

К-3. Принцип включения-исключения

14 октября 2024 г. 12:00

ПВИ: идея и частные случаи

Идея и частные случаи

Пусть A — конечное множество, на котором задано k свойств (унарных предикатов), A_i ($i = 1, \dots, k$) — множество всех элементов A , обладающих i -м свойством.

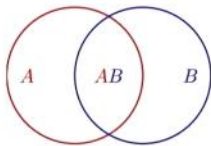
- ★ Принцип включения-исключения (ПВИ) — это способ ответить на вопросы: «сколько элементов A обладают хотя бы одним свойством» и «сколько элементов A не обладают ни одним свойством»

- т.е. найти $|A_1 \cup \dots \cup A_k|$ и $|A \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_k)|$

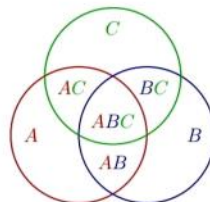
- Способ основан на том, что часто бывает возможно найти число элементов, обладающих любым фиксированным свойством или набором свойств

Частные случаи:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$



ПВИ: общий случай

ПВИ для k множеств

Теорема (ПВИ)

Пусть A — конечное множество, A_1, \dots, A_k — его подмножества (не обязательно различные). Тогда

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{\substack{X \neq \emptyset \\ X \subseteq \{1..k\}}} (-1)^{|X|-1} \left| \bigcap_{i \in X} A_i \right|. \quad (1)$$

- Справа участвуют мощности всех возможных пересечений множеств A_i
- Пересечение четного/нечетного числа множеств имеет знак $-/+$

Доказательство:

Возьмем произвольный элемент $a \in \bigcup_{i=1}^k A_i$; пусть $Z = \{i \mid a \in A_i\}$

- a входит во множество в левой части (1), т.е. добавляет 1 к левой части
- a входит во множество $A_X = \bigcap_{i \in X} A_i$ в правой части (1) $\Leftrightarrow X \subseteq Z$
- a добавляет 1 к $|A_X|$ для каждого такого X
- $\Rightarrow a$ добавляет $C_a = \sum_{X \subseteq Z, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|-1} \cdot 1$ к правой части (1)
- пусть $m = |Z|$; сгруппируем в формуле для C_a множества равной мощности:
- $C_a = \sum_{X \subseteq Z, X \neq \emptyset} (-1)^{|X|-1} \cdot 1 = \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} (-1)^{i-1}$
- $= \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^{i-1} + 1 = 1 - \sum_{i=0}^m \binom{m}{i} (-1)^i = 1 - 0 = 1$

★ сумма четных биномиальных коэффициентов равна сумме нечетных

Итак, каждый элемент a добавляет 1 к левой и 1 к правой части (1)

\Rightarrow левая и правая части (1) равны

ПВИ: вторая версия

Перепишем формулу (1) в виде

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} \left(\sum_{\substack{X \subseteq \{1..k\} \\ |X|=j}} \left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| \right)$$

Пусть для $j = 1, \dots, k$

$$N_j = \left(\sum_{\substack{X \subseteq \{1..k\} \\ |X|=j}} \left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| \right); \text{ доопределим } N_0 = |A|$$

Тогда число элементов, не обладающих ни одним из k свойств, есть

$$\left| A \setminus \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = |A| - \left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = N_0 - \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} N_j = N_0 + \sum_{j=1}^k (-1)^j N_j = \sum_{j=0}^k (-1)^j N_j$$

Симметричный вариант ПВИ: пусть $\left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| = s_{|X|}$ зависит только от $|X|$; тогда

$$N_j = \binom{k}{j} s_j$$

□ ◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

ПВИ — все формулы

A — конечное множество, $A_1, \dots, A_k \subseteq A$

$$N_j = \left(\sum_{\substack{X \subseteq \{1..k\} \\ |X|=j}} \left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| \right), \quad N_0 = |A|$$

$$\left| \bigcup_{i=1}^k A_i \right| = \sum_{j=1}^k (-1)^{j-1} N_j$$

$$\left| A \setminus \bigcup_{i \in X} A_i \right| = \sum_{j=0}^k (-1)^j N_j$$

$$\text{если } \left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| = s_{|X|}, \text{ то } \left| A \setminus \bigcup_{i \in X} A_i \right| = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} s_j$$

□ ◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Числа Стирлинга второго рода.

Число сюръекций

Пусть B и C — множества, $|B| = n, |C| = k$

- ★ Существует k^n различных функций из B в C
 - k способов выбрать образ для каждого из n элементов

Теорема

Число сюръекций n -элементного множества B на k -элементное множество C равно

$$\text{sur}(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Доказательство:

- пусть $A = \{f : B \rightarrow C\}$, $C = \{c_1, \dots, c_k\}$
- возьмем следующие свойства P_1, \dots, P_k элементов A :
 - P_i = «образ функции не содержит элемента c_i »
- $\Rightarrow |A_i| = (k-1)^n$ для любого i
- более того, $\left| \bigcap_{i \in X} A_i \right| = (k-|X|)^n$
- \Rightarrow можно воспользоваться **симметричным ПВИ** с $s_j = (k-j)^n$
- $\Rightarrow \text{sur}(n, k) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{k-j} (k-j)^n = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n$

Числа Стирлинга второго рода. Числа Белла

- Числом Стирлинга второго рода называется число $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ **разбиений n -элементного множества на k классов**
 - ★ или число отношений эквивалентности с k классами на n -элементном множестве
- Пример: $\left\{ \begin{smallmatrix} 4 \\ 2 \end{smallmatrix} \right\} = 7$:
 - $\{1,2,3\}\{4\}; \{1,2,4\}\{3\}; \{1,3,4\}\{2\}; \{2,3,4\}\{1\}; \{1,2\}\{3,4\}; \{1,3\}\{2,4\}; \{1,4\}\{2,3\}$
- Числом Белла называется число $B(n)$ **разбиений n -элементного множества**
 - ★ $B(n) = \sum_{k=1}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$

Теорема

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\text{sur}(n, k)}{k!} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

Доказательство:

- пусть B, C — множества, $|B| = n, |C| = k$
- любая сюръекция $f : B \rightarrow C$ задает отношение эквивалентности \sim_f на B :
 - $a \sim_f b \Leftrightarrow f(a) = f(b)$
- $\Rightarrow f$ задает разбиение B на k классов
- любое разбиение B на k классов можно задать сюръекцией, «назначив» каждому классу свой элемент из C
- сюръекций, задающих фиксированное разбиение B на k классов, только же, сколько способов назначить классам элементы из C , т.е. $k!$
- \Rightarrow получили $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \frac{\text{sur}(n, k)}{k!}$

Теорема

$\{n+1\}_k = k \cdot \{n\}_k + \{n\}_{k-1}$, с начальными условиями $\{n\}_n = 1$ и $\{n\}_0 = 0$ ($n > 0$).

★ Очень похоже на $[n+1]_k = n \cdot [n]_k + [n]_{k-1}$ для чисел Стирлинга первого рода

Доказательство: провести самостоятельно по аналогии с доказательством формулы для чисел Стирлинга первого рода

Функция Эйлера

Функция Эйлера

- Натуральные числа m и k взаимно просты, если $\text{НОД}(m, k) = 1$
- Количество чисел $i \in [1..n]$, взаимно простых с n , обозначается через $\phi(n)$
- $\phi(n)$ — функция Эйлера

Теорема

Пусть $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} \dots p_k^{r_k}$ — разложение числа n на простые множители. Тогда

$$\phi(n) = n \prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Доказательство:

- положим $A = [1..n]$, $A_i = \{j \mid j \text{ кратно } p_i\}$
- ⇒ $|A_i| = n/p_i$
- так как все p_i — простые, $|A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_j}| = n/(p_{i_1} \dots p_{i_j})$
- применим ПВИ в общей форме:

$$\phi(n) = n - \sum_{i=1}^k \frac{n}{p_i} + \dots + (-1)^j \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_j} \frac{n}{p_{i_1} \dots p_{i_j}} + \dots + (-1)^k \frac{n}{p_1 \dots p_k}$$

внезапно, $\prod_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) = 1 - \sum_{i=1}^k \frac{1}{p_i} + \dots + (-1)^j \cdot \sum_{i_1 < \dots < i_j} \frac{1}{p_{i_1} \dots p_{i_j}} + \dots + (-1)^k \frac{1}{p_1 \dots p_k}$

Перемещения

Перемещения

Перестановка $\sigma \in S_n$ называется перемещением, если $\sigma(i) \neq i$ для всех i

★ используется также термин полный беспорядок

Какую часть составляют перемещения от всех перестановок?

(нет нетель)

Уточним постановку:

- Пусть $D(n)$ — число перемещений n -элементного множества
- Предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{D(n)}{n!}$
 - равен 0
 - равен 1
 - равен какому-то α , $0 < \alpha < 1$
 - не существует
- Голосуем!

⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍

Перемещения (2)

Теорема

$$D(n) = n! \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Следствие: $\frac{D(n)}{n!} = \sum_{i=0}^n \frac{(-1)^i}{i!} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e}$

Доказательство:

- положим $A = S_n$, $A_i = \{\sigma \mid \sigma(i) = i\}$
- на $\sigma \in A_i$ можно смотреть как на перестановку множества $[1..n] \setminus \{i\}$, доопределенную условием $\sigma(i) = i$
- $\Rightarrow |A_i| = (n-1)!$
- \Rightarrow аналогично, для любого $X \subseteq [1..n]$, $|\bigcap_{i \in X} A_i| = (n - |X|)!$
- применим симметричный ПВИ:

$$D(n) = \left| A \setminus \bigcup_{i \in X} A_i \right| = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} (n-j)! = \sum_{j=0}^n (-1)^j \frac{n!}{j!(n-j)!} (n-j)! = n! \sum_{j=0}^n \frac{(-1)^j}{j!}$$

□

⏪ ⏩ ⏴ ⏵ ⏶ ⏷ ⏸ ⏹ ⏺ ⏻ ⏼ ⏽ ⏾ ⏿ 🔍