Решаются биматричные игровые задачи для составленных кооперативных игр, рассчитываются для них характеристические функции выигрыша $v_{K_j}(\{N\})$. На основе условия групповой рациональности (существенности)

$$v_{K_j}(\{N\}) > v(N)$$

выделяются существенные игры, представляющие интерес для дальнейшего рассмотрения.

3. Из выделенных существенных игр выбирается игра с устойчивой конфигурацией, т.е. обеспечивающая максимальный выигрыш в кооперативной игре $v^*_{K_j}(\{N\})$ из всех возможных конфигураций.

4. Производится делёж внутри коалиций в выбранной игре на основе индивидуальных вкладов игроков в выигрыш коалиции или на основе индивидуальных выигрышей в некооперативной игре.

Проверяется условие индивидуальной рациональности (существенности):

$$\mu(\{F_k\}) > v(F_k), \quad k = 1, ..., n.$$

При выполнении этого условия конфигурация игры является экономически устойчивой. Если условие индивидуальной рациональности не выполняется, рассматривается существенная игра с меньшим значением характеристической функции.

Рассмотрим алгоритм выделения экономически устойчивых коалиций на конкретном примере.

Пример 5.2. Пусть задана игра трех лиц $(n = 3)$ в биматричной форме.

I-й против II-го (I – II):

$$\mathbf{A_I} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -2.25 & -2.75 \\ -2.5 & -3 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array}; \qquad \mathbf{A_{II}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -3.75 & -4 \\ -8.75 & -9 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array};$$

I-й против III-го (I – III):

$$\mathbf{A_I} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} 0.25 & -0.75 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array}; \qquad \mathbf{A_{III}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -1 & -0.75 \\ -2.25 & -2 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \end{array};$$

II-й против III-го (II – III):

$$\begin{array}{ccc} & z_1 & z_2 \\ \mathbf{A}_{\mathbf{II}} = & \begin{bmatrix} -2.5 & -3.75 \\ -2.75 & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \end{array}; \qquad \begin{array}{ccc} & z_1 & z_2 \\ \mathbf{A}_{\mathbf{III}} = & \begin{bmatrix} 1.75 & 2 \\ 0.75 & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} y_1 \\ y_2 \end{array} \end{array};$$

Здесь (x_1, x_2) — стратегии I-го игрока; (y_1, y_2) — стратегии II-го игрока; (z_1, z_2) — стратегии III-го игрока.

Найти решение данной игры в устойчивых коалициях.

Решение.

1. Решаем три биматричные игры, заданные в условии задачи, с целью определения «индивидуальных» выигрышей игроков. В данном примере рассматривается наиболее простой случай, когда решение биматричных игровых задач может быть найдено с помощью применения отношений доминирования исходя из условия, что каждый игрок хочет максимизировать свой выигрыш (см. п.3.2). В общем случае для решения биматричных игровых задач используется алгоритм Лемке–Хоусона, приведенный в разделе 3.4. Итак, выигрыши игроков в соответствующих биматричных играх будут такими:

$$\text{I – II:} \quad H_{\text{I}}^{\text{I–II}} = -2.25; \quad H_{\text{II}}^{\text{I–II}} = -3.75.$$
$$\text{I – III:} \quad H_{\text{I}}^{\text{I–III}} = -0.75; \quad H_{\text{III}}^{\text{I–III}} = -0.75.$$
$$\text{II – III:} \quad H_{\text{II}}^{\text{II–III}} = -3.75; \quad H_{\text{III}}^{\text{II–III}} = 2.$$

Здесь нижний индекс является номером игрока, а верхний показывает, биматричная игра каких игроков рассматривается. Так, к примеру, $H_{\text{I}}^{\text{I–II}}$ — выигрыш первого игрока в игре между первым и вторым игроками.

Решение трех биматричных игр позволяет вычислить «индивидуальный» выигрыш каждого из игроков:

$$v(\text{I}) = (H_{\text{I}}^{\text{I–II}} + H_{\text{I}}^{\text{I–III}})/2 = ((-2.25) + (-0.75))/2 = -1.5;$$
$$v(\text{II}) = (H_{\text{II}}^{\text{I–II}} + H_{\text{II}}^{\text{II–III}})/2 = ((-3.75) + (-3.75))/2 = -3.75;$$
$$v(\text{III}) = (H_{\text{III}}^{\text{I–III}} + H_{\text{III}}^{\text{II–III}})/2 = ((-0.75) + (2))/2 = 0.625.$$

Следовательно, характеристическая функция некооперативной игры $v(N)$ (или суммарный выигрыш трех игроков в этой игре) равен:

$$v(N) = v(\text{I,II,III}) = v(\text{I}) + v(\text{II}) + v(\text{III}) = -1.5 - 3.75 + 0.625 = -4.625.$$

2. Рассмотрим всевозможные конфигурации коалиций для данной игры; матрицы выигрышей для данных коалиций определяются с учетом того, что стратегии коалиции являются комбинациями всех возможных стратегий игроков, входящих в эту коалицию. Выигрыши при комбинированных стратегиях складываются.

a. Игра {I,II} против III.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{I,II}} = \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \left[\begin{array}{rr} -2.25 & -4.5 \\ -2.5 & -4.75 \\ -2.5 & -4.75 \\ -2.75 & -5 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{array}; \qquad \mathbf{A}_{\mathbf{III}} = \begin{array}{cc} z_1 & z_2 \\ \left[\begin{array}{rr} 0.75 & 1.25 \\ -0.25 & 0.25 \\ -0.5 & 0 \\ -1.5 & -1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1 y_1 \\ x_1 y_2 \\ x_2 y_1 \\ x_2 y_2 \end{array};$$

$$v(\{\mathrm{I,II}\}) = -4.5; \qquad v(\{\mathrm{III}\}) = 1.25.$$

Определяем характеристическую функцию выигрыша данной кооперативной игры $v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{N\})$ и проверяем выполнение условия групповой существенности (рациональности) $v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{N\}) > v(N)$:

$$v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{N\}) = v(\{\mathrm{I,II}\}) + v(\{\mathrm{III}\}) = -4.5 + 1.25 = -3.25 > -4.625 = v(N).$$

Условие групповой рациональности выполняется, следовательно, данная игра является существенной и участвует в дальнейшем рассмотрении.

b. Игра {I,III} против II.

Сначала преобразуем игру «II против III» в игру «III против II» путем транспонирования матриц.

$$\mathrm{III-II}: \quad \mathbf{A}_{\mathbf{III}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{rr} 1.75 & 0.75 \\ 2 & 1 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ z_1 \\ z_2 \end{array}; \quad \mathbf{A}_{\mathbf{II}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{rr} -2.5 & -2.75 \\ -3.75 & -4 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ z_1 \\ z_2 \end{array}.$$

После этого можно составить матрицы коалиционной игры (I,III) против II.

$$\mathbf{A}_{\mathbf{I,III}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{rr} -0.5 & -2 \\ -0.25 & -1.75 \\ -0.75 & -2.25 \\ -0.5 & -2 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1 z_1 \\ x_1 z_2 \\ x_2 z_1 \\ x_2 z_2 \end{array}; \quad \mathbf{A}_{\mathbf{II}} = \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \\ \left[\begin{array}{rr} -6.25 & -6.75 \\ -7.5 & -8 \\ -11.25 & -11.75 \\ -12.5 & -13 \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \\ x_1 z_1 \\ x_1 z_2 \\ x_2 z_1 \\ x_2 z_2 \end{array};$$

$$v(\{\mathrm{I,III}\}) = -0.25; \qquad v(\{\mathrm{II}\}) = -7.5.$$

Определяем характеристическую функцию выигрыша данной игры $v_{\text{I,III-II}}(\{N\})$ и проверяем выполнение условия групповой рациональности:

$$v_{\text{I,III-II}}(\{N\}) = v(\{\text{I,III}\}) + v(\{\text{II}\}) = -0.25 - 7.5 = -7.75 < -4.625 = v(N).$$

Условие групповой рациональности не выполняется, следовательно, данная игра является несущественной и в дальнейшем рассмотрении не участвует.

c. Игра I против {II,III}.

$$\mathbf{A_I} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} y_1z_1 & y_1z_2 & y_2z_1 & y_2z_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -2 & -3 & -2.5 & -3.5 \\ -2.5 & -3.5 & -3 & -4 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} x_1; \\ x_2 \end{array} \end{array} \qquad \mathbf{A_{II,III}} = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} y_1z_1 & y_1z_2 & y_2z_1 & y_2z_2 \end{array} & \\ \begin{bmatrix} -4.75 & -4.5 & -5 & -4.75 \\ -11 & -10.75 & -11.25 & -11 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} x_1; \\ x_2 \end{array} \end{array}$$

$$v(\{\text{I}\}) = -3; \qquad v(\{\text{II,III}\}) = -4.5.$$

Определяем характеристическую функцию выигрыша данной игры $v_{\text{I-II,III}}(\{N\})$ и проверяем выполнение условия групповой рациональности:

$$v_{\text{I-II,III}}(\{N\}) = v(\{\text{I}\}) + v(\{\text{II,III}\}) = -3 - 4.5 = -7.5 < -4.625 = v(N).$$

Условие групповой рациональности не выполняется, следовательно, данная игра является несущественной и в дальнейшем рассмотрении не участвует.

3. Далее из всех выделенных существенных игр выбирается игра с устойчивой конфигурацией, т. е. имеющая наибольшую характеристическую функцию выигрыша $v_K^*(\{N\})$. В нашем случае существенной является только игра {I,II} против III, поэтому далее будем рассматривать именно ее.

4. На последнем этапе производится дележ внутри коалиции {I,II} и проверка условий индивидуальной рациональности.

Рассмотрим два вида дележа.

a. Дележ с учетом индивидуальных вкладов I-го и II-го игрока в выигрыш коалиции

$$v(\{\text{I,II}\}) = -0.75 - 3.75 = -4.5.$$

Здесь

$$\mu(\{\text{I}\}) = -0.75 > -1.5 = v(\text{I}); \qquad \mu(\{\text{II}\}) = -3.75 = v(\text{II});$$

$$\mu(\{\text{III}\}) = v(\{\text{III}\}) = 1.25 > 0.625 = v(\text{III}).$$

Выигрыш $\mu(\{\mathrm{III}\})$ определен из решения соответствующей кооперативной игры. Таким образом, при таком способе дележа выигрыш получают I-й и III-й игроки, для II-го же игрока экономические предпосылки для организации кооперативной игры отсутствуют, поэтому рассмотрим другой способ дележа.

b. Дележ с учетом индивидуальных выигрышей игроков в некооперативной игре:

$$v(\mathrm{I}) = -1.5; \qquad v(\mathrm{II}) = -3.75; \qquad v(\mathrm{III}) = 0.625;$$

$$v(N) = v(\mathrm{I}) + v(\mathrm{II}) + v(\mathrm{III}) = -4.625;$$

$$\frac{v(\{\mathrm{I},\mathrm{II}\})}{v(\mathrm{I}) + v(\mathrm{II})} = \frac{\mu(\{\mathrm{I}\})}{v(\mathrm{I})}; \qquad \frac{v(\{\mathrm{I},\mathrm{II}\})}{v(\mathrm{I}) + v(\mathrm{II})} = \frac{\mu(\{\mathrm{II}\})}{v(\mathrm{II})};$$

$$\frac{-4.5}{-1.5 - 3.75} = \frac{\mu(\{\mathrm{I}\})}{-1.5}; \qquad \frac{-4.5}{-1.5 - 3.75} = \frac{\mu(\{\mathrm{II}\})}{-3.75}.$$

Здесь

$$\mu(\{\mathrm{I}\}) = -\frac{9}{7} > -1.5 = v(\mathrm{I}); \qquad \mu(\{\mathrm{II}\}) = -\frac{45}{14} > -3.75 = v(\mathrm{II});$$

$$\mu(\{\mathrm{III}\}) = v(\{\mathrm{III}\}) = 1.25 > 0.625 = v(\mathrm{III}).$$

Рассмотрим, какие предпосылки у игроков для организации кооперативной игры.

$$\Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{I}\}) = \mu(\{\mathrm{I}\}) - v(\mathrm{I}) \to$$

$$\to \Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{I}\}) = -\frac{9}{7} - (-1.5) = \frac{3}{14} = \frac{12}{56};$$

$$\Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{II}\}) = \mu(\{\mathrm{II}\}) - v(\mathrm{II}) \to$$

$$\to \Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{II}\}) = -\frac{45}{14} - (-3.75) = \frac{15}{28} = \frac{30}{56};$$

$$\Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{III}\}) = \mu(\{\mathrm{III}\}) - v(\mathrm{III}) \to$$

$$\to \Delta v_{\mathrm{I,II\text{-}III}}(\{\mathrm{III}\}) = 1.25 - 0.625 = 0.625 = \frac{5}{8} = \frac{35}{56}.$$

Таким образом, условия индивидуальной рациональности выполняются для всех игроков, следовательно, данная конфигурация коалиций является экономически устойчивой при рассмотренном способе дележа, причем игрок III имеет наиболее сильную предпосылку для организации существенной игры.