Metody Numeryczne – Zad 2

Zastosowanie rozwiązywania układów równań liniowych do obliczenia prawdopodobieństwa wygranej w grze losowej

Gra odbywa się na planszy złożonej z N pól ponumerowanych od 0 do $N-1$. W grze bierze udział dwóch graczy: $gracz_1$ i $gracz_2$. Na początku gry każdy z graczy dysponuje jednym pionem umieszczonym na polu o numerze 1. Grę rozpoczyna $gracz_1$, kolejne ruchy gracze wykonują na przemian.

Ruch polega na rzucie kostką i przesunięciu piona o wyrzuconą liczbę oczek x (jeśli pion stał na polu a, to gracz przesuwa go na pole $a+x$). Przesunięcie piona przez jednego z graczy poza planszę ($a + x \geqslant N$) kończy grę i oznacza jego wygraną.

Pułapki

Na niektórych polach znajdują się pułapki. Z każdą pułapką związana jest pewna liczba k. Postawienie piona na polu z pułapką powoduje konieczność cofnięcia piona o k pól, a więc jeśli pułapka znajduje się na polu a, to pion trafia na pole o numerze $a - k$.

Zadanie

Dla zadanej planszy wraz z systemem pułapek oblicz prawdopodobieństwo, że $gracz_1$ wygra grę. Do obliczenia prawdopodobieństwa wykorzystaj układ równań (patrz przykład poniżej) oraz przedstawione na wykładzie metody: Gaussa oraz metodę iteracyjną Gaussa-Seidla.

Porównaj wyniki otrzymane obiema metodami, a prawidłowość otrzymanego wyniku zweryfikuj metodą Monte Carlo (wielokrotne losowanie przebiegu gry).

Jeśli prowadzący zajęcia nie przydzielił Ci konkretnej gry, to weź grę z listy poniżej o takim numerze jak ostatnia cyfra Twojego numeru indeksu.

Przykład 1

Niech plansza składa się z dwóch pól, a na polu numer jeden znajduje się pułapka z $k = 1$ ($N = 2$, $\{1, -1\}$). Gracze posługują się sprawiedliwą kostką dwuścienną (wyrzucamy 1 lub 2 oczy z prawdopodobieństwem 1/2). Niech x_1 oznacza prawdopodobieństwo, że wygra $gracz_1$, gdy ruch ma $gracz_1$ i pionki obu graczy znajdują się w polu 0, a x_2 niech oznacza prawdopodobieństwo, że wygra $gracz_1$, gdy ruch ma $gracz_2$ i pionki obu graczy znajdują się w polu 0, Możemy zapisać następujące równania:

$$x_1 = 1/2x_2 + 1/2 \cdot 1 \tag{1}$$

($gracz_1$ wyrzuca 1 z prawdopodobieństwem 1/2, przesuwa się o jeden, wpada w pułapkę i wraca na pole startowe po czym ruch ma $gracz_2$ a z prawdopodobieństwem 1/2 wyrzuca 2 i wygrywa}, oraz

$$x_2 = 1/2x_1 + 1/2 \cdot 0 \tag{2}$$

($gracz_2$ wyrzuca 1 z prawdopodobieństwem $1/2$, przesuwa się o jeden, wpada w pułapkę i wraca na pole startowe po czym ruch ma $gracz_1$ a z prawdopodobieństwem $1/2$ wyrzuca 2 i wygrywa, a więc $gracz_1$ wygrywa z prawdopodobieństwem 0 – przegrywa).

Z otrzymanego układu otrzymujemy rozwiązanie: $x_1 = 2/3, x_2 = 1/3$ - gracz rozpoczynający grę ma dwa razy większą szansę na zwycięstwo niż drugi gracz.

Przykład 2

Niech plansza składa się z 6 pól, a pułapki z $k = 2$ znajdują się na polach 4 i 5 ($N =$ 6, {4,-2}, {5,-2}). Gracze posługują się sprawiedliwą kostką sześciościenną. Niech x^g_{ab} oznacza, że ruch ma gracz g, pion pierwszego gracza znajduje się na polu a, a pion drugiego gracza znajduje się na polu b (wszystkich zmiennych jest 25).

Można teraz zapisać kolejne równania:

$$\begin{aligned}
x^1_{0,0} &= 1/6 \cdot x^2_{1,0} + 2/6 \cdot x^2_{2,0} + 2/6 \cdot x^2_{3,0} + 1/6 \\
x^1_{1,0} &= 2/6 \cdot x^2_{2,0} + 2/6 \cdot x^2_{3,0} + 2/6 \\
x^1_{2,0} &= 1/6 \cdot x^2_{2,0} + 2/6 \cdot x^2_{3,0} + 3/6 \\
x^1_{3,0} &= 1/6 \cdot x^2_{2,0} + 1/6 \cdot x^2_{3,0} + 4/6 \\
\ldots &= \ldots \\
x^2_{2,2} &= 1/6 \cdot x^1_{2,2} + 2/6 \cdot x^1_{2,3} \\
\ldots &= \ldots
\end{aligned}$$

Rozwiązując otrzymany układ otrzymujemy $x^1_{0,0} = 0.644729836219198$, a więc gracz rozpoczynający grę ma nieco ponad 64% szans na zwycięstwo.

Uwaga

Podane wyżej przykłady nie mają sugerować, że układ równań należy tworzyć "ręcznie" a jedynie pomóc w zrozumieniu sposobu jego powstawania.

Uwaga 2

W rozwiązaniu nie jest konieczne unikanie równań opisujących sytuacje niemożliwe, na przykład tych odpowiadających zmiennym $x^2_{0,0}$, $x^1_{0,1}$, $x^2_{0,1}$, $x^1_{0,2}$, $\ldots$ z przykładu 2. Wtedy liczba równań w przykładzie 1 wynosiłaby 8, a w przykładzie 2 byłyby 72 równania.

Lista gier

Tak jak w przykładzie 2, gracze posługują się sprawiedliwą kostką sześciościenną. Dla każdej gry najpierw podano N - liczbę pól na planszy, a następnie listę pułapek w formacie $\{p, -k\}$, gdzie p oznacza numer pola, na którym znajduje się pułapka, a k oznacza liczbą pól o które należy się cofnąć.

0. 27, {4, -2}, {5, -2}, {7, -5}, {9, -3}, {14, -12}, {15, -2}, {17, -7}, {19, -8}, {21, -3}, {22, -16}, {25, -9}.
1. 27, {2, -2}, {5, -2}, {10, -4}, {14, -12}, {15, -2}, {17, -6}, {19, -8}, {21, -3}, {22, -16}, {25, -9}, {26, -22}.

2. 27, {2, -1}, {4, -4}, {6, -5}, {13, -4}, {14, -6}, {17, -2}, {19, -1}, {21, -1}, {22, -10}, {25, -2}, {26, -16}.
3. 27, {2, -1}, {4, -4}, {6, -3}, {13, -4}, {14, -5}, {17, -1}, {20, -2}, {21, -2}, {22, -10}, {24, -14}, {25, -2}, {26, -7}.
4. 28, {1, -1}, {4, -1}, {6, -3}, {7, -2}, {13, -4}, {14, -5}, {17, -1}, {20, -2}, {21, -2}, {22, -10}, {24, -14}, {25, -2}, {27, -8}.
5. 28, {1, -1}, {2, -2}, {3, -3}, {7, -1}, {13, -4}, {14, -5}, {17, -1}, {20, -1}, {21, -2}, {22, -3}, {24, -1}, {25, -2}, {26, -3}.
6. 28, {4, -1}, {5, -3}, {6, -5}, {7, -7}, {13, -1}, {14, -3}, {15, -5}, {20, -1}, {24, -1}, {25, -3}, {26, -5}.
7. 28, {2, -1}, {4, -1}, {6, -1}, {11, -1}, {13, -1}, {15, -14}, {20, -1}, {22, -1}, {24, -1}, {26, -25}.
8. 28, {2, -1}, {4, -1}, {6, -1}, {11, -8}, {13, -10}, {15, -12}, {18, -13}, {20, -15}, {22, -17}, {24, -1}, {26, -3}.
9. 28, {2, -1}, {4, -4}, {5, -2}, {6, -5}, {7, -6}, {10, -1}, {13, -2}, {15, -1}, {18, -4}, {20, -9}, {22, -3}, {24, -1}, {26, -26}.