Вариант 21.

№1.

$$A=\begin{pmatrix}-1-13i & -1-4i\\ 6+24i & 4+7i\end{pmatrix}\in M_{2\times 2}(\mathbb{C}) \qquad A-xE - \text{необратима}$$

$x\in\mathbb{C} \Rightarrow$ пусть $x=a+bi$

Тогда $xE=(a+bi)\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+bi&0\\0&a+bi\end{pmatrix}$

$$A-xE=\begin{pmatrix}-1-13i-a-bi & -1-4i\\ 6+24i & 4+7i-a-bi\end{pmatrix}=B \text{ // для удобства //}$$

$$|B|=\begin{vmatrix}-1-13i-a-bi & -1-4i\\ 6+24i & 4+7i-a-bi\end{vmatrix}=(-1-13i-a-bi)(4+7i-a-bi)-(6+24i)(-1-4i)=$$

// опред. матрицы 2-го порядка //

$$=-4-7i+a+bi-52i+91+13ai-13b-4a-7ai+a^2+abi-4bi+7b+bia-b^2+6+24i+$$

$$+24i-96=a^2-b^2-3a+6ai-6b-3bi+2abi-11i-3=0$$

$$a^2+(6i-3+2bi)a+(-b^2-6b-3bi-11i-3)=0$$

Решим квадратное ур-е отн-но a, используя дискриминант:

$$D=(6i-3+2bi)(6i-3+2bi)-4(-b^2-6b-3bi-11i-3)=$$

$$=-36-18i-\cancel{12b}-18i+9-\cancel{6bi}-\cancel{12b}-\cancel{6bi}-\cancel{4b^2}+\cancel{4b^2}+\cancel{24b}+\cancel{12bi}+44i+12=$$

$$=8i-15$$

$$\sqrt{D}=\sqrt{8i-15}=\sqrt{1^2+2\cdot1\cdot4i+\underbrace{(4i)^2}_{=-16}}=\sqrt{(1+4i)^2}=1+4i$$

Итак, $a_1=\dfrac{3-6i-2bi+1+4i}{2}=\dfrac{-2bi-2i+4}{2}=-bi-i+2$

$$a_2=\frac{3-6i-2bi-1-4i}{2}=\frac{-2bi-10i+2}{2}=-bi-5i+1$$

Итак, $(a+bi+i-2)(a+bi+5i-1)=0$; $(a-2+(b+1)i)(a-1+(b-5)i)=0$

Значит, возможно 2 случая: 1) $a-2+(b+1)i=0 \Rightarrow \begin{cases}a=2\\ b=-1\end{cases}$

2) $a-1+(b-5)i=0 \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=5 \end{cases}$

Ответ: $x_1 = 2-i$; $x_2 = 1+5i$

№2.

$\sqrt[4]{-50-50\sqrt{3}i}$

Пусть $z=-50-50\sqrt{3}i$; $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi) \Rightarrow \sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{|z|}\cdot\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{4}\right)$, $k\in\mathbb{Z}$

$|z|=\sqrt{2500+2500\cdot 3}=100$; $\cos\varphi=-\frac{50}{100}=-\frac{1}{2}$; $\sin\varphi=\frac{-50\sqrt{3}}{100}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \varphi=\frac{4\pi}{3}$

Корень 4-ой степени $\Rightarrow k\in[0;3]$

• $k=0$: $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{100}\cdot\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+0}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+0}{4}\right)=\sqrt[4]{100}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=$
$=\sqrt[4]{100}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

• $k=1$: $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{100}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+2\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{100}\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)=$
$=\sqrt[4]{100}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)$

• $k=2$: $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{100}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+4\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{100}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)=$
$=\sqrt[4]{100}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

• $k=3$: $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{100}\left(\cos\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{4\pi}{3}+6\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{100}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)=$
$=\sqrt[4]{100}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)$.

Ответ: $\left\{\sqrt{10}\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right); \sqrt{10}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right); \sqrt{10}\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right); \sqrt{10}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)\right\}$.

№3.

$$v_1=\begin{pmatrix}3\\2\\-5\\-1\\5\end{pmatrix}\quad v_2=\begin{pmatrix}9\\13\\-14\\-29\\20\end{pmatrix}\quad v_3=\begin{pmatrix}-60\\-172/5\\504/5\\a\\-97\end{pmatrix}$$

Запишем векторы в строки матрицы: $\begin{pmatrix}3 & 2 & -5 & -1 & 5\\ 9 & 13 & -14 & -29 & 20\\ -60 & -\frac{172}{5} & \frac{504}{5} & a & -97\end{pmatrix}=A$

Теперь с помощью м. Гаусса найдём ранг матрицы A:

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & -1 & 5 \\ 9 & 13 & -14 & -29 & 20 \\ -60 & -\frac{172}{5} & \frac{504}{5} & a & -97 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3(1) \\ +20(1) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & -26 & 5 \\ 0 & \frac{28}{5} & \frac{4}{5} & a-20 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -\frac{4}{5}(2) \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 1 & -26 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & a+\frac{4}{5} & -1 \end{pmatrix}$$

// приводим A к СВ //

В ступ. виде A осталось 3 строки => ранг = 3.

Итак, из этого следует, что v_1, v_2 и v_3 линейно независимы.

Теперь дополним векторы до базиса всего пр-ва R^5:

– при $a = -\frac{4}{5}$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ -26 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Ответ

– при $a \neq -\frac{4}{5}$:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 1 \\ -26 \\ 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ a+\frac{4}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

№4.

а) Выпишем векторы в столбцы матрицы A и приведём A к УСВ:

$$\begin{pmatrix} 38 & 16 & -18 & -4 \\ 31 & 19 & -16 & -2 \\ 21 & 9 & -8 & 2 \\ 33 & 19 & -18 & -5 \\ 29 & 10 & -13 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{28} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{19}{28} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{59}{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Ведущие эл-ты стоят в 1, 2 и 3 столбцах $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ базисом подпространства будут векторы v_1, v_2 и v_3:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 38 \\ 31 \\ 21 \\ 33 \\ 29 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 16 \\ 19 \\ 9 \\ 19 \\ 10 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} -18 \\ -16 \\ -8 \\ -18 \\ -13 \end{pmatrix}$$

б) Если u_1 или u_2 лежит в U, то его линейное выражение через v_1, v_2, v_3 будет являться решением СЛУ. Проверим u_1 и u_2:

$$-\left(\begin{array}{ccc|c} 38 & 16 & -18 & 5 \\ 31 & 19 & -16 & 4 \\ 21 & 9 & -8 & 2 \\ 33 & 19 & -18 & 5 \\ 29 & 10 & -13 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\uparrow u_1$

СЛУ несовместна $\Rightarrow u_1 \notin U$

$$-\left(\begin{array}{ccc|c} 38 & 16 & -18 & -4 \\ 31 & 19 & -16 & -5 \\ 21 & 9 & -8 & -7 \\ 33 & 19 & -18 & -2 \\ 29 & 10 & -13 & -3 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ}: \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{25}{28} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{23}{28} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{67}{28} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

СЛУ совместна и имеет единств. реш.

$\Downarrow$

$u_1 \in U$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{25}{28} \\ -\frac{23}{28} \\ -\frac{67}{28} \end{pmatrix} \quad u_1 = -\frac{25}{28} v_1 - \frac{23}{28} v_2 - \frac{67}{28} v_3$$

Ответ: а) v_1, v_2, v_3

б) $u_2 = -\frac{25}{28} v_1 - \frac{23}{28} v_2 - \frac{67}{28} v_3$; $u_1 \notin U$.

№5.

Построим расш. матрицу ОСЛУ:

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccccc|c} -20 & 17 & -4 & 7 & 38 & 0 \\ -18 & 14 & -1 & 5 & 3 & 0 \\ -9 & 6 & 0 & 2 & 6 & 0 \\ -21 & 19 & -5 & 8 & 39 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \text{УСВ}: \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -14 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -19 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

Ведущие эл-ты стоят в 1, 2 и 3 столбцах $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ x_1, x_2, x_3 - главные переменные; x_4, x_5 - свободные

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10x_5 \\ -\frac{1}{3}x_4 + 14x_5 \\ \frac{1}{3}x_4 + 19x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

Зафиксируем сначала значения $x_4 = 1$, $x_5 = 0$; затем - $x_4 = 0$, $x_5 = 1$

Тогда
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{случай 1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 10 \\ 14 \\ 19 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{случай 2}}$$
— базис пр-ва.

Размерность = 2
(2 вектора).

Ответ.