№1.

$\Pi: 5x-y+3z=-1$; $A=(-11,-18,18)$; $l_1: \begin{cases} x=5t+14 \\ y=-t+6 \\ z=-5t-12 \end{cases}$; $l=?$

1) Рассмотрим пл-ть Π_1 такую, что $\Pi_1 \parallel \Pi$ и $A \in \Pi_1$:

$5x-y+3z+d=0$; $A \in \Pi_1 \Rightarrow$ подставим координаты т. A в ур-е Π_1:

$-55+18+54=-d \Rightarrow d=-17$

2) l пересекает $l_1 \Rightarrow l: \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 14 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$

3) $\exists\ \Pi_1 \nparallel l_1 \Rightarrow \Pi_1 \cap l_1 = p: \begin{cases} 5x-y+3z-17=0 \\ x=5t+14 \\ y=-t+6 \\ z=-5t-12 \end{cases}$ $\begin{cases} 5x-y+3z=17 \\ x-5t=14 \\ y+t=6 \\ z+5t=-12 \end{cases}$

// $p=(x,y,z)$ //

Решим СЛУ:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x & y & z & t \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 3 & 0 & 17 \\ 1 & 0 & 0 & -5 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & -12 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \text{УСВ:} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow p = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -7 \end{pmatrix}$; $\vec{AP} = (20, 25, -25) \Rightarrow l: \underset{A}{\begin{pmatrix} -11 \\ -18 \\ 18 \end{pmatrix}} + \left\langle \begin{pmatrix} 20 \\ 25 \\ -25 \end{pmatrix} \right\rangle$

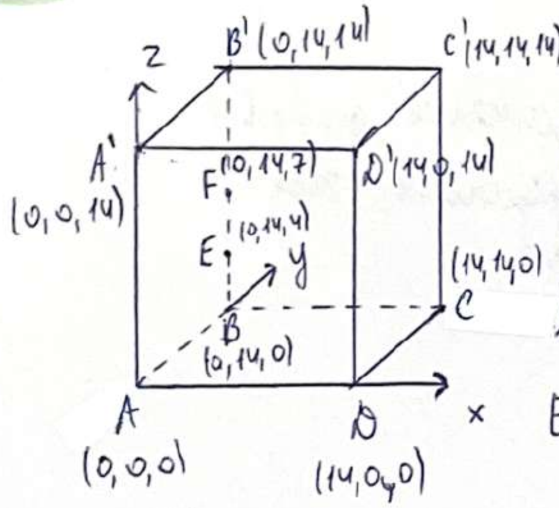
Канонический вид: $\dfrac{x+11}{20} = \dfrac{y+18}{25} = \dfrac{z-18}{-25}$

Ответ: $\dfrac{x+11}{4} = \dfrac{y+18}{5} = \dfrac{-z+18}{5}$

№2.

$a=14$; F - середина BB'; $E \in BB'$: $BE : EB' = 2:5$;

$\angle(AE; D'F) = ?$ $\rho(AE; D'F) = ?$



Введём систему координат, как показано на рисунке, и найдём координаты вершин куба, точек F и E: $F=(0,14,7)$;

$E = (0, 14, \frac{2}{7}\cdot 14) = (0,14,4)$

$$AE = A + \langle \vec{AE} \rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}0\\14\\4\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} + \left\langle \overset{u_1}{\begin{pmatrix}0\\7\\2\end{pmatrix}} \right\rangle;$$

$$D'F = D' + \langle \vec{D'F} \rangle = \begin{pmatrix}14\\0\\14\end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix}-14\\14\\-7\end{pmatrix} \right\rangle = \begin{pmatrix}14\\0\\14\end{pmatrix} + \left\langle \overset{u_2}{\begin{pmatrix}-2\\2\\-1\end{pmatrix}} \right\rangle$$

$$\rho(AE; D'F) = \frac{vol(P(\vec{D'F}, \vec{AE}, \vec{EF}))}{vol(P(\vec{D'F}, \vec{AE}))} = \frac{vol(P(u_1, u_2, \vec{EF}))}{|[u_1, u_2]|} = \frac{42}{3\sqrt{37}} = \frac{14}{\sqrt{37}}.$$

$$\vec{EF} = \overset{u_3}{\begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix}}; \quad vol(P(\vec{D'F}, \vec{AE}, \vec{EF})) = \det\begin{pmatrix}0 & 7 & 2\\ -2 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = 42$$

$$vol(P(\vec{D'F}, \vec{AE})) = \sqrt{121 + 16 + 196} = 3\sqrt{37}$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ 0 & 7 & 2\\ -2 & 2 & -1\end{vmatrix} = -4j + 14k - 11i = \begin{pmatrix}-11\\-4\\14\end{pmatrix}$$

$$\cos(\angle(AE; D'F)) = \left| \frac{(\vec{D'F}, \vec{AE})}{|\vec{D'F}|\cdot|\vec{AE}|} \right| = \frac{(u_1, u_2)}{|u_1|\cdot|u_2|} = \frac{14-2}{\sqrt{53}\cdot 3} = \frac{4}{\sqrt{53}}$$

Ответ: $\rho(AE; D'F) = \frac{14}{\sqrt{37}}$;

$\angle(AE; D'F) = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{53}}\right)$

№3.

а) $\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$; $A = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

Найдём корни характеристического ур-я $\det(A-\lambda E)=0$

$$\begin{vmatrix} 8-\lambda & 4 & 8 \\ -2 & 1-\lambda & -3 \\ -2 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (8-\lambda)(1-\lambda)(-1-\lambda) + 4\cdot(-3)(-2) + 8(-2)(-1) - (-2)(-\lambda+1)\cdot 8 - (-1)\cdot(-3)(-\lambda+8) - (\lambda-1)(-2)\cdot 4 = -\lambda^3+8\lambda^2-20\lambda+16=0$$

$\lambda^3-8\lambda^2+20\lambda-16=0$; $\lambda^3-2\lambda^2-6\lambda^2+12\lambda+8\lambda-16=0$;

$\lambda^2(\lambda-2)-6\lambda(\lambda-2)+8(\lambda-2)=0$; $(\lambda^2-6\lambda+8)(\lambda-2)=0$

$\left[\begin{array}{l} \lambda^2-6\lambda+8=0 \\ \lambda-2=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} (\lambda-2)(\lambda-4)=0 \\ \lambda-2=0 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} \lambda=2 \text{ //кратность 2//} \\ \lambda=4 \text{ //кратность 1//} \end{array}\right.$ > собственные значения лин. оператора φ

Для каждого из найденных λ найдём ФСР ОСЛУ $A-\lambda E=0$

• $\lambda=2$: $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_1 = (-2, 1, 1)$, - базис собственного подпр-ва, отвечающего (//-//) собств. значению $\lambda=2$

• $\lambda=4$: $\begin{pmatrix} 4 & 4 & 8 \\ -2 & -3 & -3 \\ -2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_2 = (-3, 1, 1)$ - //-// $\lambda=4$

Максимальная ЛНЗ система из собств. векторов φ имеет размерность $2 \Rightarrow$ не может быть базисом в $\mathbb{R}^3 \Rightarrow \varphi$ - не диагонализуем

Ответ: $\lambda_1=2$, $\lambda_2=4$ - собств. знач. φ;

$e_1=(-2,1,1)$ - базис собств. (//-//) подпр-ва, отвеч. собств. знач. $\lambda=2$

$e_2=(-3,1,1)$ - //-// $\lambda=4$

Итак, лин. оператор φ - не диагонализуем б) $A = \begin{pmatrix} 15 & 16 & -7 \\ -9 & -10 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Найдём корни характеристического ур-я $\det(A-\lambda E)=0$:

$$\begin{vmatrix} 15-\lambda & 16 & -7 \\ -9 & -10-\lambda & 3 \\ 2 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda+15)(-\lambda-10)(-\lambda)+16\cdot 3\cdot 2+(-7)(-9)\cdot 2-2(-\lambda-10)(-7)-$$

$$-2\cdot 3\cdot(-\lambda+15)-(-\lambda)\cdot(-9)\cdot 16=-\lambda^3+5\lambda^2-2\lambda-8=0;\ -\lambda^3-\lambda^2+6\lambda^2+6\lambda-8\lambda-8=0$$

$$-\lambda^2(\lambda+1)+6\lambda(\lambda+1)-8(\lambda+1)=0;\ (\lambda+1)(\lambda^2-6\lambda+8)=0;$$

$$(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=-1 \\ \lambda=2 \\ \lambda=4 \end{array}\right. \text{— собств. знач. лин. оператора } \varphi$$

Аналогично с п. (а), найдём ФСР для каждого знач. λ.

- $\lambda=-1$: $\begin{pmatrix} 16 & 16 & -7 \\ -9 & -9 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_1=(-1,1,0)$

- $\lambda=2$: $\begin{pmatrix} 13 & 16 & -7 \\ -9 & -12 & 3 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_2=(3,-2,1)$

- $\lambda=4$: $\begin{pmatrix} 11 & 16 & -7 \\ -9 & -14 & 3 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_3=(5,-3,1)$

φ диагонализуем $\Leftrightarrow$ 1) $\chi_\varphi(t)$ разлагается на лин. множители в поле $F[t]$ - выполняется $\| (\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-4) \|$

2) Если $\chi_\varphi(t) - (t-\lambda_1)^{k_1} + \ldots + (t-\lambda_s)^{k_s}$, то $g_{\lambda_i} = a_{\lambda_i}$ - выполняется

Ответ: $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 4$ - собств. знач. φ

$e_1 = (-1, 1, 0)$ - базис собств. подпр-ва, отвеч. собств. знач. $\lambda = -1$

$e_2 = (3, -2, 1)$ - (11-11) $\lambda = 2$

$e_3 = (5, -3, 1)$ - 11-11 $\lambda = 4$

Лин. оператор φ - диагонализуем; $e = (e_1, e_2, e_3)$ - базис, в кот. матрица φ диагональная

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$ - диагональная матрица

№ 4.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -11x_1^2 - 14x_2^2 - 11x_3^2 + 8x_1x_2 + 2x_1x_3 + 8x_2x_3$$

Матрица соотв. Q билинейной формы:

$$B = \begin{pmatrix} -11 & 4 & 1 \\ 4 & -14 & 4 \\ 1 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

Найдём собств. знач. φ из характеристического ур-я $|B - \lambda E| = 0$:

$$\begin{vmatrix} -11-\lambda & 4 & 1 \\ 4 & -14-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & -11-\lambda \end{vmatrix} = (-\lambda-11)(-\lambda-14)(-\lambda-11) + 4\cdot4\cdot1 + 1\cdot4\cdot4 - 1(-\lambda-14)\cdot1 - 4\cdot4\cdot(-\lambda-11) - (-\lambda-11)\cdot4\cdot4 = -\lambda^3 - 36\lambda^2 - 396\lambda - 1296 = 0$$

$-\lambda^3 - 6\lambda^2 - 30\lambda^2 - 180\lambda - 216\lambda - 1296 = 0;\ -\lambda^2(\lambda+6) - 30\lambda(\lambda+6) - 216(\lambda+6) = 0;$

$(\lambda+6)(\lambda^2 + 30\lambda + 216) = 0;\ (\lambda+6)(\lambda+18)(\lambda+12) = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda = -6 \\ \lambda = -18 \\ \lambda = -12 \end{array}\right.$ - собств. знач. φ

Для каждого знач. λ найдём базис собств. подпр-ва φ, отвечающего этому значению:

• $\lambda = -6$: $\begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & 4 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_1 = (1, 1, 1)$; $e_1' = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

• $\lambda = -18$: $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_2 = (1, -2, 1)$; $e_2' = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, 1)$

• $\lambda = -12$: $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow e_3 = (-1, 0, 1)$; $e_3' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$

$e' = (e_1', e_2', e_3')$ - ортонорм. базис (т.к. $e = (e_1, e_2, e_3)$ - ортогон. базис по построению ; $e_i' = \frac{e_i}{|e_i|} \Rightarrow e'$ - ОНБ)

В ОНБ матрица лин. отобр. φ имеет вид $A(\varphi, e') = \begin{pmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & -18 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix}$

e' - ОНБ $\Rightarrow$ в нём матрица соотв. Q симметричной билинейной формы диагональна, т.е. Q в этом базисе принимает канонический вид: $Q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = -6\tilde{x}_1^2 - 18\tilde{x}_2^2 - 12\tilde{x}_3^2$

$(e_1', e_2', e_3') = (e_1, e_2, e_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$

матрица перехода от e к e'

Ответ: • $Q(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) = -6\tilde{x}_1^2 - 18\tilde{x}_2^2 - 12\tilde{x}_3^2$ – канонический вид

• $\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{x}_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_3 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{x}_1 - \frac{2}{\sqrt{6}}\tilde{x}_2 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\tilde{x}_1 + \frac{1}{\sqrt{6}}\tilde{x}_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\tilde{x}_3 \end{cases}$ – выражение старых координат через новые

N5.

$\varphi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A = \begin{pmatrix} -9/11 & -6/11 & 2/11 \\ 6/11 & -7/11 & 6/11 \\ -2/11 & 6/11 & 9/11 \end{pmatrix} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -9 & -6 & 2 \\ 6 & -7 & 6 \\ -2 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Pi_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \boxed{\Pi_\alpha} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \; 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

поворот на α $\quad$ $\hookrightarrow$ 2 случая

Матрица A не симметрична ($A \neq A^T$) $\Rightarrow$ возможно 2 варианта: $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$

Проверим, является ли 1 собственным значением:

$|A - \lambda E| \overset{?}{=} 0 \sim |\tilde{A} - 11E| = 0$

$$\begin{pmatrix} -20 & -6 & 2 \\ 6 & -18 & 6 \\ -2 & 6 & -2 \end{pmatrix} \to \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 \end{pmatrix} \quad rk = 2 < 3 \Rightarrow \det = 0 \text{ и}$$

1 является собств. знач.

$$\Rightarrow A' = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Найдём собств. вектор для $+1$ (ФСР): $f_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$e_3 = \frac{f_3}{|f_3|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{3}{\sqrt{10}}$$

Найдём $e_3^{\perp}$: $0 \cdot x_1 + \frac{1}{3}x_2 + 1 \cdot x_3 = 0 \to (0 \;\; 1 \;\; 3)$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{f_1} x_1 + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}}_{f_2} x_3 \; ; \quad e_1 = \frac{f_1}{|f_1|} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad e_2 = \frac{f_2}{|f_2|} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

e_1, e_2 и e_3 ортогональны $\Rightarrow$ $e = (e_1, e_2, e_3)$ – ОНБ

$$\varphi(e_1) = Ae_1 = \begin{pmatrix} -9/11 \\ 6/11 \\ -2/11 \end{pmatrix}$$

$$\cos\alpha = (\varphi(e_1), e_1) = -\frac{9}{11}\ ; \ \sin\alpha = (\varphi(e_1), e_2) = -\frac{3}{\sqrt{10}} \cdot \frac{6}{11} - \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot \frac{2}{11} = -\frac{20}{11\sqrt{10}}$$

Ответ: $e = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1/\sqrt{10} \\ 3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \right)$ – искомый ОНБ

$$A'(\varphi, e) = \begin{pmatrix} -9/11 & 20/11\sqrt{10} & 0 \\ -20/11\sqrt{10} & -9/11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ось, определяемая φ: $\mathbb{R}e_3$; угол поворота, определяемый φ: $\alpha = \arccos\left(-\frac{9}{11}\right) + \pi$