Пересечение множеств L и K — это точка C с координатами $\left(x=\frac{2}{9};\ y=\frac{3}{14}\right)$, которые и определяют оптимальные стратегии соответственно министерства и города. Графическая интерпретация решения данной игры представлена на рис. 3.4.

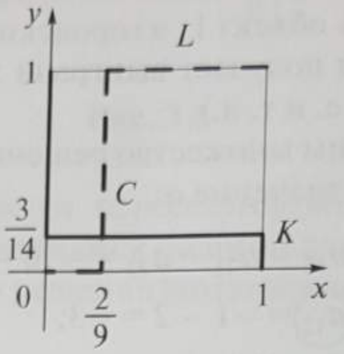

Рис. 3.4

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix};\qquad \mathbf{y}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{14} & \frac{11}{14}\end{bmatrix}.$$

При этом выигрыши сторон соответственно равны:

$$H_A=(x\quad 1-x)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-10 & 2\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/14\\ 11/14\end{bmatrix}=-\frac{4}{7};$$

$$H_B=(x\quad 1-x)\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ 1-y\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & -2\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3/14\\ 11/14\end{bmatrix}=\frac{1}{3};$$

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{2}{9} & \frac{7}{9}\end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}\frac{3}{14} & \frac{11}{14}\end{bmatrix}$; $H_A=-\frac{4}{7}$; $H_B=\frac{1}{3}$.

3.4. Аналитический метод решения биматричных игровых задач $m\times n$. Алгоритм Лемке–Хоусона

Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — матрицы выигрышей соответственно игроков A и B размерности $(m\times n)$; m — число чистых стратегий игрока A; n — число чистых стратегий игрока B; $\mathbf{x}^*$ — вектор смешанных стратегий стороны A размерности $(m\times 1)$; $\mathbf{y}^*$ — вектор смешанных стратегий стороны B размерности $(n\times 1)$. Запись $\mathbf{A}>0$ означает, что все элементы матрицы $\mathbf{A}$ положительны; запись $\mathbf{x}\geq 0$ означает, что все компоненты вектора $\mathbf{x}$ неотрицательны. Через $(\mathbf{1})_{m\times 1}$, $(\mathbf{1})_{n\times 1}$ обозначим векторы размерности $(m\times 1)$ и $(n\times 1)$ соответственно, состоящие из одних единиц; через **E** обозначим матрицу размерности $(m \times n)$, все элементы которой равны единице: $e_{ij} = 1, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$.

Проведем вычисление ситуаций равновесия по Нэшу для матриц выигрышей **A** и **B** на основе условий (3.1.1)–(3.1.3) [9].

Если ввести в рассмотрение величину

$$d = \max_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1, \quad i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, n,$$

и перейти от первоначальных матриц **A** и **B** к матрицам

$$\mathbf{A}_1 = d\mathbf{E} - \mathbf{A} > 0;$$

$$\mathbf{B}_1 = d\mathbf{E} - \mathbf{B} > 0;$$

можно получить систему неравенств и уравнений, эквивалентную условиям (3.1.1)–(3.1.3), но более удобную для решения:

$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}} \geq (\mathbf{1})_{n\times 1}; \tag{3.4.1}$$

$$\tilde{\mathbf{x}} \geq 0; \tag{3.4.2}$$

$$(\tilde{\mathbf{y}}, (\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{1})_{n\times 1})) = 0; \tag{3.4.3}$$

$$\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{y}} \geq (\mathbf{1})_{m\times 1}; \tag{3.4.4}$$

$$\tilde{\mathbf{y}} \geq 0; \tag{3.4.5}$$

$$(\tilde{\mathbf{x}}, (\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{y}} - (\mathbf{1})_{m\times 1})) = 0; \tag{3.4.6}$$

Соотношение (3.4.1) может быть приведено к виду

$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \tilde{\mathbf{x}} \leq (d\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i - 1)(\mathbf{1})_{n\times 1} \tag{3.4.7}$$

и после нормировки

$$\mathbf{x}^* = \frac{\tilde{x}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}$$

станет эквивалентно условию (3.1.3):

$$\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{x}^* \leq \left(d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i} \right) (\mathbf{1})_{n\times 1}.$$

Если к условию (3.4.1) добавить соотношение

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}}\mathbf{B}\mathbf{y}^{*} = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i},$$

определяющее цену игры и эквивалентное условию

$$\tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{B}\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}} d\mathbf{E}\tilde{\mathbf{y}} - (\mathbf{1})_{n\times 1}^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{y}}$$

или

$$(\tilde{\mathbf{y}}, (\mathbf{B}_1^{\mathrm{T}}\tilde{\mathbf{x}} - (\mathbf{1})_{n\times 1})) = 0,$$

то получим, что соотношение (3.1.3) будет выполняться при выполнении условий (3.4.1)–(3.4.3).

Аналогично, соотношение (3.1.2) будет выполняться при выполнении условий (3.4.4)–(3.4.6).

После определения пары равновесных по Нэшу стратегий $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, оптимальные стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$, а также цены игры H_A, H_B определяются из соотношений

$$\mathbf{x}^* = \frac{\tilde{\mathbf{x}}}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}, \qquad \mathbf{y}^* = \frac{\tilde{\mathbf{y}}}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}; \tag{3.4.8}$$

$$H_A = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}; \; H_B = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}. \tag{3.4.9}$$

Рассмотрим алгоритм решения задачи (3.4.1)–(3.4.6).

Описание алгоритма Лемке–Хоусона

I. ***Вычисление матриц*** $\mathbf{A}_1$ ***и*** $\mathbf{B}_1$.

1. Определяем число d в соответствии с выражением

$$d = \max_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1, \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n.$$

2. Выполняем преобразования:

$$\mathbf{A}_1 = d\mathbf{E} - \mathbf{A};$$

$$\mathbf{B}_1 = d\mathbf{E} - \mathbf{B};$$

$$e_{ij} = 1, \quad i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, n.$$

где $\mathbf{E}$ — матрица, состоящая из одних единиц, той же размерности, что и матрицы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$.

II. ***Определение начальных значений векторов стратегий*** $\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0$.

3. Формируем таблицу $\mathbf{A}_0^*$ в следующем виде:

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A}_0^* = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc:cccc} \mathbf{a}_1^1 & \dots & \mathbf{a}_m^1 & & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \dots & \mathbf{e}_n \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} a_{11}^1 & \dots & a_{m1}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{12}^1 & \dots & a_{m2}^1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n}^1 & \dots & a_{mn}^1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Таблица $\mathbf{A}_0^*$ состоит из матрицы $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$ и единичной матрицы $\mathbf{I}_{n\times n}$ размерности $n\times n$, которая соответствует начальному базису $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$.

4. Выбираем начальное значение $\mathbf{y}^0$:

$$\mathbf{y}_{1\times n}^{0\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{a} \;\; 0 \;\dots\; 0\right),$$

где $a = \min\limits_i a_{i1}^1$, $i = 1, \dots, m$ — минимальный элемент первого столбца матрицы $\mathbf{A}_1$ (или первой строки $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$, входящей в таблицу $\mathbf{A}_0^*$). Данный элемент будет разрешающим для данной таблицы при последующем симплекс-преобразовании. Обозначим через i^* то значение индекса i, для которого достигается данный минимум.

5. Формируем таблицу $\mathbf{B}_0^*$ в виде

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{B}_0^* = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc:cccc} \mathbf{b}_1^1 & \dots & \mathbf{b}_n^1 & & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \dots & \mathbf{f}_m \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} b_{11}^1 & \dots & b_{1n}^1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ b_{21}^1 & \dots & b_{2n}^1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1}^1 & \dots & b_{mn}^1 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

Таблица $\mathbf{B}_0^*$ состоит из матрицы $\mathbf{B}_1$ и единичной матрицы $\mathbf{I}_{m\times m}$ размерности $m\times m$, которая соответствует начальному базису $(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m)$.

6. Выбираем начальное значение $\mathbf{x}^0$:

$$\mathbf{x}_{1\times m}^{0\mathrm{T}} = \left(0 \;\dots\; 0 \;\; \frac{1}{b} \;\; 0 \;\dots\; 0\right),$$

где $b = \min\limits_j b_{i^* j}^1$, $j = 1, \dots, n$ (b — минимальный элемент i^*-й строки матрицы $\mathbf{B}_1$). Этот элемент будет разрешающим для данной таблицы при последующем симплекс-преобразовании. Обозначим через j^* то значение индекса j, для которого достигается данный минимум. При этом i^*-й элемент вектора $\mathbf{x}_0$ равен $\dfrac{1}{b}$, остальные равны нулю.

III. ***Проверка условий равновесия.***

7. Выполнение условий равновесия можно проверить одним из двух способов.

Способ А. Проверяем выполнение соотношений

$$(\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{y}^0)(\mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}}\mathbf{x}^0-1)=0,\quad j=1,\ \ldots,\ n,$$

$$(\mathbf{f}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{x}^0)(\mathbf{a}_j^{1\mathrm{T}}\mathbf{y}^0-1)=0,\quad i=1,\ \ldots,\ m,$$

где $\mathbf{a}_i^1$, $\mathbf{e}_j$ — столбцы таблицы $\mathbf{A}_0^*$; а $\mathbf{b}_j^1$, $\mathbf{f}_i$ — столбцы таблицы $\mathbf{B}_0^*$.

Если хотя бы одно из этих соотношений не выполняется, то переходим к пункту 8 алгоритма. Если все условия выполняются, то переходим к пункту 15.

Способ В. Определяем множества $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y})$.

В множество $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ входят те элементы $\mathbf{f}_i$, для которых выполняется соотношение $\mathbf{f}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=0$, и те элементы $\mathbf{b}_j^1$, для которых выполняется условие $\mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}}\mathbf{x}-1=0$:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x})=\{\mathbf{f}_i,\mathbf{b}_j^1 \mid \mathbf{f}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{x}=0,\ \mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}}\mathbf{x}-1=0\}.$$

Аналогично находится множество $\mathbf{q}(\mathbf{y})$:

$$\mathbf{q}(\mathbf{y})=\{\mathbf{e}_j,\mathbf{a}_i^1 \mid \mathbf{e}_j^{\mathrm{T}}\mathbf{y}=0,\ \mathbf{a}_i^{1\mathrm{T}}\mathbf{y}-1=0\}.$$

Можно показать, что множества $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$ имеют вид

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)=\{\mathbf{f}_1,\ldots,\mathbf{f}_{i^*-1},\mathbf{b}_{j^*},\mathbf{f}_{i^*+1},\ldots,\mathbf{f}_m\};$$

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)=\{\mathbf{a}_{i^*},\mathbf{e}_2,\ldots,\mathbf{e}_n\}.$$

Проверка условий равновесия производится с использованием множества $M(\mathbf{x},\mathbf{y})$:

$$M(\mathbf{x},\mathbf{y})=\left\{\mathbf{e}_r,\mathbf{f}_s\ \middle|\ \begin{array}{l}\mathbf{e}_r\in M(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \text{если}\ \mathbf{e}_r\in\mathbf{q}(\mathbf{y})\ \text{или}\ \mathbf{b}_r^1\in\mathbf{p}(x)\\ \mathbf{f}_s\in M(\mathbf{x},\mathbf{y}),\ \text{если}\ \mathbf{f}_s\in\mathbf{p}(\mathbf{x})\ \text{или}\ \mathbf{a}_s^1\in\mathbf{q}(\mathbf{y})\end{array}\right\}.$$

Если $M(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_j)=\{\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n,\ \mathbf{f}_1,\ \ldots,\ \mathbf{f}_m\}$, то $(\mathbf{x}_i,\mathbf{y}_j)$ — ситуация равновесия. Если условия равновесия выполняются, то переходим к пункту 15, иначе к пункту 8.

IV. ***Замена базисов.***

8. Заменяя базисы $(\mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n)$ на $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$ и $(\mathbf{f}_1,\ \ldots,\ \mathbf{f}_m)$ на $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$, составляем с помощью симплекс-преобразования новые таблицы $\mathbf{A}_1^*$ и $\mathbf{B}_1^*$.

Номер строки, в которой находится разрешающий элемент, совпадает с номером столбца $\mathbf{e}$ или $\mathbf{f}$, который из базиса выводится.

Тот столбец, в котором находится разрешающий элемент, в базис вводится.

Чтобы составить таблицу $\mathbf{A}_1^*$, надо исключить из базиса вектор $\mathbf{e}_1$ и ввести вместо него вектор $\mathbf{a}_{i^*}$. Это выполняется, как в симплекс-методе: строка, содержащая разрешающий элемент (на первой итерации — это первая строка), делится на этот разрешающий элемент; из всех остальных строк таблицы $\mathbf{A}_0^*$ вычитается строка с разрешающим элементом, умноженная на коэффициенты, подобранные так, чтобы i^*-й элемент во всех строках, кроме строки с разрешающим элементом, обратился в ноль.

В результате получаем такую таблицу:

$$\begin{array}{cc} \mathbf{A}_1^* = \left[\begin{array}{c:c:c:c:c:c:c:c:c:c:c} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{i^*-1,1} & 1 & \alpha_{i^*+1,1} & \dots & \alpha_{m1} & q^{11} & \dots & q^{1n} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{i^*-1,2} & 0 & \alpha_{i^*+1,2} & \dots & \alpha_{m2} & q^{21} & \dots & q^{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} & \dots & \alpha_{i^*-1,n} & 0 & \alpha_{i^*+1,n} & \dots & \alpha_{mn} & q^{n1} & \dots & q^{nn} \end{array}\right] & \begin{array}{c} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{array} \\ \begin{array}{ccccccccccc} \xi_1-1 & \xi_2-1 & \dots & \xi_{i^*-1}-1 & \xi_{i^*}-1 & \xi_{i^*+1}-1 & \dots & \xi_m-1 & y_1^0 & \dots & y_n^0 \end{array} & \end{array}$$

Здесь

$$\alpha_{i1} = \frac{a_{i1}^1}{a_{i^*1}^1}, \quad \alpha_{ij} = a_{ij}^1 - \alpha_{i1} a_{i^*j}^1 \quad \text{для } j \neq 1.$$

9. Записываем в строке под таблицей $\mathbf{A}_1^*$ под первоначальным базисом $(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$ вектор $\mathbf{y}^{0\mathrm{T}} = (y_1^0 \;\; y_2^0 \;\dots\; y_n^0)$, как это сделано выше.

Вычисляем значения $\xi_i = \mathbf{a}_i^{1\mathrm{T}} \mathbf{y}^0$ при $i = 1, \dots, m$, где $\mathbf{a}_i^1$ — столбцы таблицы $\mathbf{A}_0^*$. Вносим значения $\xi_i - 1$ в строку под таблицей $\mathbf{A}_1^*$, как это показано выше.

10. Для j-й строки полученной таблицы вычисляем значения λ_j^* и λ_j^{**} по следующим формулам:

$$\lambda_j^* = \min_{\substack{\alpha_{kj}<0 \\ q^{jr}<0 \\ 1\le k\le m \\ 1\le r\le n}} \left\{ -\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}}, -\frac{y_r^0}{q^{jr}} \right\}; \qquad \lambda_j^{**} = \max_{\substack{\alpha_{sj}>0 \\ q^{jt}>0 \\ 1\le s\le m \\ 1\le t\le n}} \left\{ -\frac{\xi_s - 1}{\alpha_{sj}}, -\frac{y_t^0}{q^{jt}} \right\}.$$

Либо число λ_j^*, либо число λ_j^{**} будет равно нулю.

Введем в столбец λ, который находится справа от матрицы $\mathbf{A}_1^*$, в качестве λ_j то из чисел λ_j^* или λ_j^{**}, которое отлично от нуля. Если $\lambda_j^* = \lambda_j^{**} = 0$, то вводим ноль. Справа от λ_j укажем, за счет какого столбца было получено соответствующее число.

11. Аналогично формируется таблица $\mathbf{B}_1^*$, только вместо чисел λ_j получим числа μ_i, где $i = 1, \ldots, m$, вместо значений $\xi_i - 1$ в нижней строке будут фигурировать $\eta_j - 1$, вместо q^{ji} получим p^{ij}.

V. ***Определение оптимальных стратегий и цен игры.***

12. Определяем возможные значения стратегий $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{x}^{0\mathrm{T}} + \mu_i \mathbf{p}^i, \ i = 1, \ldots, m, \\ \mathbf{y}_i^{\mathrm{T}} = \mathbf{y}^{0\mathrm{T}} + \lambda_j \mathbf{q}^j, \ j = 1, \ldots, n, \end{cases}$$

где $\mathbf{p}^i$, $\mathbf{q}^j$ — строки матриц $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q}$, входящих в преобразованные таблицы $\mathbf{B}_1^*$ и $\mathbf{A}_1^*$.

13. Находим множества $\mathbf{q}(\mathbf{y}_j)$, $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$ для $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, n$. Для значения λ_j соответствующий минимум (при $\lambda_j = \lambda_j^*$) или максимум (при $\lambda_j = \lambda_j^{**}$) достигается для одного из отношений

$$-\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}} \text{ или } -\frac{y_r^0}{q^{jr}}.$$

Пусть это будет, к примеру, $\left(-\dfrac{\xi_m - 1}{\alpha_{mj}}\right)$, тогда

$$\mathbf{q}(\mathbf{y}_j) = \{\mathbf{q}(\mathbf{y}^0) \cup \mathbf{a}_m\} \setminus \{\mathbf{e}_j\}.$$

Аналогично находим $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_i) = \{\mathbf{p}(\mathbf{x}^0) \cup \mathbf{b}_m\} \setminus \{\mathbf{f}_i\}.$$

14. Для каждой пары $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ определяем множество $M(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ и проверяем условия равновесия, как в пункте 7. Если условия равновесия выполняются, то переходим к пункту 15. Если условия равновесия не выполняются ни для одной пары, то переходим к пункту 4 алгоритма и производим поиск минимального элемента во второй строке матрицы $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$, входящей в таблицу $\mathbf{A}_0^*$. Начальное значение $\mathbf{y}^0$ будет следующего вида:

$$\mathbf{y}_{1\times n}^{0\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{a} & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее выполняются все последующие этапы алгоритма, вплоть до проверки условий равновесия. В случае если условия равновесия не выполняются и на второй итерации алгоритма, переходим к третьей итерации путем поиска минимального элемента уже в третьей строке матрицы $\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}}$ и составления соответствующего вектора $\mathbf{y}^0$, где элемент $\dfrac{1}{a}$ будет уже на третьем месте, и т. д.

15. Если известно равновесное решение $\tilde{\mathbf{x}}$, $\tilde{\mathbf{y}}$, то оптимальные стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ и цены игры H_A, H_B находятся исходя из соотношений (3.4.8), (3.4.9):

$$\mathbf{x}^* = \frac{\tilde{x}}{\sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}; \quad \mathbf{y}^* = \frac{\tilde{y}}{\sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{y}_j};$$

$$H_A = d - \frac{1}{\sum\limits_{j=1}^{n} \tilde{y}_j}; \quad H_B = d - \frac{1}{\sum\limits_{i=1}^{m} \tilde{x}_i}.$$

Пример 3.5. Найти решение следующей игровой задачи с помощью алгоритма Лемке–Хоусона:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Решение.

I. ***Вычисление матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{B}_1$:***

1. $d = \max\limits_{i,j}(a_{ij}, b_{ij}) + 1 = 9 + 1 = 10.$

2. $$\mathbf{A}_1 = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 8 \\ 4 & 9 & 7 & 2 \\ 8 & 2 & 3 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 7 & 8 & 2 \\ 6 & 1 & 3 & 8 \\ 2 & 8 & 7 & 4 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{B}_1 = 10 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 7 & 8 & 1 \\ 9 & 2 & 4 & 4 \\ 4 & 8 & 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 2 & 9 \\ 1 & 8 & 6 & 6 \\ 6 & 2 & 7 & 5 \end{bmatrix};$$

II. ***Определение начальных значений векторов стратегий $\mathbf{x}^0$, $\mathbf{y}^0$.***

3. Формируем таблицу $\mathbf{A}_0^*$ в виде блочной матрицы $\mathbf{A}_0^* = (\mathbf{A}_1^{\mathrm{T}} \,\vdots\, \mathbf{I}_{n\times n})$:

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{A}_0^* = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1^1 & \mathbf{a}_2^1 & \mathbf{a}_3^1 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} 4 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 7 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 8 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

4. Выбираем начальное значение $\mathbf{y}^0$:

$a = \min\limits_i a_{i1}^1 = 2, \ \ i = 1, \ldots, m;$

$\mathbf{y}_{1\times n}^{0\mathrm{T}} = \left(\frac{1}{2} \ \ 0 \ \ 0 \ \ 0\right).$

Фиксируем номер столбца, для которого достигается данный минимум: $i^* = 3$.

5. Формируем таблицу $\mathbf{B}_0^*$ в виде следующей блочной матрицы $\mathbf{B}_0^* = (\mathbf{B}_1 \,\vdots\, \mathbf{I}_{m\times m})$:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccccc} \mathbf{b}_1^1 & \mathbf{b}_2^1 & \mathbf{b}_3^1 & \mathbf{b}_4^1 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{array} \\ \mathbf{B}_0^* = & \left[\begin{array}{cccc:ccc} 8 & 3 & 2 & 9 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 6 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]. \end{array}$$

6. Выбираем начальное значение $\mathbf{x}^0$:

$$b = \min_j b^1_{i^* j} = 2, \; j = 1, \ldots, n$$

(b — минимальный элемент i^*-й строки матрицы $\mathbf{B}_1$);

$$\mathbf{x}^{0\mathrm{T}}_{1\times n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Фиксируем номер столбца, для которого достигается данный минимум: $j^* = 2$.

III. ***Проверка условий равновесия.***

7. **Способ А.** Проверяем выполнение первой группы условий:

$$(\mathbf{e}_j^{\mathrm{T}} \mathbf{y}^0)(\mathbf{b}_j^{1\mathrm{T}} \mathbf{x}^0 - 1) = 0, \; j = 1, \ldots, n.$$

Для $j = 1$

$$(\mathbf{e}_1^{\mathrm{T}} \mathbf{y}^0)(\mathbf{b}_1^{1\mathrm{T}} \mathbf{x}^0 - 1) =$$

$$= \left([1 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) \left([8 \;\; 1 \;\; 6] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/2 \end{bmatrix} - 1 \right) = \frac{1}{2}(3-1) = 1 \neq 0.$$

Как видно, уже первое соотношение не выполняется, следовательно, остальные соотношения можно не проверять — на данный момент стратегии $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ не являются равновесными.

Способ В. Определяем множества $\mathbf{p}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y})$.

Производим замену базисов, используя следующее правило.

Номер строки, в которой находится разрешающий элемент, совпадает с номером столбца **e** *или* **f**, *который из базиса выводится. Тот столбец, в котором находится разрешающий элемент, в базис вводится.*

Перейдем от исходного базиса $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ к базису $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$.

В таблице $\mathbf{A}_0^*$ разрешающий элемент находится в первой строке, следовательно, из базиса выводится столбец $\mathbf{e}_1$, а на его место вводится столбец $\mathbf{a}_3$, содержащий разрешающий элемент:

$$(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4) \to \mathbf{q}(\mathbf{y}^0) = (\mathbf{a}_3, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4).$$

В таблице $\mathbf{B}_0^*$ разрешающий элемент находится в третьей строке и во втором столбце. Следовательно,

$$(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3) \to \mathbf{p}(\mathbf{x}^0) = (\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{b}_2).$$

Стратегии $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ *будут равновесными, если в базисах* $\mathbf{p}(x_i)$ *и* $\mathbf{q}(\mathbf{y}_j)$ *индексы при* $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ *пробегают все значения от* 1 *до* m, *а индексы при* $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$ *пробегают все значения от* 1 *до* n (*в любых комбинациях*).

Проверим пару $(\mathbf{x}^0, \mathbf{y}^0)$. Индексы при $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ в базисах $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$ пробегают все значения от 1 до $m = 3$: $(\mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{a}_3)$. А вот индексы при $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$ не пробегают все значения от 1 до $n = 4$: $(\mathbf{b}_2, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$. Два раза встречается индекс 2 и ни разу — 1. Следовательно, стратегии $\mathbf{x}^0$ и $\mathbf{y}^0$ не являются равновесными.

IV. ***Замена базисов.***

8. Составляем таблицу $\mathbf{A}_1^*$, переходя с помощью симплекс-преобразования от базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$ к базису $\mathbf{q}(\mathbf{y}^0)$.

$$\mathbf{A}_0^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc:cccc} 2 & 3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & -7/2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}.$$

9. Вычисляем значения $\xi_i = \mathbf{a}_i^{1\mathrm{T}} \mathbf{y}^0$ при $i = 1, ..., m$, где $\mathbf{a}_i^1$ — столбцы таблицы $\mathbf{A}_0^*$.

$$\xi_1 = [4 \quad 7 \quad 8 \quad 2] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2; \quad \xi_2 = [6 \quad 1 \quad 3 \quad 8] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 3;$$

$$\xi_3 = [2 \quad 8 \quad 7 \quad 4] \begin{bmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 1.$$

Составляем строку под таблицей в виде $(\xi - 1 \,\vdots\, \mathbf{y}^{0\mathrm{T}})$, где $\xi - 1 = [\xi_1 - 1 \;\; \xi_2 - 1 \;\; \xi_3 - 1]$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc:cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \\ \mathbf{A}_0^* = & \left[\begin{array}{ccc:cccc} 2 & 3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & -7/2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hdashline 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]. \end{array}$$

10. Для j-й строки полученной таблицы вычислим значения λ_j^* и λ_j^{**} по формулам

$$\lambda_j^* = \min_{\substack{\alpha_{kj}<0 \\ q^{jr}<0 \\ 1\le k\le m \\ 1\le r\le n}} \left\{ -\frac{\xi_k - 1}{\alpha_{kj}}, -\frac{y_r^0}{q^{jr}} \right\}; \qquad \lambda_j^{**} = \max_{\substack{\alpha_{sj}>0 \\ q^{jt}>0 \\ 1\le s\le m \\ 1\le t\le n}} \left\{ -\frac{\xi_s - 1}{\alpha_{sj}}, -\frac{y_t^0}{q^{jt}} \right\}.$$

Все отличные от нуля числа j-й строки таблицы $\mathbf{A}_1^*$ разбиваем на два множества: множество отрицательных чисел (для них работает формула для λ_j^*) и множество положительных чисел (для них работает формула для λ_j^{**}).

Поскольку все числа первой строки положительны, то в данном случае пользуемся только формулой для λ_j^{**}:

$$\lambda_1^{**} = \max\left\{ -\frac{1}{2}; -\frac{2}{3}; -\frac{0}{1}; -\frac{1/2}{1/2} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 0;$$

$$\lambda_2^* = \min\left\{ -\frac{1}{-9}; -\frac{2}{-23}; -\frac{1/2}{-4} \right\} = \frac{2}{23}; \quad \lambda_2^{**} = \max\left\{ -\frac{0}{1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = \frac{2}{23};$$

$$\lambda_3^* = \min\left\{ -\frac{1}{-6}; -\frac{2}{-18}; -\frac{1/2}{-7/2} \right\} = \frac{1}{9}; \quad \lambda_3^{**} = \max\left\{ -\frac{0}{1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_3 = \frac{1}{9};$$

$$\lambda_4^* = \min\left\{ -\frac{1}{-6}; -\frac{2}{-4}; -\frac{1/2}{-2} \right\} = \frac{1}{6}; \qquad \lambda_4^{**} = \max\left\{ -\frac{0}{1} \right\} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_4 = \frac{1}{6}.$$

Введем в столбец λ, который находится справа от матрицы $\mathbf{A}_1^*$, в качестве λ_j то из чисел λ_j^* или λ_j^{**}, которое отлично от нуля. Если $\lambda_j^* = \lambda_j^{**} = 0$, то вводим ноль. Справа от λ_j укажем, за счет какого столбца было получено соответствующее число:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{ccc:cccc} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{array} \quad \lambda \\
\mathbf{A}_1^* = & \left[\begin{array}{ccc:cccc} 2 & 3 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & -23 & 0 & -4 & 1 & 0 & 0 \\ -6 & -18 & 0 & -7/2 & 0 & 1 & 0 \\ -6 & -4 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} 0 \\ 2/23(\mathbf{a}_2) \\ 1/9(\mathbf{a}_2) \\ 1/6(\mathbf{a}_1) \end{array}. \\
 & \begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}
\end{array}$$

11. Аналогично формируется таблица $\mathbf{B}_1^*$:

$$\begin{array}{rc}
 & \begin{array}{cccc:ccc} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_4 & \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{f}_3 \end{array} \quad \mu \\
\mathbf{B}_1^* = & \left[\begin{array}{cccc:ccc} -1 & 0 & -17/2 & 3/2 & 1 & 0 & -3/2 \\ -23 & 0 & -22 & -14 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 7/2 & 5/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right] \begin{array}{l} 5/17(\mathbf{b}_3) \\ 2/23(\mathbf{b}_1) \\ 0 \end{array}. \\
 & \begin{array}{ccccccc} 2 & 0 & 5/2 & 3/2 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}
\end{array}$$

V. ***Определение оптимальных стратегий и цен игры.***

12. Определяются возможные значения векторов стратегий $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$.

$$\mathbf{x}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{5}{17}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{17} & 0 & \frac{1}{17} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + \frac{2}{23}[0 \quad 1 \quad -4] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{23} & \frac{7}{46} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{x}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}_1^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 0\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}_2^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{2}{23}[-4 \quad 1 \quad 0 \quad 0] = \begin{bmatrix} \frac{7}{46} & \frac{2}{23} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}_3^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{9}\begin{bmatrix} -\frac{7}{2} & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{9} & 0 & \frac{1}{9} & 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}_4^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}[-2 \quad 0 \quad 0 \quad 1] = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{bmatrix}.$$

13. Находим множества $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$, $\mathbf{q}(\mathbf{y}_j)$ для $i = 1, ..., m$; $j = 1, ..., n$. Определим, к примеру, $\mathbf{p}(\mathbf{x}_1)$. Полагаем $i = 1$ в формуле для $\mathbf{p}(\mathbf{x}_i)$:

$$\mathbf{p}(\mathbf{x}_1) = \{\mathbf{p}(\mathbf{x}^0) \cup \mathbf{b}_m\} \setminus \{\mathbf{f}_1\}.$$

Данная запись означает, что из базиса $\mathbf{p}(\mathbf{x}^0)$ надо удалить столбец $\mathbf{f}_1$, а вместо него ввести столбец $\mathbf{b}_m$, для которого достигается соответствующее значение максимума (минимума) (его номер указан в правом столбце таблицы $\mathbf{A}_1^*$); в первой строке это $\mathbf{b}_3$. Таким образом, имеем:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{b}_3 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{f}_1 & \mathbf{f}_2 & \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{P}(\mathbf{x});$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{e}_4 \\ \mathbf{a}_3 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 & \mathbf{a}_1 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}(\mathbf{y}).$$

14. Для каждой пары $(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ определяем множество $M(\mathbf{x}_i, \mathbf{y}_j)$ и проверяем условия равновесия, как в пункте 7. В данном случае равновесная ситуация возникает при $(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2)$. Индексы при $(\mathbf{a}, \mathbf{f})$ в базисах $\mathbf{p}(\mathbf{x}_2)$ и $\mathbf{q}(\mathbf{y}_2)$ пробегают все значения от 1 до $m = 3$ — $(\mathbf{f}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$. Индексы при $(\mathbf{b}, \mathbf{e})$ пробегают все значения от 1 до $n = 4$ — $(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4)$.

Таким образом, множество $M(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2) = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_3\}$. Следовательно, $(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2)$ — ситуация равновесия.

15. На основе известного равновесного решения $(\tilde{\mathbf{x}}_2, \tilde{\mathbf{y}}_2)$ определяем оптимальные стратегии $\mathbf{x}^*$, $\mathbf{y}^*$ и цены игры:

$$\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \frac{\begin{bmatrix} 0 & \frac{2}{23} & \frac{7}{46} \end{bmatrix}}{0 + \frac{2}{23} + \frac{7}{46}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{7}{46} & \frac{2}{23} & 0 & 0 \end{bmatrix}}{\frac{7}{46} + \frac{2}{23} + 0 + 0} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$H_B = d - \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} \tilde{x}_i} = 10 - \frac{46}{11} = 5\frac{9}{11}; \quad H_A = d - \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \tilde{y}_j} = 10 - \frac{46}{11} = 5\frac{9}{11}.$$

Ответ. $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{4}{11} & \frac{7}{11} \end{bmatrix}$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} \frac{7}{11} & \frac{4}{11} & 0 & 0 \end{bmatrix}$;

$H_B = 5\frac{9}{11}$; $H_A = 5\frac{9}{11}$.

Проверьте себя! Решите биматричные задачи.

1. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = [0.75 \quad 0.25]$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [0.17 \quad 0.83]$; $H_A = 3.5$; $H_B = 4.25$.

2. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = [0.33 \quad 0.67]$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [0.714 \quad 0.286]$; $H_A = 5.14$; $H_B = 5.76$.

3. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 3 \\ 8 & 0 & 5 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 8 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = [0.375 \quad 0 \quad 0.625]$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [0.2 \quad 0 \quad 0.8]$; $H_A = 5.6$; $H_B = 3.88$.

4. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 14 & 3 \\ 10 & 1 & 8 & 6 \\ 2 & 9 & 5 & 11 \\ 4 & 6 & 9 & 0 \end{bmatrix}$; $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13 & 9 & 7 & 3 \\ 5 & 10 & 6 & 11 \\ 7 & 3 & 5 & 4 \\ 11 & 12 & 0 & 9 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\mathbf{x}^{*\mathrm{T}} = [0 \quad 0.333 \quad 0.667 \quad 0]$; $\mathbf{y}^{*\mathrm{T}} = [0.385 \quad 0 \quad 0 \quad 0.615]$;
$H_A = 7.54$; $H_B = 6.33$.