№1.

$$A=\begin{pmatrix}-1 & -1 & -1 & 0\\ -1 & 4 & 4 & 1\\ 5 & -4 & -4 & -2\\ 3 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\qquad AX=E$$

$\uparrow$ обр. матрица; $X=A^{-1}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc}-1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 4 & 4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 5 & -4 & -4 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 3 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\cdot(-1)\\ -(1)\\ +5(1)\\ +3(1)\end{array}\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 5 & 5 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & -9 & -9 & -2 & 5 & 0 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ +(4)\\ -3(4)\\ \\ \end{array}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3\\ 0 & -3 & -4 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ +(2)\end{array}\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -3 & -1 & 5 & 1 & 0 & 2\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\ +(3)\end{array}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{array}\right)\begin{array}{l}+(4)\\ +2(4)\\ \\ \cdot(-1)\end{array}\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 1 & -4 & 0 & 1 & -3\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -3(2)\\ \\ \end{array}\to$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16 & -9 & -5 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)\begin{array}{l}-(2)\\ \\ \\ \\ \end{array}\to\left(\begin{array}{cccc|cccc}1 & 0 & 0 & 0 & -4 & -2 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & -16 & -9 & -5 & 0\end{array}\right)\to$$

$$\to\left(\underbrace{\begin{array}{cccc}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}}_{\text{УСВ}}\;\middle|\;\underbrace{\begin{array}{cccc}-4 & -2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & -1\\ -16 & -9 & -5 & 0\end{array}}_{X=A^{-1}}\right)$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-4 & -2 & -1 & 0\\ -1 & -1 & -1 & 1\\ 4 & 3 & 2 & -1\\ -16 & -9 & -5 & 0\end{pmatrix}$

№2.

1) $\underset{\tau}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 2 & 1 & 6 & 8 & 5 & 3 & 7 \end{pmatrix}}} = \underset{l_1=7}{(1\ 4\ 6\ 5\ 8\ 7\ 3)}\underset{l_2=1}{(2)}$

$НОК(7;1) = ord\ \tau = 7$

$\tau^{19} = (1\ 4\ 6\ 5\ 8\ 7\ 3)^5\ (2)^5 = (1\ 7\ 5\ 4\ 3\ 8\ 6)\ (2)$

(т.к. $19 \equiv 5 \pmod 7$)

$\tau^{19} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 7 & 1 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & 5 & 3 & 8 & 2 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} = \rho$

3) $\tau^{19} \cdot \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 2 & 8 & 3 & 4 & 1 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 7 & 5 & 1 & 4 & 8 & 2 & 6 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \underbrace{\overset{l_1=5}{(1\ 2\ 7\ 4\ 5)}\overset{l_2=2}{(3\ 6)}\overset{l_3=1}{(8)}}_{\shortparallel\ \sigma}$

4) $\sigma^{157} = \underset{(т.к.\ 157 \equiv 2 \pmod 5)}{(1\ 2\ 7\ 4\ 5)^2}\ \underset{(т.к.\ 157 \equiv 1 \pmod 2)}{(3\ 6)\ (8)} = (1\ 7\ 5\ 2\ 4)(3\ 6)(8) =$

$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}$

5) $\underset{A}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 6 & 1 & 2 & 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}}} \cdot X = \underset{B}{\underset{\shortparallel}{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 5 & 8 & 2 & 4 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}}}$

$$AX=B \to A^{-1}(AX)=A^{-1}B \to (A^{-1}A)X=A^{-1}B \to id\,X=A^{-1}B \to X=A^{-1}B$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}7&4&6&1&2&3&5&8\\1&2&3&4&5&6&7&8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&6&2&7&3&1&8\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\4&5&6&2&7&3&1&8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\1&5&8&2&4&7&3&6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4&5&6&7&8\\2&4&7&5&3&8&1&6\end{pmatrix}=$$

$$=(1\ 2\ 4\ 5\ 3\ 7)(6\ 8) \leftarrow \text{Ответ.}$$

№3.

$$\begin{pmatrix}1&2&\dots&416&417&\dots&535&536&\dots&595\\ \underbrace{180\ \ 181\ \ \dots\ \ 595}_{\mathrm{I}}&&&&\underbrace{61\ \dots\ 179}_{\mathrm{II}}&&&\underbrace{1\ \dots\ 60}_{\mathrm{III}}&&\end{pmatrix}=6$$

В 1 строке все числа стоят по возрастанию $\Rightarrow$ кол-во инверсий $=\boxed{0}$

Посчитаем кол-во инверсий для эл-тов каждого из 3 блоков 2-ой строки:

I: все эл-ты стоят по возрастанию $\Rightarrow$ можно посчитать, сколько эл-тов в II и III блоках меньше первого эл-та I блока и умножить это число на кол-во эл-тов в I блоке

$$\begin{cases}61<180\\ \vdots\\ 179<180\\ 1<180\\ \vdots\\ 60<180\end{cases} \Rightarrow \text{все эл-ты II и III блоков меньше 1 эл-та I блока}$$

$$\underbrace{179-61+1}_{\mathrm{II}}+\underbrace{60-1+1}_{\mathrm{III}}=119+60=179$$

$$179\cdot(\underbrace{595-180+1}_{\mathrm{I}})=179\cdot416=\boxed{74464}$$

$$\mathrm{II}:\begin{cases}1<61\\ \vdots\\ 60<61\end{cases} \Rightarrow \text{все эл-ты III блока меньше 1 эл-та II блока} \Rightarrow \text{меньше всех эл-тов II блока (они стоят по возрастанию)}$$

$$(\underbrace{179-61+1}_{\mathrm{II}})\cdot(\underbrace{60-1+1}_{\mathrm{III}})=119\cdot60=\boxed{7140}$$

III: все эл-ты стоят по возрастанию => кол-во инверсий = $\boxed{0}$

Итак, $sgn(6) = (-1)^{0+74464+7140+0} = (-1)^{81604\text{-чётное}} = 1$

$sgn(6) = 1 \Rightarrow$ перестановка чётная.

Ответ: чётная.

№4.

$$\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 & 7 \\ x & 1 & x & 6 & 0 & x \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & x & 7 & 5 & 1 & x \end{vmatrix} \overset{\text{по 5 строке}}{=} 8\cdot A_{56} = 8\cdot(-1)^{11}\cdot M_{56} = -8\cdot\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 5 & 0 \\ x & 1 & x & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & x & 7 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -8\cdot(5\cdot A_{23} + 5\cdot A_{24}) = -8\left(5\cdot(-1)^5\cdot M_{23} + 5\cdot(-1)^6\cdot M_{24}\right) = -8\left(-5\cdot\begin{vmatrix} 0 & x & 5 & 0 \\ x & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & x & 5 & 1 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. +5\cdot\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & x & 7 & 1 \end{vmatrix}\right) = 40\cdot\begin{vmatrix} 0 & x & 5 & 6 \\ x & 1 & 6 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - 40\cdot\begin{vmatrix} 0 & x & 0 & 0 \\ x & 1 & x & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & x & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 40\cdot 1\cdot A_{44} - 40\cdot x\cdot A_{12} = 40\cdot(-1)^8\cdot\begin{vmatrix} 0 & x & 5 \\ x & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} - 40\cdot x\cdot(-1)^3\cdot\begin{vmatrix} x & x & 0 \\ 4 & 0 & 9 \\ 0 & 7 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 40\cdot(0\cdot1\cdot0 + 4\cdot x\cdot 6 + 5\cdot x\cdot 1 - 5\cdot1\cdot4 - 0\cdot1\cdot6 - 0\cdot x\cdot x) + 40x\cdot(x\cdot0\cdot1 + x\cdot9\cdot0 + 4\cdot7\cdot0 -$$

$$- 0\cdot0\cdot0 - x\cdot7\cdot9 - 4\cdot x\cdot 1) = 40(0 + 24x + 5x - 20) + 40x(0+0+0-63x-4x) =$$

$$= 40(29x - 20) + 40x(-67x) = 1160x - 800 - 2680x^2.$$

Ответ: $-2680x^2 + 1160x - 800$.

N5.

$$\begin{vmatrix} 10 & x & 7 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ x & 4 & 1 & 1 & 9 & 7 & x \\ 7 & 1 & 1 & 4 & 4 & x & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & x & 1 & 10 \\ 3 & 9 & 4 & x & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & x & 1 & 3 & 8 & 7 \\ 7 & x & 3 & 10 & 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} -(1) = \begin{vmatrix} 10 & x & 7 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ x & 4 & 1 & 1 & 9 & 7 & x \\ 7 & 1 & 1 & 4 & 4 & x & 3 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & x & 1 & 10 \\ 3 & 9 & 4 & x & 8 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & x & 1 & 3 & 8 & 7 \\ -3 & 0 & -4 & 6 & 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} =$$

$-(7) \to$ вычитаем 7 столбец из 1

$$= \begin{vmatrix} 3 & x & 7 & 4 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 4 & 1 & 1 & 9 & 7 & x \\ 4 & 1 & 1 & 4 & 4 & x & 3 \\ -6 & 1 & 4 & 9 & x & 1 & 10 \\ -3 & 9 & 4 & x & 8 & 3 & 6 \\ -2 & 7 & x & 1 & 3 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & 6 & 3 & 2 & -4 \end{vmatrix}$$

$\to$ Получили 6 иксов, стоящих в разных строках и столбцах

Рассмотрим позиции, на которых стоят x:

$a_{12}, a_{27}, a_{36}, a_{45}, a_{54}, a_{63}$

Теперь распишем всевозможные перестановки, в которые входят 5 из 6 x:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (1)(2\,7)(3\,6)(4\,5)$; $sgn = (-1)^{1+2+2+2-4} = (-1)^3 = -1$

$a_{11} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_{45} \cdot a_{54} \cdot a_{63} \cdot a_{72} = \boxed{0}$

2) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (1\,2\,7\,3\,6)(4\,5)$; $sgn = (-1)^{5+2-2} = -1$

$a_{12} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_{45} \cdot a_{54} \cdot a_{61} \cdot a_{73} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (-2) \cdot (-4) = 8x^5$

итог: $\boxed{-8x^5}$

3) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 1 & 6 & 5 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$

$a_{21} = 0 \Rightarrow$ всё произведение $= \boxed{0}$

4) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 1 & 5 & 4 & 3 & 6 \end{pmatrix} = (1\,2\,7\,6\,3)(4\,5)$; $sgn = (-1)^{5+2-2} = -1$

$a_{12} \cdot a_{27} \cdot a_{31} \cdot a_{45} \cdot a_{54} \cdot a_{63} \cdot a_{76} = x \cdot x \cdot 4 \cdot x \cdot x \cdot x \cdot 2 = 8x^5$

итог: $\boxed{-8x^5}$

5) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 1 & 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (1\,2\,7\,5\,4)(3\,6)$; $sgn = (-1)^{5+2-2} = -1$

$a_{12} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_{41} \cdot a_{54} \cdot a_{63} \cdot a_{75} = x \cdot x \cdot x \cdot (-6) \cdot x \cdot x \cdot 3 = -18x^5$

итог: $18x^5$

6) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 7 & 6 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} = (1\,2\,7\,4\,5)(3\,6)$; $sgn = (-1)^{5+2-2} = -1$

$a_{12} \cdot a_{27} \cdot a_{36} \cdot a_{45} \cdot a_{51} \cdot a_{63} \cdot a_{74} = x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot (-3) \cdot x \cdot 6 = -18x^5$

итог: $\boxed{18x^5}$

Итак, $-8x^5 - 8x^5 + 18x^5 + 18x^5 = 36x^5 - 16x^5 = 20x^5$

Ответ: 20.