Московский государственный технический
университет им. Н.Э. Баумана

Факультет «Информатика и системы управления»
Кафедра ИУ5 «Системы обработки информации и управления»

Курс «Теория автоматического управления»

Отчет по лабораторной работе №5
Исследование устойчивости систем автоматического управления методом Михайлова»

Выполнила:
студентка группы ИУ5-51Б
Бирюкова Е.И.
Подпись и дата:

Проверил:
преподаватель каф. ИУ5
Лукьянов В.В.
Подпись и дата:

Москва, 2024 г.

Цель работы

Цель лабораторной работы — экспериментальное построение областей устойчивости линейных систем автоматического управления и изучение влияния на устойчивость системы ее параметров.

Вариант полученного задания

Вариант	Передаточная функция разомкнутой системы	T_1, c
3	$W(s) = \dfrac{K}{(T_0 s + 1) \cdot (T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$	1,0

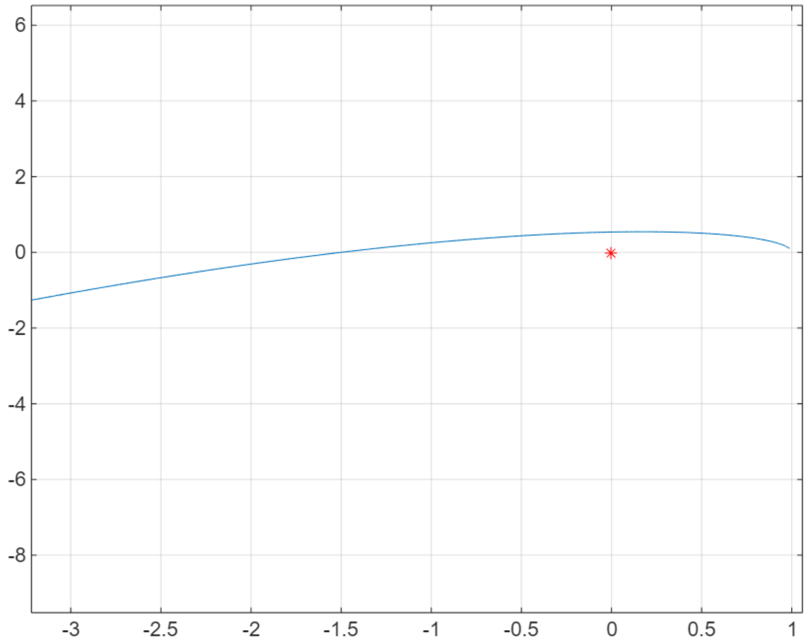
Порядок выполнения работы

1. Для выбранных значений T_0 и T_1 подобрать T_2 и $K_{кр}$, при которых система находится на границе устойчивости, и построить график $K(T_2)$. График рассчитывается следующим образом:
   1.1. Значение T_2 выбрать равным 0.5, K выбрать незначительным (порядка 0.00001). Построить годограф, определить расстояние от начала координат до точки пересечения годографа с осью абсцисс, оно равно $K_{кр}$ (с помощью zoom).

Введем следующий скрипт в Matlab Online

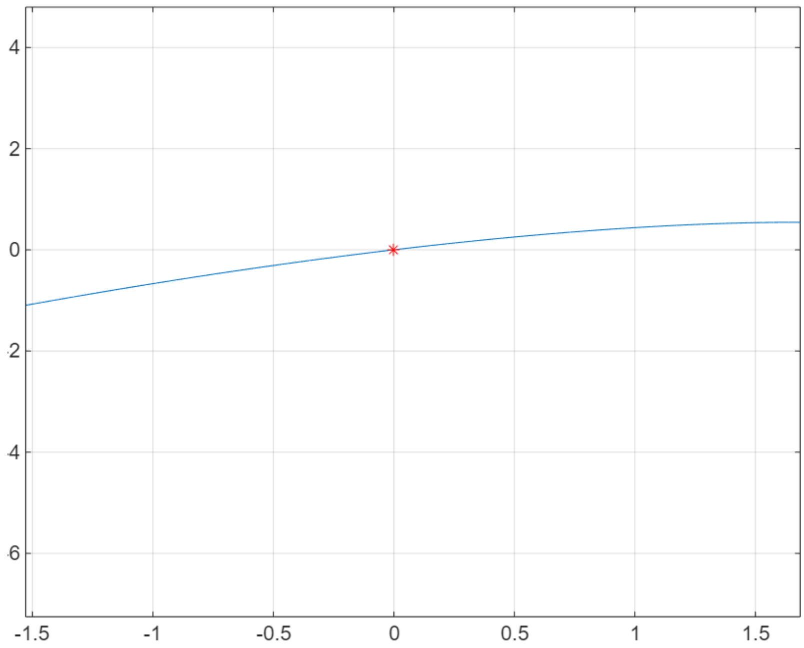
```
K = 0.00001; %(передаточный коэффициент)
T1 = 1; %(по варианту)
T2 = 0.5; %(по варианту)
W1 = tf(1,[0.5 1]); %(для апериодического звена)
W2=tf(1,[T1*T1 T2 1]); %(Апериодическое звено 2-ого порядка)
W = K*W1*W2; %(для разомкнутой системы)
Wf = feedback(W,1); %(для замкнутой системы)
[num,den]=tfdata(Wf, 'v'); %(числитель и знаменатель ПФ)
omega = 0.1:0.01:10; %(диапазон и шаг частот)
G = freqs(den,1,omega); %(расчет годографа)
u = real (G); %(вещественная часть годографа)
v = imag(G); %(мнимая часть годографа)
figure(1); %(График строится в 1-м окне)
plot(u,v,0,0,'r*'); %(график годографа, в т.(0,0) красная *)
grid on; %(координатная сетка)
figure(2); %(График строится во 2-м окне)
step(Wf); %(переходная функций)
grid on; %(координатная сетка)
figure(3); %(График строится в 3-м окне)
bode(Wf); %(ЛАХ)
grid on; %(координатная сетка)
T2 = [0.5 1 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5];
K = [2 4 6 8 10 12 14 16 18 20]; %(десять полученных значений)
plot(T2, K);
```

Получим

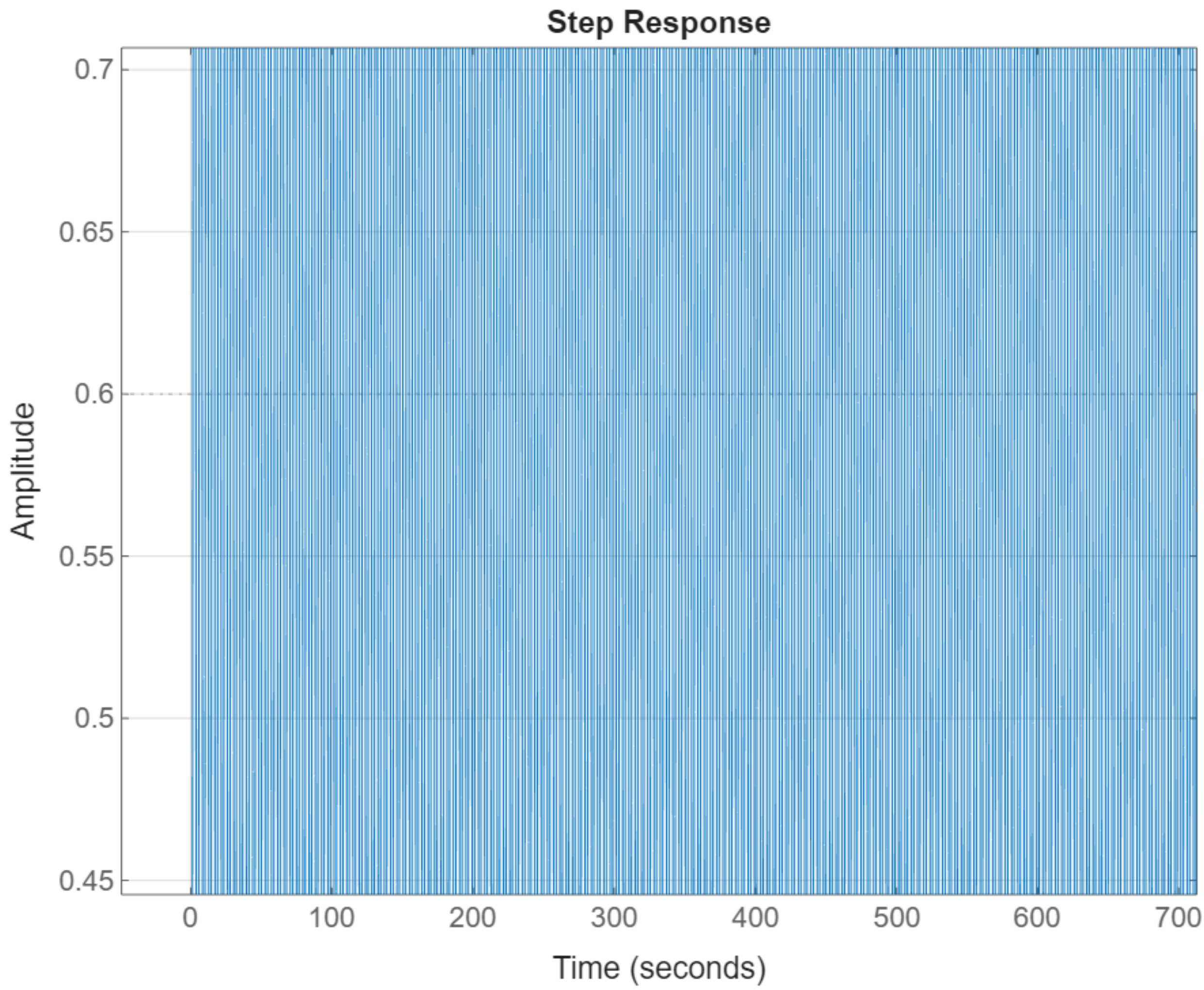


$К_{крит} = 1,5$

1.2. Перестроить годограф для $К_{кр}$, убедиться, что система находится на границе устойчивости как по критерию Михайлова, так и по виду переходной функции (step) и ЛАХ.



По критерию Михайлова данная система находится на границе устойчивости.

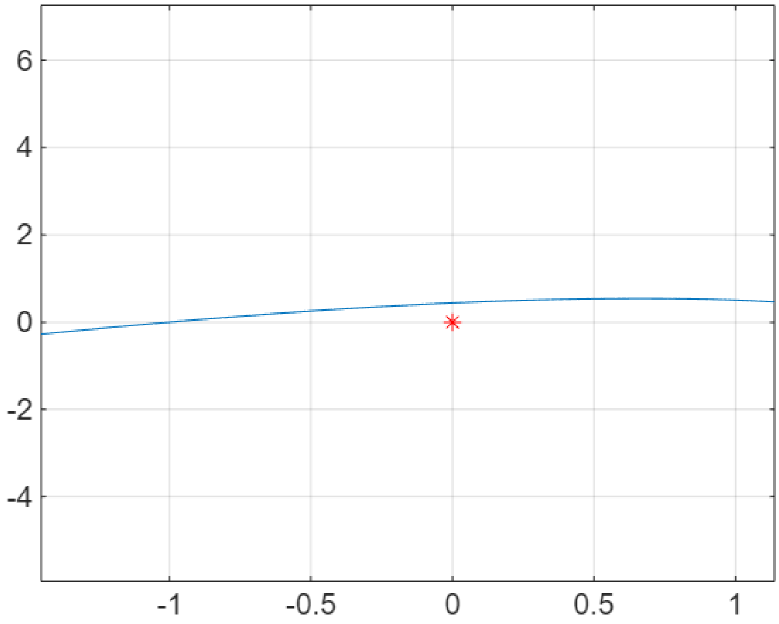


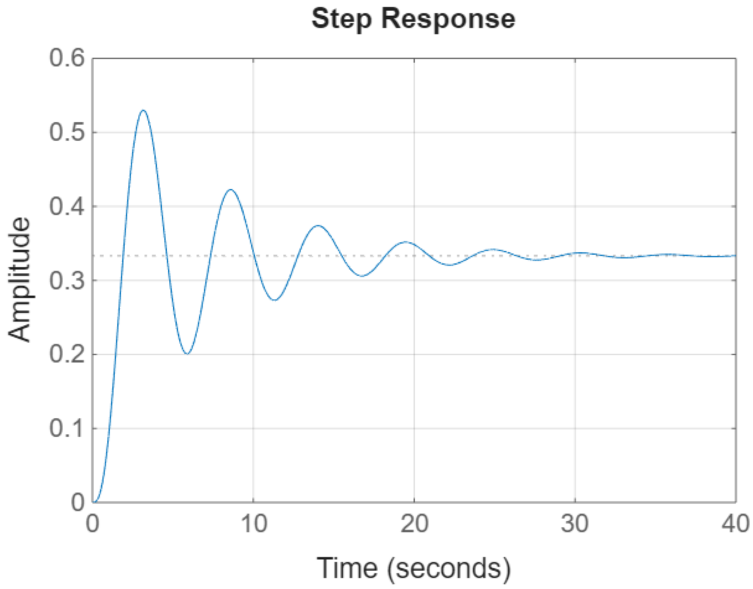
По графику реакции на ступенчатое воздействие видно, что система находится на границе устойчивости и постоянно меняет свое состояние в заданном диапазоне значений.

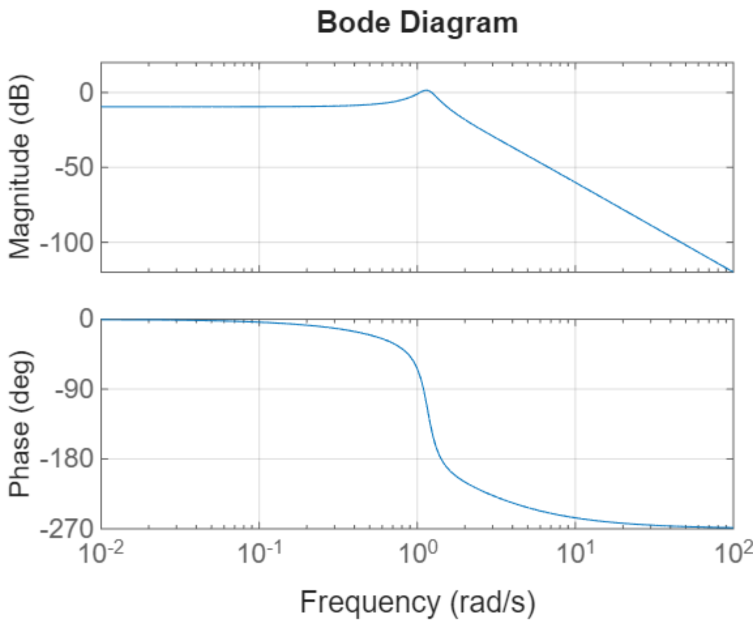
1.3. Построить годографы, графики переходных функций и ЛАХ для одной из точек при

〖K<K〗$_{кр}$, 〖K=K〗$_{кр}$ и 〖K>K〗$_{кр}$.

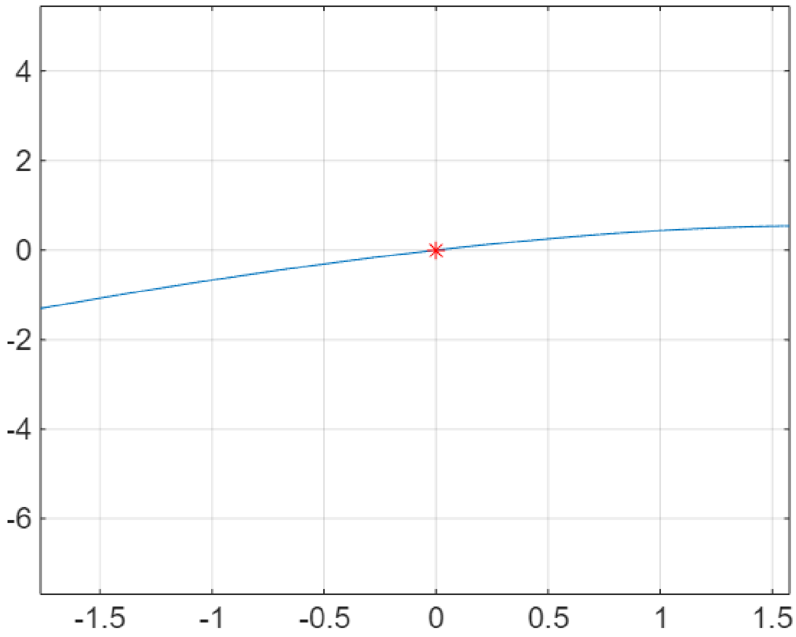
$K<K_{крит}$

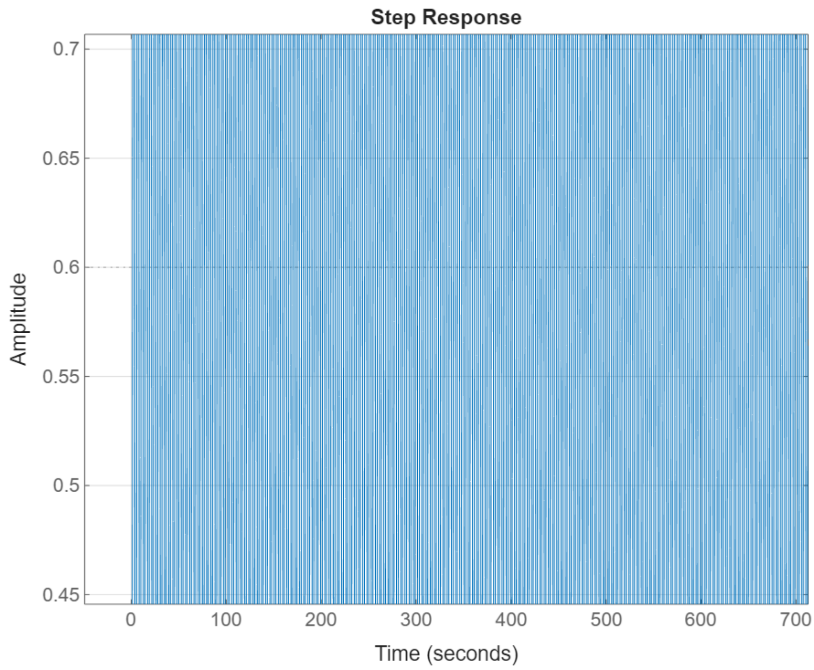

6
4
2
0
-2
-4
-1
-0.5
0
0.5
1

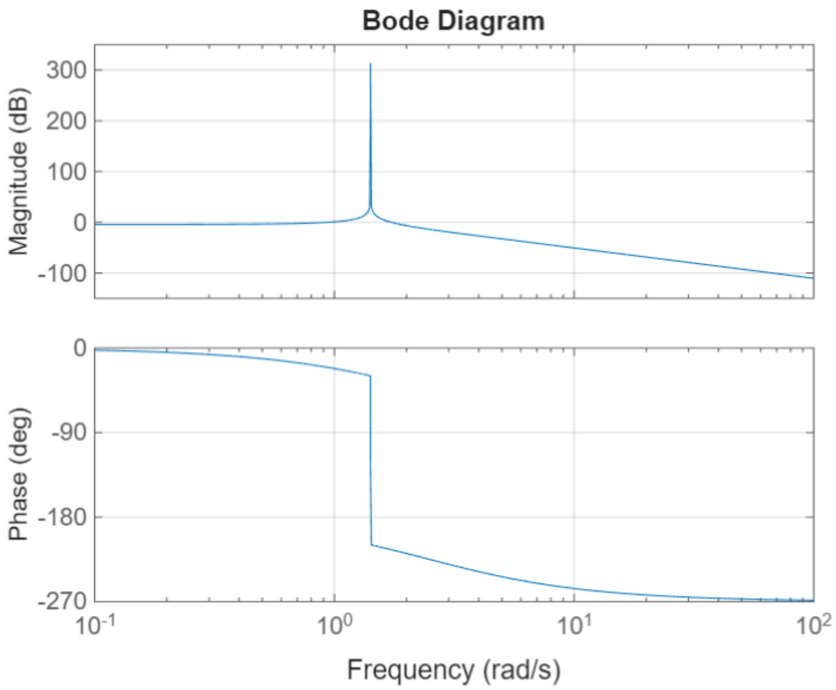

Step Response
Amplitude
Time (seconds)
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
0
10
20
30
40


Bode Diagram
Magnitude (dB)
Phase (deg)
Frequency (rad/s)
0
-50
-100
0
-90
-180
-270
10^{-2}
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}

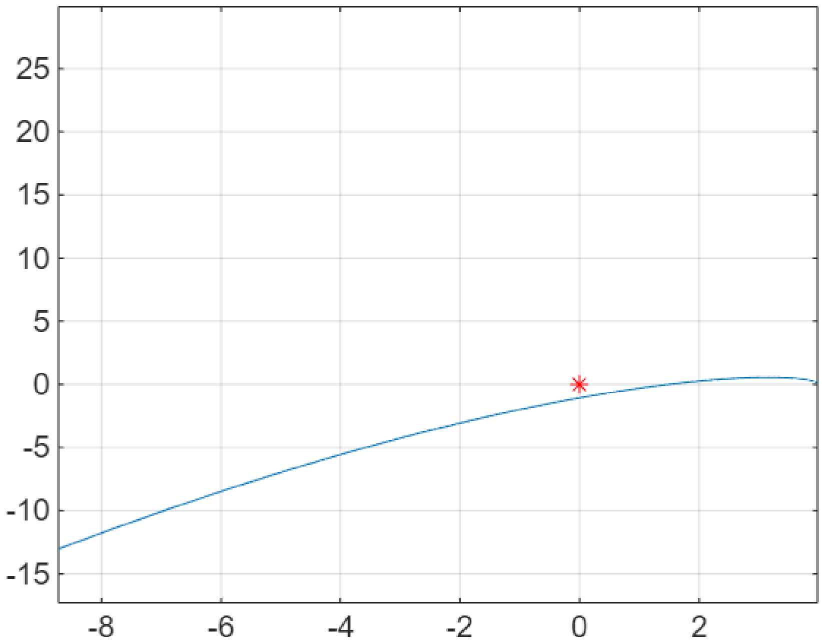
K=$K_{крит}$

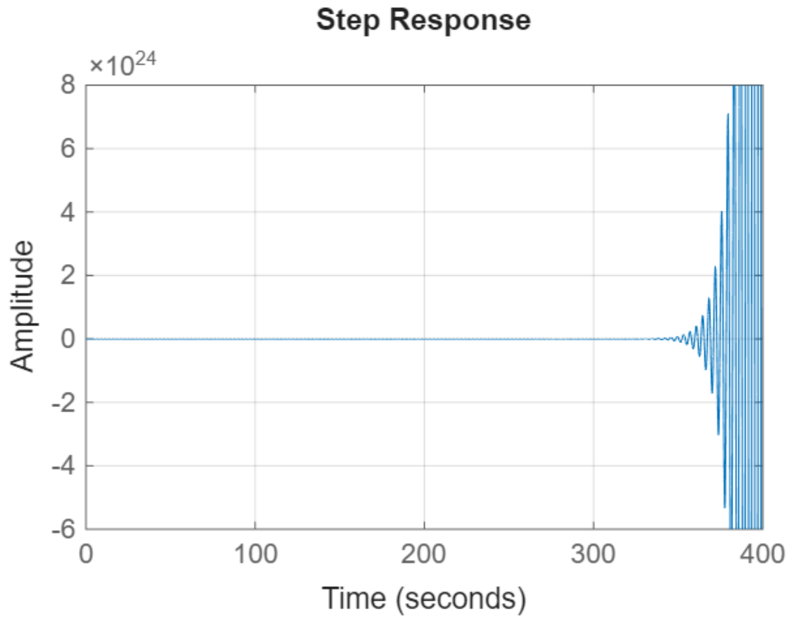

4
2
0
-2
-4
-6
-1.5
-1
-0.5
0
0.5
1
1.5

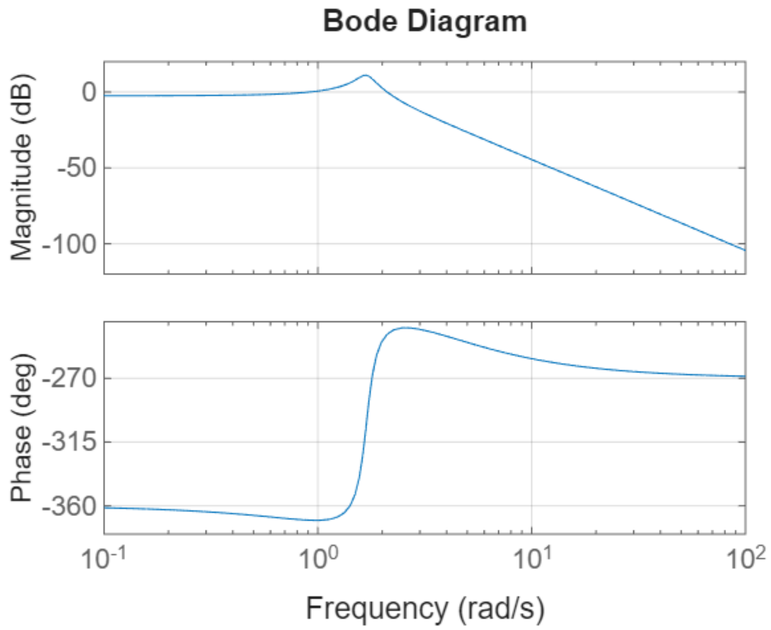

Step Response
Amplitude
0.7
0.65
0.6
0.55
0.5
0.45
0
100
200
300
400
500
600
700
Time (seconds)


Bode Diagram
Magnitude (dB)
300
200
100
0
-100
Phase (deg)
0
-90
-180
-270
10^{-1}
10^{0}
10^{1}
10^{2}
Frequency (rad/s)

K>$K_{крит}$

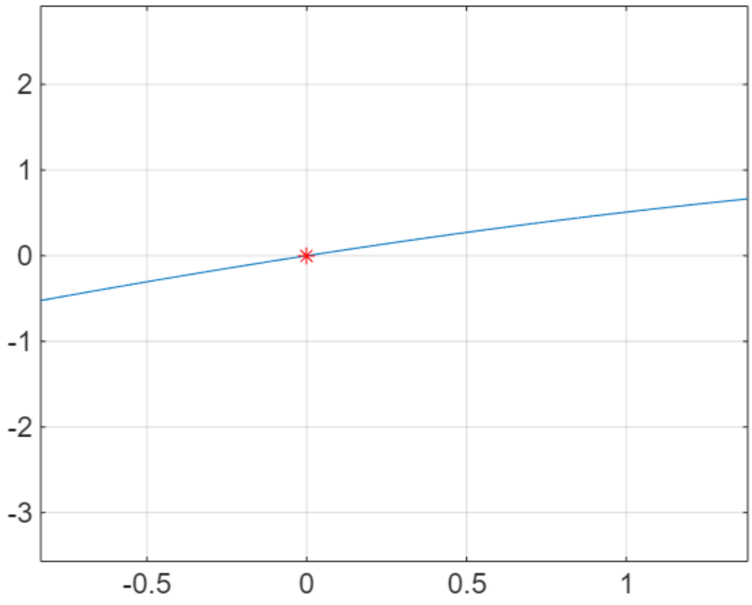

25
20
15
10
5
0
-5
-10
-15
-8
-6
-4
-2
0
2



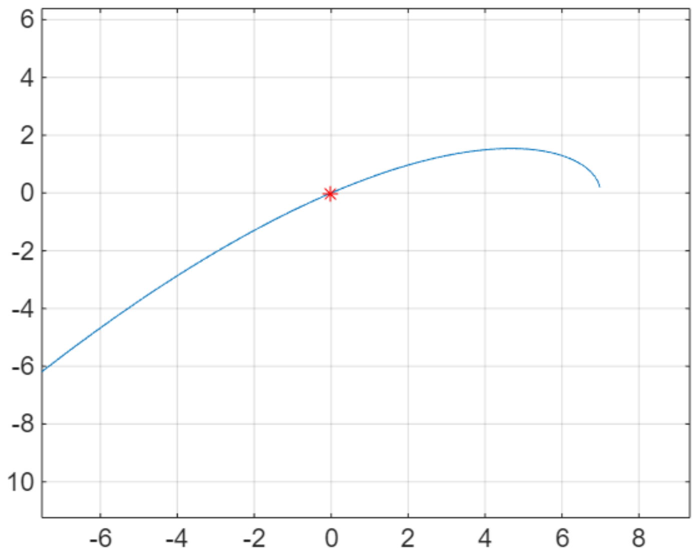


1.4. Перебирая значения T_2 в диапазоне [1 1.5 2 … 5], определить для них $K_{кр}$.

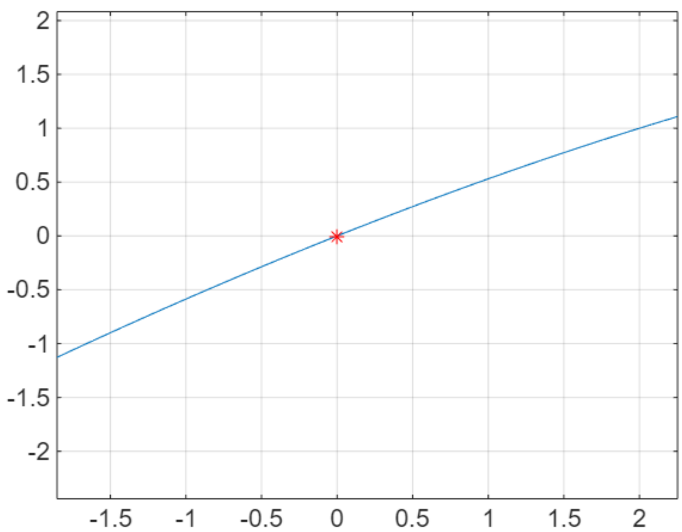
$$T_2 = 1 \; K_{кр} = 3.5$$



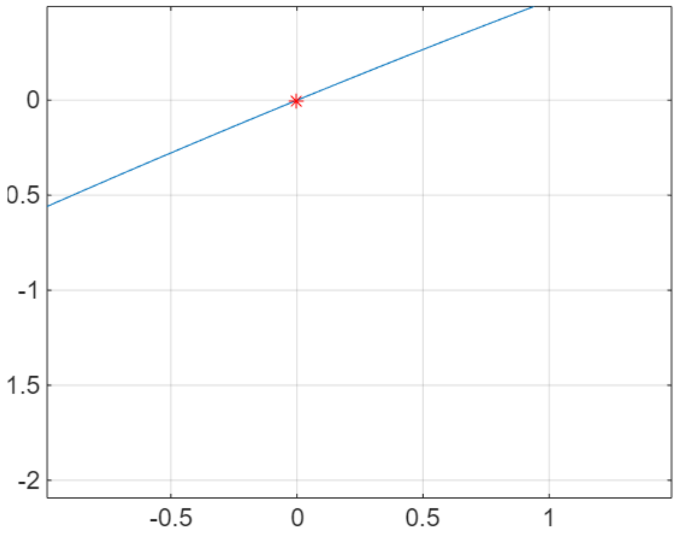
$T_2 = 1.5$ $K_{\text{кр}} = 6$



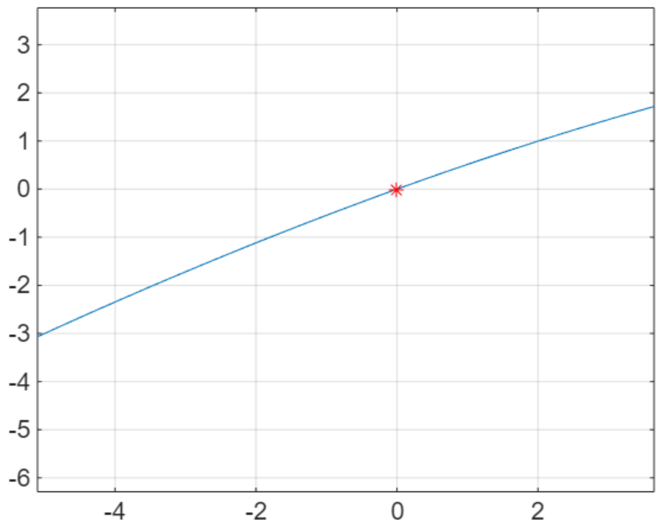
$T_2 = 2$ $K_{\text{кр}} = 9$



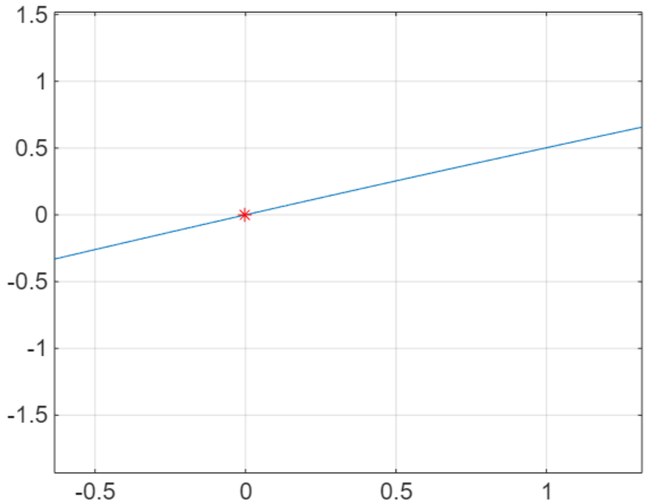
$T_2 = 2.5\ K_{кр} = 12.5$



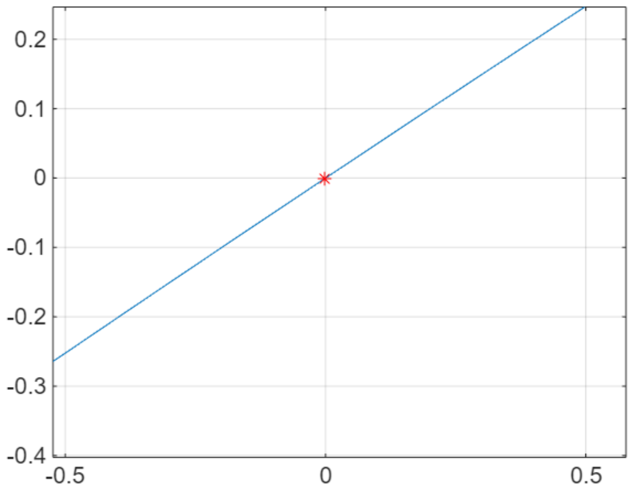
$T_2 = 3\ K_{кр} = 16.5$



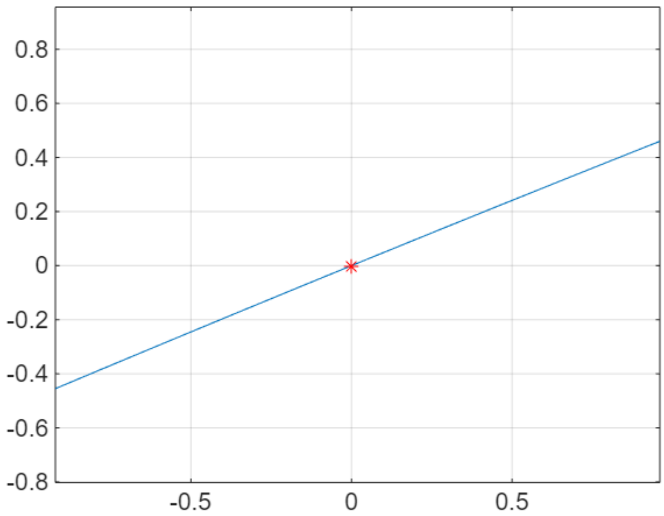
$T_2 = 3.5\ K_{кр} = 21$



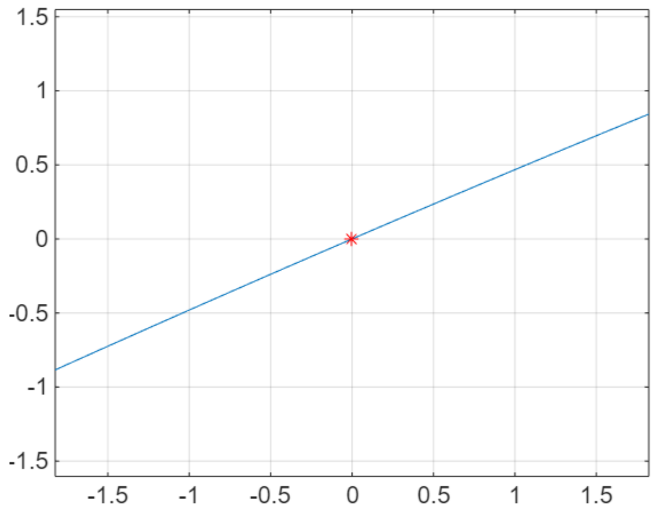
$T_2 = 4\ K_{кр} = 26$



$T_2 = 4.5\ K_{\text{кр}} = 31.5$



$T_2 = 5\ K_{\text{кр}} = 37.5$

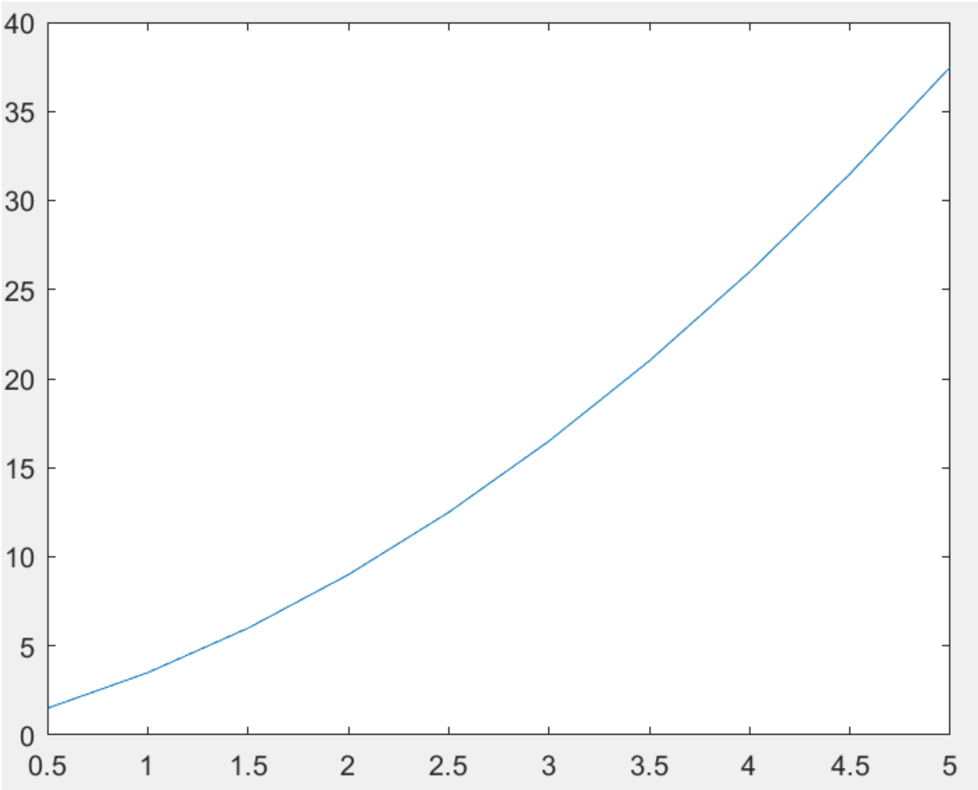


1.5. Построить график $K_{\text{кр}}$ (T_2) с помощью следующего кода:

T2=[0.5 1 1.5 2 2.5 3 3.5 4 4.5 5]

K=[…….] % (десять полученных значений)

plot(T,K)



Контрольные вопросы

1. ***Какие функции реализуют операторы freqs, feedback?***

Freqs(B, A, w) для построения АФЧХ системы, где A – вектор коэффициентов числителя передаточной функции, B – вектор коэффициентов знаменателя.

Feedback – обратная связь.

2. ***Сформулировать корневой критерий устойчивости. Что такое годограф? Как строится корневой годограф (что откладывается по осям графика)? Как коэффициент усиления, который находится в числителе передаточной функции, влияет на поведение корней характеристического уравнения, которое находится в знаменателе передаточной функции? Вручную посчитать две точки корневого годографа.***

Корневой критерий устойчивости: Устойчивость системы зависит от знака вещественных частей корней характеристического уравнения замкнутой системы:

Чтобы САУ была устойчивой необходимо, чтобы вещественные части корней были отрицательными. Если хотя бы один корень имеет положительную вещественную часть, то процесс будет расходящийся, а система – неустойчива. Если корень равен 0, то малейшее появление отрицательной составляющей сделает процесс устойчиво колебательным, а положительной – неустойчиво колебательным.

Часто корни характеристического уравнения при анализе устойчивости систем изображают на комплексной плоскости – плоскости корней характеристического уравнения. Комплексная плоскость мнимой осью разбивается на 2 части. Левую сторону называют областью устойчивости, а правую – областью неустойчивого движения. Если корни лежат на мнимой оси или в 0, то система находится на границе устойчивости.

Корневой годограф – любая траектория, описанная корнями характеристического уравнения при изменении любого числового коэффициента в системе.

Годограф строится на основе значений мнимой и действительной частей корней характеристического уравнения. На оси абсцисс откладывается значение действительной части, на оси ординат – мнимая часть.

Порядок построения корневого годографа:

- Определение и нанесение нулей и полюсов разомкнутой системы для стандартной записи и стандартной схемы системы, определение участков вещественной оси, принадлежащих годографу.
- Полюса — корни характеристического полинома знаменателя передаточной функции, нули — корни характеристического полинома числителя.
- Определение количества, углов наклона и точки пересечения с вещественной осью асимптот корневого годографа.
- Определение углов выхода корневого годографа из полюсов разомкнутой системы и углов входа в нули разомкнутой системы.

Расчет двух точек корневого годографа.

№ 2.

$$W(s) = \frac{k}{(T_0 s+1)(T_1^2 s^2 + T_2 s + 1)}$$

$$\Phi(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{\frac{k}{(T_0 s+1)(T_1^2 s^2 + T_2 s+1)}}{1 + \frac{k}{(T_0 s+1)(T_1^2 s^2 + T_2 s+1)}} = \frac{k}{(T_0 s+1)(T_1^2 s^2 + T_2 s+1) + k}$$

$$p(s) = T_0 T_1^2 s^3 + T_0 T_2 s^2 + T_0 s + T_1^2 s^2 + T_2 s + 1 + k$$

$$p(s) = T_0 T_1^2 s^3 + (T_0 T_2 + T_1^2) s^2 + (T_0 + T_2) s + (k+1)$$

При $k = -1, T_0 = 0{,}5, T_2 = 0{,}5, T_1 = 1$.

$$p(s) = 0{,}5 s^3 + 1{,}25 s^2 + s + k + 1$$

$$p(s) = 0{,}5 s^3 + 1{,}25 s^2 + s$$

$$p(s) = s(0{,}5 s^2 + 1{,}25 s + 1) = 0$$

$s = 0$ или $0{,}5 s^2 + 1{,}25 s + 1 = 0 \quad | \cdot 2$

$s^2 + 2{,}5 s + 2 = 0 \quad | \cdot 2$

$2 s^2 + 5 s + 4 = 0$

$D = 25 - 32 = -7$

$$s_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

$$s_1 = \frac{-5 - \sqrt{7} i}{4}; \quad s_2 = \frac{-5 + \sqrt{7} i}{4}$$

Получаем $s_1 = 0; \; s_2 = \frac{-5 - \sqrt{7} i}{4}; \; s_3 = \frac{-5 + \sqrt{7} i}{4}$

При $k = 1; T_0 = 0{,}5; T_2 = 0{,}5; T_1 = 1$

$p(s) = 0{,}5 s^3 + 1{,}25 s^2 + s + 2 = 0 \Rightarrow 2 s^3 + 5 s^2 + 4 s + 8 = 0$

$s^3 + 2{,}5 s^2 + 2 s + 4 = 0$

Воспользуемся Т Виетта-Кардана.

$$Q = \frac{a^2 - 3b}{9} = \frac{2{,}5^2 - 6}{9} \approx 0{,}028$$

$$R = \frac{2a^3 - 9ab + 27c}{54} = \frac{2 \cdot 2{,}5^3 - 9 \cdot 2{,}5 \cdot 2 + 27 \cdot 4}{54} \approx 1{,}745$$

$$S = Q^3 - R^2 \approx 0{,}028^3 - 1{,}745^2 \approx -3{,}045 < 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow s_1 = -2{,}369$

$s_2 = -0{,}066 + i \cdot 1{,}288$

$s_3 = -0{,}066 - i \cdot 1{,}288.$

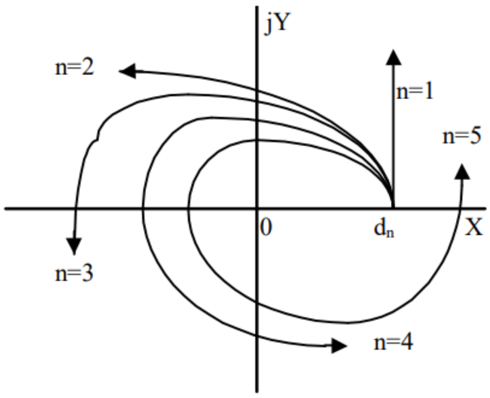
3. ***Сформулировать критерии устойчивости Гурвица, Михайлова, логарифмический критерий. Как строится годограф Михайлова (что откладывается по осям графика)? Вручную посчитать одну точку годографа.***

Критерий устойчивости Михайлова:

Для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы годограф

D(jω)= 〖a_n (jω)^n+a_(n-1) (jω)^(n-1)+⋯+a_1 (jω)+a_0=U〗 _D (ω)+jV_D (ω), начинаясь при ω=0 на положительной вещественной полуоси комплексной плоскости, проходил последовательно n-квадрантов этой плоскости в положительном направлении, где n – порядок системы.

Кривая Михайлова для устойчивых систем всегда имеет плавную спиралевидную форму, причем ее конец уходит в бесконечность в том квадранте координатной плоскости, номер которого равен степени характеристического уравнения.



Критерий устойчивости Гурвица:

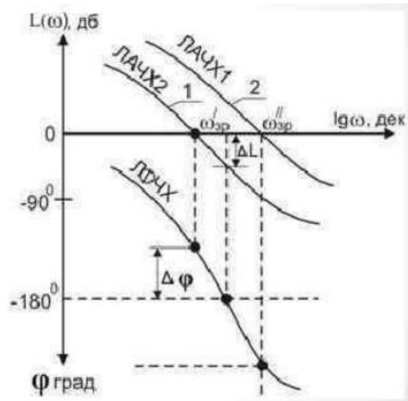
Необходимое условие: все коэффициенты характеристического уравнения должны быть одного знака. (Также является достаточным для систем 1-го и 2-го порядка).

Для устойчивости линейной САУ по критерию Гурвица необходимо и достаточно, чтобы были одного знака n главных определителей матрицы коэффициентов характеристического уравнения заданной системы.

$$\Delta_1 = a_1 > 0; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ a_0 & a_2 \end{vmatrix} > 0; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$

Логарифмический критерий:

Логарифмический критерий – это частотный критерий, позволяющий судить об устойчивости замкнутой САУ по виду логарифмической характеристики разомкнутой системы. Система устойчива, если запасы устойчивости по фазе и амплитуде больше 0.



4. *Как по логарифмическому критерию устойчивости определить $K_{кр}$ и $w_{кр}$?*

Можно получить $К_{кр}$ так:

1. найти частоту $w_{кр}$, на которой сдвиг по фазе составляет -180 градусов;
2. найти значение ЛАХ на этой частоте;

3. Ккр = 20lg(ЛАХ(wкр)).

5. ***Как построить $K_{кр}(T)$, используя критерий устойчивости Гурвица? Постройте, используя любой критерий устойчивости, зависимость $K_{кр}(T)$ для варианта системы, передаточная функция которой имеет вид, указанный в таблице 1.***

№5.

$$W(s) = \frac{k}{(T_0 s+1)(T_1^2 s^2+T_2 s+1)}$$

$p(s) = T_0 T_1^2 s^3 + T_0 T_2 s^2 + T_0 s + T_1^2 s^2 + T_2 s + 1 + k$ (из №2)

По фор-ле Эйлера $s = wj$

$p(wj) = T_0 T_1^2 (wj)^3 + (T_0+T_2)wj + (T_0 T_2 + T_1^2)\cdot(-w^2) + 1 + k$

$$\begin{cases} Im(p(wj)) = -T_0 T_1^2 w^3 + (T_0+T_2)w \\ Re(p(wj)) = -(T_0 T_2 + T_1^2)w^2 + 1 + k \end{cases}$$

При $T_0 = T_2 = 0{,}5$, $T_1 = 1$ =>

$$\Rightarrow \begin{cases} Im(p(wj)) = -0{,}5w^3 + w \\ Re(p(wj)) = -1{,}25w^2 + 1 + k \end{cases}$$

$$0: \begin{cases} -0{,}5w^3 + w = 0 \\ -1{,}25w^2 + 1 + k = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$-0{,}5w^3 + w = 0 \,|\cdot(-2)$

$w^3 - 2w = 0$

$w(w^2-2) = 0$

$w_1 = 0$ или $w_2 = \sqrt{2}$ или $w_3 = -\sqrt{2}$

; $-1{,}25w^2 + 1 + k = 0 \,|\cdot(-4)$

$5w^2 - 4 - 4k = 0$

$k = \dfrac{5w^2-4}{4}$

$k_1 = \dfrac{0-4}{4} = -1$

$k_2 = \dfrac{10-4}{4} = 1{,}5$ совпал

$k_3 = \dfrac{10+4}{4} = 2$

$$\begin{cases} x = -1{,}25w^2 + 2{,}5 \\ y = -0{,}5w^3 + w \end{cases}$$