

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 25

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Приведите квадратичную форму  $2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4$  (в  $\mathbb{R}^4$ ) к каноническому виду и найдите канонический базис, положительный и отрицательный индексы инерции.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: А.А.А. Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

76

ЗАДАЧА № 24

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Преобразование  $\varphi : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ , где  $M_{2 \times 2}$  — пространство матриц размера  $2 \times 2$ , задано правилом  $\varphi(X) = X \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}$ . Докажите, что  $\varphi$  линейно. Найдите собственные значения и собственные подпространства преобразования  $\varphi$ . Выясните, диагонализируемо ли  $\varphi$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 23

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите все действительные  $\lambda$ , при которых преобразование, заданное матрицей  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \lambda^2 - \lambda \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda^2 \end{pmatrix}$ , диагонализируемо.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Половинкин Е.С. Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЗАДАЧА № 22

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите базис в  $\mathbb{R}^2$ , в котором квадратичные формы  $13x_1^2 - 10x_1x_2 + 3x_2^2$  и  $-9x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$  имеют диагональный вид. Укажите полученный диагональный вид каждой из форм.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: А.А.Половинкин Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.



46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 21

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$  дана квадратичная форма

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3$$

(исходный базис — ортонормированный). Найдите ортонормированный базис, в котором эта форма имеет диагональный вид, и укажите этот диагональный вид.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: А.А. Попов Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА № 20

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Пусть  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  — ортогональное отражение относительно  $U^\perp$ , где подпространство  $U$  является линейной оболочкой вектора  $(1 \ -1 \ 1 \ -1)^T$ . Является ли  $\varphi$  ортогональным? Является ли  $\varphi$  самосопряженным? Найдите матрицу  $\varphi$  (в данном ортонормированном базисе).

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 19

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите ортонормированный базис, в котором преобразование, заданное матрицей  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$  (в исходном ортонормированном базисе в  $\mathbb{R}^3$ ), имеет диагональный вид; укажите этот диагональный вид.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: А.С. Половинкин Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЗАДАЧА № 18

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Подпространство  $U$  задано системой  $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$  Найдите  
систему линейных уравнений, задающую  $U^\perp$  (исходный базис в  $\mathbb{R}^4$  ортонормированный).

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.



76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 17

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите (в исходном ортонормированном базисе в  $\mathbb{R}^4$ ) матрицу ортогонального проектирования на подпространство, заданное уравнением

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0.$$

Является ли это преобразование самосопряженным? Является ли это преобразование ортогональным?

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: А.М.Сел Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЗАДАЧА № 16  
Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите ортонормированный базис в ортогональном дополнении к линейной оболочке вектора  $\mathbf{a} = (1 \ -1 \ -1 \ 1)^T$  (исходный базис в  $\mathbb{R}^4$  ортонормированный).

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 15

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В пространстве многочленов степени не выше второй скалярное произведение задано формулой  $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t) dt$ . Найдите некоторый ортонормированный базис в данном пространстве.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Половинкин Е.С. Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЗАДАЧА № 14

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите ортогональную проекцию вектора  $x = (0 \ 3 \ -6 \ 9)^T$  на линейную оболочку векторов  $a = (1 \ -1 \ 1 \ 0)^T$  и  $b = (3 \ -1 \ 2 \ 1)^T$  (исходный базис ортонормированный).

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.



76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 13

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите все значения  $\lambda$ , при которых будет положительно определенной квадратичная форма  $2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3$  (заданная в  $\mathbb{R}^3$ ).

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА № 12

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Приведите квадратичную форму  $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$  (в  $\mathbb{R}^3$ ) к каноническому виду, найдите положительный и отрицательный индексы инерции.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: А.С. Половинкин Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 11

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите инвариантные подпространства и выясните геометрический смысл преобразования  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , заданного в ортонормированном базисе матрицей  $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЗАДАЧА № 10

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Выясните, существует ли базис, в котором преобразование, заданное матрицей  $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 3 & 6 & 0 \end{pmatrix}$ , имеет диагональный вид. Если да, найдите этот базис и диагональный вид.

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: А. А. Петров Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.



46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 9

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите матрицу (в данном ортонормированном базисе пространства  $\mathbb{R}^3$ ) преобразования отражения относительно плоскости  $2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

УТВЕРЖДАЮ: А.А. Федосов Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА № 8

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Преобразование  $\varphi : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}$ , где  $M_{2 \times 2}$  — пространство матриц размера  $2 \times 2$ , задано правилом  $\varphi(X) = X^T \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ . Докажите, что  $\varphi$  линейно. Найдите базис  $\text{Ker } \varphi$  и  $\text{Im } \varphi$ . Найдите матрицу  $\varphi$ , выбрав базис в  $M_{2 \times 2}$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 7

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Докажите, что преобразование пространства  $P_2$  многочленов степени не выше двух, заданное правилом  $\varphi(f(x)) = 2f(x) + f'(x)$ , является изоморфизмом. Найдите матрицу  $\varphi^{-1}$ , выбрав базис в  $P_2$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: А.А.А. Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЗАДАЧА № 6

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Пусть линейное отображение  $\varphi : \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$  задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Найдите размерности и базисы  $\text{Ker } \varphi$  и  $\text{Im } \varphi$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.



76

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

Задача № 5

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите проекцию вектора  $(0 \ -1 \ -1 \ 4)^T$  пространства  $\mathbb{R}^4$  на подпространство  $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$  вдоль линейной оболочки вектора  $(1 \ -1 \ 1 \ 0)^T$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

ЗАДАЧА № 4

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

В пространстве  $\mathbb{R}^4$  заданы подпространство  $U_1$ , являющееся линейной оболочкой векторов  $(0 \ 1 \ 1 \ 2)^T$  и  $(1 \ 2 \ 2 \ 3)^T$ , а также подпространство  $U_2$ , заданное системой 
$$\begin{cases} x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Найдите размерности и базисы в подпространствах  $U_1 + U_2$  и  $U_1 \cap U_2$ .

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: А.М. Яковлев Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

46

Задача № 3

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Подпространство  $U$  пространства  $\mathbb{R}^4$  является линейной оболочкой векторов  $(0 \ 2 \ 1 \ -3)^T$ ,  $(2 \ -1 \ -2 \ 1)^T$ ,  $(2 \ 3 \ 0 \ -5)^T$ . Найдите систему линейных уравнений, для которой множеством решений является  $U$ . Единственное ли решение у этой задачи?

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Александр Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.

46

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

ЗАДАЧА № 2

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите все значения параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , при которых система совместна, решите систему при найденных значениях параметров:

$$\begin{cases} x_3 - 2x_4 = \alpha; \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3; \\ 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 2; \\ -3x_1 + 6x_2 - x_3 - 4x_4 = \beta. \end{cases}$$

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/ УТВЕРЖДАЮ: Половинкин Е.С. Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(государственный университет)  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

76

Задача № 1

Дисциплина: ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Найдите ранг матрицы  $A$  в зависимости от параметров  $\alpha$  и  $\beta$ , если

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -2 & \alpha \\ 2 & -4 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & -6 & 2 & 2 & 2 \\ -3 & 6 & -1 & -4 & \beta \end{pmatrix}.$$

1 курс, 2 семестр, 2014–2015 уч. год

Одобрено на заседании кафедры 21 апреля 2015 г.

/УТВЕРЖДАЮ: Менделеев Заведующий кафедрой Половинкин Е.С.