

# Алгоритмы

## 1 Выделение базиса из системы векторов

**Дано** Пусть  $v_1, \dots, v_m \in F^n$  – вектора и  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  – их линейная оболочка.

**Задача** Среди векторов  $v_1, \dots, v_m$  найти базис пространства  $V$  и разложить оставшиеся вектора по этому базису.

**Алгоритм**

1. Запишем вектора  $v_1, \dots, v_m$  по столбцам в матрицу  $A \in M_{nm}(F)$ . Например, при  $n = 3, m = 5$

$$A = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{21} & v_{31} & v_{41} & v_{51} \\ v_{12} & v_{22} & v_{32} & v_{42} & v_{52} \\ v_{13} & v_{23} & v_{33} & v_{43} & v_{53} \end{pmatrix}$$

2. Приведем матрицу  $A$  элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

3. Пусть  $k_1, \dots, k_r$  – номера главных позиций в матрице  $A'$ . Тогда вектора  $v_{k_1}, \dots, v_{k_r}$  образуют базис  $V$ . Например, в примере выше это вектора  $v_1, v_2$  и  $v_4$ .
4. Пусть  $v_i$  – вектор соответствует неглавной позиции в  $A'$ . Тогда в  $i$ -ом столбце  $A'$  записаны координаты разложения  $v_i$  через найденный базис выше. Например, в примере выше  $v_3 = a_{31}v_1 + a_{32}v_2$  и  $v_5 = a_{51}v_1 + a_{52}v_2 + a_{53}v_4$ .

**Пример** Пусть

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 12 \\ 7 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_5 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in F^3$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & 12 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mapsto \\ \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Тогда  $v_1, v_2$  и  $v_4$  – базис линейной оболочки и  $v_3 = 2v_1 + 3v_2$  и  $v_5 = v_1 - 2v_4$ .

## 2 Нахождение какого-то базиса линейной оболочки

**Дано** Пусть  $v_1, \dots, v_m \in F^n$  – вектора и  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  – их линейная оболочка.

**Задача** Найти какой-нибудь базис подпространства  $V$ .

**Алгоритм**

1. Уложить все вектора  $v_i$  в строки матрицы  $A \in M_{mn}(F)$ .
2. Элементарными преобразованиями строк привести матрицу к ступенчатому виду.
3. Ненулевые строки полученной матрицы будут искомым базисом.

### 3 Дополнение линейно независимой системы до базиса всего пространства стандартными векторами

**Дано** Пусть  $v_1, \dots, v_m \in F^n$  – линейно независимая система векторов,  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  – их линейная оболочка и  $e_i$  – стандартные базисные векторы, т.е. на  $i$ -ом месте стоит 1, а в остальных 0.

**Задача** Найти такие вектора  $e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$ , что система  $v_1, \dots, v_m, e_{k_1}, \dots, e_{k_{n-m}}$  является базисом  $F^n$ .

**Алгоритм**

1. Уложить вектора  $v_i$  в строки матрицы  $A \in M_{m \times n}(F)$ .
2. Привести матрицу  $A$  к ступенчатому виду.
3. Пусть  $k_1, \dots, k_{n-m}$  – номера неглавных столбцов. Тогда  $e_1, \dots, e_{k_{n-m}}$  – искомое множество.

### 4 Найти ФСР однородной СЛУ

**Дано** Система однородных линейных уравнений  $Ax = 0$ , где  $A \in M_{m \times n}(F)$  и  $x \in F^n$ .

**Задача** Найти ФСР системы  $Ax = 0$ .

**Алгоритм**

1. Привести матрицу  $A$  элементарными преобразованиями строк к улучшенному ступенчатому виду. Например

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a_{31} & 0 & a_{51} \\ 0 & 1 & a_{32} & 0 & a_{52} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a_{53} \end{pmatrix}$$

2. Пусть  $k_1, \dots, k_r$  – позиции свободных переменных. Если положить одну из этих переменных равной 1, а все остальные нулями, то существует единственное решение, которое мы обозначим через  $u_i$  (всего  $r$  штук). Например, для матрицы  $A'$  выше свободные переменные имеют номера 3 и 5. Тогда вектора (записанные в строку)

$$u_1 = (-a_{31} \quad -a_{32} \quad 1 \quad 0 \quad 0), u_2 = (-a_{51} \quad -a_{52} \quad 0 \quad -a_{53} \quad 1)$$

являются ФСР.

### 5 Задать подпространство базисом, если оно задано матричным уравнением

**Дано** Пусть  $A \in M_{m \times n}(F)$  и  $V \subseteq F^n$  задано в виде  $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ .

**Задача** Найти базис подпространства  $V$ .

**Алгоритм**

1. Найти ФСР системы  $Ay = 0$ . Векторы ФСР будут базисом  $V$ .

### 6 Задать подпространство матричным уравнением, если оно задано линейной оболочкой

**Дано** Пусть  $v_1, \dots, v_k \in F^n$  – набор векторов и  $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ .

**Задача** Для некоторого  $m$  найти матрицу  $A \in M_{m \times n}(F)$  такую, что  $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ .

## Алгоритм

1. Уложить вектора  $v_i$  в строки матрицы  $B \in M_{kn}(F)$ .
2. Найти ФСР системы  $Bz = 0$ .
3. Уложить ФСР в строки матрицы  $A \in M_{mn}(F)$ , где  $m$  – количество векторов в ФСР. Матрица  $A$  и будет искомой.

## 7 Найти матрицу замены координат

**Дано** Векторное пространство  $V$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $f = (f_1, \dots, f_n)$  – два базиса пространства  $V$ . Известна матрица перехода от  $e$  к  $f$ , т.е.  $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)A$ , где  $A \in M_n(F)$ . Дан вектор  $v = x_1e_1 + \dots + x_ne_n$ .

**Задача** Найти разложение  $v$  по базису  $f$ .

## Алгоритм

1. Если  $v = ex$ , где  $x \in F^n$ , а также  $v = fy$ , где  $y \in F^n$ , то  $y = A^{-1}x$ .

## 8 Найти матрицу линейного отображения при замене базиса

**Дано** Векторное пространство  $V$  с базисами  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$ , а также векторное пространство  $U$  с базисами  $f = (f_1, \dots, f_m)$  и  $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$ . Известны матрицы перехода  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$  и  $(f'_1, \dots, f'_m) = (f_1, \dots, f_m)D$ , где  $C \in M_n(F)$  и  $D \in M_m(F)$ . Дано линейное отображение  $\phi: V \rightarrow U$  заданное в базисах  $e$  и  $f$  матрицей  $A \in M_{nm}(F)$ , т.е.  $\phi e = fA$ .

**Задача** Найти матрицу отображения  $\phi$  в базисах  $e'$  и  $f'$ , то есть такую  $A' \in M_{nm}(F)$ , что  $\phi e' = f'A'$ .

## Алгоритм

1.  $A' = D^{-1}AC$ .

## 9 Определить существует ли линейное отображение заданное на векторах

**Дано** Векторное пространство  $V$  над полем  $F$  и набор векторов  $v_1, \dots, v_k \in V$ , векторное пространство  $U$  и набор векторов  $u_1, \dots, u_k \in U$ .

**Задача** Определить существует ли линейное отображение  $\phi: V \rightarrow U$  такое, что  $\phi(v_i) = u_i$ .

## Алгоритм

1. Среди векторов  $v_1, \dots, v_k$  выделить линейно независимые, а остальные разложить по ним.
2. Пусть на предыдущем этапе базис получился  $v_1, \dots, v_r$ , а  $v_{r+i} = a_{i1}v_1 + \dots + a_{ir}v_r$ .
3. Искомое линейное отображение  $\phi$  существует тогда и только тогда, когда выполняются равенства  $u_{r+i} = a_{i1}u_1 + \dots + a_{ir}u_r$ .<sup>1</sup>

## 10 Найти базис образа и ядра линейного отображения

**Дано**  $\phi: F^n \rightarrow F^m$  задан  $x \mapsto Ax$ , где  $A \in M_{mn}(F)$ .

**Задача** Найти базис  $\text{Im } \phi \in F^m$  и базис  $\ker \phi \in F^n$ .

---

<sup>1</sup>В частности, если все  $v_i$  оказались линейно независимыми, то линейное отображение  $\phi$  обязательно существует.

### Алгоритм

1. Выделить базис среди столбцов матрицы  $A$ . В результате получится базис  $\text{Im } \phi$ .
2. Найти ФСР системы  $Ax = 0$ . Полученная ФСР будет базисом  $\ker \phi$ .

## 11 Найти линейное отображение с заданными ядром и образом

**Дано** Пространства  $U \subseteq F^n$  и  $W \subseteq F^m$  такие, что  $\dim U + \dim W = n$ .

**Задача** Найти матрицу линейного отображения  $\varphi: F^n \rightarrow F^m$  такого, что  $U = \ker \varphi$  и  $W = \text{Im } \varphi$ .

### Алгоритм

1. Задать подпространство  $W$  с помощью базиса. Пусть  $b_1, \dots, b_k$  – базис  $W$ . Определим матрицу  $B = (b_1 | \dots | b_k)$ .
2. Задать подпространство  $U$  системой с линейно независимыми строками  $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ .
3. В силу условия  $\dim U + \dim W = n$  матрица  $A$  будет иметь столько же строк, сколько столбцов в матрице  $B$ . В этом случае искомое линейное отображение задается матрицей  $BA$ .

## 12 Найти сумму подпространств заданных линейными оболочками

**Дано** Подпространства  $V, U \subseteq F^n$  заданные в виде  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ , где  $v_i, u_j \in F^n$ .

**Задача** Найти базис  $V + U$ .

### Алгоритм

1. Надо найти базис линейной оболочки  $\langle v_1, \dots, v_m, u_1, \dots, u_k \rangle$ .

## 13 Найти пересечение подпространств заданных линейными оболочками

**Дано** Подпространства  $V, U \subseteq F^n$  заданные в виде  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ , где  $v_i, u_j \in F^n$ .

**Задача** Найти базис  $V \cap U$ .<sup>2</sup>

### Алгоритм

1. Найти ФСР системы  $Dx = 0$ , где  $D = (v_1 | \dots | v_m | u_1 | \dots | u_k)$  и  $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , где  $\alpha \in F^m$ ,  $\beta \in F^k$ .
2. Пусть  $\left( \begin{array}{c|c} \alpha_1 & \alpha_s \\ \beta_1 & \beta_s \end{array} \right)$  – ФСР. Далее есть две опции (из них вторая опция предпочтительнее!):
  - Множество векторов  $R = (v_1 | \dots | v_m)(\alpha_1 | \dots | \alpha_s)$  порождает  $V \cap U$ . Среди  $(\alpha_1 | \dots | \alpha_s)$  можно выкинуть те  $\alpha_i$ , для которых  $\beta_i = 0$ .<sup>3</sup>
  - Множество векторов  $R' = (u_1 | \dots | u_k)(\beta_1 | \dots | \beta_s)$  порождает  $V \cap U$ . Причем можно рассматривать только ненулевые  $\beta_i$ .
3. Выделить базис среди столбцов  $R$ . Это и будет базис  $V \cap U$ .
  - Если векторы  $u_1, \dots, u_k$  были линейно независимы изначально и  $\beta_i, \dots, \beta_s$  – все ненулевые сегменты ФСР с прошлого шага, то  $(u_1 | \dots | u_k)(\beta_i | \dots | \beta_s)$  будет базисом  $V \cap U$ .

<sup>2</sup>В это задаче можно задать подпространства системами, потом найти пересечение в виде системы, потом задать результат базисом. Но есть куда более эффективный способ.

<sup>3</sup>Если ФСР построен по стандартному базису, то останутся  $\alpha_i$  с нулевыми свободными переменными.

## 14 Найти пересечение подпространств заданных матричным уравнением

**Дано** Подпространства  $V, U \subseteq F^n$  заданные в виде  $V = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ ,  $U = \{y \in F^n \mid By = 0\}$ , где  $A \in M_{m \times n}(F)$  и  $B \in M_{k \times n}(F)$ .

**Задача** Задать  $V \cap U$  в виде  $\{y \in F^n \mid Dy = 0\}$  для некоторого  $D \in M_{kn}(F)$ , где  $\text{rk } D = k \leq n$ .

**Алгоритм**

1. Рассмотреть матрицу  $D' = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ .
2. Выделить среди строк  $D'$  линейно независимую подсистему. Результат и будет искомая  $D$ .

## 15 Найти пересечение подпространств заданных разными способами

**Дано** Подпространства  $V, U \subseteq F^n$  заданные в виде  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ , где  $A \in M_{kn}(F)$ .

**Задача** Задать  $V \cap U$  системой линейных уравнений.

**Алгоритм**

1. Задать подпространство  $V$  системой в виде  $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$ .
2. Тогда  $V \cap U$  задается объединенной системой  $\begin{pmatrix} D \\ A \end{pmatrix}$ .

## 16 Найти сумму подпространств заданных разными способами

**Дано** Подпространства  $V, U \subseteq F^n$  заданные в виде  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ , где  $A \in M_{kn}(F)$ .

**Задача** Задать  $V + U$  в виде  $\{x \in F^n \mid Dx = 0\}$ , где  $D \in M_{tn}(F)$  и  $t = \text{rk } D$ .<sup>4</sup>

**Алгоритм**

1. Определим матрицу  $B = (v_1 \mid \dots \mid v_m)$  и найдем ФСР для системы  $B^t A^t x = 0$ . Пусть это будет  $x_1, \dots, x_t$ .
2. Тогда матрица  $D' = (x_1 \mid \dots \mid x_t)^t A$  задает  $V + U$  системой.
3. Отобрать среди строк  $D'$  линейно независимые и получить  $D$ .
  - Если строки  $A$  были линейно независимы, то строки  $D'$  уже будут линейно независимыми.

## 17 Найти сумму подпространств заданных разными способами

**Дано** Подпространства  $V, U \subseteq F^n$  заданные в виде  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ , где  $A \in M_{kn}(F)$ .

**Задача** Задать  $V + U$  в виде линейной оболочки.

**Алгоритм**

1. Задать подпространство  $U$  с помощью линейной оболочки.
2. Объединить линейные оболочки для  $V$  и для  $U$ .

## 18 Найти матрицу линейного оператора при замене базиса

**Дано** Векторное пространство  $V$  над полем  $F$ ,  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $f = (f_1, \dots, f_n)$  – два базиса пространства  $V$ . Известна матрица перехода от  $e$  к  $f$ , т.е.  $(f_1, \dots, f_n) = (e_1, \dots, e_n)C$ , где  $C \in M_n(F)$ . Дано линейное отображение  $\phi: V \rightarrow V$  заданное в базисе  $e$  матрицей  $A \in M_n(F)$ , т.е.  $\phi e = eA$ .

---

<sup>4</sup>Всегда можно задать  $U$  линейной оболочкой, потом задать  $V + U$  линейной оболочкой, а потом найти представление системой. Я же покажу тут другой подход.

**Задача** Найти матрицу отображения  $\phi$  в базисе  $f$ .

**Алгоритм**

1. Пусть  $\phi f = fB$ , где  $B$  – искомая матрица. Тогда  $B = C^{-1}AC$ .

## 19 Найти проекцию вектора на подпространство вдоль другого подпространства

**Дано**  $F^n = V \oplus U$ , где  $V$  и  $U$  заданы базисами  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $U = \langle u_1, \dots, u_k \rangle$ . Пусть  $z \in F^n$  раскладывается  $z = v + u$ , где  $v \in V$  и  $u \in U$ .

**Задача** Найти  $v$  и  $u$ .

**Алгоритм**

1. Решить СЛУ  $Dx = z$ , где  $D = (v_1 | \dots | v_m | u_1 | \dots | u_k)$  и  $x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ , где  $\alpha \in F^m$  и  $\beta \in F^k$ .
2. Тогда  $v = (v_1 | \dots | v_m)\alpha$  и  $u = (u_1 | \dots | u_k)\beta$ .

## 20 Найти оператор проекции на подпространство вдоль другого подпространства

**Дано**  $F^n = V \oplus U$ , где  $V$  задано базисом  $V = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ,  $U = \{y \in F^n \mid Ay = 0\}$ , где  $A \in M_{kn}(F)$  и  $\text{rk } A = k \leq n$ .

**Задача** Найти матрицу отображения  $\phi: V \rightarrow V$  такого, что  $\phi(U) = 0$  и  $\phi(v) = v$  для любого  $v \in V$ .<sup>5</sup>

**Алгоритм**

1. Положим  $B = (v_1 | \dots | v_m) \in M_{nm}(F)$ .
2. Обязательно получится, что  $m = k$  и матрица  $AB$  невырождена.
3. Искомый  $\phi$  имеет матрицу  $B(AB)^{-1}A$ .

## 21 Поиск собственных значений и векторов

**Дано** Матрица  $A \in M_n(F)$ .

**Задача** Найти все собственные значения  $\lambda_i$  для  $A$  и для каждого  $\lambda_i$  найти базис пространства  $V_{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid Av = \lambda_i v\}$ .

**Алгоритм**

1. Посчитать характеристический многочлен  $(-1)^n \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ .
2. Найти корни многочлена  $\chi_A(\lambda)$ . Корни  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  будут собственными значениями  $A$ .
3. Для каждого  $\lambda_i$  найти ФСР системы  $(A - \lambda_i E)x = 0$ . Тогда ФСР будет базисом  $V_{\lambda_i}$ .

Если дополнительно найти с каждым собственным значением  $\lambda_i$  его кратность  $n_i$  в характеристическом многочлене, то на последнем шаге размер ФСР для  $\lambda_i$  оценивается так. Собственных векторов будет не меньше чем 1 и не больше, чем  $n_i$ .

## 22 Поиск корневых подпространств

**Дано** Матрица  $A \in M_n(F)$ .

---

<sup>5</sup>Заметим, что если  $z \in F^n$  раскладывается  $z = v + u$ , где  $v \in V$  и  $u \in U$ , то  $\phi(z) = v$ .

**Задача** Найти все собственные значения  $\lambda_i$  для  $A$  и для каждого  $\lambda_i$  найти базис пространства  $V^{\lambda_i} = \{v \in F^n \mid \exists n: (A - \lambda_i E)^n v = 0\}$ .

#### Алгоритм

1. Посчитать характеристический многочлен  $(-1)^n \chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ .
2. Найти корни многочлена  $\chi_A(\lambda)$  с кратностями. Корни  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$  будут собственными значениями  $A$ . И пусть кратности будут  $\{n_1, \dots, n_k\}$ .
3. Для каждого  $\lambda_i$  найти ФСР системы  $(A - \lambda_i E)^{n_i} x = 0$ . Тогда ФСР будет базисом  $V^{\lambda_i}$ . Обратите внимание, что для каждого  $\lambda_i$  должно получиться ровно  $n_i$  векторов.

### 23 Поиск инвариантных подпространств

**Дано** Матрица  $A \in M_n(F)$ .

**Задача** Найти все подпространства  $U \subseteq F^n$  такие, что  $AU \subseteq U$ .

#### Алгоритм

1. Для каждого вектора  $v \in F^n$  найти главное инвариантное подпространство

$$[v]_A = \langle v, Av, A^2v, \dots, A^m v, \dots \rangle$$

Обратите внимание, что это «творческий шаг» тут нет общего алгоритма,<sup>6</sup> тут придется немного догадаться.

2. Описать все инвариантные подпространства, как конечные суммы главных, а именно любое инвариантное  $U$  будет иметь вид  $[v_1]_A + \dots + [v_k]_A$ , где  $v_1, \dots, v_k$  пробегает все возможные конечные наборы векторов.

### 24 Поиск инвариантных подпространств для диагонализуемого оператора

**Дано** Матрица  $A \in M_n(F)$ , задающая диагонализуемый оператор.

**Задача** Найти все подпространства  $U \subseteq F^n$  такие, что  $AU \subseteq U$ .

#### Алгоритм

1. В начале надо найти все собственные значения и собственные подпространства. Пусть  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  – все собственные значения с кратностями  $n_1, \dots, n_k$ . Тогда  $F^n = V_{\lambda_1} \oplus \dots \oplus V_{\lambda_k}$ .
2. Надо выбрать произвольное подпространство  $U_i \subseteq V_{\lambda_i}$  (включая нулевое и все  $V_{\lambda_i}$  целиком). Тогда  $U_1, \dots, U_k$  будут линейно независимыми и  $U = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$  будут все возможные инвариантные подпространства.

### 25 Проверка на диагонализуемость

**Дано** Матрица  $A \in M_n(F)$ , задающая линейный оператор  $\varphi: F^n \rightarrow F^n$ .

**Задача** Выяснить существует ли базис, в котором  $\varphi$  задается диагональной матрицей и если задается, то какой именно. На матричном языке: существует ли невырожденная матрица  $C \in M_n(F)$  такая, что  $C^{-1}AC$  является диагональной и найти эту диагональную матрицу.

<sup>6</sup>Если говорить правду, то алгоритм то есть, но он такой геморройный и требует знаний, которых пока у нас нет, так что да ну его.

### Алгоритм

1. Найдем характеристический многочлен  $\chi(t)$  для  $\varphi$ , он же для  $A$  по формуле  $(-1)^n \chi(t) = \det(A - tE)$ .
2. Проверим, раскладывается ли  $\chi(t)$  на линейные множители над  $F$ , то есть представляется ли он в виде  $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_k)^{d_k}$ . Если не представляется, то  $\varphi$  (или что то же самое  $A$ ) не диагонализируется.
3. Если  $\chi(t) = (t - \lambda_1)^{d_1} \dots (t - \lambda_k)^{d_k}$ . Найдем для каждого  $\lambda_i$  базис  $V_{\lambda_i}$  как ФСР системы  $(A - \lambda_i E)x = 0$ . Если для хотя бы одного  $i$  количество элементов в ФСР меньше соответствующей кратности корня  $d_i$ , то  $\varphi$  не диагонализируется.
4. Если для каждого  $i$  мы получили, что размер ФСР совпадает с кратностью корня, то есть  $\dim V_{\lambda_i} = d_i$ . То  $\varphi$  диагонализируется. В этом случае матрица  $C$  состоит из собственных векторов. Если собственные векторы для  $\lambda_i$  есть  $\{v_{i1}, \dots, v_{id_i}\}$ , то  $C = (v_{11} | \dots | v_{1d_1} | v_{21} | \dots | v_{2d_2} | \dots | v_{k1} | \dots | v_{kd_k})$ . При этом в новом базисе будет диагональная матрица  $C^{-1}AC = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_2, \dots, \lambda_k, \dots, \lambda_k)$ , где каждое  $\lambda_i$  встречается  $d_i$  раз.

Заметим, что если поле  $F$  алгебраически замкнуто, то первый шаг алгоритма выполнен автоматически, а именно, над алгебраически замкнутым полем любой многочлен разлагается на линейные множители. Потому в этом случае вопрос о диагонализированности – это лишь проверка всех равенств  $\dim V_{\lambda_i} = d_i$ .

## 26 Определить ЖНФ у оператора

**Дано** Матрица  $A \in M_n(F)$ , где поле  $F$  алгебраически замкнуто.

**Задача** Определить все собственные значения и размеры клеток в жордановой нормальной форме.

### Алгоритм

1. Собственные значения совпадают со спектром их ищем, как корни характеристического многочлена  $\chi_A(t) = (-1)^n \det(A - tE) = 0$ . Получаем набор корней и их кратности  $(\lambda_1, n_1), \dots, (\lambda_k, n_k)$ .
2. Для каждого  $\lambda_i$  суммарный размер клеток равен  $n_i$ . Потому надо определить количество клеток для всех  $k \in [1, n_i]$ . Количество клеток считается по формуле

$$\text{количество клеток размера } k = \text{rk}(A - \lambda_i E)^{k+1} + \text{rk}(A - \lambda_i E)^{k-1} - 2 \text{rk}(A - \lambda_i E)^k$$

Обратите внимание, что если вы нашли  $m$  клеток размера  $k$ , а кратность была  $n_i$ , то на оставшиеся клетки уходит  $n_i - mk$  мест. Этим можно пользоваться, чтобы не считать все количества клеток подряд.

## 27 Определение ЖНФ у матриц 2 на 2

**Дано** Матрица  $A \in M_2(F)$ , где поле  $F$  алгебраически замкнутое.

**Найти** Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

**Алгоритм** Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен  $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ . И посчитаем его корни. Есть два варианта:

(а) два разных корня  $\lambda$  и  $\mu$ . В этом случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$



- (b) один корень  $\lambda$  кратности 2. В этом случае, если  $A = \lambda E$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

В противном случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

## 28 Определить Жорданов базис у матриц 2 на 2

**Дано** Матрица  $A \in M_2(F)$ , где поле  $F$  алгебраически замкнутое.

**Задача** Зная ЖНФ определить жорданов базис  $f_1, f_2$ .

### Алгоритм

1. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \mu \end{pmatrix}$$

В этом случае оператор диагонализум, а значит базис выбирается из собственных векторов. Есть два способа найти их:

- (a) Вектор  $f_1$  находим как ненулевое решение системы  $(A - \lambda E)x = 0$ , а вектор  $f_2$  находим как ненулевое решение системы  $(A - \mu E)x = 0$ .
- (b) Вектор  $f_1$  находим как ненулевой столбец матрицы  $A - \mu E$ , а вектор  $f_2$  находим как ненулевой столбец матрицы  $A - \lambda E$ .

2. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае подходит любой базис.

3. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис образует цепочку

$$\begin{array}{c} f_2 \\ \downarrow A - \lambda E \\ f_1 \\ \downarrow A - \lambda E \\ 0 \end{array}$$

В этом случае векторы базиса ищутся так

- (a) Выбираем случайный вектор  $f_2$ . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- (b) Полагаем  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ .
- (c) Если  $f_1 = 0$ , то вернуться к выбору вектора  $f_2$ . Если  $f_1 \neq 0$ , то  $f_1, f_2$  – искомый базис.

## 29 Определение ЖНФ у матриц 3 на 3

**Дано** Матрица  $A \in M_3(F)$ , где поле  $F$  алгебраически замкнуто.

**Найти** Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить все числа.

**Алгоритм** Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

1. Найдем характеристический многочлен  $\chi_A(t) = -\det(A - tE)$  и посчитаем его корни. Возможны следующие варианты:
  - три разных корня  $\lambda, \mu, \gamma$ .
  - один корень  $\lambda$  кратности 2, один корень  $\mu$  кратности 1.
  - один корень  $\lambda$  кратности 3.
2. Три разных корня. В этом случае ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

3. Два разных корня,  $\lambda$  кратности 2 и  $\mu$  кратности 1. В этом случае, если  $\text{rk}(A - \lambda E) = 1$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

В противном случае (то есть, если  $\text{rk}(A - \lambda E) = 2$ ) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

4. Один корень  $\lambda$  кратности 3. Если  $A = \lambda E$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

Если  $\text{rk}(A - \lambda E) = 1$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В противном случае (то есть  $\text{rk}(A - \lambda E) = 2$ ) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

### 30 Определить Жорданов базис у матриц 3 на 3

**Дано** Матрица  $A \in M_3(F)$ , где поле  $F$  алгебраически замкнуто.

**Задача** Зная ЖНФ определить жорданов базис  $f_1, f_2, f_3$ .

## Алгоритм

1. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \mu & \\ & & \gamma \end{pmatrix}$$

В этом случае оператор диагонализуем, а значит базис выбирается из собственных векторов. Базис можно найти следующим образом. Вектор  $f_1$  – ненулевое решение системы  $(A - \lambda E)x = 0$ , вектор  $f_2$  – ненулевое решение системы  $(A - \mu E)x = 0$ , вектор  $f_3$  – ненулевое решение системы  $(A - \gamma E)x = 0$ .

2. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

В этом случае оператор диагонализуем, а значит базис выбирается из собственных векторов. Базис можно найти одним из двух способов ниже:

- (а) Вектор  $f_3$  берется как решение системы  $(A - \mu E)x = 0$ , векторы  $f_1, f_2$  берутся как ФСР системы  $(A - \lambda E)x = 0$ .
- (б) Вектор  $f_3$  берется как ненулевой столбец матрицы  $A - \lambda E$ , векторы  $f_1, f_2$  берутся, как линейно независимые столбцы матрицы  $A - \mu E$ .

3. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае в качестве жорданова базиса годится любой базис.

4. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \mu \end{pmatrix}$$

В этом случае вектор  $f_3$  находится как решение системы  $(A - \mu E)x = 0$ . Векторы  $f_1, f_2$  можно найти одним из следующих способов:

- (а) Найдем ФСР системы  $(A - \lambda E)^2 x = 0$ , пусть это будет  $x_1, x_2$ . Тогда в качестве  $f_2$  берем один из векторов  $x_i$ , а  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ . В итоге выбираем такое  $x_i$  в качестве  $f_2$ , чтобы  $f_1$  был не ноль.
- (б) В качестве вектора  $f_2$  перебираем столбцы матрицы  $A - \mu E$  до тех пор, пока  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$  не станет ненулевым. Как только  $f_1$  будет не ноль, векторы  $f_1, f_2$  – искомые.

5. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис имеет конфигурацию

$$\begin{array}{ccc} f_2 & & \\ \downarrow A - \lambda E & & \\ f_1 & & f_3 \\ \downarrow A - \lambda E & & \downarrow A - \lambda E \\ 0 & & 0 \end{array}$$

В этом случае базис ищем по следующему алгоритму

- (а) Вектор  $f_2$  выбираем случайно из всего пространства  $F^3$ . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.

- (b) Вектор  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ . Если  $f_1 = 0$ , то возвращаемся к шагу выбора вектора  $f_2$ .
- (c) В случае когда  $f_1 \neq 0$  это будет вектор из  $\ker(A - \lambda E)$ , надо дополнить его до базиса ядра. Это можно сделать так: находим ФСР для системы  $(A - \lambda E)x = 0$  и дополняем  $f_1$  любым вектором из ФСР, который не пропорционален  $f_1$ , это и будет  $f_3$ .

6. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае жорданов базис имеет конфигурацию

$$\begin{array}{c} f_3 \\ \downarrow A - \lambda E \\ f_2 \\ \downarrow A - \lambda E \\ f_1 \\ \downarrow A - \lambda E \\ 0 \end{array}$$

В этом случае базис ищется по следующему алгоритму

- (a) Случайно выбираем  $f_3$  из  $F^3$ . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- (b) Положим  $f_2 = (A - \lambda E)f_3$  и  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ .
- (c) Если вектор  $f_1$  равен нулю, то возвращаемся к шагу выбора  $f_3$  иначе получили нужный базис.

### 31 Определение ЖНФ у матриц 4 на 4 с одним собственным значением

**Дано** Матрица  $A \in M_4(F)$  с единственным собственным значением  $\lambda \in F$ , где поле  $F$  алгебраически замкнуто.

**Найти** Жорданова форма может быть одной из

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & 1 \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Определить какая форма в нашем случае и определить собственное значение.

**Алгоритм** Общая идея в том, чтобы подобрать инварианты, которые достаточно рассчитать для выбора из предоставленных вариантов.

- Найдем характеристический многочлен  $\chi_A(t) = \det(A - tE)$ . Нам нужно найти его единственный корень. Так как многочлен имеет вид  $(t - \lambda)^4$ , то можно найти его 3-ю производную и решить  $\chi_A(t)^{(3)} = 0$  для нахождения корня. Это работает, если  $2 \neq 0$  и  $3 \neq 0$  в поле  $F$ .<sup>7,8</sup>
- Если  $A = \lambda E$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

<sup>7</sup> Действительно, третья производная от  $(t - \lambda)^4$  будет  $4!(t - \lambda)$ . Если 2 и 3 обратимы в  $F$ , то можно сократить на  $4!$ .

<sup>8</sup> Можно воспользоваться любым другим приемлемым способом по поиску корня многочлена.

3. Если  $\text{rk}(A - \lambda E) = 1$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

4. Если  $\text{rk}(A - \lambda E) = 3$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

5. Если  $\text{rk}(A - \lambda E) = 2$ , то надо посмотреть на  $(A - \lambda E)^2$ . Если  $(A - \lambda E)^2 = 0$ , то ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

иначе (если  $(A - \lambda E)^2 \neq 0$ ) ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

## 32 Определить Жорданов базис у матриц 4 на 4 с единственным собственным значением

**Дано** Матрица  $A \in M_4(F)$  с единственным собственным значением  $\lambda$ , где поле  $F$  алгебраически замкнутое.

**Задача** Зная ЖНФ определить жорданов базис  $f_1, f_2, f_3, f_4$ .

**Алгоритм**

1. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае любой базис годится в качестве жорданова.

2. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{ccc} f_2 & & \\ \downarrow A - \lambda E & & \\ f_1 & f_3 & f_4 \\ \downarrow A - \lambda E & \downarrow A - \lambda E & \downarrow A - \lambda E \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

В этом случае базис находится по следующему алгоритму

- (a) Вектор  $f_2$  выбираем случайно из  $F^4$ . Всегда достаточно выбрать из стандартных базисных векторов.
- (b) Положим  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ . Если вектор  $f_1 = 0$ , то вернемся к шагу выбора вектора  $f_2$ .
- (c) Вектор  $f_1$  будет лежать в  $\ker(A - \lambda E)$  теперь его надо дополнить до базиса ядра двумя векторами. Это можно сделать так: находим ФСР системы  $(A - \lambda E)x = 0$  и из трех векторов выберем два  $f_3, f_4$ , которые будут линейно независимы с  $f_1$ .

3. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{ccc} f_3 & & \\ \downarrow A-\lambda E & & \\ f_2 & & \\ \downarrow A-\lambda E & & \\ f_1 & & f_4 \\ \downarrow A-\lambda E & & \downarrow A-\lambda E \\ 0 & & 0 \end{array}$$

В этом случае базис находится по следующему алгоритму

- (a) Вектор  $f_3$  выбираем случайно в  $F^4$ . Всегда достаточно выбрать из стандартных базисных векторов.
- (b) Положим  $f_2 = (A - \lambda E)f_3$  и  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ . Если  $f_1 = 0$ , то вернуться к шагу выбора вектора  $f_3$ .
- (c) Вектор  $f_1$  лежит в  $\ker(A - \lambda E)$ , его надо дополнить одним вектором  $f_4$  до базиса ядра. Это можно сделать следующим образом. Найдем ФСР системы  $(A - \lambda E)x = 0$  и дополним вектор  $f_1$  одним вектором из ФСР, чтобы полученная пара была линейно независима.

4. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & 1 & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{c} f_4 \\ \downarrow A-\lambda E \\ f_3 \\ \downarrow A-\lambda E \\ f_2 \\ \downarrow A-\lambda E \\ f_1 \\ \downarrow A-\lambda E \\ 0 \end{array}$$

В этом случае базис находится по следующему алгоритму

- (a) Вектор  $f_4$  выбираем случайно из  $F^4$ . Всегда достаточно выбрать из стандартных базисных векторов.
- (b) Положим  $f_3 = (A - \lambda E)f_4$ ,  $f_2 = (A - \lambda E)f_3$ ,  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ . Если  $f_1 = 0$ , то вернуться к шагу перебора  $f_4$  иначе получился искомый базис.

5. Пусть ЖНФ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & & \\ & & \lambda & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix}$$

В этом случае конфигурация жорданова базиса будет следующая

$$\begin{array}{ccc} f_2 & & f_4 \\ \downarrow A-\lambda E & & \downarrow A-\lambda E \\ f_1 & & f_3 \\ \downarrow A-\lambda E & & \downarrow A-\lambda E \\ 0 & & 0 \end{array}$$

В этом случае базис можно найти по следующему алгоритму.

- Выбираем вектор  $f_2$  случайно в  $F^4$ . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- Положим  $f_1 = (A - \lambda E)f_2$ . Если  $f_1 = 0$ , то вернуться к шагу выбора  $f_2$ .
- Выбираем вектор  $f_4$  случайно в  $F^4$ . Всегда достаточно выбирать из стандартных базисных векторов.
- Положим  $f_3 = (A - \lambda E)f_4$ . Если векторы  $f_1, f_3$  линейно зависимы, вернуться к шагу выбора  $f_4$ . Иначе получили искомый базис.

### 33 Найти матрицу билинейной формы при замене базиса

**Дано** Векторные пространства  $V$  и  $U$  над полем  $F$ . Пусть  $e = (e_1, \dots, e_n)$  и  $e' = (e'_1, \dots, e'_n)$  – базисы пространства  $V$ , а  $f = (f_1, \dots, f_m)$  и  $f' = (f'_1, \dots, f'_m)$  – базисы пространства  $U$ . Кроме того, известны матрицы перехода от  $e$  к  $e'$  и от  $f$  к  $f'$ , т.е.  $(e'_1, \dots, e'_n) = (e_1, \dots, e_n)C$  и  $(f'_1, \dots, f'_m) = (f_1, \dots, f_m)D$ , где  $C \in M_n(F)$  и  $D \in M_m(F)$  две обратимые матрицы. Дана билинейная форма  $\beta: V \times U \rightarrow F$  заданная в базисах  $e$  и  $f$  матрицей  $B \in M_{nm}(F)$ , т.е.  $b_{ij} = \beta(e_i, f_j)$ .

**Задача** Найти матрицу билинейной формы  $\beta$  в базисах  $e'$  и  $f'$ .

**Алгоритм**

- Пусть в базисах  $e'$  и  $f'$  мы имеем  $\beta(x, y) = x^t B' y$ , где  $B'$  – искомая матрица. Тогда  $B' = C^t B D$ .

### 34 Найти правое ортогональное дополнение к подпространству

**Дано** Дана билинейная форма  $\beta: F^n \times F^m \rightarrow F$  по правилу  $\beta(x, y) = x^t B y$ , где  $B \in M_{nm}(F)$  и подпространство  $V \subseteq F^n$ , заданное образующими  $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ .

**Задача** Найти  $V^\perp = \{y \in F^m \mid \beta(V, y) = 0\}$ .

**Алгоритм**

- Составить вектора  $v_i$  в столбцы матрицы  $D = (v_1 \mid \dots \mid v_k) \in M_{nk}(F)$ .
- Найти ФСР СЛУ  $D^t B y = 0$ . Данная ФСР дает базис  $V^\perp$ .

### 35 Найти левое ортогональное дополнение к подпространству

**Дано** Дана билинейная форма  $\beta: F^n \times F^m \rightarrow F$  по правилу  $\beta(x, y) = x^t B y$ , где  $B \in M_{nm}(F)$  и подпространство  $V \subseteq F^m$ , заданное образующими  $V = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$ .

**Задача** Найти  ${}^\perp V = \{x \in F^n \mid \beta(x, V) = 0\}$ .

### Алгоритм

1. Составить вектора  $v_i$  в столбцы матрицы  $D \in M_{nk}(F)$ .
2. Найти ФСР СЛУ  $D^t B^t x = 0$ . Данная ФСР дает базис  ${}^\perp V$ .

## 36 Симметричный Гаусс

**Дано** Симметричная билинейная форма  $\beta: F^n \times F^n \rightarrow F$  по правилу  $(x, y) \mapsto x^t B y$ , где  $B \in M_n(F)$  – симметричная матрица и при этом  $2 \neq 0$  в поле  $F$ .

**Задача** Диагонализировать  $\beta$ , то есть найти матрицу перехода к новому базису  $C$  такую, чтобы  $B' = C^t B C$  была диагональная, и посчитать саму матрицу  $B'$ .

### Алгоритм

1. Чтобы найти матрицу  $B'$  будем приводить ее к диагональному виду симметричными элементарными преобразованиями, то есть допускаются следующие преобразования:
  - Прибавить  $i$ -ю строку умноженную на  $\lambda$  к  $j$ -ой строке и сразу же прибавление  $i$ -го столбца умноженного на  $\lambda$  к  $j$ -ому столбцу.
  - Поменять местами  $i$ -ю и  $j$ -ю строку и тут же поменять местами  $i$ -ый и  $j$ -ый столбец.
  - Умножить  $i$ -ю строку на ненулевое  $\lambda$  и тут же умножить  $i$ -ый столбец на то же самое  $\lambda$ .

Получившаяся диагональная матрица будет искомая  $B'$ .

2. Если при этом надо восстановить матрицу  $C$ , то рассматриваем  $(B|E)$  и делаем симметричные элементарные преобразования над ней в том смысле, что преобразования над строками выполняются над всей матрицей, а преобразования над столбцами только над частью, где лежит  $B$ . Тогда матрица приведется к виду  $(B'|C^t)$ .

## 37 Метод Якоби

**Дано** Симметричная билинейная форма  $\beta: V \times V \rightarrow F$ , базис  $e_1, \dots, e_n$  пространства  $V$ , такой, что  $\det \beta|_{\langle e_1, \dots, e_k \rangle} \neq 0$ .

**Задача** Найти базис  $e'_1, \dots, e'_n$  такой, что  $e'_i - e_i \in \langle e_1, \dots, e_{i-1} \rangle = \langle e'_1, \dots, e'_{i-1} \rangle$  такой, что  $\beta(e'_i, e'_j) = 0$  при  $i \neq j$ .

### Алгоритм

1. В начале положим  $e'_1 = e_1$ .
2. Пусть мы нашли вектора  $e'_1, \dots, e'_{i-1}$ . Тогда положим вектор  $e'_i$  в виде<sup>9</sup>

$$e'_i = e_i - \frac{\beta(e_i, e'_1)}{\beta(e'_1, e'_1)} e'_1 - \dots - \frac{\beta(e_i, e'_{i-1})}{\beta(e'_{i-1}, e'_{i-1})} e'_{i-1}$$

## 38 Алгоритм диагонализации на основе метода Якоби

**Дано** Симметрическая матрица  $B \in M_n(F)$ .

**Задача** Проверить, что все ее угловые подматрицы  $B_k$  невырождены и если это так, то найти их значения, а также найти верхнетреугольную матрицу с единицами на диагонали  $C \in M_n(F)$  и диагональную матрицу  $D \in M_n(F)$  такие, что  $B = C^t D C$ .

---

<sup>9</sup>В силу условия  $\det \beta|_{\langle e_1, \dots, e_k \rangle} \neq 0$  выражения вида  $\beta(e'_k, e'_k)$  будут всегда отличны от нуля.



## Алгоритм

1. Начнем приводить матрицу  $B$  к верхнетреугольному виду элементарными преобразованиями первого типа, когда нам разрешено прибавлять строку с коэффициентом только к более низкой строке. Возможны два исхода:
  - На каком-то этапе получили, что на диагонали на  $k$ -ом месте стоит 0, а под диагональю есть ненулевой элемент. Это значит, что  $\Delta_k = 0$ . Условие на матрицу не выполнено.
  - Мы привели матрицу  $B$  к верхнетреугольной матрице  $U$ . Переходим к следующему шагу.
2. Восстановим все необходимые данные по матрице  $U$  следующим образом:
  - (a)  $D$  – диагональ матрицы  $U$ .
  - (b)  $C = D^{-1}U$ .
  - (c)  $\Delta_k$  – произведение первых  $k$  элементов диагонали матрицы  $D$ .