№1.

$$A = \begin{array}{c} \\ \end{array}\begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \end{array}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -16 & -16 & 5 & -16 \\ 13 & -22 & -6 & -15 & -14 \\ 5 & -23 & -12 & 1 & -23 \\ -13 & -27 & -1 & 26 & -47 \\ -17 & 11 & 24 & 15 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{103}{63} & \frac{64}{63} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{10}{63} & \frac{79}{63} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{29}{63} & -\frac{4}{63} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Найдём $\operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T =$ кол-во ненулевых строк в УСВ матрицы A

$3 = \operatorname{rk} A = \operatorname{rk} A^T \Rightarrow$ в A 3 ЛНЗ столбца: $\underbrace{v_1, v_2, v_3}_{\text{вед. эл-ты стоят в этих столбцах}}$ - базис $\langle v_1, \dots, v_5 \rangle$

// v_i - i-й столбец матрицы //

$$v_4 = -\frac{103}{63} v_1 - \frac{10}{63} v_2 - \frac{29}{63} v_3$$

$$v_5 = \frac{64}{63} v_1 + \frac{79}{63} v_2 - \frac{4}{63} v_3$$

$$A = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & 0 & 0 & -\frac{103}{63} v_1 & \frac{64}{63} v_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & v_2 & 0 & -\frac{10}{63} v_2 & \frac{79}{63} v_2 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & v_3 & -\frac{29}{63} v_3 & -\frac{4}{63} v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & -\frac{103}{21} & \frac{64}{21} \\ 13 & 0 & 0 & -\frac{1339}{63} & \frac{832}{63} \\ 5 & 0 & 0 & -\frac{515}{63} & \frac{320}{63} \\ -13 & 0 & 0 & \frac{1339}{63} & -\frac{832}{63} \\ -17 & 0 & 0 & \frac{1751}{63} & -\frac{1088}{63} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -16 & 0 & \frac{160}{63} & -\frac{1264}{63} \\ 0 & -22 & 0 & \frac{220}{63} & -\frac{1738}{63} \\ 0 & -23 & 0 & \frac{230}{63} & -\frac{1817}{63} \\ 0 & -27 & 0 & \frac{30}{7} & -\frac{237}{7} \\ 0 & 11 & 0 & -\frac{110}{63} & \frac{869}{63} \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16 & \frac{464}{63} & \frac{64}{63} \\ 0 & 0 & -6 & \frac{58}{21} & \frac{8}{21} \\ 0 & 0 & -12 & \frac{116}{21} & \frac{16}{21} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{29}{63} & \frac{4}{63} \\ 0 & 0 & 24 & -\frac{232}{21} & -\frac{32}{21} \end{pmatrix}.$$

№2.

$\mathbb{e} = (e_1, e_2, e_3)$; $\mathbb{e}' = (e_1', e_2', e_3')$

$e_1 = (-2, -2, 3)$; $e_2 = (-1, 2, 1)$; $e_3 = (-1, 1, -2)$; $e_1' = (-1, -6, -1)$; $e_2' = (-7, 3, 4)$; $e_3' = (-7, 0, 2)$

$v = (2, -3, 1)$ в базисе $\mathbb{e}$.

а) Д-ть: $\mathbb{e}$ и $\mathbb{e}'$ - базисы в $\mathbb{R}^3$

1) Запишем вектора e_1, e_2 и e_3 в столбцы матрицы и приведём к СВ;

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{СВ:} \begin{pmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{e}$ - базис; ЧТД

$(e_1, e_2, e_3$ ЛНЗ$)$

2) Аналог. с e_1', e_2', e_3':

$$\begin{pmatrix} -1 & -7 & -7 \\ -6 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{СВ:} \begin{pmatrix} -1 & -7 & -7 \\ 0 & 45 & 42 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk = 3 = \dim \mathbb{R}^3 \Rightarrow \mathbb{e}'$ - базис; ЧТД

$(e_1', e_2', e_3'$ - ЛНЗ$)$

б) Запишем e_1, e_2, e_3 в столбцы матр. A, а e_1', e_2', e_3' – в столбцы B.

Приведём матр. $(A|B)$ к виду $(E|C)$, где C – матр. перехода от e к e':

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & -1 & -7 & -7 \\ -2 & 2 & 1 & -6 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & -1 & 4 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ -(1) \\ +(1) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & -1 & -1 & -1 & -7 & -7 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & 10 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & -5 \end{array}\right)\begin{matrix} +2(3) \\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & -7 & -5 & -13 & -17 \\ 0 & 3 & 2 & -5 & 10 & 7 \\ 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & -5 \end{array}\right)\begin{matrix} \cdot(-1) \\ +3(1) \\ \\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & -19 & -20 & -29 & -44 \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 13 & 17 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \cdot\left(-\frac{1}{19}\right) \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -2 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{19} & \frac{29}{19} & \frac{44}{19} \\ 0 & 1 & 7 & 5 & 13 & 17 \end{array}\right)\begin{matrix} +3(2) \\ \\ -7(2) \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{22}{19} & \frac{30}{19} & \frac{37}{19} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{45}{19} & \frac{44}{19} & \frac{15}{19} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{20}{19} & \frac{29}{19} & \frac{44}{19} \end{array}\right)$$

$C.$

Ответ: $C = \begin{pmatrix} 22/19 & 30/19 & 37/19 \\ -45/19 & 44/19 & 15/19 \\ 20/19 & 29/19 & 44/19 \end{pmatrix}$

c) $(2, -3, 1)$ – координаты v в e

c) $(2, -3, 1)$ - координаты v в e; $v' = ?$

$v = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{уже нашли}}}{C} \cdot v'$; $Cv' = v$ - решим, исп. м. Гаусса

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{22}{19} & \frac{30}{19} & \frac{37}{19} & 2 \\ -\frac{45}{19} & \frac{44}{19} & \frac{15}{19} & -3 \\ \frac{20}{19} & \frac{29}{19} & \frac{44}{19} & 1 \end{array}\right) \cdot \frac{19}{22} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{15}{11} & \frac{37}{22} & \frac{19}{11} \\ -\frac{45}{19} & \frac{44}{19} & \frac{15}{19} & -3 \\ \frac{20}{19} & \frac{29}{19} & \frac{44}{19} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ +(1)\cdot\frac{45}{19} \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{15}{11} & \frac{37}{22} & \frac{19}{11} \\ 0 & \frac{61}{11} & \frac{105}{22} & \frac{12}{11} \\ \frac{20}{19} & \frac{29}{19} & \frac{44}{19} & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot\frac{11}{61} \\ -(1)\cdot\frac{20}{19} \end{array} \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{15}{11} & \frac{37}{22} & \frac{19}{11} \\ 0 & 1 & \frac{105}{22} & \frac{12}{61} \\ 0 & \frac{1}{11} & \frac{6}{11} & -\frac{9}{11} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -(2)\cdot\frac{1}{11} \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{15}{11} & \frac{37}{22} & \frac{19}{11} \\ 0 & 1 & \frac{105}{22} & \frac{12}{61} \\ 0 & 0 & \frac{57}{122} & -\frac{51}{61} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot\frac{122}{57} \end{array} \quad \begin{array}{l} -\frac{37}{22}\cdot(3) \\ -\frac{105}{22}\cdot(3) \\ \to \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{15}{11} & \frac{37}{22} & \frac{19}{11} \\ 0 & 1 & \frac{105}{22} & \frac{12}{61} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{34}{19} \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{15}{11} & 0 & \frac{90}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{33}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{34}{19} \end{array}\right) \begin{array}{l} -(2)\cdot\frac{15}{19} \\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{45}{19} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{33}{19} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{34}{19} \end{array}\right)$$

Итак, $\begin{pmatrix} \frac{45}{19} \\ \frac{33}{19} \\ -\frac{34}{19} \end{pmatrix}$ - координаты вектора v в базисе e'.

№3.

$L_1 = \langle a_1, a_2, a_3, a_4 \rangle$; $a_1 = (1, 1, -4, 3, -4)$; $a_2 = (8, -8, -3, -11, 8)$; $a_3 = (0, 2, 3, 3, -2)$; $a_4 = (4, -1, 3, -1, 1)$

$L_2 = \langle b_1, b_2, b_3, b_4 \rangle$; $b_1 = (-20, 6, -5, 6, -4)$; $b_2 = (-2, 3, -11, 7, -9)$; $b_3 = (-4, -2, 1, -4, 4)$; $b_4 = (8, -4, 3, -5, 4)$

1) L_1

Запишем вектора a_1, a_2, a_3, a_4 в столбцы матрицы, приведём её к УСВ, и базисом будут вектора, соотв. столбцам с ведущими эл-тами.

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 4 \\ 1 & -8 & 2 & -1 \\ -4 & -3 & 3 & 3 \\ 3 & -11 & 3 & -1 \\ -4 & 8 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \end{matrix} \end{array}$$

Итак, векторы $a_1 = (1, 1, -4, 3, -4)$; $a_2 = (8, -8, -3, -11, 8)$; $a_3 = (0, 2, 3, 3, -2)$ – базис L_1;

$\dim L_1 = 3$ (в базисе получили 3 вектора)

2) L_2

$$\begin{pmatrix} -20 & -2 & -4 & 8 \\ 6 & 3 & -2 & -4 \\ -5 & -11 & 1 & 3 \\ 6 & 7 & -4 & -5 \\ -4 & -9 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{array}{c} \begin{matrix} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Векторы $b_1 = (-20, 6, -5, 6, -4)$; $b_2 = (-2, 3, -11, 7, -9)$; $b_3 = (-4, -2, 1, -4, 4)$ – базис L_2;

$\dim L_2 = 3$

3) $U = L_1 + L_2$

Запишем векторы $a_1, \dots, a_4, b_1, \dots, b_4$ в столбцы матрицы, приведём её к СВ; базисом будут векторы, соотв. столбцам с ведущими эл-тами

$$\begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 4 & -20 & -2 & -4 & 8 \\ 1 & -8 & 2 & -1 & 6 & 3 & -2 & -4 \\ -4 & -3 & 3 & 3 & -5 & -11 & 1 & 3 \\ 3 & -11 & 3 & -1 & 6 & 7 & -4 & -5 \\ -4 & 8 & -2 & 1 & -4 & -9 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{СВ}: \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 4 & -20 & -2 & -4 & 8 \\ 0 & -16 & 2 & -5 & 26 & 5 & 2 & -12 \\ 0 & 0 & \frac{53}{8} & \frac{159}{16} & \frac{-303}{8} & \frac{-159}{16} & -\frac{91}{8} & \frac{53}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \end{matrix} \end{array}$$

Итак, $a_1=(1,1,-4,3,-4)$; $a_2=(8,-8,-3,-11,8)$; $a_3=(0,2,3,3,-2)$; $b_1=(-20,6,-5,6,-4)$ - базис U

$\dim(U)=4$

4) $W=L_1\cap L_2$

$$\forall v\in L_1\cap L_2:\begin{cases}v=\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_4 a_4 = U\cdot\lambda\\ v=\mu_1 b_1+\ldots+\mu_4 b_4=W\cdot\mu\end{cases}$$

$\lambda_1 a_1+\ldots+\lambda_4 a_4-\mu_1 b_1-\ldots-\mu_4 b_4=0 \Rightarrow$ запишем $a_1,\ldots,a_4, b_1,\ldots,b_4$ в столбцы матрицы, приведём к УСВ и найдём решение ОСЛУ $[L_1;L_2]\begin{pmatrix}\boxed{\lambda}\\ \boxed{\mu}\end{pmatrix}=0$

$$\begin{pmatrix}1&8&0&4&-20&-2&-4&8\\1&-8&2&-1&6&3&-2&-4\\-4&-3&3&3&-5&-11&1&3\\3&-11&3&-1&6&7&-4&-5\\-4&8&-2&1&-4&-9&4&4\end{pmatrix}\Rightarrow \text{УСВ}: \begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&2&0&0\\0&1&0&1/2&0&-1/2&2&1\\0&0&1&3/2&0&-3/2&4&2\\0&0&0&0&1&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\\ \lambda_1\ \ \lambda_2\ \ \lambda_3\ \ \lambda_4\ -\mu_1\ -\mu_2\ -\mu_3\ -\mu_4\end{array}$$

$$\begin{cases}\lambda_1-2\mu_2=0\\ \lambda_2+\frac12\lambda_4+\frac12\mu_2-2\mu_3-\mu_4=0\\ \lambda_3+\frac32\lambda_4+\frac32\mu_4-4\mu_3-2\mu_4=0\\ -\mu_1-\mu_3=0\end{cases}\qquad \begin{cases}\lambda_1=2\mu_2\\ \lambda_2=-\frac12\lambda_4-\frac12\mu_2+2\mu_3+\mu_4\\ \lambda_3=-\frac32\lambda_4-\frac32\mu_2+4\mu_3+2\mu_4\\ \lambda_4=\lambda_4\\ \mu_1=-\mu_3\\ \mu_2=\mu_2\\ \mu_3=\mu_3\\ \mu_4=\mu_4\end{cases}$$

// Выразили гл. переменные через своб. //

$$\begin{cases}v=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\lambda_3 a_3+\lambda_4 a_4\\ v=\mu_1 b_1+\mu_2 b_2+\mu_3 b_3+\mu_4 b_4\end{cases}\Leftrightarrow v=-\mu_3 b_1+\mu_2 b_2+\mu_3 b_3+\mu_4 b_4=\mu_2 b_2+\mu_3(b_3-b_1)+\mu_4 b_4$$

μ_2	μ_3	μ_4		
1	0	0	$v=b_2$	$b_2=(-2,3,-11,7,-9)$
0	1	0	$v=b_3-b_1$	$b_4=(8,-4,3,-5,4)$
0	0	1	$v=b_4$	$b_3-b_1=(16,-8,6,-10,8)$

Проверим, что $\{b_2, b_4, b_3-b_1\}$ ЛНЗ:

Для этого запишем получ. векторы в столбцы и найдём ранг матрицы // $\text{rk}A=\text{rk}A^T=$ кол-во ненул. строк в СВ матрицы A //

$$\begin{pmatrix} -2 & 8 & 16 \\ 3 & -4 & -8 \\ -11 & 3 & 6 \\ 7 & -5 & -10 \\ -9 & 4 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{CB}: \begin{array}{c} \begin{pmatrix} -11 & 3 & 6 \\ 0 & 82 & 164 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} b_2 & b_4 & b_3-b_1 \end{array} \end{array}$$

Итак, $\mathrm{rk} = 2 \Rightarrow$ векторы $\{b_2, b_4, b_3-b_1\}$ ЛЗ $\Rightarrow$ базис ЛПW - это векторы $b_2 = (-20, 6, -5, 6, -4)$ и $b_4 = (8, -4, 3, -5, 4)$, т.к. они соотв. столбцам с ведущими эл-тами.

$\dim W = 2$ //т.к. $\mathrm{rk} = 2$//.

№4.

$\mathbb{R}^5 = U \oplus W$

1) Найдём базис подпр-ва U

Для этого запишем $v_1, \dots, v_4$ в строки матрицы, с помощью эл. преобр. приведём её к СВ и выберем ненулевые строки

$$\begin{pmatrix} -1 & -14 & -11 & -23 \\ -8 & -9 & 13 & 20 \\ -13 & -2 & 4 & 28 \\ 7 & 13 & -9 & -10 \\ 0 & -11 & 13 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & \end{array} \end{array}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ - базис U; $\dim U = 3$

2) Дополним базис до пр-ва $\mathbb{R}^5$

В базисе 3 вектора $\Rightarrow$ нужно добавить ещё 2;

По усл-ю „W не представимо в виде лин. оболочки одних лишь векторов станд. базиса пр-ва $\mathbb{R}^5$" $\Rightarrow$ в кач-ве b_1 и b_2 возьмём лин. комбинации векторов станд. базиса $b_1 = (1\ 1\ 1\ 1\ 0)$ и $b_2 = (1\ 1\ 1\ 1\ 1)$

Проверим, что система v_1, v_2, v_3, b_1, b_2 ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} -1 & -14 & -11 & 1 & 1 \\ -8 & -9 & 13 & 1 & 1 \\ -13 & -2 & 4 & 1 & 1 \\ 7 & 13 & -9 & 1 & 1 \\ 0 & -11 & 13 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ: } \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\mathrm{rk} = 5 = \dim \mathbb{R}^5$

$\Downarrow$

$\{v_1, v_2, v_3, b_1, b_2\}$ ЛНЗ

$\downarrow$

базис пр-ва $\mathbb{R}^5$

// $v_1 = (-1, -8, -13, 7, 0)$; $v_2 = (-14, -9, -2, 13, -11)$; $v_3 = (-11, 13, 4, -9, 13)$;
$b_1 = (1, 1, 1, 1, 0)$; $b_2 = (1, 1, 1, 1, 1)$ //

Итак, векторы v_1, v_2, v_3, b_1, b_2 ЛНЗ $\Rightarrow U \cap W = \{0\}$; $\langle v_1, v_2, v_3, b_1, b_2 \rangle = \mathbb{R}^5$

Значит, $\mathbb{R}^5 = U \oplus W$; Ответ: $(1, 1, 1, 1, 0)$; $(1, 1, 1, 1, 1)$.

№5.

$U = \langle v_1, v_2 \rangle;\ W = \langle v_3, v_4 \rangle$

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 & -9 \\ -14 & 6 \end{pmatrix};\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 & -15 \\ -10 & -3 \end{pmatrix};\ v_3 = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 15 \end{pmatrix};\ v_4 = \begin{pmatrix} 12 & 3 \\ -10 & 15 \end{pmatrix}$$

а) $Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) = U \oplus W \Leftrightarrow \begin{cases} U \cap W = \{0\} \\ \dim(U) + \dim(W) = \dim(Mat_{2\times2}(\mathbb{R})) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} U + W = \{0\} \\ U + W = Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \end{cases}$

Рассмотрим стандартный базис $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ и выразим через него v_1, v_2, v_3 и v_4

$$// e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix};\ e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} //$$

$$\begin{cases} v_1 = -2e_1 - 9e_2 - 14e_3 + 6e_4 \\ v_2 = -e_1 - 15e_2 - 10e_3 - 3e_4 \\ v_3 = 12e_1 - 12e_2 - 12e_3 + 15e_4 \\ v_4 = 12e_1 + 3e_2 - 10e_3 + 15e_4 \end{cases} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ -9 \\ -14 \\ 6 \end{pmatrix};\ v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -15 \\ -10 \\ -3 \end{pmatrix};\ v_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ -12 \\ -12 \\ 15 \end{pmatrix};\ v_4 = \begin{pmatrix} 12 \\ 3 \\ -10 \\ 15 \end{pmatrix}$$

1) $\dim U$

$$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -9 & -15 \\ -14 & -10 \\ 6 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{СВ}: \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 0 & -21 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 2 \Rightarrow \dim U = 2$

кол-во ненулевых строк в СВ матрицы

2) $\dim W$

$$\begin{pmatrix} 12 & 12 \\ -12 & 3 \\ -12 & -10 \\ 15 & 15 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{СВ}: \begin{pmatrix} 12 & 12 \\ 0 & 15 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$rk = 2 \Rightarrow \dim W = 2$

3) $\dim(U + W)$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} -2 & -1 & 12 & 12 \\ -9 & -15 & -12 & 3 \\ -14 & -10 & -12 & -10 \\ 6 & -3 & 15 & 15 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \text{СВ}: \begin{pmatrix} -2 & -1 & 12 & 12 \\ 0 & -\frac{21}{2} & -66 & -51 \\ 0 & 0 & -540 & -556 \\ 0 & 0 & 0 & -56 \end{pmatrix}$$

$rk = 4 \Rightarrow \dim(U + W) = 4$

$$\underbrace{\dim(U)}_{2} + \underbrace{\dim(W)}_{2} = \underbrace{\dim(U + W)}_{4} + \underbrace{\dim(U \cap W)}_{0} \Rightarrow \dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \cap W = \{0\}$$

$\Downarrow$

U, W – ЛНЗ

4) $\dim(Mat_{2\times2}(\mathbb{R}))=4$ // т.к. базис $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})=\mathcal{E}$ содержит в себе 4 вектора //

Имеем: $\underbrace{\dim(U)}_{2}+\underbrace{\dim(W)}_{2}=\underbrace{\dim Mat_{2\times2}(\mathbb{R})}_{4} \Rightarrow \dim(U+W)=\dim(Mat_{2\times2}(\mathbb{R}))$ и

$U+W=Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$.

Итак, имеем: $\begin{cases} U\cap W=\{0\} \\ U+W=Mat_{2\times2}\mathbb{R}\end{cases} \Rightarrow Mat_{2\times2}\mathbb{R}=U\oplus W$; ЧТД.

б) Проекция $v=\begin{pmatrix}25 & -15\\ -18 & 21\end{pmatrix}$ на подпр-во W вдоль подпр-ва U.

Запишем вектора $v_1,\dots,v_4$ в столбцы и приведём матрицу к УСВ с помощью эл. преобр.

// $v=u+w$; $w=\mu_1w_1+\mu_2w_2$; с помощью м. Гаусса найдём реш. СЛУ $[U\ W]\cdot\begin{bmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \mu_1\\ \mu_2\end{bmatrix}=v$ //
$u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & -1 & 12 & 12 & 25\\ -9 & -15 & -12 & 3 & -15\\ -14 & -10 & -12 & -10 & -18\\ 6 & -3 & 15 & 15 & 21\end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1\end{array}\right) \\ \lambda_1\ \lambda_2\ \mu_1\ \mu_2\quad\ \end{array} \quad \begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=1\\ \mu_1=1\\ \mu_2=1\end{cases}$$

Итак, $w=w_1+w_2=\begin{pmatrix}12\\-12\\-12\\15\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}12\\3\\-10\\15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-9\\-22\\30\end{pmatrix}$ – проекция v на подпр-во W вдоль U.