Г-3. Раскраски

14 ноября 2024 г. 18:52

Независимые мн-ва и раскраски

Разбиение графа на независимые множества

- Множество вершин $U \subseteq V$ графа $G = (V, E)$ называется **независимым**, если любые вершины, входящие в U, несмежны
  - ⋆ U независимо $\Leftrightarrow$ подграф в G, порожденный U, не имеет ребер
- Существует класс задач, которые моделируются графами так:
  - вершины — некоторые объекты
  - ребро между двумя вершинами означает «несовместимость» этих объектов
- В задаче может требоваться
  - найти наибольшее совместимое множество объектов (Independent set)
    - или совместимое множество заданного размера
  - разбить все объекты на совместимые множества (Graph coloring)
    - разбиваем на минимальное или на заданное количество множеств
- Мы рассматриваем задачи второго типа — **о раскраске графа**
  - ⋆ Расписание:
    - дано множество занятий в формате (кто ведет, у кого ведет, номер аудитории)
    - включить все занятия в недельное расписание так чтобы занятия, проходящие в одно время, не пересекались ни по одному из параметров
  - ⋆ Доступ к ресурсам:
    - дано множество процессов, запрашивающих доступ к последовательным ресурсам
    - выполнить все процессы как можно быстрее, избежав конфликтов доступа
  - ⋆ Выделение памяти:
    - дана программа, использующая объекты данных («переменные») и набор регистров, которые можно использовать (их меньше, чем переменных)
    - у переменных есть **время жизни** с момента первого вычисления до момента последнего использования
    - назначить переменные регистрам так, чтобы данные не портились в ходе выполнения программы

Основные определения и простые оценки

- Пусть $k \in \mathbb{N}$
- **Раскраска графа $G = (V, E)$ в k цветов (k-раскраска)** — функция $f\colon V \to [1..k]$
  - если $f(v) = i$, то говорят, что v **раскрашена в цвет i**
- Раскраска f графа G называется **правильной**, если $f(u) \neq f(v)$ для любого ребра $(u, v) \in E$ т.е. любое ребро имеет разноцветные концы
  - граф G **k-раскрашиваем**, если для него существует правильная k-раскраска
  - ⋆ ориентация и кратность ребер не влияют на правильность раскрасок, а граф с петлями невозможно правильно раскрасить
    - поэтому в задачах о раскраске рассматриваются обыкновенные графы
  - ⋆ если f — правильная раскраска, то множество $\{v \mid f(v) = i\}$ — независимое
- Число $k = \chi(G)$ — **хроматическое число** графа G, если G k-раскрашиваем, но не $(k-1)$-раскрашиваем
  - правильная $\chi(G)$-раскраска графа G называется **оптимальной**
- ★ Вычисление хроматического числа — трудная задача
  - и остается трудной даже для планарных графов!

Классы графов, для которых $\chi(G)$ указать легко:
  - ⋆ $\chi(G) = 1 \Leftrightarrow$ в G нет ребер
  - ⋆ $\chi(G) = 2 \Leftrightarrow G$ двудольный (хотя бы с одним ребром)
    - двудольный граф по определению разбивается на два независимых множества
  - ⋆ $\chi(K_n) = n$ K_n - полный граф
    - все вершины полного графа должны иметь разные цвета
  - ⋆ $\chi(C_n) = 2 + n \bmod 2$
    - четный цикл — двудольный граф, нечетный превращается в двудольный удалением вершины

Нижние оценки хроматического числа

Нижние оценки хроматического числа

Лемма о нижних оценках

1. Пусть $\omega(G)$ — максимальное число вершин в полном подграфе графа G (кликовое число). Тогда $\chi(G) \geqslant \omega(G)$.
2. Пусть $\beta(G)$ — максимальное число вершин в независимом множестве графа G (число независимости). Тогда $\chi(G) \geqslant n/\beta(G)$, где n — число вершин в G.

Доказательство:

1. в G есть подграф $K_{\omega(G)}$, для раскраски которого нужно $\omega(G)$ цветов
2. множество вершин разбивается на $\chi(G)$ независимых множеств, каждое мощности не более $\beta(G)$, откуда $n \leqslant \chi(G)\beta(G)$ □

! Придумайте примеры графов, для которых

- $\chi(G) - \omega(G) \geqslant 1$; $\chi(G) - \omega(G) \geqslant 2$
- $\chi(G)/\beta(G) = \Omega(n)$

★ Главная проблема приведенных нижних оценок — не в том, что они неточны, а в том, что задачи поиска кликового числа и числа независимости — тоже трудные

Раскраска блоков

Раскраска блоков

★ При раскраске графа компоненты связности можно раскрашивать независимо
  ★ хроматическое число графа равно максимуму хроматических чисел его компонент

★ Верно более сильное утверждение:

Лемма о раскраске блоков

Хроматическое число графа равно максимуму хроматических чисел его блоков.

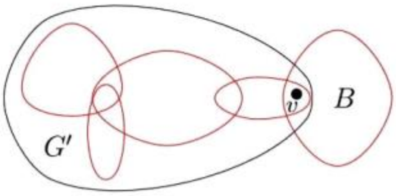
Доказательство:

★ достаточно доказать лемму для связного графа G
- пусть $B(G)$ — дерево блоков G
- любая точка сочленения принадлежит по крайней мере двум блокам

⇒ листья $B(G)$ — блоки (назовем их концевыми блоками)
- проведем индукцию по числу k блоков графа G
- база индукции: $k = 1$ — очевидно
- шаг индукции: пусть лемма верна для графов с $\leqslant k$ блоками, а G имеет $k+1$ блок
- пусть B — концевой блок G, а G' — объединение всех остальных блоков

⇒ графы B и G' имеют ровно одну общую вершину v, которая является точкой сочленения ⟹

Раскраска блоков (окончание доказательства)



- пусть r — максимум хроматических чисел блоков графа $G \Rightarrow \chi(G) \geqslant r$
- граф G' имеет k блоков $\Rightarrow \chi(G') \leqslant r$ по предположению индукции
- зафиксируем произвольные оптимальные раскраски графов B и G' и рассмотрим два случая:

1. вершина v в графах B и G' раскрашена одинаково

$\Rightarrow$ получили правильную раскраску графа G в $\max\{\chi(B), \chi(G')\} = r$ цветов

2. вершина v в графе B раскрашена в i-й цвет, а в графе G' — в j-й цвет, $i \neq j$

$\Rightarrow$ заменим раскраску f графа B раскраской $f \circ \phi$, где $\phi : [1..r] \to [1..r]$ — перестановка, такая что $\phi(i) = j$ и $\phi(j) = i$

$\Rightarrow$ получили правильную раскраску B, подходящую под случай 1 □

- Раскраски графов — не единственный класс задач, которые сводятся к случаю, когда граф является блоком

! Докажите, что граф планарен, если все его блоки планарны

Верхние оценки

Верхние оценки хроматического числа

Лемма о жадной оценке

Пусть G — произвольный граф, $\Delta(G)$ — максимальная степень вершины в G. Тогда $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Доказательство: раскрасим G следующим жадным алгоритмом:

- вершины G упорядочиваются в список произвольным образом
- очередная вершина v красится в наименьший из цветов, не совпадающих с цветами уже покрашенных смежных вершин
- ⋆ алгоритм строит правильную раскраску
- ⋆ любая вершина имеет не более $\Delta(G)$ окрашенных соседей и получает цвет $\leqslant \Delta(G) + 1$ □

! Приведите пример, когда алгоритм раскрасит цикл C_6 в три цвета вместо двух

★ Удивительно (и печально), но приведенную простую оценку не удается улучшить более, чем на единицу; наилучшей общей верхней оценкой является

Теорема Брукса

Если G — неполный граф и $\Delta(G) \geqslant 3$, то $\chi(G) \leqslant \Delta(G)$.

Снова о вычислительной сложности

Еще о простых алгоритмах и сложных задачах

- Стратегия
  - разбить граф на блоки
  - используя подходящую эвристику, упорядочить вершины блока
  - раскрасить блок жадным алгоритмом с предыдущего слайда

  в большинстве случаев позволит получить раскраску в число цветов, мало отличающееся от хроматического, но. . .
- ★ В предположении о том, что задача оптимальной раскраски — трудная, для любого полиномиального алгоритма раскраски и любого достаточно большого n существуют «сложные» графы, на которых алгоритм ошибается в числе цветов в $\Omega(\frac{n}{\log^3 n})$ раз
- ★ Задача проверки 3-раскрашиваемости графа по-прежнему трудна
  - проверка 2-раскрашиваемости проста, поскольку это проверка двудольности → см лекцию, там алгоритм через поиск в ширину
- ★ Задача проверки 3-раскрашиваемости планарного графа все еще трудна

. . . а задача проверки 4-раскрашиваемости планарного графа тривиальна:

Теорема о четырех красках (Аппель, Хакен, 1976)

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 4.

- Первое доказательство теоремы, опирающееся на компьютерный перебор
- «Руками» можно доказать более слабое утверждение (см. следующий фрагмент)

Теорема Хивуда о пяти красках

Теорема Хивуда

Теорема Хивуда

Хроматическое число любого планарного графа не превосходит 5.

Для доказательства нам потребуется

Лемма о вершине степени $\leqslant 5$

В любом обыкновенном планарном графе есть вершина степени не более 5.

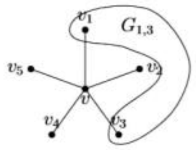
Доказательство:

- число ребер и число вершин обыкновенного планарного графа $G = (V, E)$ связаны неравенством $m \leqslant 3n - 6$
  - следствие из теоремы Эйлера о плоских графах

$\Rightarrow$ $\sum_{v \in V} \deg(v) = 2m \leqslant 6n - 12$
- сумма n слагаемых меньше $6n$ $\Rightarrow$ найдется слагаемое, меньшее 6 □

Доказательство теоремы Хивуда

- Пусть G (обыкновенный) планарный граф с n вершинами, Γ — его правильное изображение; докажем теорему Хивуда индукцией по n
  - база индукции ($n = 1$) очевидна
  - шаг индукции: пусть $n > 1$
  - выберем в графе G вершину v с $\deg(v) \leqslant 5$
    - вершина v существует по доказанной лемме
  - граф $G - v$ имеет правильную раскраску f не более чем 5 красками
    - по предположению индукции
  - ⋆ если для раскраски вершин, смежных с v, использовано менее 5 цветов, то f можно дополнить до правильной раскраски графа G 5 красками, раскрасив вершину v «незанятым» цветом
  - ⇒ далее считаем, что соседи v раскрашены в 5 разных цветов; значит,
    - v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 — все смежные с v вершины
    - нумерация вершин — в порядке следования на изображении Γ по часовой стрелке
    - $f(v_1) = 1, \ldots, f(v_5) = 5$



  - $G_{1,3}$ — подграф графа G, порожденный всеми вершинами u такими, что $f(u) \in \{1, 3\}$
    - граф $G_{1,3}$ содержит вершины v_1 и v_3 $\Longrightarrow$

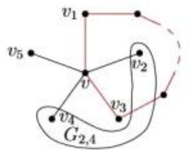
Доказательство теоремы Хивуда (2)

- Граф $G_{1,3}$ может быть связным или несвязным; возможны два случая
  1. вершины v_1 и v_3 лежат в разных компонентах связности графа $G_{1,3}$
  - пусть K — компонента связности $G_{1,3}$, содержащая v_1
  - переопределим f на K, перекрасив вершины цвета 1 в цвет 3 и наоборот
  - ⋆ новая функция f' — правильная раскраска графа $G - v$:
  - новые вершины цвета 1 не смежны между собой
    - имели один цвет в f, а f — правильная
  - новые вершины цвета 1 не смежны со «старыми» вершинами цвета 1
    - находятся в разных компонентах графа $G_{1,3}$
  - то же верно для вершин цвета 3
  - для вершин остальных цветов ничего не изменилось
  - ⇒ построена правильная 5-раскраска f' графа $G - v$, в которой ни одна из вершин, смежных с v в графе G, не имеет цвета 1
    - при перекраске вершина v_1 получила цвет 3, вершины v_2, v_3, v_4 и v_5 сохранили цвет
  - ⇒ можно покрасить вершину v в цвет 1, получая правильную 5-раскраску графа G

  2. вершины v_1 и v_3 лежат в одной компоненте связности графа $G_{1,3}$
  - ⇒ в G есть (v_1, v_3)-путь, все вершины которого имеют цвета 1 и 3
  - дополним 1-3 раскрашенный (v_1, v_3)-путь ребрами (v, v_1) и (v_3, v) до простого цикла C: $\Longrightarrow$

Доказательство теоремы Хивуда (3)

- Дополним (v_1, v_3)-путь ребрами (v, v_1) и (v_3, v) до простого цикла C:



  - ⋆ C ограничивает часть плоскости, содержащую ровно одну из вершин v_2 и v_4
  - рассмотрим подграф $G_{2,4}$ графа G, порожденный всеми вершинами цветов 2 и 4
    - граф $G_{2,4}$ содержит вершины v_2 и v_4
  - пусть v_2 и v_4 лежат в одной компоненте связности графа $G_{2,4}$
  - $\Rightarrow$ существует простой (v_2, v_4)-путь, проходящей только через вершины графа $G_{2,4}$
  - изображение этого пути в Г — линия, соединяющая точки v_2 и v_4
  - $\Rightarrow$ эта линия пересекает изображение цикла C
    - одна из вершин v_2, v_4 внутри, а другая — вовне области, ограниченной изображением C
  - Г правильное $\Rightarrow$ общая точка цепи и цикла — вершина графа
  - $\Rightarrow$ в C есть вершина цвета 2 или 4 $\Rightarrow$ противоречие
  - $\Rightarrow$ вершины v_2 и v_4 лежат в разных компонентах связности графа $G_{2,4}$
  - аналогично случаю 1, перекрасим компоненту связности $G_{2,4}$, содержащую v_2, поменяв цвета 2 и 4 местами
  - $\Rightarrow$ полученная раскраска f'' будет правильной 5-раскраской графа $G-v$
  - среди смежных с v вершин нет вершины цвета 2
  - положив $f''(v) = 2$, получим правильную 5-раскраску графа G $\square$

★ Заметим, что доказательство дает способ построения 5-раскраски