Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра ИУ5 «Системы обработки информации и управления»

Курс «Теория автоматического управления»

Отчет по лабораторной работе №1
«Математические модели линейных систем автоматического управления»
Вариант №3

Выполнила:
студентка группы ИУ5-51Б
Бирюкова Е.И.
Подпись и дата:

Проверил:
преподаватель каф. ИУ5
Лукьянов В.В.
Подпись и дата:

Москва, 2024 г.

Цель работы

Ознакомиться с пакетом моделирования MatLAB. Освоить основные приемы моделирования систем автоматического управления.

Вариант полученного задания

Вариант	Порядок модели n	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	$x(0)$	$x^{(1)}(0)$	$x^{(2)}(0)$
3	3	5	4	2	1	7,5	1	-0,4	0,2

Порядок выполнения работы

Дифференциальное уравнение третьего порядка в общем виде:

$$a_3\dddot{x} + a_2\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_0x = by$$

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 7{,}5y$$

Преобразуем его в систему из трех дифференциальных уравнений 1-го порядка:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \ddot{x_1} = \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = \dfrac{by - a_0x_1 - a_1x_2 - a_2x_3}{a_3} \end{cases}$$

Подставим коэффициенты по варианту:

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \ddot{x_1} = \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = \dfrac{7{,}5y - 5x_1 - 4x_2 - 2x_3}{1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x_1} = x_2 \\ \ddot{x_1} = \dot{x_2} = x_3 \\ \dot{x_3} = 7{,}5y - 5x_1 - 4x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Активируем пакет MatLab и наберем скрипт следующего вида (с начальными нулевыми условиями [0 0 0] при y = 1):

Содержание файла ode.m:

```
function [dx] = ode(t,x)
a0 = 5;
a1 = 4;
a2 = 2;
a3 = 1;
```

```
b = 7.5;
y = 1;
dx = zeros(3,1);
dx(1) = x(2);
dx(2) = x(3);
dx(3) = (b*y-a0*x(1)-a1*x(2)-a2*x(3))/a3;
end
```

Содержание файла run.m:

```
[t,x] = ode45('ode',[0 10],[0 0 0]);
y = ones(size(t));
plot(t,x(:,1),'b-',t,x(:,2),'g-',t,x(:,3),'y-',t,y,'LineWidth',3);
legend('x_1(t)','x_2(t)','x_3(t)');
grid on;
xlabel('t, c');
ylabel('x_i(t)');
title('Реакция системы на входной сигнал y=1 при начальных условиях [0 0 0]');
```

Осуществим моделирование системы с начальными нулевыми условиями [0 0 0] при y = 1:

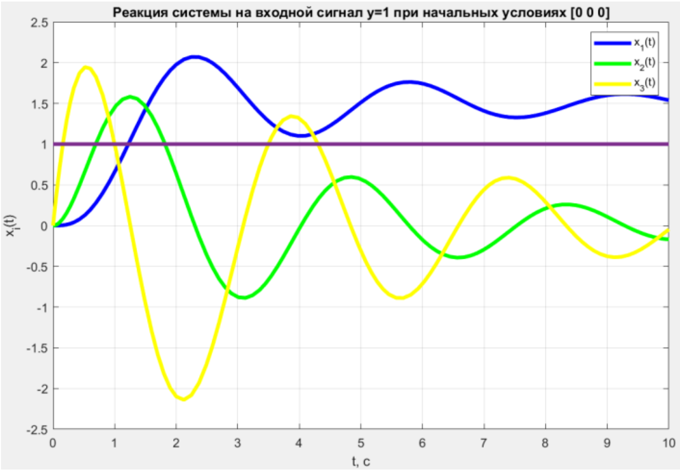

Рисунок 1 - Реакция системы на входной сигнал y=1 при начальных условиях [0 0 0]

Осуществим моделирование системы с начальными нулевыми условиями [0 0 0] при y = sin(t):

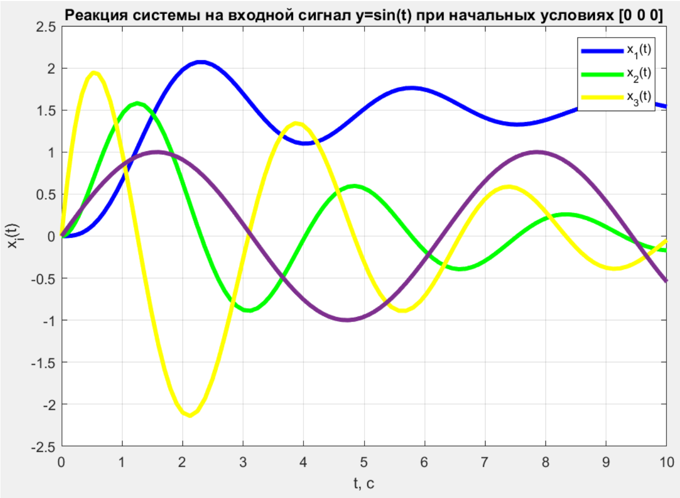

Рисунок 2- Реакция системы на входной сигнал y=sin(t) при начальных условиях [0 0 0]

Осуществим моделирование системы с начальными условиями [1 -0.4 0.2] при y = 1:

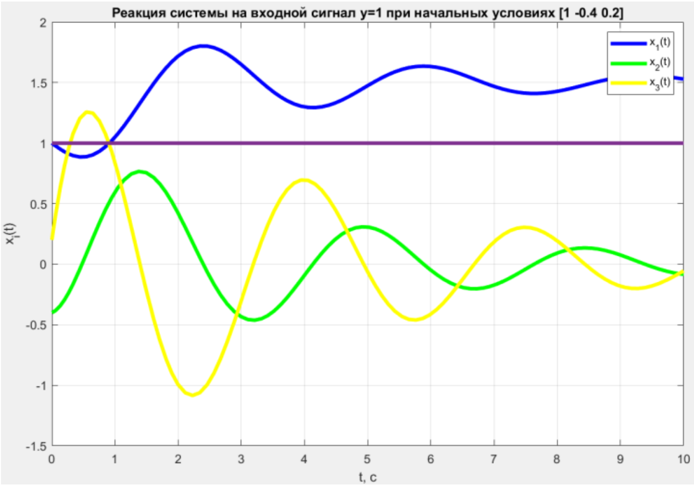

Рисунок 3 - Реакция системы на входной сигнал y=1 при начальных условиях [1 -0.4 0.2]

Осуществим моделирование системы с начальными условиями [1 -0.4 0.2] при y = sin(t):

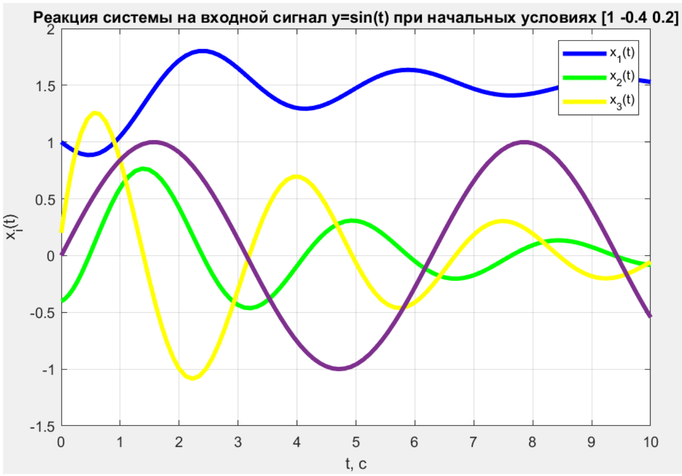

Рисунок 4 - Реакция системы на входной сигнал y=sin(t) при начальных условиях [1 -0.4 0.2]

Вывод

В ходе лабораторной работы мы изучили основы моделирования линейных систем автоматического управления с помощью пакета MATLAB. Мы освоили методы численного интегрирования дифференциальных уравнений (Эйлера и Рунге-Кутты) и создали модель системы в соответствии с заданным вариантом.

Проведенные эксперименты с различными входными сигналами и начальными условиями позволили нам проанализировать динамическое поведение системы и получить визуализированные результаты.

Полученные знания и навыки помогут нам в будущем анализировать, оптимизировать и разрабатывать алгоритмы управления для различных технических систем.

Вопросы для самоконтроля

1. ***Какую техническую систему можно считать линейной?***

Линейная техническая система – система, которая используется для описания линейных процессов. Поведение данной системы описывается линейными дифференциальными уравнениями.
Свойства:
- принцип суперпозиции (реакция системы на сумму воздействий равна сумме реакций на каждое воздействие в отдельности)
- все переменные и их производные (любого порядка) линейного дифференциального уравнения, описывающего поведение системы, входят в него только в первой степени, не перемножаются друг на друга и не входят в другие функции.

2. ***Что значит найти численное решение дифференциального уравнения?***

Известные методы точного интегрирования дифференциальных уравнений позволяют найти решение в виде аналитической функции, однако эти методы применимы для очень ограниченного класса уравнений. Большинство уравнений, встречающихся при решении практических задач нельзя проинтегрировать с помощью этих методов.

В таких случаях используются численные методы решения, которые представляют решение дифференциального уравнения не в виде аналитической функции, а в виде таблиц значений искомой функции в зависимости от значения переменной.

3. ***Найти передаточную функцию системы, динамика которой описывается дифференциальным уравнением $6y^{(3)}+4y^{(2)}+y^{(1)}+3y=2u^{(1)}+5u$. Представить это***

уравнение в пространстве состояний и в матричном виде. Реализовать те же операции для дифференциального уравнения, сформированного по вариантам.

Передаточная функция W(p) - отношение преобразования Лапласа выходной величины к преобразованию входной величины при нулевых начальных данных.

$$W(p) = \frac{y(p)}{g(t)} = \frac{L(y(t))}{L(g(t))}$$

Уравнение из условия

Передаточная функции:

$$6\dddot{y} + 4\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 2\dot{u} + 5u$$

$$6p^3y + 4p^2y + py + 3y = 2pu + 5u$$

$$(6p^3 + 4p^2 + p + 3)y = (2p + 5)u$$

$$\frac{(6p^3 + 4p^2 + p + 3)y}{(2p + 5)u} = 1$$

$$W(p) = \frac{y(p)}{u(p)} = \frac{2p + 5}{6p^3 + 4p^2 + p + 3}$$

В пространстве состояний:

$$6\dddot{y} + 4\ddot{y} + \dot{y} + 3y = 2\dot{u} + 5u$$

$$6\dot{y_3} + 4y_3 + y_2 + 3y_1 = 2u_2 + 5u_1$$

$$\dot{y_3} = \frac{2u_2 + 5u_1 - 4y_3 - y_2 - 3y_1}{6}$$

В матричном виде:

$$\dot{y_3} = \frac{2u_2 + 5u_1 - 4y_3 - y_2 - 3y_1}{6}$$

$$\begin{cases} \dot{y_1} = y_2 \\ \dot{y_2} = y_3 \\ \dot{y_3} = \dfrac{2u_2 + 5u_1 - 4y_3 - y_2 - 3y_1}{6} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{y_1} \\ \dot{y_2} \\ \dot{y_3} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{3}{6} & -\frac{1}{6} & -\frac{4}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{5}{6} & \frac{2}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ -\frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{6}y_2 - \frac{2}{3}y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{5}{6}u_1 + \frac{1}{3}u_2 \end{pmatrix}$$

Уравнение из варианта

Передаточная функция:

$$\dddot{x} + 2\ddot{x} + 4\dot{x} + 5x = 7{,}5y$$

$$p^3x + 2p^2x + 4px + 5x = 7{,}5y$$

$$(p^3 + 2p^2 + 4p + 5)x = 7{,}5y$$

$$\frac{(p^3+2p^2+4p+5)x}{7{,}5y}=1$$

$$W(p)=\frac{x(p)}{y(p)}=\frac{7{,}5}{p^3+2p^2+4p+5}$$

В пространстве состояний:

$$\dddot{x}+2\ddot{x}+4\dot{x}+5x=7{,}5y$$

$$\dot{x_3}+2x_3+4x_2+5x_1=7{,}5y_1$$

$$\dot{x_3}=7{,}5y_1-2x_3-4x_2-5x_1$$

В матричном виде:

$$\dot{x_3}=7{,}5y_1-2x_3-4x_2-5x_1$$

$$\begin{cases}\dot{x_1}=x_2\\ \dot{x_2}=x_3\\ \dot{x_3}=7{,}5y_1-2x_3-4x_2-5x_1\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}\dot{x_1}\\ \dot{x_2}\\ \dot{x_3}\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\-2&-4&-5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\7{,}5\end{pmatrix}(y_1)=\begin{pmatrix}x_2\\x_3\\-2x_1-4x_2-5x_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\7{,}5y_1\end{pmatrix}$$

Система уравнений может быть представлена в компактной векторно-матричной форме:

$$\dot{x}=Ax+Bu$$
$$y=Cx+Du$$

A – nxn – мерная матрица постоянных коэффициентов системы;

B – nx1 – мерная матрица постоянных коэффициентов входа;

C – 1xn – мерная матрица постоянных коэффициентов выхода;

X – n-мерный вектор состояния

4. ***Метод интегрирования реализуется функцией ode45, что означает 4 и 5, каким образом гарантируется заданная точность решения?***

При использовании функции ode45 интегрирование осуществляется методом Рунге-Кутта 4-го порядка, а величина шага контролируется методом 5-го порядка.

Ode45 использует метод Рунге-Кутта 4-го и 5-го порядка. Это значит, что он вычисляет приближённое значение решения с помощью нескольких промежуточных точек, основанных на разных оценках производной в точке. Разница между этими двумя оценками используется для оценки погрешности.

Алгоритм отслеживает погрешность при каждом шаге интегрирования. Он сравнивает результаты, полученные с помощью двух различных формул (одной 4-го, и одной 5-го порядка). Разница в результатах даёт оценку локальной погрешности. Если оценка локальной погрешности меньше заданной (или, как чаще, автоматически вычисленной) погрешности, то шаг интегрирования увеличивается. Если погрешность больше, то шаг уменьшается.

В результате, в местах с быстрыми изменениями решения шаг уменьшается, а в местах с медленными изменениями - увеличивается. Это обеспечивает требуемую точность при одновременном сохранении эффективности.

Итеративный процесс решения:

Выбор шага: На каждом шаге интегрирования ode45 выбирает шаг. Это не фиксированный шаг, а величина, динамически подстраиваемая по ходу решения.

Метод Рунге-Кутты: Для вычисления значения решения на следующем шаге ode45 использует метод Рунге-Кутты. Этот метод использует несколько приближённых значений производной в точке (стадии) для получения более точного прогноза.

Оценка погрешности: Алгоритм сравнивает результаты, полученные с использованием формул 4-го и 5-го порядков Рунге-Кутты. Разница между этими оценками – локальной погрешности.

Коррекция шага: Если локальная погрешность выше допустимого значения, ode45 уменьшает текущий шаг h и повторно рассчитывает следующее приближение. Если локальная погрешность меньше допустимого значения, шаг увеличивается. Таким образом, алгоритм оптимизирует шаг для достижения необходимой точности с минимальным количеством шагов.

Запись результатов: Вычисленные значения решения записываются в массив или структуру данных. Время, значения переменных и оценка погрешности могут храниться в табличной форме, облегчая дальнейший анализ.

- Есть точка (xi; yi)
- Затем вычисляется точка (xi+1; yi+1) с текущим шагом
- В точке (xi+1; yi+1) рассчитывается результат с помощью 4-ого и 5-ого порядков
- Оценка погрешности = разности полученных результатов
- Если оценка погрешности больше допустимого значения, то текущий шаг уменьшается, точка пересчитывается, иначе если слишком близко к допустимому, то текущий шаг просто увеличивается

Рассчитывается с помощью среднего квадратического отклонения

Среднее квадратическое отклонение (СКО) и дисперсия — это статистические понятия, используемые для описания разброса данных вокруг среднего значения.

$\sigma^2 = \Sigma(Y5 - Y4)^2 / (n - 1)$

n – количество вычисленных точек

Дисперсия — это среднее значение квадратов разностей между каждым значением в наборе данных и средним арифметическим значением всех значений. Она показывает, насколько сильно значения в наборе данных разбросаны вокруг своего среднего значения.

$\sigma^2 = \Sigma(xi - \bar{x})^2 / (n - 1)$

СКО — это квадратный корень из дисперсии.

$\sigma = \sqrt{}\Sigma(xi - \bar{x})^2 / (n - 1)$

$\sigma = \sqrt{}\Sigma(Y5 - Y4)^2 / (n - 1)$

5. ***Показать на графике (посчитать вручную) как, зная начальные условия x(0) и y(0), получить следующую точку x(1) и y(1) методом Эйлера, модифицированным методом Эйлера, методом Рунге-Кутты 4 порядка.***

Метод Эйлера:

Представим дифференциальное уравнение $y' + 2y = x^2$ в виде $y' = f(x; y)$

$y' = x^2 - 2y$

Таким образом: $f(x; y) = x^2 - 2y$

«Раскручиваемся» от начального условия $y(0) = 1$:

$x_0 = 0, \quad y_0 = 1$

$f(x_0; y_0) = f(0; 1) = 0^2 - 2 \cdot 1 = -2$

$hf(x_0; y_0) = 0{,}1 \cdot (-2) = -0{,}2$

Далее:

$x_1 = 0{,}1, \quad y_1 = y_0 + hf(x_0; y_0) = 1 - 0{,}2 = 0{,}8$

$f(x_1; y_1) = f(0{,}1; 0{,}8) = (0{,}1)^2 - 2 \cdot 0{,}8 = 0{,}01 - 1{,}6 = -1{,}59$

$hf(x_1; y_1) = 0{,}1 \cdot (-1{,}59) = -0{,}159$

$x_2 = 0{,}2, \quad y_2 = y_1 + hf(x_1; y_1) = 0{,}8 - 0{,}159 = 0{,}641$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i; y_i)$$

Усовершенствованный метод Эйлера:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i \text{, где } \Delta y_i = hf\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)\right)$$

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка

правильно подсказывает заголовок, при использовании метода Рунге-Кутты на каждом шаге нам придётся вычислить значение функции $f(x;\, y) = x^2 - 2y$ 4 раза *(в отличие от двукратного вычисления в предыдущем параграфе)*. Но задача эта вполне подъёмная. Каждое следующее «игрековое» значение получается из предыдущего – формулы:

$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, где $\Delta y_i = \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$, где:

$$k_1 = f(x_i;\, y_i)$$

$$k_2 = f\left(x_i + \frac{h}{2};\, y_i + \frac{hk_1}{2}\right)$$

$$k_3 = f\left(x_i + \frac{h}{2};\, y_i + \frac{hk_2}{2}\right)$$

$$k_4 = f(x_i + h;\, y_i + hk_3)$$