίηση του προσαρμοστικού αλγορίθμου LMS σε περιβάλλον $Matlab$, αρχικά φορτώνονται τα διαθέσιμα δείγματα των σημάτων $u[n]$ και $y[n]$ και στην συνέχεια ξεκινά η επανάληψη των παραπάνω βημάτων για κάθε ένα απο τα 300 αυτά δείγματα. Τα δυό διαφορετικά μεγέθη βήματος έχουν επιλεγεί να είναι μ1=0.012 και μ2=0.05(βάσει των διαφανειών), για κάθε ένα για τα οποία προκύπτει ένας διαφορετικός πίνακας συντελεστών.Για τον υπολογισμό του διανύσματος $\mathbf{x}[n]$, το οποίο αποτελείται απο την τρέχουσα και τις $p-1$ παρελθοντικές τιμές του σήματος εισόδου $u[n]$,και υπολογίζεται εκ νέου σε κάθε επανάληψη, χρησημοποιείται μία δομή $while$ στην οποία ελέγχεται πόσες τιμές απο τις απαιτούμενες είναι διαθέσιμες,δηλαδή ελέγχεται αν ο δείκτης είναι μεγαλύτερος του 1.Όσα δείγματα είναι διαθέσιμα συμπληρώνονται, ενώ εκείνα που δεν είναι ακόμα αντικαθίστανται απο μηδέν. Ο κώδικας που υλοποιεί την παραπάνω λογική επαναλαμβάνεται τρείς φορές,μια για κάθε ζητούμενη τάξη. Στις παρακάτω γραφικές παραστάσεις παρουσιάζονται οι συγκλίσεις των συντελεστων για τα δύο διαφορετικά μεγέθη βήματος και για κάθε ζητούμενη τάξη του φίλτρου($p3 = 2, p2 = 3, p1 = 4$).

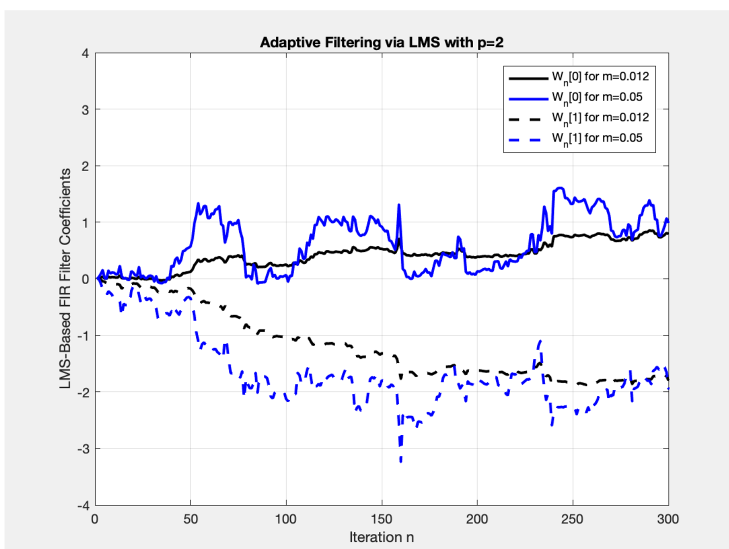


Figure 5: Σύγκλιση συντελεστών για $p = 2$

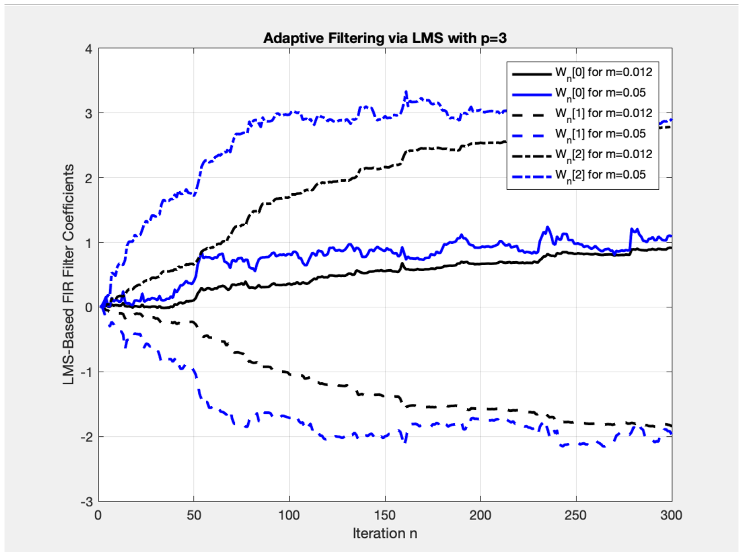


Figure 6: Σύγκλιση συντελεστών για $p = 3$

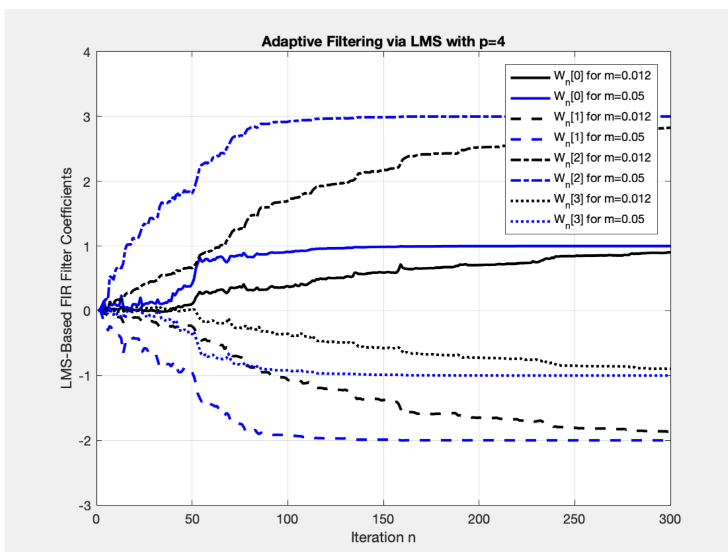


Figure 7: Σύγκλιση συντελεστών για $p = 4$

Από τις παραπάνω γραφικές παρατηρούμε αυτό που αναφέρθηκε και προηγουμένως. Για μ2=0.05 > μ1=0.012 βλέπουμε οτι η βέλτιστη λύση μπορεί να προσεγγίζεται πιο γρήγορα, αλλά όχι με τόσο καλή ακρίβεια, κάτι που φαίνεται ξεκάθαρα στο διάγραμμα 5. Απο την άλλη στο ίδιο διάγραμμα φαίνεται ότι για μ1=0.012 η βέλτιστη λύση προσεγγίζεται πίο αργά αλλά πολύ πιο σταθερά και με λιγότερες διακυμάνσεις,γεγονός που παρατηρείται και απο τα διαγράμματα 6 και 7. Παρόλο που βλέπουμε την τάση σύγκλισης δεν βλέπουμε τους συντελεστές να συγκλίνουν απόλυτα, γεγονός που οφείλεται στα περιορισμένα διαθέσιμα δείγματα, αφού ο αλγόριθμος περνά μία φάση "εκπαίδευσης" και η βέλτιστη λύση προσεγγίζεται όλο και καλύτερα με την πάροδο των δειγμάτων.

....