

Cúmulos Globulares: Colapso Gravitacional y Relajación

JEFFERSON ARIAS* KATHERINE CABALLERO† ERIKA PUENTES‡

Observatorio Astronómico Nacional, Universidad Nacional de Colombia,
Bogotá D.C., Colombia

Resumen

En el presente trabajo estudiaremos el problema de los N cuerpos haciendo uso de diferentes métodos computacionales, los cuales nos ayudarán a obtener datos referentes a la evolución del sistema. Explicaremos los algoritmos a usar para este problema y las condiciones iniciales usadas para ejecutar el mismo. Una vez obtenido el algoritmo nos proponemos a realizar una simulación para un sistema de 100 cuerpos, que partirán del reposo en posiciones aleatorias dentro de una esfera de radio 1 UA, dichas partículas tendrán una masa aleatoria entre 0 y $100 M_{\odot}$. Con estas condiciones iniciales se analizarán los datos obtenidos, tales como los perfiles de masa, comportamiento de la energía del sistema, entre otros.

Introducción

Los cúmulos globulares se posan en el halo galáctico, generalmente están formados por estrellas de Población II (tienen menos elementos pesados, ya sea por ser más viejas o por estar en regiones donde no se encontrarían predecesoras productoras de elementos pesados)¹. Poseen una simetría esférica, y dan la apariencia de haberse detenido en el tiempo, ya que no se evidencia formación estelar, ni tampoco presencia de condensaciones centrales y además poseen una velocidad de rotación lenta². El fenómeno del colapso gravitatorio de estos cúmulos autogravitantes se evidencia cuando el gas que permanece al rededor, ocasionalmente al ser exprimido ligeramente por movimientos aleatorios, comienza a colapsar sobre sí mismo en respuesta a la atracción gravitacional mutua de sus partículas³. En el campo de aplicación del problema de N cuerpos esto se determina por el equilibrio entre el colapso gravitacional y el soporte mecánico cuántico, con un modelo de simetría esférica simulando la fuerza que actúa

sobre cada partícula y resolviendo las integrales de movimiento, demostrando cómo el cuerpo se contrae y continúa contrayéndose hasta que se encuentra una singularidad física en $r = 0$.⁴

El efecto de una contracción gravitatoria produce un aumento de la temperatura y una disminución de la energía dando lugar a un sistema más ligado^{5,6,7}. La evolución de un modelo a un estado estacionario después de la etapa de colapso gravitatorio y el resultado de las condiciones iniciales del desequilibrio virial se pueden observar en un conjunto finito de partículas que interactúan entre sí por la atracción gravitatoria.⁸

La relajación ocurre cuando el estado inicial del sistema ligado gravitatoria mente se encuentra tan apartado del estado de equilibrio que los efectos a gran escala son los que ejercen presión en su evolución; durante el colapso, cada partícula se mueve en un potencial medio que fluctúa en el espacio y el tiempo de manera rápida. No sucede lo mismo con la energía de cada partícula individual⁹, por el hecho de que hubo una transición en el proceso de relajación, la velocidad de cada partícula es independien-

*jsariasc@unal.edu.co

†kcaballero@unal.edu.co

‡epuentesl@unal.edu.co

te de su masa¹⁰, sin embargo, en la simulación de N -cuerpos del colapso de un cúmulo globular, muestra que el sistema relajado resultante tiende a apartarse de las condiciones ideales del tensor de velocidades, cuando el cúmulo se ha relajado, el sistema tiende al equilibrio termodinámico.¹¹

Simulación del problema de N -cuerpos

En esta sección se describirá como se abordó el problema a la hora de implementarlo computacionalmente, por lo cual no nos centraremos en aspectos teóricos tales como las ecuaciones de movimiento que describen este sistema ampliamente estudiado en la mecánica clásica. No obstante cabe resaltar que estamos asumiendo un problema donde las partículas son puntuales y no cambian de masa al transcurrir el tiempo, así como la interacción que existe entre ellas es netamente gravitatoria.

Una vez hechas estas hipótesis, para desarrollar el problema creamos varias funciones que nos serán útiles y gastar la menor cantidad de recursos en la máquina. Una de estas funciones será la que describa las ecuaciones de movimiento para cada par de partículas posibles en nuestro sistema, regidas por una teoría clásica dada por la ley de gravitación de Newton.

```

8  dx = x.T - x
9  dy = y.T - y
10 dz = z.T - z
11
12 # matrix that stores 1/r^3 for all particle pairwise particle separations
13 inv_r3 = (dx**2 + dy**2 + dz**2 + softening**2)
14 inv_r3[inv_r3>0] = inv_r3[inv_r3>0]**(-1.5)
15
16 ax = G * (dx * inv_r3) @ mass
17 ay = G * (dy * inv_r3) @ mass
18 az = G * (dz * inv_r3) @ mass

```

Figura 1: Algoritmo implementado para el cálculo de la aceleración entre pares de partículas.

En la figura 1 se muestra el algoritmo para calcular la aceleración entre pares de partículas puntuales, partiendo del cálculo de la distancia entre las mismas con respecto al origen (0.0.0) de la grilla construida, posteriormente se calcula

el inverso de la distancia total e inverso a la potencia $-3/2$, en esta parte se añade sutilmente una constante, “softening”, la cual nos servirá para graficar el trazo de cada partícula y posteriormente realizar una animación; finalmente calculamos las tres componentes de aceleración guardándolas en un vector.

Una vez definida la aceleración, procedemos a calcular la energía cinética y potencial del sistema, la cual únicamente necesitará información de las posiciones y velocidades en un instante de tiempo dado. Ya con T y V , calcular la energía total del sistema será tan fácil como hacer $E_T = T + V$, esto último dado a que en teoría tenemos un sistema conservativo.

Por último, antes de obtener los datos y graficar, necesitamos definir nuestra distribución inicial esférica, con lo cual nos apoyaremos en las coordenadas esféricas y la librería **random.rand()** de **numpy** para la obtención de posiciones aleatorias dentro de una esfera unitaria.

```

14
15 def unitary_sphere(N):
16     pos = np.zeros([N,3])
17     for k in range(N):
18         r = 1.0 * np.random.rand() # 0<r<1
19         theta = pi*np.random.rand() #0<theta<2*pi
20         phi = 2*pi*np.random.rand() #0<phi<pi
21         pos[k][0] = r * np.sin(theta) * np.cos(phi)
22         pos[k][1] = r * np.sin(theta) * np.sin(phi)
23         pos[k][2] = r * np.cos(theta)
24     return pos
25
26

```

Figura 2: Algoritmo implementado para la realización de una distribución esférica aleatoria de masas.

En la figura 2 se muestra el algoritmo construido para la creación de dicha esfera unitaria, en este caso hemos decidido trabajar en coordenadas cartesianas, por lo cual usamos la transformación de coordenadas entre el sistema cartesiano y el esférico, creando variables aleatorias (r, θ, ϕ) en los rangos $0 < r < 1$, $0 < \theta < 2\pi$ y $0 < \phi < \pi$, para posteriormente volver al sistema cartesiano y retornar un vector de posiciones $(N \times 3)$.

Ya construidas todas las funciones necesarias, el siguiente paso es evolucionar el sistema con ayu-

da de algunos *ciclos for*, y añadiendo un parámetro de evolución temporal t , ya con estos datos nos proponemos a realizar las respectivas figuras para las posiciones de las partículas en algunos instantes de tiempo, al mismo tiempo del comportamiento de su energía cinética y potencial.

Para verificar el comportamiento de las masas durante la evolución del sistema se desarrolla una función capaz de originar un halo con un radio determinado y poder visualizar la distribución de masa en ese espacio, generando así un perfil esférico de masa.

```

tiempo0 #<-----instante de tiempo en multiples de dt 0-1-3-10-30-100
nn=1000 #<-----num de puntos en el array R (no cambia mucho al aumentarlo, puesto que son solo 100 masas)
xlimit=20 #<----- Radio maximo donde quiero visualizar
R = np.linspace(0,xlimit,nn)
M = np.zeros(nn)

for i in range(0,nn):
    mass2 = np.zeros(100)
    for j in range(0,100):
        norma = np.sqrt(final_pos[i,0,tiempo]**2 + final_pos[i,1,tiempo]**2 + final_pos[i,2,tiempo]**2)
        if norma<R[j]:
            mass2[j]=mass[i]*1.0
        else:
            mass2[j]=mass[i]*0.0
    M[i]=sum(mass2)

```

Figura 3: Algoritmo para perfil de masa

El algoritmo implementado en la figura 3 tiene como parámetros el tiempo para el cual se desea verificar el perfil de masa, el radio del halo y el desarrollo de un doble ciclo for que va a tomar las posiciones finales de las partículas, verifica cuales se encuentran dentro del radio determinado y las suma para mostrar la distribución de las mismas en el espacio.

Resultados y análisis

Para comprender un poco mejor la evolución del sistema a la hora de graficar hemos dividido las masas en dos grupos, las que su masa es menor a $5M_{\odot}$ y otro en que es mayor, con esto pretendemos observar si existe algún tipo de segregación debido a la cantidad de masa.

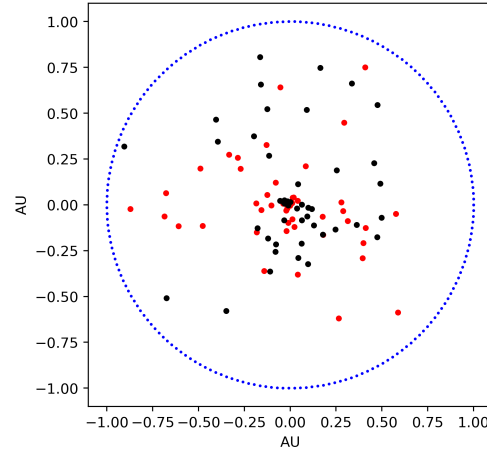


Figura 4: Evolución del sistema en un instante inicial de tiempo $t = 0$, los puntos en color azul representan un círculo unitario centrado en el origen.

En la figura 4 observamos el instante inicial $t = 0$, donde se muestran en color rojo las masas menores a $5M_{\odot}$ y en color negro las restantes, además de esto se evidencia la distribución esférica inicial, en la cual recordemos, las partículas parten de una posición aleatoria dentro de una esfera unitaria.

Cuando evolucionamos el sistema esperamos ver como interactúan gravitacionalmente las partículas entre sí, esto es mostrado en las figuras 5 y 6, en las cuales se tienen los instantes de tiempo $t = 10$ y $t = 20$ respectivamente, usando un área de visualización 40×40 UA. Es importante destacar que las figuras mostradas corresponden a una proyección 2D del sistema, en este caso mostramos el plano (x,y), puesto que en el código realizamos una animación en función del tiempo y esto nos ayuda a gastar menor recurso de máquina.

En estas imágenes observamos que comienzan a ocurrir cosas interesantes en el movimiento relativo de las masas, observando una segregación debido a la masa, partículas que se desligan del sistema y una estabilidad aparente del sistema de la cual hablaremos más adelante en la sección Discusión.

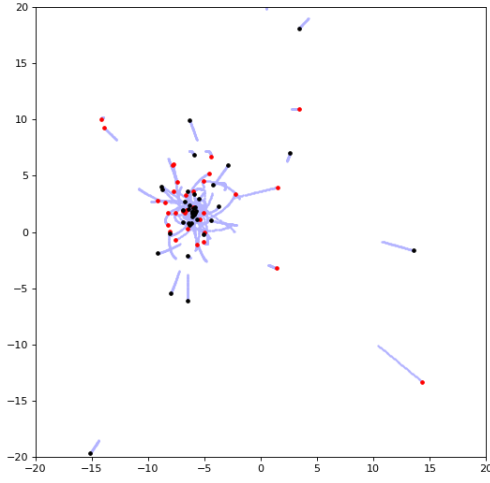


Figura 5: Evolución del sistema para el tiempo $t = 10$.

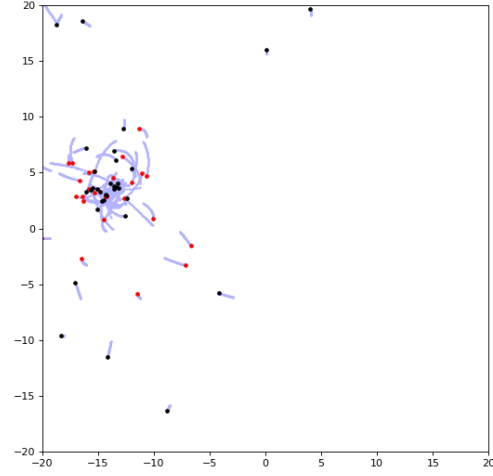


Figura 6: Evolución del sistema para el tiempo $t = 20$.

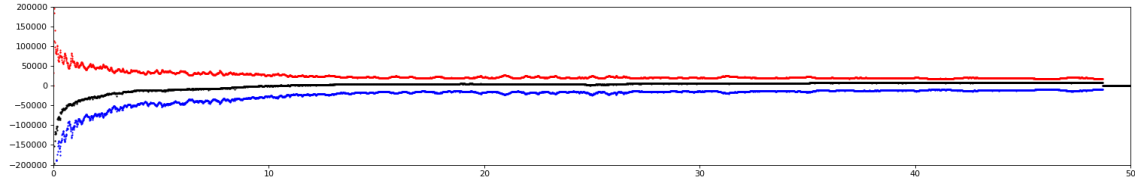


Figura 7: Energía Cinética, Potencial y Total en función del tiempo.

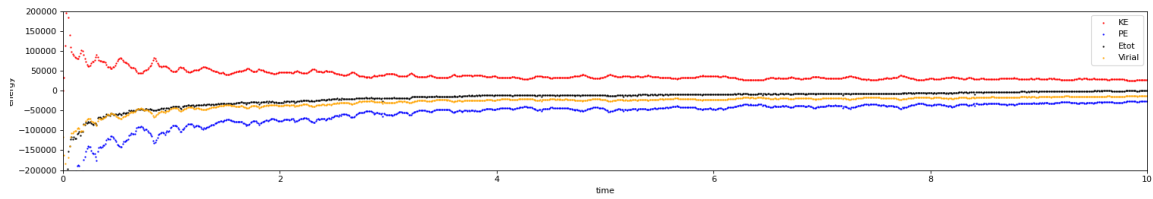


Figura 8: Correspondencia de la energía con la condición del Virial.

Ya con las posiciones obtenidas podemos calcular las velocidades para cada partícula, con lo cual podremos obtener la energía cinética y potencial para cada instante de tiempo. Esto es lo que se muestra en la figura 7, donde adicionalmente se plotea la energía total $E = T + V$,

siendo la energía cinética mostrada en rojo, la potencial en azul y la total en negro. Para realizar esta gráfica hemos seleccionado un paso de tal manera que el cambio de energía en un instante temporal sea mínimo, es decir, permanezca prácticamente constante.

Por otro lado podemos verificar que se cumpla la condición del *equilibrio virial* en el sistema de N cuerpos, con un potencial atractivo de la forma $V(r) = ar^n = ar^{-1}$, esto es:

$$\langle v \rangle = \frac{n}{2} \langle U \rangle = -\frac{1}{2} \langle U \rangle . \quad (1)$$

En la figura 8 se muestra dicha relación graficada en color naranja, con esto se ve una concordancia con la energía total, es decir,

$$2 \langle v \rangle = - \langle E_T \rangle . \quad (2)$$

Dentro de la figura 9 se observa un perfil de masa para el instante cero donde se evidencia la distribución de las distintas partículas en un radio=20 para el cual existe una mayor concentración de masa en su punto cero.

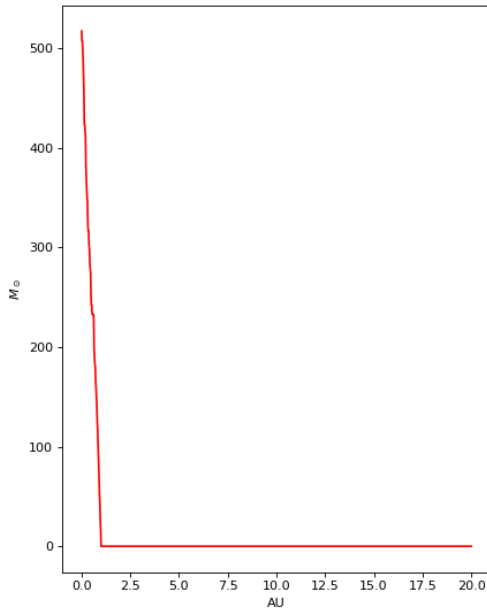


Figura 9: Perfil de masa t=0

Para las siguientes figuras 10, 11, 12, 13 y 14, se calcula el perfil de masa para los instantes

t=1, t=3, t=10, t=30 y t=50 donde se evidencia como a través del cambio del tiempo la distribución de masa se va segregando en el halo escogido.

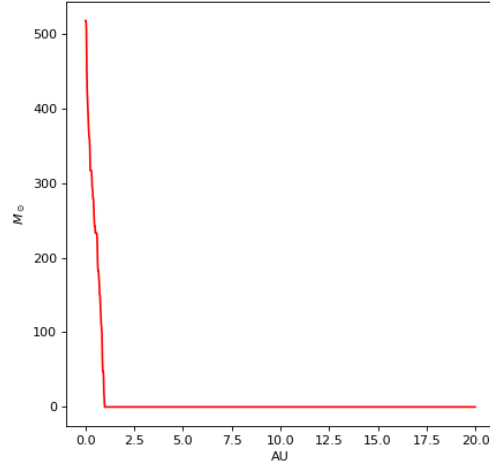


Figura 10: Perfil de masa t=1

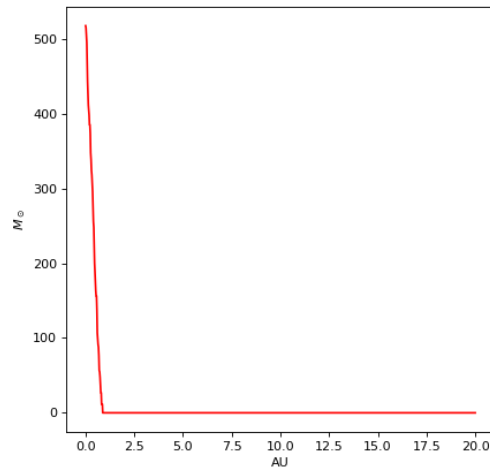


Figura 11: Perfil de masa t=3

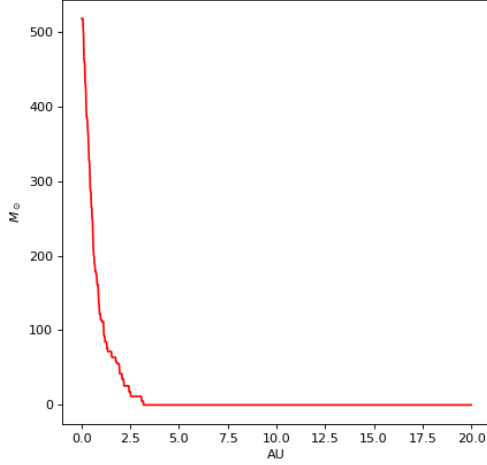


Figura 12: Perfil de masa t=10

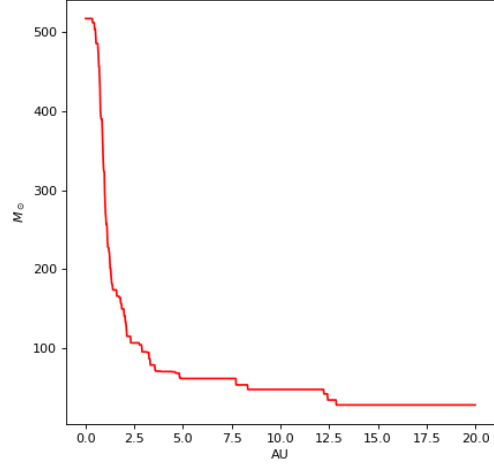


Figura 14: Perfil de masa t=100

Discusión

El equilibrio virial de un proceso de relajamiento en un sistema autogravitante de N partículas, unidas por la gravedad y moviéndose a distintas velocidades, alcanza un estado de estabilidad entre sus energías cinética y potencial a través de procesos de relajamiento, después de una serie de cambios rápidos en su potencial gravitacional¹², como lo demuestra nuestra simulación, en donde la conservación de la energía total lleva al sistema a un estado de casi equilibrio haciéndolo más compacto, y aunque este proceso no altera la energía total del mismo, sí cambia las energías individuales de sus partículas constituyentes con independencia de su masa, tal como se describe en Van den Bosch (2005)¹³ y Binney, *et al*, (2008)¹⁴.

Mendoza (2017)¹⁵ coincide con nuestro estudio en que la evolución del sistema a un estado estacionario después de la etapa de colapso gravitatorio es el resultado de las condiciones iniciales de un fuerte desequilibrio virial.

Larson en 1984¹⁶, al estudiar la masa de un cúmulo en la etapa posterior al colapso, llegó a la conclusión de que el cambio de la misma, conduciría a una disminución de la energía potencial

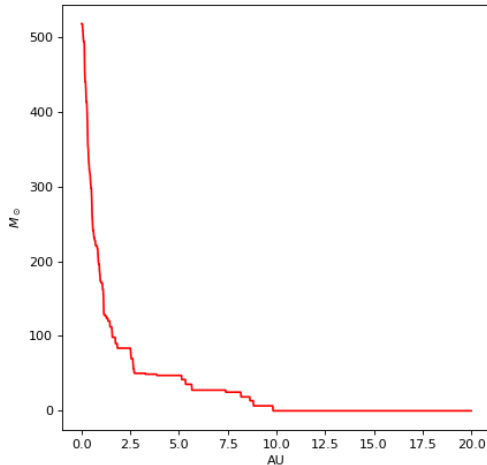


Figura 13: Perfil de masa t=30

del sistema, más adelante, Elson *et al.*, (1987)¹⁶ explicaba que es pérdida de masa suaviza el colapso gravitacional, esto nos sugiere que nuestro modelo conservativo sirve como punto de comparación con las soluciones de las ecuaciones de movimiento para un sistema de N -cuerpos más simétrico, aislado y autónomo de un análisis de estabilidad lineal.

Referencias

1. Forte, J. C. (1998). Sistemas de cúmulos globulares extragalácticos. BAAA, 42, 58-58.
2. Carpintero, D. D., Muzzio, J. C., & Wachlin, F. C. (1998). Movimiento regular y caótico en cúmulos globulares. Boletín de la Asociación Argentina de Astronomía La Plata Argentina, 42, 4-5.
3. Joshi, P. S., & Malafarina, D. (2011). Recent developments in gravitational collapse and spacetime singularities. International Journal of Modern Physics D, 20(14), 2641-2729.
4. Mocz, P., Vogelsberger, M., Robles, V. H., Zavala, J., Boylan-Kolchin, M., Fialkov, A., & Hernquist, L. (2017). Galaxy formation with BECDM-I. Turbulence and relaxation of idealized haloes. Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, 471(4), 4559-4570.
5. Quinlan, GD & Shapiro, SL (1990). La evolución dinámica de densos cúmulos de estrellas en núcleos galácticos. The Astrophysical Journal , 356 , 483-500.
6. Thorne, K. S. (1967). Gravitational collapse. Scientific American, 217(5), 88-102.
7. Lachieze-Rey, M. (1984). Dynamics of stellar systems: Violent relaxation and gravothermal catastrophe. Advances in space research, 3(10-12), 387-391.
8. Penrose, R. (1965). Colapso gravitacional y singularidades espacio-temporales. Cartas de revisión física , 14 (3), 57.
9. Kruskal, MD (1960). Extensión máxima de la métrica de Schwarzschild. Revisión física , 119 (5), 1743.
10. Schwarzschild, M. (2015). Estructura y evolución de las estrellas . Prensa de la Universidad de Princeton.
11. Chandrasekhar, S. & Milne, EA (1931). Las configuraciones altamente colapsadas de una masa estelar. Avisos mensuales de la Royal Astronomical Society , 91 (5), 456-466.
12. Aguilar, L. A. (2010). Procesos de Relajamiento, apuntes de Dinámica Galáctica. IAUNAM, México.
13. Van den Bosch, F.C., 2005, Dynamics of Collisionless Systems lecture notes, Astronomy Department, Yale University, <http://www.astro.yale.edu/vdbosch/lecture10.pdf>
14. Binney, J., & Tremaine, S. (2008). Galactic Dynamics, Princeton.
15. Mendoza, J. H. N. (2017). Extracción orbital in situ de simulaciones vivas de alta precisión de sistemas no colisionales formados por colapso frío. Universidad Complutense de Madrid.
16. LARSON R. B.: Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, vol. 206, 1984, p. 197
17. Elson, R., Hut, P. e Inagaki, S. (1987). Evolución dinámica de cúmulos globulares. Revisión anual de astronomía y astrofísica , 25 (1), 565-601.