Экзаменационная программа по курсу «Аналитическая геометрия», осенний семестр 2023–2024 учебного года (кроме ЛФИ) С комментариями

16 января 2024 г.

1 Векторы

a - вектор
α - число
$|a|$ - модуль вектора

1.1 Направленные отрезки и векторы, линейные операции над ними.

Опр. Вектор, коллинеарность (прямая), компланарность(плоскость), равенство Линейные операции: сложение (строим равные), умножение на число (умножаем модуль, смотрим на направление)

1.2 Свойства линейных операций.

$a + b = b + a$
$(a + b) + c = a + (b + c)$
$a + 0 = a$
$a + (-1)a = 0$
$(\alpha\beta)a = \alpha(\beta a)$
$(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a$
$\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$
$1 \cdot a = a$

1.3 Коллинеарность и компланарность векторов.

см 1.1

1.4 Линейно зависимые и независимые системы векторов.

Опр. Вектор b раскладывается по векторам $a_1, \ldots, a_k$, если он представим как их ЛК с некоторыми коэффициентами(могут определяться не однозначно).
Опр. ЛНЗ система векторов, если $\overline{0}$ раскладывается по ней единственным образом (другими словами, если ЛК равна нулю, то все коэффициенты нули)
Опр. ЛЗ система векторов, если $\overline{0}$ раскладывается по ней НЕ единственным образом (другими словами, если ЛК равна нулю и хотя бы **один** коэффициент не ноль)

ЛНЗ = все нули
ЛЗ = НЕ все нули

Свойства:
если среди векторов системы есть нулевой вектор, то система ЛЗ
если в ЛЗ системе 1 вектор, то он нулевой $\overline{0}$

если к ЛЗ зависимой системе добавить какой-то набор векторов, то получится ЛЗ система.
если в системе какая-то часть ЛЗ, то система ЛЗ
Любая часть ЛНЗ системы ЛНЗ

Пр. если разложение по $a_1, ..., a_k$ единственно $\Leftrightarrow a_1, ..., a_k$ ЛНЗ.
д-во: от противного в обе стороны

Th Критерий ЛЗ. ЛЗ системе $\Leftrightarrow$ один из векторов раскладывается по остальным.
д-во: очев по определению

1.5 Связь линейной зависимости с коллинеарностью и компланарностью векторов.

Теорема
$\{a\}$ ЛЗ $\Leftrightarrow a = \overline{0}$
$\{a, b\}$ ЛЗ $\Leftrightarrow a, b$ коллинеарны
$\{a, b, c\}$ ЛЗ $\Leftrightarrow a, b, c$ компланарны
$\{a, b, c, d\}$ ЛЗ РАЗОБРАТЬ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО

1.6 Базис, координаты вектора в базисе.

Опр. Множество замкнуто относительно некоторой операции, если для любых элементов мн-ва результат применения этой операции принадлежит этому множеству.
Опр. Мн-во векторов, замкнуто относительно линейной операции, называется векторным пространством.
Опр. Базисом в векторном пр-ве называется упорядоченная, ЛНЗ система векторов такая, что любой вектор этого пр-ва по ней раскладывается.

Из теоремы выше (отрицание теоремы) следует:
в нулевом пространстве базиса нет
в одномерном пространстве базис - один ненулевой вектор
в двумерном пространстве базис - упорядоченная пара неколл. векторов
в трехмерном простравнсте базис - упорядоченная тройка некомпланарных векторов

Любой вектор раскладывается по базису единственным образом
Опр. Координаты вектора - коэффициенты при разложении по базису

1.7 Действия с векторами в координатах.

При умножении вектора на число все его компоненты умножаются на это число.
При сложении векторов их соответствующие компоненты складываются.
д-во: раскрыть скобки :)

2 Системы координат

2.1 Определения общей декартовой и прямоугольной (ортонормированной) системы координат

Опр. Декартова СК в пространстве - совокупность точки и базиса.
точка - начало координат
оси координат - прямые проходящие через начало координат в направлении базисных векторов (абсцисс, ординат, аппликат)
кооординатные плоскости - плоскости, проходящие через оси координат

Опр. Дана ДСК (O, e_1, e_2, e_3)
Компоненты x, y, z радиус-вектора OM точки M называются ее координатами в данной СК

Опр. Ортонормированный базис (ОНБ) - векторы базиса попарно ортогональны и по длине равны 1.

Опр. Прямоугольная Декартова Система координат (ПДСК) - ДСК, базис которой ортонормированный.

2.2 Матрица перехода и ее основное свойство.

Выбор базиса ничем на ограничен, поэтому принципиальное значение имеет задача о нахождении компонент вектора в данном базисе по его компонентам в другом базисе.

старая СК	новая СК	
$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ b_{12} & b_{22} & b_{32} \\ c_{13} & c_{23} & c_{33} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$	Строки это столбцы

$S = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$ Матрица перехода от O к O'

2.3 Изменение координат вектора при замене базиса.

$(e'_1, e'_2, e'_3) = (e_1, e_2, e_3) \cdot S$

2.4 Изменение координат точки при переходе к новой системе координат.

Рассмотрим две ДСК
Старая $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ и новая $\{O', e'_1, e'_2, e'_3\}$
M (x, y, z) и (x', y', z') соответственно
O' (a_{10}, a_{20}, a_{30}) в старой СК
Выразим x, y, z через x', y', z'
$OM = OO' + O'M$
Разложим по базису $\{e_1, e_2, e_3\}$
Получим систему как матрица перехода (очень похоже)

2.5 Формулы перехода от одной прямоугольной системы координат на плоскости к другой.

$$\begin{cases} x = a_{11}x' + a_{12}y' + a_{10} \\ y = a_{21}x' + a_{22}y' + a_{20} \end{cases}$$

φ угол между e_1 и e'_1 отсчитываемый в направлении кратчайшего поворота

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 cos\varphi + e_2 sin\varphi \\ e'_2 = e_1 cos(\varphi \pm \pi/2) + e_2 sin(\varphi \pm \pi/2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} e'_1 = e_1 cos\varphi + e_2 sin\varphi \\ e'_2 = \mp e_1 sin\varphi \pm e_2 cos\varphi \end{cases}$$

ПЛЮС - поворот СК
МИНУС - не мб преобразование сделано поворотом базиса

$$\begin{cases} x = cos\varphi x' \mp sin\varphi y' + a_{10} \\ y = acos\varphi x' \pm sin\varphi y' + a_{20} \end{cases}$$

3. Скалярное произведение и его свойства. Ортогональные проекции. Выражение скалярного произведения в координатах, выражение в ортонормированном базисе. Формулы для определения расстояния между точками и угла между векторами.

4. Ориентация на плоскости и в пространстве. Смешанное и векторное произведения векторов, их свойства и геометрический смысл. Выражение смешанного и векторного произведений через координаты векторов. Условия коллинеарности и компланарности векторов. Формула двойного векторного произведения. Биортогональный (взаимный) базис.

5. Алгебраические линии и поверхности, их порядок. Теорема об инвариантности порядка линии на плоскости (поверхности в пространстве) при переходе к новой декартовой системе координат.

6. Векторные и координатные формы уравнения прямой на плоскости и в пространстве. Условия параллельности (или совпадения), перпендикулярности прямых на плоскости, заданных в координатной форме. Пучок прямых на плоскости. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве. Расстояние от точки до прямой на плоскости и в пространстве. Расстояние между двумя прямыми в пространстве.

7. Векторные и координатные формы уравнения плоскости. Условия параллельности (или совпадения) плоскостей, заданных в координатной форме. Расстояние от точки до плоскости в пространстве и расстояние между параллельными плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.

8. Алгебраические линии второго порядка на плоскости, их классификация. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду. Центр линии второго порядка, центральные и нецентральные линии.

9. Эллипс, гипербола и парабола, их свойства. Касательные к эллипсу, гиперболе и параболе.

10. Асимптотические направления и диаметры линий второго порядка.

11. Цилиндрические и конические поверхности. Поверхности вращения. Эллипсоид, гиперболоиды, параболоиды и конус второго порядка, их основные свойства. Прямолинейные образующие.

12. Отображения и преобразования плоскости. Произведение (композиция) отображений. Взаимно однозначное отображение, обратное отображение. Линейные преобразования плоскости.

13. Аффинные преобразования плоскости и их основные свойства. Геометрический смысл модуля и знака определителя аффинного преобразования плоскости. Аффинная классификация линий второго порядка. Ортогональные преобразования плоскости и их свойства. Разложение аффинного преобразования плоскости в произведение ортогонального преобразования и двух сжатий. Понятие о группе преобразований.

14. Алгебраические операции с матрицами. Элементарные преобразования матриц. Обратная матрица.

15. Определение детерминанта. Свойства детерминанта. Миноры, алгебраические дополнения. Детерминант произведения матриц. Правило Крамера. Критерий обратимости. Формула для элементов обратной матрицы.