N1. вариант 21

$$A=\begin{pmatrix}3 & -5 & 5\\ -3 & 3 & -1\end{pmatrix} \quad B=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 1\\ -4 & 7 & 6\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}-6 & -4\\ -5 & -2\end{pmatrix} \quad D=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

$$tr(A^TA)\,BB^TD \overset{①}{+} tr((BA^T+6AB^T)D+D(-1AB^T+4BA^T))(B+A)(B^T-A^T) \overset{②}{+} C^2+2CD+D^2$$

- $tr(A^TA)=tr(AA^T)$

$$A\cdot A^T=\begin{pmatrix}3 & -5 & 5\\ -3 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3\\ -5 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}59 & -29\\ -29 & 19\end{pmatrix}$$

$$tr(A\cdot A^T)=59+19=78$$

- $BB^TD=(B\cdot B^T)\cdot D$

$$B\cdot B^T=\begin{pmatrix}-5 & 7 & 1\\ -4 & 7 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & -4\\ 7 & 7\\ 1 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}75 & 75\\ 75 & 101\end{pmatrix}$$

$$(B\cdot B^T)\cdot D=\begin{pmatrix}75 & 75\\ 75 & 101\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}450 & 225\\ 476 & 277\end{pmatrix}$$

- $tr(A^TA)\,BB^TD$

$$78\cdot\begin{pmatrix}450 & 225\\ 476 & 277\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}35100 & 17550\\ 37128 & 21606\end{pmatrix}$$

- $(BA^T+6AB^T)\cdot D+D(-1AB^T+4BA^T)=(BA^T+6AB^T)\cdot D-D(AB^T-4BA^T)=$

$=BA^TD+6AB^TD-DAB^T+4DBA^T$

- $tr(BA^TD+6AB^TD-DAB^T+4DBA^T)=tr(BA^TD)+tr(6AB^TD)-tr(DAB^T)+$
$+tr(4DBA^T)=tr(DBA^T)+4tr(DBA^T)+6tr(AB^TD)-tr(AB^TD)=5tr(DBA^T)+$
$+5\,tr(AB^TD)$

$$D\cdot B=\begin{pmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-5 & 7 & 1\\ -4 & 7 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-29 & 42 & 11\\ -13 & 21 & 13\end{pmatrix}$$

$$D\cdot B\cdot A^T=\begin{pmatrix}-29 & 42 & 11\\ -13 & 21 & 13\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3\\ -5 & 3\\ 5 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-242 & 202\\ -79 & 89\end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^T = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -5 & -4 \\ 7 & 7 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -17 \\ 35 & 27 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^T \cdot D = \begin{pmatrix} -45 & -17 \\ 35 & 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -242 & -79 \\ 202 & 89 \end{pmatrix}$$

$tr(DBA^T) = -242 + 89 = -153; \; 5 \cdot tr(DBA^T) = -765$

$tr(AB^TD) = -242 + 89 = -153; \; 5 \cdot tr(AB^TD) = -765$

$5tr(DBA^T) + 5tr(AB^TD) = -765 - 765 = -1530$

- $(B+A) \cdot (B^T - A^T) = (B+A) \cdot (B-A)^T$

$$B + A = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -7 & 10 & 5 \end{pmatrix}$$

$$B - A = \begin{pmatrix} -5 & 7 & 1 \\ -4 & 7 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -5 & 5 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 12 & -4 \\ -1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$(B+A)(B-A)^T = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 6 \\ -7 & 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ 12 & 4 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 52 \\ 156 & 82 \end{pmatrix}$$

- $-1530 \cdot (B+A) \cdot (B-A)^T = -1530 \cdot \begin{pmatrix} 16 & 52 \\ 156 & 82 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -24480 & -79560 \\ -238680 & -125460 \end{pmatrix}$

- $C^2 + 2CD + D^2$

$$C^2 = \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 56 & 32 \\ 40 & 24 \end{pmatrix}$$

$$D^2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$$

$$2 \cdot C \cdot D = 2 \cdot \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ -5 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -34 & -14 \\ -27 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -68 & -28 \\ -54 & -18 \end{pmatrix}$$

$$C^2 + 2CD + D^2 = \begin{pmatrix} 56 & 32 \\ 40 & 24 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -68 & -28 \\ -54 & -18 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 26 & 7 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ -7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$1: \begin{pmatrix} 35100 & 17550 \\ 37128 & 21606 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24480 & -79560 \\ -238680 & -125460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10620 & -62010 \\ -201552 & -103854 \end{pmatrix}$$

② : $\begin{pmatrix} 10620 & -62010 \\ -201552 & -103854 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 14 & 11 \\ -7 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10634 & -61999 \\ -201559 & -103843 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 10634 & -61999 \\ -201559 & -103843 \end{pmatrix}$

№2.

$$A+B = \begin{pmatrix} -52 & -60 & 38 & -18 \\ 56 & -28 & 42 & -26 \\ 58 & -6 & -56 & 32 \\ 0 & -14 & -60 & 10 \end{pmatrix}$$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$ $A^T = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ b & e & f & g \\ c & f & h & i \\ d & g & i & j \end{pmatrix}$ $A = A^T \Rightarrow$ матрица A симметрическая

$B = \begin{pmatrix} 0 & k & l & m \\ -k & 0 & p & q \\ -l & -p & 0 & r \\ -m & -q & -r & 0 \end{pmatrix}$ $B^T = \begin{pmatrix} 0 & -k & -l & -m \\ k & 0 & -p & -q \\ l & p & 0 & -r \\ m & q & r & 0 \end{pmatrix}$ $B^T = -B \Rightarrow$ матрица B кососимметрическая

$$C = A + B \Rightarrow \begin{cases} a+0=-52 \\ k+b=-60 \ (1) \\ l+c=38 \ (2) \\ m+d=-18 \ (3) \\ b-k=56 \ (1) \\ e+0=-28 \\ f+p=42 \ (4) \\ g+q=-26 \ (5) \\ c-l=58 \ (2) \\ f-p=-6 \ (4) \\ h+0=-56 \\ i+r=32 \ (6) \\ d-m=0 \ (3) \\ g-q=-14 \ (5) \\ i-r=-60 \ (6) \\ j+0=10 \end{cases}$$

$\boxed{\begin{matrix} a=-52 \\ e=-28 \\ h=-56 \\ j=10 \end{matrix}}$

(1): $k+b-b+k=-60-56$; $2k=-116 \Rightarrow \boxed{k=-58;\ b=-2}$

(2): $l+c-c+l=38-58$; $2l=-20 \Rightarrow \boxed{l=-10;\ c=48}$

(3): $m+d-d+m=-18-0$; $2m=-18 \Rightarrow \boxed{m=-9;\ d=-9}$

(4): $f+p-f+p=42+6$; $2p=48 \Rightarrow \boxed{p=24;\ f=18}$

(5): $g+q-g+q=-26+14$; $2q=-12 \Rightarrow \boxed{q=-6;\ g=-20}$

(6): $i+r-i+r=32+60$; $2r=92 \Rightarrow \boxed{r=46;\ i=-14}$

Итак,

$$A = \begin{pmatrix} -52 & -2 & 48 & -9 \\ -2 & -28 & 18 & -20 \\ 48 & 18 & -56 & -14 \\ -9 & -20 & -14 & 10 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 0 & -58 & -10 & -9 \\ 58 & 0 & 24 & -6 \\ 10 & -24 & 0 & 46 \\ 9 & 6 & -46 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}-52 & -2 & 48 & -9\\ -2 & -28 & 18 & -20\\ 48 & 18 & -56 & -14\\ -9 & -20 & -14 & 10\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & -58 & -10 & -9\\ 58 & 0 & 24 & -6\\ 10 & -24 & 0 & 46\\ 9 & 6 & -46 & 0\end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix}-52\cdot 0-2\cdot 58+48\cdot 10-9\cdot 9 & -52\cdot(-58)-2\cdot 0+48(-24)-9\cdot 6 & -52\cdot(-10)-2\cdot 24+48\cdot 0-9\cdot(-46) & -52\cdot(-9)-2\cdot(-6)+48\cdot 46-9\cdot 0\\ -2\cdot 0-28\cdot 58+18\cdot 10-20\cdot 9 & -2\cdot(-58)-28\cdot 0+18(-24)-20\cdot 6 & -2\cdot(-10)-28\cdot 24+18\cdot 0-20\cdot(-46) & -2\cdot(-9)-28\cdot(-6)+18\cdot 46-14\cdot 0\\ 48\cdot 0+18\cdot 58-56\cdot 10-14\cdot 9 & 48\cdot(-58)+18\cdot 0-56\cdot(-24)-14\cdot 6 & 48\cdot(-10)+18\cdot 24-56\cdot 0-14\cdot(-46) & 48\cdot(-9)+18\cdot(-6)-56\cdot 46-14\cdot 0\\ -9\cdot 0-20\cdot 58-14\cdot 10+10\cdot 9 & -9\cdot(-58)-20\cdot 0-14(-24)+10\cdot 6 & -9\cdot(-10)-20\cdot 24-14\cdot 0+10\cdot(-46) & -9\cdot(-9)-20\cdot(-6)-14\cdot 46+10\cdot 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}283 & 1810 & 886 & 2688\\ -1624 & -436 & 268 & 1014\\ 358 & -1524 & 596 & -3116\\ -1210 & 918 & -850 & -443\end{pmatrix}\leftarrow \text{Ответ.}$$

N 3.

$$C=\begin{pmatrix}1 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\quad J=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\quad D=\begin{pmatrix}1 & 4 & -20\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Заметим, что $C\cdot D=E$: $\begin{pmatrix}1 & -4 & -4\\ 0 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 4 & -20\\ 0 & 1 & -6\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1-4\cdot 0-4\cdot 0 & 1\cdot 4-4\cdot 1-4\cdot 0 & 1\cdot(-20)-4\cdot(-6)-4\cdot 1\\ 0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot 0 & 0\cdot 4+1\cdot 1+0\cdot 0 & 0\cdot(-20)+1\cdot(-6)+6\cdot 1\\ 0\cdot 1+0\cdot 0+1\cdot 0 & 0\cdot 4+0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot(-20)+0\cdot(-6)+1\cdot 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Значит, матрицы C и D обратные, т.е. $C^{-1}=D$; $D^{-1}=C$

$S=E+A+\ldots+A^{2021}$; умножим обе части на A: $SA=A+A^2+\ldots+A^{2021}+A^{2022}$

Тогда $SA-S=A+A^2+\ldots+A^{2021}+A^{2022}-E-A-\ldots-A^{2021}=A^{2022}-E$

$$\boxed{S(A-E)=A^{2022}-E}$$

$$A^{2022}=\underbrace{A\cdot A\cdot\ldots\cdot A}_{2022\text{ раза}}=CJ\underbrace{D\cdot C}_{E}J\underbrace{D\cdot}_{}\ldots\underbrace{\cdot C}_{}J\underbrace{D\cdot C}_{}JD=C\cdot J^{2022}\cdot D$$

E, т.к. $D=C^{-1}$, а $C^{-1}\cdot C=E$

Заметим, что $J^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} & (-1)^n\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot n \\ 0 & (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}$

Докажем это по индукции.

База $n=1$ $\quad J^1 = \begin{pmatrix} (-1)^1 & 1\cdot(-1)^2 & (-1)^1\cdot(1-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot 1 \\ 0 & (-1)^1 & 1\cdot(-1)^{1+1} \\ 0 & 0 & (-1)^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

верно

Шаг $\quad J^{n+1} = \underset{\text{по предп-ю инд-ии}}{J^n}\cdot J = \begin{pmatrix} (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} & (-1)^n\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot n \\ 0 & (-1)^n & n\cdot(-1)^{n+1} \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^n\cdot(-1) & \underline{(-1)^n\cdot 1 + n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)} & \underline{n\cdot(-1)^{n+1}\cdot 1 + (-1)^n\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(-1)} \\ 0 & (-1)^n\cdot(-1) & \underline{(-1)^n\cdot 1 + n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1)} \\ 0 & 0 & (-1)^n\cdot(-1) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (-1)^{n+1} & \underline{(n+1)\cdot(-1)^{n+2}} & \underline{(-1)^{n+1}\cdot n\cdot\frac{1}{2}\cdot(n+1)} \\ 0 & (-1)^{n+1} & \underline{(n+1)\cdot(-1)^{n+2}} \\ 0 & 0 & (-1)^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$(-1)^n\cdot 1 + n\cdot(-1)^{n+1}\cdot(-1) = (-1)^n + n\cdot(-1)^{n+2} = \frac{(-1)^{n+2}}{\underbrace{(-1)^2}_{=1}} + n\cdot(-1)^{n+2} = (-1)^{n+2} + n\cdot(-1)^{n+2} =$$

$$= (-1)^{n+2}(1+n)$$

$$n\cdot(-1)^{n+1}\cdot 1 + (-1)^n\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot n\cdot(-1) = (-1)^{n+1}\cdot n + (-1)^{n+1}\cdot(n-1)\cdot\frac{1}{2}\cdot n =$$

$$= (-1)^{n+1}\cdot n\left(1^{\cdot 2} + \frac{n-1}{2}\right) = (-1)^{n+1}\cdot n\left(\frac{2+n-1}{2}\right) = (-1)^{n+1}\cdot n\cdot\frac{1}{2}\cdot(n+1)$$

ЧТД.

Тогда $J^{2022} = \begin{pmatrix} (-1)^{2022} & 2022\cdot(-1)^{2023} & (-1)^{2022}\cdot 2021\cdot\frac{1}{2}\cdot 2022 \\ 0 & (-1)^{2022} & 2022\cdot(-1)^{2023} \\ 0 & 0 & (-1)^{2022} \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2022 & 2043231 \\ 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2022} = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2022 & 2043231 \\ 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & -2026 & 2051315 \\ 0 & 1 & -2016 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2022 & 2063451 \\ 0 & 1 & -2022 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{2022} - E = \begin{pmatrix} 0 & -2022 & 2063451 \\ 0 & 0 & -2022 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 4 & -20 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$= \begin{pmatrix} -1 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; $A - E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -10 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Найдём $(A-E)^{-1}$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 1 & -10 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}\cdot(-1)\\ \cdot(-1)\\ \cdot(-1)\end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 10 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)\begin{matrix}-5(3)\\ \\ \\ \end{matrix} \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) +(3) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) +(2) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} & \frac{19}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right) \cdot \frac{1}{2} \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{8} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$(A-E)^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$S \cdot \underbrace{(A-E) \cdot (A-E)^{-1}}_{= E} = (A^{2022} - E) \cdot (A-E)^{-1}$$

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -2022 & 2063451 \\ 0 & 0 & -2022 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{19}{8} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1011 & -1031220 \\ 0 & 0 & 1011 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leftarrow$$ Ответ.

№4.

$$S = \begin{pmatrix} 12 & 30 & -24 \\ -8 & -20 & 16 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix}$$ Докажем, что $S = uv^T \; (u, v \in \mathbb{R}^3)$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \cdot 2 & 6 \cdot 5 & 6 \cdot (-4) \\ -4 \cdot 2 & -4 \cdot 5 & -4 \cdot (-4) \\ -1 \cdot 2 & -1 \cdot 5 & -1 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 30 & -24 \\ -8 & -20 & 16 \\ -2 & -5 & 4 \end{pmatrix} = S$$

$$(2\ \ 5\ \ -4)\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\-1\end{pmatrix} = 2\cdot 6+5\cdot(-4)-4\cdot(-1) = -4$$

$$S^{10} = \begin{pmatrix}6\\-4\\-1\end{pmatrix}\cdot\underbrace{(2\ \ 5\ \ -4)\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\-1\end{pmatrix}}_{\overset{\shortparallel}{-4}}\cdot\underbrace{(2\,5\,-4)\cdot}_{-4}\ \ldots\ \underbrace{\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\-1\end{pmatrix}}_{-4}\cdot(2\ \ 5\ \ -4) =$$

$$= (-4)^9\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\-1\end{pmatrix}\cdot(2\ \ 5\ \ -4) = (-4)^9\cdot\begin{pmatrix}12 & 30 & -24\\-8 & -20 & 16\\-2 & -5 & 4\end{pmatrix}$$

$$tr(S^{10}) = tr((-4)^9\cdot S) = (-4)^9\cdot tr(S) = (-4)^9\cdot(-4) = (-4)^{10} = 1048576$$

$$tr(S) = 12-20+4 = -4$$

Ответ: 1048576.

N5.

а) $\begin{cases}-x_1+8x_2-14x_3+13x_4=2\\-4x_1-4x_2+16x_3-20x_4=-7\\9x_1-5x_2-8x_3+17x_4=-2\\-8x_1+4x_2+8x_3-16x_4=9\end{cases}$ $\left(\begin{array}{cccc|c}-1 & 8 & -14 & 13 & 2\\-4 & -4 & 16 & -20 & -7\\9 & -5 & -8 & 17 & -2\\-8 & 4 & 8 & -16 & 9\end{array}\right)\begin{array}{l}+2\cdot(2)\\-4\cdot(1)\\+9\cdot(1)\\-2\cdot(2)\end{array} \to$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}-9 & 0 & 18 & -27 & -12\\0 & -36 & 72 & -72 & -15\\0 & 67 & -134 & 134 & 16\\0 & 12 & -24 & 24 & 23\end{array}\right)\begin{array}{l}:\frac{1}{3}\\ \cdot\frac{1}{3}\\ \\ \\ \end{array} \to \left(\begin{array}{cccc|c}3 & 0 & -6 & 9 & 4\\0 & 12 & -24 & 24 & 5\\0 & 67 & -134 & 134 & 16\\0 & 12 & -24 & 24 & 23\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ -(2)\end{array} \to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}3 & 0 & -6 & 9 & 4\\0 & 12 & -24 & 24 & 5\\0 & 67 & -134 & 134 & 16\\0 & 0 & 0 & 0 & 18\end{array}\right)$$

Ответ: а) СЛУ несовместна; решений нет.

$0 \neq 18 \Rightarrow$ решений нет.

б) $\begin{cases} -x_1+8x_2-14x_3+13x_4=-43 \\ -4x_1-4x_2+16x_3-20x_4=8 \\ 9x_1-5x_2-8x_3+17x_4=52 \\ -8x_1+4x_2+8x_3-16x_4=-44 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 8 & -14 & 13 & -43 \\ -4 & -4 & 16 & -20 & 8 \\ 9 & -5 & -8 & 17 & 52 \\ -8 & 4 & 8 & -16 & -44 \end{array}\right)\begin{array}{l} +2(2) \\ -4(1) \\ +9(1) \\ -2(2) \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -9 & 0 & 18 & -27 & -27 \\ 0 & -36 & 72 & -72 & 180 \\ 0 & 67 & -134 & 134 & -335 \\ 0 & 12 & -24 & 24 & -60 \end{array}\right)\begin{array}{l} :-9 \\ :-36 \\ :67 \\ +\frac{1}{3}\cdot(2) \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -(2) \\ \\ \end{array} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 & -5 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} x_1 = 3-0\cdot x_2+2\cdot x_3-3\cdot x_4 \\ x_2=-5+2\cdot x_3-2\cdot x_4 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1=3+2x_3-3x_4 \\ x_2=-5+2x_3-2x_4 \\ x_3=x_3 \\ x_4=x_4 \end{cases}$$ ← общее решение

Частное решение: $\begin{cases} x_1=2 \\ x_2=-5 \\ x_3=1 \\ x_4=1 \end{cases}$