Б-1. Булевые функции, формулы и схемы

5 декабря 2024 г. 14:39

Булевы функции. Примеры.

Определения и примеры

- Функция $f : \{0,1\}^n \to \{0,1\}$ (вектор из 0 и 1) — n-местная (n-арная) булева функция
  - будем писать $f(x_1, \ldots, x_n)$ или $f(\vec{x})$, если n известно или несущественно
  - также принято сокращать слова «булева функция» до б.ф.
- n-местная б.ф. f переводит строки из n бит в битовые значения, то есть
  - ⋆ задает n-местную операцию на множестве $\{0,1\}$
  - ⋆ вычисляет n-местный предикат на множестве $\{0,1\}$
  - ⋆ задает n-местное отношение на множестве $\{0,1\}$
  - ⋆ распознает язык $L_f \subseteq \{0,1\}^n$ 1-читает, 0-нет
- Прямолинейный (неэкономичный) способ задания б.ф. — таблица значений
  - также называемая таблицей истинности
  - ⋆ n-местную б.ф. f можно задать битовой строкой $F[0..2^n-1]$, где $F[i]$ — значение f на строке, являющейся двоичной записью числа i
- Пример: рассмотрим бинарные б.ф. $f(x, y)$, они же строки $F[0..3]$

x, y	0	$\wedge$	$>$	x	$<$	y	$+$	$\vee$	$\downarrow$	$\sim$	$\bar{y}$	$\leftarrow$	$\bar{x}$	$\to$	$'$	1
00	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
01	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
10	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
11	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

  - $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$ — стрелка Пирса, $x \,'\, y = \overline{x \wedge y}$ — штрих Шефера
  - $x > y, x < y$ — обычные бинарные отношения,
  - $x + y$ — сложение по модулю 2 (xor), $x \sim y = [x = y]$ — эквиваленция
  - $x \to y, x \leftarrow y$ — прямая и обратная импликации

Примеры многоместных булевых функций

Есть несколько важных серий n-местных булевых функций для произвольного n

- $\mathrm{PROJ}_i(\vec{x}) = x_i$ — проекции
  - ⋆ проекция вытаскивает нужный бит из вектора аргументов
  - чтобы вычислить $(a + b)$ mod 2, где числа a и b заданы двоичными представлениями, нужно взять по младшему биту из a и b и выполнить xor
- $\bigoplus \vec{x}, \bigvee \vec{x}, \bigwedge \vec{x}$ — n-арные аналоги коммутативных бинарных функций
- $\mathrm{MOD}_p(\vec{x}) = [\underbrace{x_1 + \cdots + x_n}_{\text{число единиц}}$ делится на $p]$ — модулярные функции
  - ⋆ важный частный случай — MOD_2 (или PARITY) — четность числа единиц
  - ! постройте ДКА, который вычисляет функцию MOD_p
- $T_i(\vec{x}) = [x_1 + \cdots + x_n \geqslant i]$ — пороговые функции
  - ⋆ $T_1(\vec{x}) = \bigvee \vec{x}$, $T_n(\vec{x}) = \bigwedge \vec{x}$
  - ⋆ $T_{\lfloor n/2 \rfloor + 1}(\vec{x})$ — функции большинства (или голосования)
  - ⋆ пороговая функция — ключевой элемент персептрона (простейшей нейронной сети)
- ! ⋆ Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ может зависеть от значений только части переменных
  - ⋆ например, в списке бинарных функций есть x, $\bar{x}$, y, $\bar{y}$, 0, 1
  - переменная x_i функции f — фиктивная, если для любых $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)$
  - переменная, не являющаяся фиктивной, называется существенной

$\oplus$ - сумма произвольного числа аргументов

аналоги бинарных, т.к. они коммутативны и ассоциативны, =>

=> можем распространить их на >2 аргументов

$\oplus \to 1$, когда в векторе нечёт число единичных битов

Пороговая ф-ия возвращает 1, если кол-во „1" больше (не меньше) установленного порога

Функции большинства → 1, если строго больше половины единички

Булевы формулы.

Суперпозиция. Булевы формулы

- ⋆ Функции n переменных громоздко задавать таблицами; что делать?
- Идея: Сложные функции можно представлять как суперпозицию более простых
  - ⋆ рассматриваются функции нескольких переменных ⇒ одни и те же функции могут образовывать много различных суперпозиций
  - $g(y_1, \ldots, y_k)$ можно подставить в $f(x_1, \ldots, x_n)$ вместо любого аргумента
  - ! - какие-то из аргументов g можно отождествить с какими-то из аргументов f
  - пример: подстановкой $g(z, t) = z \wedge t$ в $f(x, y) = x \to y$ можно получить $(z \wedge t) \to y$, $(z \wedge y) \to y$, $x \to (z \wedge t)$, $x \to (x \wedge t)$
- Удобный способ записи булевых функций:
  - зафиксировать маленький набор функций B, смотреть на функции из B как на операции
  - записать булеву формулу — формальное выражение, содержащее переменные, символы операций из B и скобки
  - вычислять значение функции для каждого вектора значений переменных, выполняя операции
  - ⋆ булева формула = слово над конечным алфавитом, которое удовлетворяет набору ограничений (синтаксис) → т.е. правило записи
  - ⋆ булева формула задает булеву функцию (семантика)
- ⋆ Разные формулы могут задавать одну и ту же функцию
  - пример: $(x \vee y) \wedge z$ и $(x \wedge z) \vee (y \wedge z)$
  - формулы, задающие одну и ту же функцию, называются эквивалентными
  - тавтология — это формула, задающая константу 1
  - противоречие — это формула, задающая константу 0
  - формула, задающая функцию, отличную от константы 0, называется выполнимой

Т.е. в случае ФНП суперпозиция (композиция) - не функция.

Нужно явно задать - что и куда подставляем.

Булева формула задает функцию однозначно

Равенством считают равенство слов

ДНФ и карты Карно

Дизъюнктивные нормальные формы

- Разные формулы задают одну функцию $\Rightarrow$ нужны «канонические» формулы
- Такие формулы называют **нормальными формами**
- Нормальная форма должна
  - существовать для любой функции
  - эффективно вычисляться (например по таблице истинности)
  - быть удобной для хранения и вычислений
- **Литерал** — это формула вида x или $\bar{x}$, где x — переменная
- **Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ)** — это формула вида $\bigvee_{i=1}^{n} F_i$, $n \geqslant 1$
  - где $F_i = \bigwedge_{j=1}^{k_i} L_{ij}$, L_{ij} — литерал, $k_i \geqslant 1$, F_i - конъюнкция литералов
  - F_i называют **элементарными конъюнкциями**
  - ⋆ ДНФ — **иерархическая** формула: отрицание применяется только к переменным, конъюнкция — к литералам, дизъюнкция — к элементарным конъюнкциям
- ДНФ от k переменных называется **совершенной (k-СДНФ)**, если
  - все элементарные конъюнкции F_i различны
  - каждая F_i состоит из k литералов, соответствующих различным переменным

Теорема

Любая булева функция, не равная константе 0, задается некоторой СДНФ.

- ★ Иными словами, любая выполнимая формула эквивалентна СДНФ
- ★ **Следствие**: любая булева функция задается некоторой ДНФ
  - $x \wedge \bar{x}$ — ДНФ, задающая 0

Дизъюнктивные нормальные формы (2)

- Функцию $x \sim y$ иногда удобно записывать как x^y
  - ⋆ свойства: $x^1 = x$, $x^0 = \bar{x}$, $1^y = y$, $0^y = \bar{y}$
- **Доказательство теоремы об СДНФ**:
  - пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$ отлична от константы 0
  - построим СДНФ F по следующему правилу:
  - ⋆ для каждого битового вектора $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ такого, что $f(b_1, \ldots, b_k) = 1$, поместим в F элементарную конъюнкцию $C_{\vec{b}} = \underbrace{x_1^{b_1}}_{\text{литерал}} \wedge \cdots \wedge x_k^{b_k}$
  - построенная формула — СДНФ по определению
  - докажем, что F задает f
  - ⋆ функция, заданная ДНФ, равна 1 $\Leftrightarrow$ одна из элементарных конъюнкций равна 1
  - ⋆ $f(b_1, \ldots, b_k) = 1 \Leftrightarrow C_{\vec{b}}(b_1, \ldots, b_k) = 1$ □

Пример построения СДНФ:

f - функция 3х переменных

x_1, x_2, x_3	f
000	1
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	0
111	0

$$\Longrightarrow F = (\overset{x_1^0}{\bar{x}_1} \wedge \overset{x_2^0}{\bar{x}_2} \wedge \overset{x_3^0}{\bar{x}_3}) \vee (\bar{x}_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \vee (x_1 \wedge \bar{x}_2 \wedge x_3)$$

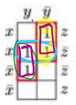
Оптимизация ДНФ. Карты Карно

- ⋆ СДНФ — очень громоздкая формула
  - если у функции половина значений — единицы, то k-СДНФ состоит из $k \cdot 2^{k-1}$ литералов
  - ⋆ проще хранить 2^k бит таблицы значений
- ⋆ важная задача — построение **кратчайшей** ДНФ для данной функции
  - к сожалению, эта задача не только важная, но и **трудная**
- ⋆ Для б.ф. 2-4 переменных кратчайшую ДНФ строят при помощи **карт Карно**
- Карта Карно функции f — это специальная запись таблицы значений f
  - карта — это прямоугольная таблица из 2^k клеток, где k — арность f
  - строки и столбцы проиндексированы так, что каждой клетке однозначно соответствует набор значений переменных, в клетке пишется значение функции (обычно пишут только единицы)
  - ⋆ кратчайшую ДНФ строят, покрывая все клетки с единицами прямоугольниками такими, что
    - число клеток в прямоугольнике — степень двойки
    - если клеток 2^i, то $k - i$ переменных принимают в этих клетках одно значение (определяют элементарную конъюнкцию), а остальные i — все наборы значений

  пример:

Прямоуг. с 4 клетками нет, с 2-мя есть

$(x \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y}) \Longrightarrow$



▯ ▢ - 2 прямоуг.

$\Longrightarrow (y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y})$

Карты Карно (2)

- Еще одна проблема с кратчайшей ДНФ — она не единственна
- Вот иллюстрация из Википедии с картами Карно для 4 переменных:

CD \ AB	00	01	11	10
10	1	1		
11		1	1	
01			1	1
00	1			1

CD \ AB	00	01	11	10
10	1	1		
11		1	1	
01			1	1
00	1			1

$$(\bar{A}\wedge\bar{B}\wedge\bar{D})\vee(\bar{A}\wedge B\wedge C)\vee(A\wedge B\wedge D)\vee(A\wedge\bar{B}\wedge\bar{C}) = (\bar{A}\wedge C\wedge D)\vee(B\wedge C\wedge D)\vee(A\wedge\bar{C}\wedge D)\vee(\bar{B}\wedge\bar{C}\wedge\bar{D})$$

Особенность карт Карно - для 3х переменных - цилиндр, для 4х - тор (т.е. можем склеить концы) низ и верх, право и лево смежны

КНФ

Конъюнктивные нормальные формы

- Конъюнктивная нормальная форма (КНФ) — это формула вида $\bigwedge_{i=1}^{n} F_i$, $n \geqslant 1$
  - где $F_i = \bigvee_{j=1}^{k_i} L_{ij}$, L_{ij} — литерал, $k_i \geqslant 1$
  - F_i называют элементарными дизъюнкциями или клозами (clause)
  - КНФ — тоже иерархическая формула: отрицание применяется только к переменным, дизъюнкция — к литералам, конъюнкция — к клозам
- КНФ от k переменных называется совершенной (k-СКНФ), если
  - все клозы F_i различны
  - каждый F_i состоит из k литералов, соответствующих различным переменным

Теорема

Любая булева функция, не равная константе 1, задается некоторой СКНФ.

Пустая СКНФ задает константу 1

- Иными словами, любая не-тавтология эквивалентна СКНФ
- Следствие: любая булева функция задается некоторой КНФ
  - $x \vee \bar{x}$ — КНФ, задающая 1

Доказательство теоремы об СКНФ

... симметрично доказательству для СДНФ

- Доказательство:
  - пусть $f(x_1, \ldots, x_k)$ отлична от константы 1
  - построим СКНФ F по следующему правилу:
  - для каждого битового вектора $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_k)$ такого, что $f(b_1, \ldots, b_k) = 0$, поместим в F элементарную дизъюнкцию $D_{\vec{b}} = x_1^{\bar{b}_1} \vee \cdots \vee x_k^{\bar{b}_k}$
  - построенная формула — СКНФ по определению
  - докажем, что F задает f
  - функция, заданная КНФ, равна 0 $\Leftrightarrow$ одна из элементарных дизъюнкций равна 0
  - $f(b_1, \ldots, b_k) = 0 \Leftrightarrow D_{\vec{b}}(b_1, \ldots, b_k) = 0$ □

Пример построения СКНФ (функция — та же, что и для примера с СДНФ):

x_1, x_2, x_3	f
000	1
001	0
010	0
011	1
100	0
101	1
110	0
111	0

$x_1^{\bar{0}}$ $x_2^{\bar{0}}$ $x_3^{\bar{1}}$

$$\Longrightarrow \quad F = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3)\wedge(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\wedge(\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)\wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)\wedge(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$$

- Симметрия распространяется и на оптимизацию КНФ при помощи карт Карно: прямоугольники соответствуют клозам и покрывают множество нулей

Полные системы булевых функций

Полные системы

- Множество B булевых функций называется полной системой, если формулой с множеством операций B можно задать любую булеву функцию
  - ★ от любого числа переменных, не меньшего 1

    пример: формула $x \wedge \bar{x}$ задает унарную функцию $f(x)$, равную 0

    пример: формула $x \vee y$ задает не только функцию $f(x,y)$ с таблицей значений

x,y	f
00	0
01	1
10	1
11	1

, но и функцию $g(x,y,z)$ с таблицей значений

x,y,z	g
000	0
001	0
010	1
011	1
100	1
101	1
110	1
111	1

★ Если все функции полной системы B можно задать формулами над множеством функций B', то B' — полная система

★ множество $\{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$ является полной системой
- например, по следствию из теоремы об СКНФ (предыдущий фрагмент)

! Какие еще полные системы существуют?
- любое надмножество множества $\{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$
  - включая множества всех булевых функций и всех бинарных булевых функций
- ! множества $\{\wedge, \bar{\ }\}$ и $\{\vee, \bar{\ }\}$
  - выразить $\vee$ ($\wedge$) через две оставшиеся функции по формулам де Моргана
  - сослаться на замечание ★

$\{\wedge, \vee, \bar{\ }\}$ - полная, т.к. по теореме любая булева функция может быть задана при помощи СКНФ

Только константу 1 нельзя задать, но можем с помощью $x \vee \bar{x}$

Добавление функций в полную систему оставляет её полной

Полные системы из одной булевой ф-ии

Стрелка Пирса и штрих Шефера

Напомним, что $x \downarrow y = \overline{x \vee y}$, $x \,'\, y = \overline{x \wedge y}$

Теорема

Множества $\{\downarrow\}$ и $\{\,'\,\}$ являются полными системами.

Доказательство:
- выразим отрицание и дизъюнкцию через стрелку Пирса:
  - ★ $\bar{x} = x \downarrow x$
  - ★ $x \vee y = \overline{x \downarrow y} = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$
- поскольку $\{\vee, \bar{\ }\}$ — полная система, $\{\downarrow\}$ — тоже полная
- аналогично, отрицание и конъюнкция выражаются через штрих Шефера □

- Верна и обратная теорема:
  - ★ если f — бинарная б.ф. и $\{f\}$ — полная система, то $f \in \{\downarrow, \,'\,\}$
  - обратная теорема следует из теоремы Поста о полноте (докажем потом)
- Еще одну полную систему рассмотрим в следующем фрагменте

Полиномы Жегалкина

Многочлены над $\mathbb{F}_2$

- Поле $\mathbb{F}_2$ — это множество $\{0,1\}$ с операциями $+$ (по mod 2) и $\cdot$ ($= \wedge$)
  - таблицы операций в привычном виде:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

★ Многочлены от k переменных над $\mathbb{F}_2$ — это k-местные булевы функции

★ Множество функций $\{+, \cdot, 1\}$ — полная система
- из нее получается $\{\wedge, \bar{\ }\}$, так как $x \wedge y = xy$, $\bar{x} = x + 1$

⇒ любую функцию можно записать формулой над $\{+, \cdot, 1\}$

- Заметим, что
  - пользуясь коммутативностью ← т.к. F-поле и дистрибутивностью, можно раскрывать скобки и приводить подобные слагаемые
  - в $\mathbb{F}_2$ выполняются тождества $xx = x$ и $x + x = 0$

⇒ Любая формула над $\{+, \cdot, 1\}$ эквивалентна многочлену, в котором
- каждый одночлен — это произведение переменных, в котором все переменные различны, либо свободный член (1 или 0)
- все одночлены различны

- Описанный канонический вид многочлена называется полиномом Жегалкина

★ Для однозначности записи договоримся, что
- алфавит переменных Σ — упорядочен
- в каждом одночлене переменные записываются по возрастанию
- одночлены записываются по возрастанию в радиксном порядке на Σ^*

Многочлены - булевы функции

$\{+, \cdot, 1\}$ - 1 - это константа

Тождество - равенства с переменными, которые верны $\forall$ значений переменных

Если коэф = 1, его можно не писать, если 0, можно не писать одночлен

Полиномы Жегалкина

Теорема

Любая булева функция задается полиномом Жегалкина, и притом единственным.

Доказательство:
- существование полинома следует из полноты системы $\{+,\cdot,1\}$ и эквивалентности любой формулы над этой системой полиному Жегалкина (предыдущий слайд)

Единственность: зафиксируем алфавит переменных $\Sigma = \{x_1, \ldots, x_k\}$
- над этим алфавитом существует 2^{2^k} различных булевых функций
  - ⋆ таблица значений б.ф. задается битовым вектором длины 2^k
- одночлены над Σ биективно отображаются на подмножества Σ

⇒ существует 2^k различных одночленов над Σ
- полиномы Жегалкина над Σ биективно отображаются на множества одночленов
  - полиному 0 сопоставим пустое множество одночленов

⇒ существует 2^{2^k} различных полиномов Жегалкина над Σ

★ функция, которая каждому полиному Жегалкина над Σ ставит в соответствие задаваемую им б.ф. — сюръекция
  - так как каждая функция задается полиномом Жегалкина

★ сюръекция между двумя конечными множествами одной мощности является инъекцией
- каждая функция задается единственным полиномом Жегалкина □

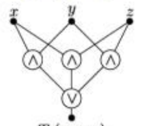
⋆ Полином Жегалкина — это нормальная форма («алгебраическая»)

Булевы схемы. Сумматор

Булевы схемы

- Булева схема (circuit) — альтернативный способ задания булевых функций
  - абстрагирует конструкцию электрической схемы из элементов (вентили, gates)
- Булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_k)$ вычисляет черный ящик
  - у ящика k входящих проводов $(x_1, \ldots, x_k)$ и один выходящий (f)
  - ток, идущий по проводу, означает 1, отсутствие тока — 0
  - если токи во входящих проводах соответствуют вектору $(b_1, \ldots, b_k)$, то ток в выходном проводе кодирует $f(b_1, \ldots, b_k)$
- Внутри черного ящика находятся элементы, соединенные проводами в определенном порядке между собой, со входами и выходами
  - каждый элемент — это черный ящик, реализующий одну из функций полной системы B (базы)
  - в реальных электрических и электронных схемах элементы — это физические устройства, такие как реле в дверном звонке или диоды в электронных часах
  - мы рассматриваем идеальные элементы, абстрагируясь от физических сущностей

Пример: функцию большинства от трех переменных можно задать формулой $T_2(x,y,z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$, которая представляется схемой



$T_2(x,y,z)$

Булевы вектор-функции. Сложение столбиком

У булева вектор-функции значение - тоже вектор

- Булева вектор-функция — это произвольная функция $\vec{f} : \{0,1\}^n \to \{0,1\}^m$
  - сложение двух n-битных чисел — это функция $ADD_n : \{0,1\}^{2n} \to \{0,1\}^{n+1}$ → n+1, т.к. число, которое мы получим, может быть на 1 бит длиннее
  - ⋆ вектор-функции намного удобнее задавать схемами, чем формулами
    - у схемы для вектор-функции m выходов вместо одного

⋆ Научимся вычислять функцию ADD_n
  - пусть $a = a_{n-1} \cdots a_0$, $b = b_{n-1} \cdots b_0$ — числа в двоичной записи
    - ведущие нули разрешены
  - $ADD_n(a_{n-1}, \ldots, a_0, b_{n-1}, \ldots, b_0) = (s_n, \ldots, s_0)$, где $s = s_n \cdots s_0 = a + b$

⋆ Вычисление столбиком:
  - пусть $c_n, \ldots, c_0$ — вспомогательные булевы переменные, $c_i =$ перенос в разряд i
  - ⋆ $c_0 = 0$, $s_0 = a_0 + b_0$ (сложение по mod 2!)
  - ⋆ $c_i = T_2(a_{i-1}, b_{i-1}, c_{i-1})$ для $i = 1, \ldots, n$ (почему?)
  - ⋆ $s_i = a_i + b_i + c_i$ для $i = 1, \ldots, n-1$; $s_n = c_n$
- Приведенный алгоритм выполняет $\Theta(n)$ операций
- Как и любой другой алгоритм сложения n-битных чисел

… но есть нюанс …

- булева схема — это ациклический орграф
- ! электрический ток способен течь по проводам параллельно, давая возможность параллельного вычисления значений в разных узлах схемы (вершинах графа)
  - ★ время вычисления функции булевой схемой определяется глубиной схемы — максимальной длиной пути от входа до выхода
- Глубина схемы, построенной по алгоритму сложения столбиком, равна $\Theta(n)$
  - ⋆ никакой выгоды от распараллеливания мы не получаем

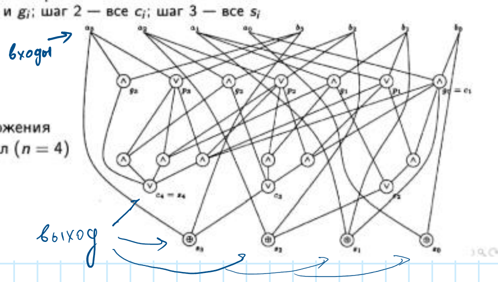
Глубина будет $\Theta(n)$, т.к. c_i получаем через c_{i-1}

Параллельная схема для сложения

- Проблема сложения столбиком — в последовательном вычислении переносов
  - если все переносы известны, все биты s_i вычисляются параллельно за один шаг
- Рассмотрим эволюцию переносов:
  - разряд i порождает перенос, если $c_i = 0$ и $c_{i+1} = 1$
    - ⋆ тогда $a_i = b_i = 1$, т.е. $a_i \wedge b_i = 1$
  - разряд i сохраняет перенос, если $c_i = 1$ и $c_{i+1} = 1$
    - ⋆ тогда $a_i \vee b_i = 1$
  - $\Rightarrow$ $c_i = 1 \Leftrightarrow$ найдется разряд $j < i$ такой, что
    - j порождает перенос, а каждый разряд k, $j < k < i$, сохраняет его
- Положим $p_i = a_i \vee b_i$, $g_i = a_i \wedge b_i \Rightarrow c_i = \bigvee_{j=0}^{i-1} \left(g_j \wedge \bigwedge_{k=j+1}^{i-1} p_k \right)$

★ ADD_n вычисляется за три шага:
шаг 1 — все p_i и g_i; шаг 2 — все c_i; шаг 3 — все s_i

Пример: схема сложения для 4-битных чисел ($n = 4$)



Так устроено сложение в реальных процессорах (почти !)

Если у нас есть только 2 входа, то не за 3 шага, а за $\log_2(n)$

Если физ. огр. нет, то за 3 шага