ИДЗ-6. Вариант 21.

№1.

$V = \mathbb{R}[x]_{\le 2}$; $\varphi: V \to \mathbb{R}^2$; $\mathbb{e} = (\overset{e_1}{-4-x-2x^2}, \overset{e_2}{-1-2x-x^2}, \overset{e_3}{-1+4x+x^2})$;

$\mathbb{f} = ((3,-2), (-1,1))$; $\mathbb{e}$ - базис V; $\mathbb{f}$ - базис $\mathbb{R}^2$

$A(\varphi, \mathbb{e}, \mathbb{f}) = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}$; $\varphi(\underbrace{1+7x+3x^2}_{= v}) = ?$

Найдём координаты вектора v в базисе $\mathbb{e}$:

$v = ae_1 + be_2 + ce_3$

$1+7x+3x^2 = a(-4-x-2x^2) + b(-1-2x-x^2) + c(-1+4x+x^2)$

$3x^2+7x+1 = x^2(-2a-b+c) + x(-a-2b+4c) + 1\cdot(-4a-b-c)$

$$\begin{cases} -2a-b+c=3 \ (2) \\ -a-2b+4c=7 \ (1) \\ -4a-b-c=1 \ (3) \end{cases}$$ Решим СЛУ: $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 4 & 7 \\ -2 & -1 & 1 & 3 \\ -4 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix}\cdot(-1)\\ -2(1)\\ -4(1)\end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & -11 \\ 0 & 7 & -17 & -27 \end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ -2(2)\end{matrix} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & -7 \\ 0 & 3 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)\begin{matrix}-2(3)\\ -3(3)\\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right)\begin{matrix}-(2)\\ \cdot\frac{1}{2}\\ \end{matrix} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)\begin{matrix}\\ +3(3)\\ \end{matrix} \to$

$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$. Итак, $\begin{cases} a=-1 \\ b=1 \\ c=2 \end{cases} \Rightarrow v = -1\cdot e_1 + 1\cdot e_2 + 2\cdot e_3$

$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ в базисе $\mathbb{e} \Rightarrow w = \varphi(v) = A\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -1 \\ -5 & -6 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \ominus$

//т.к. в j-м столбце A стоят координаты $\varphi(e_j)$ в базисе $\mathbb{f}$//

$\ominus \begin{pmatrix} -7+5-2 \\ 5-6+8 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -4 \\ 7 \end{pmatrix}}_{\text{координаты } \varphi(v) \text{ в базисе } \mathbb{f}} = -4f_1 + 7f_2 = -4\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} + 7\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 7 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} -19 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} -19 \\ 15 \end{pmatrix}$.

№2.

а) Д-ть: $\exists !\ \varphi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$

Докажем, что векторы $\{a_1, \dots, a_5\}$ ЛНЗ:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & -5 & -2 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & -4 \\ -4 & 3 & 0 & 4 & 2 \\ 2 & -2 & -3 & -2 & -3 \\ -4 & 4 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$rk = 5 \Rightarrow$ векторы $\{a_1, \dots, a_5\}$ ЛНЗ

Значит, $\{a_1, \dots, a_5\}$ образуют базис $\mathbb{R}^5$

Согласно предложению с лекции, всякое лин. отобр. $\varphi: V \to W$ однозначно определяется векторами $\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)$

// $(e_1, \dots, e_n)$ - базис в V //

$\Rightarrow \varphi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ однозначно определено и единственно.

Теперь найдём $A(\varphi, a, f)$: // a - базис $\mathbb{R}^5$; f - станд. базис $\mathbb{R}^3$ //
$f = (f_1\ f_2\ f_3)$

$]\ \varphi(a_1) = b_1;\ \varphi(a_2) = b_2;\ \varphi(a_3) = b_3;\ \varphi(a_4) = b_4;\ \varphi(a_5) = b_5$ // b_i берём из условия //

$\varphi(a_1) = f \cdot a_1;\ \varphi(a_2) = f \cdot a_2;\ \varphi(a_3) = f \cdot a_3;\ \varphi(a_4) = f \cdot a_4;\ \varphi(a_5) = f \cdot a_5$

По определению матрицы лин. отобр. $A(\varphi, a, f)$ имеет:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 64 & -53 & 10 & -27 & 39 \\ 51 & -47 & -5 & -8 & 31 \\ \underbrace{-105}_{\text{коорд. } \varphi(a_1) \text{ в базисе } f} & 86 & -19 & 47 & -64 \end{pmatrix} \end{array}$$

б) Базис $\operatorname{Ker} \varphi$; $\operatorname{Im} \varphi$

$\operatorname{Ker} \varphi = \{x \mid Ax = 0, x \in \mathbb{R}^5\} \Rightarrow$ решим ОСЛУ $Ax = 0$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 64 & -53 & 10 & -27 & 39 \\ 51 & -47 & -5 & -8 & 31 \\ -105 & 86 & -19 & 47 & -64 \end{pmatrix} \\ \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \end{array} \Rightarrow \text{УСВ:} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 147/61 & -169/61 & 38/61 \\ 0 & 1 & 166/61 & -173/61 & 1/61 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -147/61 \\ -166/61 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} x_3 + \underbrace{\begin{pmatrix} 169/61 \\ 173/61 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} x_4 + \underbrace{\begin{pmatrix} -38/61 \\ -1/61 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3} x_5 \quad \text{– ФСР}$$

$\{v_1, v_2, v_3\}$ – координаты базиса $\operatorname{Ker}\varphi$ в базисе a

$$v_1' = a \cdot v_1 = \begin{pmatrix} -164/61 \\ -17/61 \\ 90/61 \\ -145/61 \\ 46/61 \end{pmatrix}; \quad v_2' = a \cdot v_2 = \begin{pmatrix} -309/61 \\ -112/61 \\ 87/61 \\ -130/61 \\ 77/61 \end{pmatrix}; \quad v_3' = a \cdot v_3 = \begin{pmatrix} -159/61 \\ -243/61 \\ 271/61 \\ -257/61 \\ -35/61 \end{pmatrix}$$

$$a \downarrow \underbrace{(\boxed{a_1}\,\boxed{a_2}\,\dots\,\boxed{a_5})}_{5\times5}$$

Итак, $\{v_1', v_2', v_3'\}$ – базис $\operatorname{Ker}\varphi$.

(столбцы с гл. неизв.)

Базис $\operatorname{Im}\varphi$ – это базис столбцов матр. $A \Rightarrow b_1, b_2$ – базис $\operatorname{Im}\varphi$

$$b_1 = \begin{pmatrix} 64 \\ 51 \\ -105 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} -53 \\ -47 \\ 86 \end{pmatrix} \text{ – базис } \operatorname{Im}\varphi.$$

№3.

$\varphi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$; $A(\varphi, e, e) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & -2 & 3 \\ -15 & -4 & -6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -8 \end{pmatrix}$ $\quad A' = ?$

$\psi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^5$; $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$ и $\operatorname{Im}\psi = \operatorname{Ker}\varphi$

$\operatorname{Ker}\varphi = \{x \mid Ax = 0, x \in \mathbb{R}^5\}$

Решим ОСЛУ $Ax = 0$: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & -3 & 2 \\ 5 & 5 & -3 & 1 & -1 \\ 3 & -2 & 5 & -2 & 3 \\ -15 & -4 & -6 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -4 & 9 & -8 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -71 & 56 \\ 0 & 1 & 0 & 127 & -100 \\ 0 & 0 & 1 & 93 & -73 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

ФСР: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\overset{v_1}{\begin{pmatrix} 71 \\ -127 \\ -93 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}} x_4 + \overset{v_2}{\begin{pmatrix} -56 \\ 100 \\ 73 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} x_5}_{\text{ФСР}} \Rightarrow (v_1, v_2)$ - базис в $\operatorname{Ker}\varphi = \operatorname{Im}\psi$

$\operatorname{Im}\varphi = \langle a_1, \dots, a_5 \rangle \Rightarrow$ базис $\operatorname{Im}\varphi$ - это базис столбцов матр. A

x_1, x_2 и x_3 - гл. неизв. $\Rightarrow$ $a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 3 \\ -15 \\ 0 \end{pmatrix}$, $a_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $a_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 5 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix}$ - базис в $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$

Дополним базис $\operatorname{Ker}\psi$ до базиса всего пр-ва $\mathbb{R}^5$:

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 5 & 5 & -3 \\ 3 & -2 & 5 \\ -15 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & -4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ УСВ: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ возьмём векторы $\underset{f_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$ и $\underset{f_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

Базис $\mathbb{R}^5 = \{\underbrace{a_1, a_2, a_3}_{\text{базис } \operatorname{Ker}\psi}, f_1, f_2\} \Rightarrow \psi(f_1), \psi(f_2)$ - базис в $\operatorname{Im}\psi$ (*)

// предложение с лекции //

$\{a_1, a_2, a_3\}$ - базис $\operatorname{Ker}\psi \Rightarrow \psi(a_1) = \psi(a_2) = \psi(a_3) = 0$

// т.е. $A' \cdot a_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и т.д. //

$$\underbrace{A' \cdot f_1}_{v_1 \text{ из-за } (*)} = \begin{pmatrix} 71 \\ -127 \\ -93 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad A' \cdot f_2 = v_2 = \begin{pmatrix} -56 \\ 100 \\ 73 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Итак, имеем: $A' \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & f_1 & f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 71 & -56 \\ 0 & 0 & 0 & -127 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & -93 & 73 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Транспонируем и решим СЛУ:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 5 & 3 & -15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & -2 & -4 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 5 & -6 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 71 & -127 & -93 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -56 & 100 & 73 & 0 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ: } \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -183 & 327 & 239 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 198 & -354 & -259 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 86 & -154 & -113 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 71 & -127 & -93 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -56 & 100 & 73 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\text{Итак, } A' = \begin{pmatrix} -183 & 327 & 239 & -1 & 2 \\ 198 & -354 & -259 & 2 & -1 \\ 86 & -154 & -113 & 2 & 1 \\ 71 & -127 & -93 & 1 & 0 \\ -56 & 100 & 73 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

№4.

$\varphi: \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$; $e = (e_1, e_2, e_3, e_4, e_5)$; $f = (f_1, f_2, f_3, f_4)$

$$A(\varphi, e, f) = \begin{pmatrix} -27 & 15 & -46 & 51 & -8 \\ 26 & 24 & -26 & 30 & -32 \\ 15 & -10 & 32 & -34 & 6 \\ -30 & 10 & -39 & 43 & -2 \end{pmatrix}$$

Найти базисы $\mathbb{R}^5$ и $\mathbb{R}^4$, в кот. матр. отобр. φ имеет диаг. вид D с 1 и 0 на диагонали.

$A = C_1 D C_2^{-1}$

Пусть e', f' – искомые базисы.

Найдём базис $\operatorname{Ker}\varphi$; $\operatorname{Ker}\varphi = \{x \mid Ax = 0;\ x \in \mathbb{R}^5\}$

Решим ОСЛУ $Ax=0$:

$$\begin{pmatrix} -27 & 15 & -46 & 51 & -8 \\ 26 & 24 & -26 & 30 & -32 \\ 15 & -10 & 32 & -34 & 6 \\ -30 & 10 & -39 & 43 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{12}{41} & -\frac{10}{41} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{35}{41} & -\frac{46}{41} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{41} & -\frac{2}{41} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{12}{41} \\ -\frac{35}{41} \\ \frac{27}{41} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} x_4 + \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{10}{41} \\ \frac{46}{41} \\ \frac{2}{41} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_2} x_5 \Rightarrow \overbrace{(v_1, v_2)}^{\text{ФСР}} \text{ – базис в } \operatorname{Ker}\varphi$$

$\varphi(e v_1) = \varphi(e v_2) = 0$

Дополним v_1 и v_2 до базиса всего пр-ва $\mathbb{R}^5$ векторами из базиса e: $\mathbb{R}^5 = \langle e_1, e_2, e_3, \frac{12}{41}e_1 - \frac{35}{41}e_2 + \frac{27}{41}e_3 + e_4, \frac{10}{41}e_1 + \frac{46}{41}e_2 + \frac{2}{41}e_3 + e_5 \rangle$

Базис $\operatorname{Im}\varphi$ – это базис столбцов матр. $A \Rightarrow e_1, e_2$ и e_3 – это базис $\operatorname{Im}\varphi$

$$A \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{коорд. } e_1 \text{ в базисе } e} = \begin{pmatrix} -27 \\ 26 \\ 15 \\ -30 \end{pmatrix} \text{ – коорд. } \varphi(e_1) \text{ в базисе } f \Rightarrow \varphi(e_1) = -27f_1 + 26f_2 + 15f_3 - 30f_4$$

// т.к. в j-м столбце A стоят координаты $\varphi(e_j)$ //

$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}15\\24\\-10\\10\end{pmatrix}$$ - коорд. $\varphi(e_2)$ в базисе $f \Rightarrow \varphi(e_2)=15f_1+24f_2-10f_3+10f_4$

коорд. e_2 в базисе e

$$A\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-46\\-26\\32\\-39\end{pmatrix}$$ - коорд. $\varphi(e_3)$ в базисе $f \Rightarrow \varphi(e_3)=-46f_1-26f_2+32f_3-39f_4$

коорд. e_3 в базисе f

Дополним базис $\mathrm{Im}\,\varphi$ до базиса всего подпр-ва векторами из f:

$$\begin{array}{ccc}\left(\begin{matrix}-27 & 15 & -46\\ 26 & 24 & -26\\ 15 & -10 & 32\\ -30 & 10 & -39\end{matrix}\right) \\ \varphi(e_1)\ \ \varphi(e_2)\ \ \varphi(e_3)\end{array} \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$ $\Rightarrow$ возьмём вектор f_4

Пусть $e'=e\cdot C_2$; $C_2=\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{12}{41}&\frac{10}{41}\\0&1&0&-\frac{35}{41}&\frac{46}{41}\\0&0&1&\frac{27}{41}&\frac{2}{41}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$

$f'=f\cdot C_1$; $C_1=\begin{pmatrix}-27&15&-46&0\\26&24&-26&0\\15&-10&32&0\\-30&10&-39&1\end{pmatrix}$

$A(\varphi, e', f')=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

Ответ: $A=C_1DC_2^{-1}=\begin{pmatrix}-27&15&-46&0\\26&24&-26&0\\15&-10&32&0\\-30&10&-39&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{12}{41}&\frac{10}{41}\\0&1&0&-\frac{35}{41}&\frac{46}{41}\\0&0&1&\frac{27}{41}&\frac{2}{41}\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}^{-1}$

N5.

$V = \mathbb{R}[x]_{\le 2}$; $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ – базис пр-ва V^*, двойств. к базису $-1+x+x^2$, $2-3x+x^2$, $-1+7x-18x^2$ пр-ва V; (f_1, f_2, f_3) – базис пр-ва V, для кот. двойственным явл. базис (ρ_1, ρ_2, ρ_3) пр-ва V^*, где $\rho_1(f) = f(1)$; $\rho_2(f) = f'(-1)$; $\rho_3(f) = \frac{3}{2}\int_0^2 f(x)\,dx$; $\alpha \in V^*$ – лин. ф-я, имеющая в базисе $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ координаты $(2, -4, 1)$; мн-член $h \in V$ имеет в базисе (f_1, f_2, f_3) координаты $(2, -4, 1)$. $\alpha(h) = ?$

$\exists\, f = ax^2 + bx + c$. Тогда $\rho_1(f) = f(1) = a+b+c$; $\rho_2(f) = f'(-1) = -2a+b$

$$\rho_3(f) = \frac{3}{2}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{3}{2}\left(\frac{a}{3}\cdot 8 + \frac{b}{2}\cdot 4 + c\cdot 2\right) = 4a + 3b + 3c$$

ρ – базис пр-ва V^*, двойств. для базиса f пр-ва $V \Rightarrow$ по определению двойств. базиса $\rho_i(f_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i=j \\ 0, i \neq j \end{cases}$

• $j=1 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1(f_1) = 1 \\ \rho_2(f_1) = 0 \\ \rho_3(f_1) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_1 + b_1 + c_1 = 1 \\ -2a_1 + b_1 = 0 \\ 4a_1 + 3b_1 + 3c_1 = 0 \end{cases}$ $f_1 = a_1x^2 + b_1x + c_1$

Решим СЛУ: $\begin{array}{c} \begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & \end{matrix} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow$ УСВ: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 10 \end{array}\right)$ $\begin{cases} a_1 = -3 \\ b_1 = -6 \\ c_1 = 10 \end{cases}$

• $j=2 \Rightarrow \begin{cases} \rho_1(f_2) = 0 \\ \rho_2(f_2) = 1 \\ \rho_3(f_2) = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} a_2 + b_2 + c_2 = 0 \\ -2a_2 + b_2 = 1 \\ 4a_2 + 3b_2 + 3c_2 = 0 \end{cases}$ $f_2 = a_2x^2 + b_2x + c_2$

Решим СЛУ: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow$ УСВ: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$ $\begin{cases} a_2 = 0 \\ b_2 = 0 \\ c_2 = -1 \end{cases}$

$\cdot\, i=3 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_1(f_3)=0 \\ \varphi_2(f_3)=0 \\ \varphi_3(f_3)=1 \end{cases} \quad \begin{cases} a_3+b_3+c_3=0 \\ -2a_3+b_3=0 \\ 4a_3+3b_3+3c_3=1 \end{cases} \quad f_3=a_3x^2+b_3x+c_3$

Решим СЛУ: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$ УСВ: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{cases} a_3=1 \\ b_3=2 \\ c_3=-3 \end{cases}$

Итак, $\begin{cases} f_1=-3x^2-6x+10 \\ f_2=x-1 \\ f_3=x^2+2x-3 \end{cases}$

$h=2f_1-4f_2+f_3$ по условию $\Rightarrow h=-6x^2-12x+20-4x+4+x^2+2x-3=-5x^2-14x+21$

$\exists\; e_1=-1+x+x^2;\; e_2=2-3x+x^2;\; e_3=-1+7x-18x^2$

Воспользуемся аналог. алгоритмом для поиска

$\varepsilon_i(e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases} 1, i=j \\ 0, i\neq j \end{cases}$

$\begin{cases} \varepsilon_1(e_1)=1 \\ \varepsilon_2(e_1)=0 \\ \varepsilon_3(e_1)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_1(e_2)=0 \\ \varepsilon_2(e_2)=1 \\ \varepsilon_3(e_2)=0 \end{cases} \quad \begin{cases} \varepsilon_1(e_3)=0 \\ \varepsilon_2(e_3)=0 \\ \varepsilon_3(e_3)=1 \end{cases}$

Найдём координаты вектора h в базисе e:

$\begin{array}{c} x^2 \\ x \\ 1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -18 & -5 \\ 1 & -3 & 7 & -14 \\ -1 & 2 & -1 & 21 \end{array}\right) \Rightarrow$ УСВ: $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -442 \\ 0 & 1 & 0 & -229 \\ 0 & 0 & 1 & -37 \end{array}\right)$

$h=-442e_1-229e_2-37e_3$. По условию $\alpha=2\varepsilon_1-4\varepsilon_2+\varepsilon_3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \alpha(h)=2\varepsilon_1(h)-4\varepsilon_2(h)+\varepsilon_3(h)=2\varepsilon_1(-442e_1-229e_2-37e_3)-4\varepsilon_2(-442e_1-229e_2-37e_3)+$
$+\varepsilon_3(-442e_1-229e_2-37e_3)\overset{\text{линейность}}{=}-442\cdot 2\,\varepsilon_1(e_1)^{1}-229\cdot 2\,\varepsilon_1(e_2)^{0}-37\cdot 2\,\varepsilon_1(e_3)^{0}+442\cdot 4\,\varepsilon_2(e_1)^{0}+229\cdot 4\,\varepsilon_2(e_2)^{1}+$
$+37\,\varepsilon_2(e_3)^{0}-442\,\varepsilon_3(e_1)^{0}-229\,\varepsilon_3(e_2)^{0}-37\,\varepsilon_3(e_3)^{1}=-884+916-37=-5.$

Ответ: -5.