К4 Рекуррентные соотношения

28 октября 2024 г. 12:03

Определение и примеры

- **Рекуррентное соотношение (от одной переменной)** — уравнение, задающее функцию натурального аргумента n через ее значения при меньших n
  - функция натурального аргумента и последовательность — это одно и то же
- Условно-формальная запись: $f(0) = c$, $f(n) = F(n, f(0), \dots, f(n-1))$
  - натуральный ряд удобно начинать с 0
  - недостаток записи: F имеет переменное число аргументов (это не функция)
  - чаще всего удается представить F как функцию

Примеры рекуррентных соотношений:

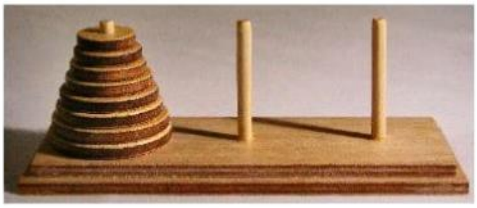
- $f(0) = b$, $f(n) = q \cdot f(n-1)$
  - геометрическая прогрессия со знаменателем q
- $f(0) = 1$, $f(n) = n \cdot f(n-1)$
  - $n!$
- $f(0) = 0$, $f(n) = f(n-1) + n^2$
  - $\sum_{k=1}^{n} k^2$
- $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$
  - числа Фибоначчи
- $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$
  - они же, но со сдвигом
- $f(0) = 1/2$, $f(n) = (1+\sqrt{8})f(n-1)(1-f(n-1))$
  - частный случай логистической функции (https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_map)
- $f(0) = k$, $f(n) = \begin{cases} 3 \cdot f(n-1) + 1, & f(n-1) \text{ нечетно} \\ f(n-1)/2, & f(n-1) \text{ четно} \end{cases}$
  - утверждение о том, что $\forall k \in \mathbb{N} \exists n \in \mathbb{N} : f(n) = 1$ — известная открытая проблема («возможно, математика еще не готова к таким задачам» - Пал Эрдёш)

Использование рекуррентных соотношений

Можно выделить два основных типа задач на рекуррентные соотношения

1. Дана (неконструктивно) функция f, требуется научиться ее вычислять
   - пример: $f(n)$ есть число отношений эквивалентности на n-элементном множестве
   - сюда же относится метод динамического программирования
2. Дана (рекуррентно) функция f, требуется найти замкнутую формулу для вычисления $f(n)$
   - это называется решить рекуррентное соотношение
   - можно решить его, угадав формулу и доказав ее по индукции
   - для некоторых классов рекуррентных соотношений существуют универсальные методы решения

Ханойская башня: постановка



Постановка задачи:

- имеются три стержня и n дисков, все диски разного диаметра
- в начальной конфигурации все диски образуют пирамиду на стержне 1
- в конечной конфигурации все диски образуют пирамиду на стержне 3
- ход состоит в перемещении одного диска с одного стержня на другой
  - остальные диски во время хода сдвигать нельзя
  - диск нельзя положить поверх диска меньшего размера
- найти минимальное число ходов $H(n)$, требуемое для перехода из начальной конфигурации в конечную

- Ход можно записывать как упорядоченную пару стержней
  - например, $2 \to 3$
- Очевидно, $H(0) = 0$, $H(1) = 1$
- $H(2) = 3$:
  - $1 \to 2$, $1 \to 3$, $2 \to 3$ — требуемая последовательность ходов
- Найдем рекуррентное соотношение для $H(n)$ $\Longrightarrow$

Ханойская башня: рекуррентное соотношение

- Пусть $M(n, i, j)$ — кратчайшая последовательность ходов, перемещающая n дисков со стержня i на стержень j

$\Rightarrow$ $H(n) = |M(n, 1, 3)|$
  - $|\ |$ обозначает длину последовательности
  - $|M(n, i, j)| = |M(n, 1, 3)|$ для любых i, j

★ Последовательность $M(n-1, 1, 2), 1 \to 3, M(n-1, 2, 3)$ переводит начальную конфигурацию дисков в конечную

$\Rightarrow$ $H(n) \leqslant 2H(n-1) + 1$
  - $2H(n-1) + 1$ ходов достаточно

- $M(n, 1, 3)$ включает ход, перемещающий самый большой (n-й) диск

★ n-й диск можно переместить только в момент, когда он единственный на своем стержне, а один из оставшихся стержней пуст

$\Rightarrow$ второй из оставшихся содержит пирамиду из $n-1$ диска

$\Rightarrow$ До первого перемещения n-го диска должно пройти не менее $H(n-1)$ шагов

- После последнего перемещения n-го диска — тоже не менее $H(n-1)$ шагов

$\Rightarrow$ $H(n) \geqslant 2H(n-1) + 1$

★ Мы доказали рекуррентное соотношение $H(n) = 2H(n-1) + 1$

Ханойская башня: замкнутая формула

Теорема

$H(n) = 2^n - 1$.

Доказательство:

- рекуррентное соотношение $H(n) = 2H(n-1) + 1$, $H(0) = 0$ определяет единственную функцию
- докажем по индукции, что это функция $2^n - 1$:
- база: $H(0) = 0 = 2^0 - 1$
- шаг: $H(n) = 2H(n-1) + 1 = 2 \cdot (2^{n-1} - 1) + 1 = 2^n - 1$ □

Схема проведенного исследования функции $H(n)$:

неконструктивное определение

$\Rightarrow$ рекуррентное соотношение

$\Rightarrow$ замкнутая формула

неконструктивное определение

⇒ рекуррентное соотношение

⇒ замкнутая формула

Интеграл Эйлера

Вычислим $E(n) = \int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx$, где $n \in \mathbb{N}$

$$E(0) = \int\limits_0^\infty e^{-x} dx = -e^{-x}|_0^\infty = 0 - (-1) = 1$$

К $E(n)$ применим интегрирование по частям:

$$E(n) = \int\limits_0^\infty x^n e^{-x} dx = \begin{bmatrix} u = x^n & du = nx^{n-1}dx \\ dv = e^{-x}dx & v = -e^{-x} \end{bmatrix} =$$

$$x^n(-e^{-x})|_0^\infty - \int\limits_0^\infty nx^{n-1}(-e^{-x})dx = 0 + n\int\limits_0^\infty x^{n-1}e^{-x}dx = nE(n-1)$$

★ $E(n)$ задается рекуррентным соотношением $E(n) = nE(n-1)$, $E(0) = 1$

⇒ $E(n) = n!$

★ Для вывода формулы Стирлинга $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ оценивают интеграл Эйлера, т.е. площадь под графиком функции $f_n(x) = x^n e^{-x}$

Интервальное расписание

Фрилансер зарабатывает деньги выполнением заказов и хочет максимизировать свой доход. Одна из возможных математических постановок —

Задача об интервальном расписании:

- даны k заказов, которые можно выполнить
- i-й заказ — это тройка (b_i, e_i, c_i), где $b_i, e_i, c_i \in \mathbb{N}$, $b_i \leqslant e_i$
- выполнение i-го заказа займет интервал времени $[b_i..e_i]$ и принесет доход c_i
- ★ какой максимальный доход можно получить, выполняя заказы, если в каждый момент времени можно выполнять не более одного заказа?

★ Метод динамического программирования позволяет найти и оптимальный список заказов, но мы ограничимся вычислением дохода

- Будем считать, что список заказов бесконечен и упорядочен по возрастанию «дедлайна» e_i
  - последовательности $\{b_i\}_1^\infty, \{e_i\}_1^\infty, \{c_i\}_1^\infty$ — параметры задачи
- Пусть $f(n)$ — максимальный доход с первых n заказов
  - положим $f(0) = 0$
- Через p_i обозначим наибольший номер k такой, что $e_k < b_i$
  - $p_i = 0$, если такого k не существует

★ если выполнен i-й заказ, то перед ним выполнен заказ с номером $\leqslant p_i$

★ $f(n) = \max\{f(n-1), f(p_n) + c_n\}$

- ★ можем вычислить $f(n)$ при любых допустимых значениях параметров

Классификация рекуррентных соотношений

- Рекуррентное соотношение k-го порядка: $f(n) = F(n, f(n-1), \dots, f(n-k))$
  - здесь F — «нормальная» $(k+1)$-местная функция
  - для задания функции таким соотношением нужно k начальных значений $f(0), \dots, f(k-1)$

Примеры:

- числа Фибоначчи — соотношение второго порядка
- факториал, логистическая функция, ханойская башня — первого порядка
  - не являются соотношениями k-го порядка
- соотношение из задачи про интервальные расписания (p_n может быть любым)
- соотношения вида $f(n) = f(\lfloor n/2 \rfloor) + f(\lceil n/2 \rceil) + n$
  - возникают при оценке сложности рекурсивных алгоритмов

- Рекуррентное соотношение $f(n) = F(n, f(n-1), \dots, f(n-k))$ называется
  - линейным, если $F = F(x_1, \dots, x_k)$ — линейная функция с коэффициентами, зависящими от параметра n
    - т.е. $f(n) = a_1(n)f(n-1) + \dots + a_k(n)f(n-k) + a(n)$
  - линейным однородным, если $a(n) = 0$
  - линейным с постоянными коэффициентами, если все $a_i(n)$ — константы
    - $a(n)$ может не быть константой

Примеры:

- логистическая функция $f(n) = r \cdot f(n-1)(1 - f(n-1))$: нелинейное
- факториал $f(n) = n \cdot f(n-1)$:
  - линейное однородное с переменными коэффициентами
- ханойская башня $f(n) = 2 \cdot f(n-1) + 1$:
  - линейное неоднородное с постоянными коэффициентами
- числа Фибоначчи $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$:
  - линейное однородное с постоянными коэффициентами

Решение линейных рекуррентных соотношений первого порядка

Запишем соотношение первого порядка в виде $f(n+1) = a(n)f(n) + b(n)$, $f(0) = a$

- при $a(n) = n+1$ и $b(n) = 0$ получается факториал

Теорема

$$f(n) = a \cdot \prod_{i=0}^{n-1} a(i) + \sum_{j=0}^{n-1} \left(b(j) \prod_{k=j+1}^{n-1} a(k) \right). \qquad (1)$$

Доказательство:

Положим $g(n) = \frac{f(n)}{\prod_{i=0}^{n-1} a(i)}$, $g(0) = f(0) = a$

Запишем $f(n+1) - a(n)f(n) = b(n)$ и поделим обе части на $\prod_{i=0}^{n} a(i)$:

$$\frac{f(n+1) - a(n)f(n)}{\prod_{i=0}^{n} a(i)} = \frac{b(n)}{\prod_{i=0}^{n} a(i)} \quad \Rightarrow \quad \frac{f(n+1)}{\prod_{i=0}^{n} a(i)} - \frac{f(n)}{\prod_{i=0}^{n-1} a(i)} = \frac{b(n)}{\prod_{i=0}^{n} a(i)}$$

$$\Rightarrow \quad g(n+1) - g(n) = \frac{b(n)}{\prod_{i=0}^{n} a(i)}$$

Подставляя последнее равенство в $g(n) - g(0) = \sum_{j=0}^{n-1} (g(j+1) - g(j))$, получим

$g(n) = a + \sum_{j=0}^{n-1} \frac{b(j)}{\prod_{k=0}^{j} a(k)}$, откуда следует (1) $\square$

Определение и примеры

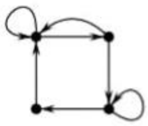
Линейное однородное рекуррентное соотношение с постоянными коэффициентами (ЛОРСПК) имеет вид

$$f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots a_k f(n-k)$$

Если все коэффициенты $a_1, \ldots, a_k$ принадлежат кольцу $\mathbb{K}$, то $f : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$

Примеры ЛОРСПК:

- $f(n) = q \cdot f(n-1)$
  - ⋆ геометрическая прогрессия со знаменателем q и первым членом $f(0)$
- $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$
  - ⋆ числа Фибоначчи при $f(0) = 0$, $f(1) = 1$
- $f(n) = f(n-1) + f(n-2) + f(n-3)$
  - ⋆ числа Трибоначчи при $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$
- $f(n) = 2f(n-1) - f(n-3) + f(n-4)$
  - ⋆ при $f(0) = 4$, $f(1) = 7$, $f(2) = 13$, $f(3) = 24$ — число маршрутов длины n в графе



Постановка задачи

- Частным решением соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$ называется любая функция f, удовлетворяющая этому соотношению
- Общим решением соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$ называется множество всех его частных решений
  - ⋆ обычно под «решением» подразумеваем частное решение, т.е. функцию, а не множество
  - ⋆ любое ЛОРСПК имеет тривиальное решение $f(n) = 0$
  - ⋆ каждое частное решение определяется начальными значениями $f(j)$, $j = 0, \ldots, k-1$
  - ⋆ общее решение зависит от того, над каким кольцом/полем рассматривается соотношение
  - по умолчанию, мы рассматриваем соотношения над полем $\mathbb{R}$

Задача: дано ЛОРСПК $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$, найти его общее решение

★ Общее решение ЛОРСПК является подмножеством линейного пространства $\mathbb{R}^\infty$ всех последовательностей действительных чисел

- с операциями сложения последовательностей и умножения последовательности на число

⋆ Пространство $\mathbb{R}^\infty$ бесконечномерно: его базисы счетны

- $\mathbb{R}^\infty = \langle \{\vec{e_i}\}_0^\infty \rangle$, где $\vec{e_i} = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0, \ldots)$ — последовательность, в которой на i-м месте стоит 1, а остальные элементы — нули

Общее решение как подпространство

Лемма о подпространстве решений

Общее решение рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$ с коэффициентами из $\mathbb{R}$ является k-мерным подпространством в $\mathbb{R}^\infty$.

Доказательство: пусть S — общее решение

S — подпространство:

- ⋆ подмножество линейного пространства является подпространством тогда и только тогда, когда оно замкнуто относительно операций
- пусть $f_1(n), f_2(n)$ — решения, $\alpha \in \mathbb{R}$; тогда
  $f_1(n) + f_2(n) = a_1(f_1(n-1) + f_2(n-1)) + \cdots + a_k(f_1(n-k) + f_2(n-k))$
  $f_1(n) + f_2(n)$ — решение
  $\alpha f_1(n) = a_1(\alpha f_1(n-1)) + \cdots + a_k(\alpha f_1(n-k))$
  $\alpha f_1(n)$ — решение □

$dim(S) = k$:

- рассмотрим решения $e_i(n)$ с начальными условиями $e_i(j) = [i{=}j]$, $i, j = 0, \ldots, k-1$
- ⋆ множество $\{e_i(n)\}_0^{k-1}$ линейно независимо, так как имеет ранг k:

$$\begin{array}{rl} e_0 = & (1, 0, \cdots 0, \; e_0(k), \; e_0(k+1), \; \cdots) \\ e_1 = & (0, 1, \cdots 0, \; e_1(k), \; e_1(k+1), \; \cdots) \\ \vdots & \quad \vdots \; \vdots \; \ddots \; \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ e_{k-1} = & (0, 0, \cdots 1, \; e_{k-1}(k), \; e_{k-1}(k+1), \; \cdots) \end{array}$$

- ⋆ $f(n) = f(0)e_0(n) + f(1)e_1(n) + \cdots + f(k-1)e_{k-1}(n)$ для любого решения

$\Rightarrow$ $\{e_i(n)\}_0^{k-1}$ — базис $S \Rightarrow dim(S) = k$ □

Общее решение — первый подход

Лемма о подпространстве решений позволяет «решить» соотношение $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$, записав общее решение в виде

$$f(n) = C_0 e_0(n) + \ldots + C_{k-1} e_{k-1}(n), \; C_0, \ldots, C_{k-1} \in \mathbb{R}$$

- ⋆ В чем дефект такого «решения»?
- ★ Оно не избавляет от рекурсии: функции $e_i(n)$ заданы тем же самым рекуррентным соотношением, что и функция $f(n)$
- Чтобы избавиться от рекурсии, нужно найти другой базис общего решения, состоящий из функций, значения которых можно вычислять нерекурсивно (например, экспоненциальных и полиномиальных функций)

Характеристический многочлен и частные решения

Многочлен $\chi(x) = x^k - a_1 x^{k-1} - \ldots - a_{k-1}x - a_k$ называется характеристическим многочленом рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$

Лемма о частных решениях

Пусть $\lambda \neq 0$. Функция $f(n) = \lambda^n$ является решением рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$ тогда и только тогда, когда λ — корень $\chi(x)$.

Доказательство:

- при $\lambda \neq 0$
  $\lambda^n = a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_k\lambda^{n-k} \Leftrightarrow \lambda^k = a_1\lambda^{k-1} + \cdots + a_k \Leftrightarrow \lambda$ — корень $\chi(x)$ □

★ Неважно, над каким полем рассматривать рекуррентное соотношение: если его рассматривать над $\mathbb{C}$, комплексные корни характеристического многочлена также дадут решения

Независимость экспоненциальных функций

Лемма о независимости

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ — различные корни характеристического многочлена рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$. Тогда множество функций $\{\lambda_1^n, \ldots, \lambda_s^n\}$ линейно независимо.

Доказательство:

- выпишем функции $\lambda_1^n, \ldots, \lambda_s^n$:

$$\begin{array}{l}
\lambda_1^n = (\,1, \lambda_1, \cdots \lambda_1^{s-1}, \lambda_1^s, \cdots\,) \\
\lambda_2^n = (\,1, \lambda_2, \cdots \lambda_2^{s-1}, \lambda_2^s, \cdots\,) \\
\quad\vdots \qquad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \qquad \vdots \quad \vdots \\
\lambda_s^n = (\,1, \lambda_s, \cdots \lambda_s^{s-1}, \lambda_s^s, \cdots\,)
\end{array}$$

★ в первых s столбцах видим матрицу Вандермонда, определитель которой равен 0 только если $\lambda_i = \lambda_j$ для некоторых $i \neq j$

$\Rightarrow$ в нашем случае определитель $\neq 0 \Rightarrow$ множество линейно независимо □

Общее решение для случая простых корней

Теорема об общем решении (случай простых корней)

Пусть характеристический многочлен рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$ имеет k различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$. Тогда общее решение этого соотношения имеет вид $f(n) = C_1\lambda_1^n + \ldots + C_k\lambda_k^n$, где константы $C_1, \ldots, C_k$ пробегают множество $\mathbb{R}$.

Доказательство следует из лемм о подпространстве решений, о частном решении и о независимости □

- ★ Можно заменить в формулировке теоремы $\mathbb{R}$ на $\mathbb{C}$; получим общее решение того же самого ЛОРСПК, только рассматриваемого как соотношение над $\mathbb{C}$
- ★ Если нужно получить общее решение над $\mathbb{R}$, а среди k различных корней характеристического многочлена есть комплексные, нужно заметить, что
  - ★ комплексные корни многочленов над $\mathbb{R}$ попарно сопряжены
  - ★ если числа λ_1 и λ_2 сопряжены, то λ_1^n и λ_2^n сопряжены для любого n
  - ★ если λ_1 и λ_2 сопряжены, то комплексные функции λ_1^n и λ_2^n порождают в $\mathbb{C}^\infty$ то же самое подпространство, что и вещественные функции $\lambda_1^n + \lambda_2^n$ и $\imath(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$
  - ⇒ каждую пару комплексно сопряженных функций λ_1^n и λ_2^n заменим в базисе на $\lambda_1^n + \lambda_2^n$ и $\imath(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$, получая базис из вещественных функций

Общее решение

Теорема об общем решении (для произвольных корней)

Пусть характеристический многочлен рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$ имеет s различных корней $\lambda_1, \ldots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ с кратностями $m_1, \ldots, m_s$ соответственно, $m_1 + \cdots + m_s = k$. Тогда общее решение этого соотношения над $\mathbb{C}$ имеет вид

$$f(n) = (C_1 + \ldots + C_{m_1} n^{m_1 - 1})\lambda_1^n + \ldots + (C_{m_1+\ldots+m_{s-1}+1} + \ldots + C_k n^{m_s-1})\lambda_s^n,$$

где константы $C_1, \ldots, C_k$ пробегают множество $\mathbb{C}$.

Пример: если характеристический многочлен имеет корни $\lambda_1 = 3$ кратности 1, $\lambda_{2,3} = \pm 2\imath$ кратности 2, $\lambda_4 = 1$ кратности 3, то общее решение выглядит как $f(n) = C_1 3^n + (C_2 + C_3 n)(2\imath)^n + (C_4 + C_5 n)(-2\imath)^n + (C_6 + C_7 n + C_8 n^2)$

- ★ Для перехода к общему решению над $\mathbb{R}$ при наличии комплексных корней надо воспользоваться их сопряженностью (см. предыдущий фрагмент)

  вместо $(2\imath)^n$ и $(-2\imath)^n$ нужно взять вещественные функции
  - $(2\imath)^n + (-2\imath)^n = [n \text{ четное}] \cdot (-1)^{\frac{n}{2}} \cdot 2^{n+1}$
  - $\imath((2\imath)^n - (-2\imath)^n) = [n \text{ нечетное}] \cdot (-1)^{\frac{n+1}{2}} \cdot 2^{n+1}$
  - ! не забывайте скобку Иверсона!

Больше частных решений

Вторая лемма о частных решениях

Пусть характеристический многочлен $\chi(x)$ рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \cdots + a_k f(n-k)$ имеет корень λ кратности не менее $m+1$. Тогда функция $f(n) = n^m \lambda^n$ является решением данного соотношения.

Доказательство:

- При $m = 0$ доказано ранее (лемма о частных решениях); далее $m > 0$
  - ⋆ λ является корнем первых m производных многочлена $\chi(x)$
  - ⋆ умножение многочлена на x не меняет кратности его ненулевых корней
  - ⋆ если многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ имеют общий корень λ кратности m_1 и m_2 соответственно, то у $p_1(n) \pm p_2(n)$ есть корень λ кратности $\min\{m_1, m_2\}$

⇒ λ является корнем многочленов

1. $x^n - a_1 x^{n-1} - \ldots - a_k x^{n-k}$
2. $x^{n+1} - a_1 x^n - \ldots - a_k x^{n-k+1}$
3. $(n+1)x^n - a_1 n x^{n-1} - \ldots - a_k(n-k+1)x^{n-k}$ (производная многочлена 2)
4. $n x^n - a_1(n-1)x^{n-1} - \ldots - a_k(n-k)x^{n-k}$ (вычли 1 из 3)

- ⋆ λ обращает многочлен 4 в ноль ⇒ $n\lambda^n$ — решение нашего соотношения
- ⋆ умножим многочлен 4 на x, возьмем производную и вычтем многочлен 4:
  $n^2 x^n - a_1(n-1)^2 x^{n-1} - \ldots - a_k(n-k)^2 x^{n-k}$
  ⇒ $n^2\lambda^n$ — решение нашего соотношения
- Повторяя m раз, получаем решения $n\lambda^n, n^2\lambda^n, \ldots, n^m\lambda^n$ □

Жордановы матрицы

- Жорданова клетка — это матрица вида $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda \end{bmatrix}$
  - ⋆ $J[i,i] = \lambda$ для всех i и некоторого $\lambda \in \mathbb{C}$; $J[i,i+1] = 1$; $J[i,j] = 0$ иначе
- Жорданова матрица — это блочно-диагональная матрица $J = \begin{bmatrix} \boxed{J_1} & & & 0 \\ & \boxed{J_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r} \end{bmatrix}$,

  где все матрицы J_i — жордановы клетки (возможно, разных размеров)

- ★ Теорема Жордана: для любой матрицы $A \in \mathbb{C}^{k\times k}$ существует такая обратимая матрица T, что матрица $J = TAT^{-1}$ — жорданова
- ★ Равенство $A = T^{-1}JT$ можно использовать для возведения A в степень:
  $A^n = (T^{-1}JT)^n = T^{-1}J^nT$

⇒ Достаточно уметь возводить в степень жордановы матрицы

Степени жордановых матриц

Лемма о степени жордановой клетки

Пусть J — жорданова клетка размера t с числом λ. Тогда $J^n[i,j] = \binom{n}{j-i}\lambda^{n+i-j}$.
(Полагаем $\binom{n}{x} = 0$ при $x < 0$ и $x > n$.)

★ Лемма утверждает, что $J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \binom{n}{2}\lambda^{n-2} & \dots & \binom{n}{t-1}\lambda^{n-t+1} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dots & \binom{n}{t-2}\lambda^{n-t+2} \\ 0 & 0 & \lambda^n & \dots & \binom{n}{t-3}\lambda^{n-t+3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda^n \end{bmatrix}$

Доказательство по индукции: база ($n = 1$) очевидна; шаг индукции:

$$J^{n+1}[i,j] = \sum_{k=1}^{t} J^n[i,k]\cdot J[k,j] = J^n[i,j-1] + J^n[i,j]\cdot\lambda =$$
$$\binom{n}{j-1-i}\lambda^{n+i-j+1} + \binom{n}{j-i}\lambda^{n+i-j+1} = \binom{n+1}{j-i}\lambda^{n+1+i-j} \quad \square$$

Следствие: Для жордановой матрицы выполняется $J^n = \begin{bmatrix} \boxed{J_1^n} & & & 0 \\ & \boxed{J_2^n} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \boxed{J_r^n} \end{bmatrix}$

Общее решение

Теорема об общем решении (для произвольных корней)

Пусть характеристический многочлен рекуррентного соотношения $f(n) = a_1 f(n-1) + \dots + a_k f(n-k)$ имеет s различных корней $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathbb{C}$ с кратностями $m_1, \dots, m_s$ соответственно, $m_1 + \dots + m_s = k$. Тогда общее решение этого соотношения над $\mathbb{C}$ имеет вид

$$f(n) = (C_1 + \ldots + C_{m_1} n^{m_1-1})\lambda_1^n + \ldots + (C_{m_1+\ldots+m_{s-1}+1} + \ldots + C_k n^{m_s-1})\lambda_s^n,$$

где константы $C_1, \dots, C_k$ пробегают множество $\mathbb{C}$.

- По второй лемме о частных решениях мы знаем k специальных решений
  - вида $n^j\lambda_i^n$, где $i = 1, \dots, s$; $j = 0, \dots, m_i - 1$
- Теорема утверждает, что эти решения образуют базис пространства решений
  - которое имеет размерность k
- Доказать линейную независимость специальных решений, как в случае простых корней, не получится

★ Чтобы доказать теорему, мы покажем методами линейной алгебры, что любое решение является линейной комбинацией специальных решений

Переход к системе линейных уравнений

Для компактности записи, пусть $f_n = f(n)$; запишем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} f_n & = & a_1 f_{n-1} + \ldots + a_k f_{n-k} \\ f_{n-1} & = & f_{n-1} \\ \cdots & = & \cdots \\ f_{n-k+1} & = & f_{n-k+1} \end{cases}$$

в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} f_n \\ f_{n-1} \\ f_{n-2} \\ \vdots \\ f_{n-k+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{n-1} \\ f_{n-2} \\ f_{n-3} \\ \vdots \\ f_{n-k} \end{bmatrix}$$

- Пусть $\vec{f_n} = (f_{n+k-1}, \ldots, f_n)^{\perp}$, A — матрица системы

⇒ $\vec{f_n} = A\vec{f}_{n-1}$ для любого $n \geqslant 1$

⇒ $\vec{f_n} = A^n \vec{f_0}$ ($\vec{f_0}$ — вектор начальных значений функции f)

★ Задача: найти выражение для последней компоненты вектора, являющегося произведением степени известной матрицы на известный вектор
  - степени матрицы A вычисляются через жорданову матрицу $J = TAT^{-1}$

Собираем все вместе

- $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\vec{f_n} = A^n \vec{f_0}$

⋆ $A^n = T^{-1} J^n T$, J — жорданова
  - ⋆ теорема Жордана

⋆ На диагонали матрицы J стоят корни $\chi(x)$ — числа $\lambda_1(m_1$ раз$), \ldots, \lambda_s(m_s$ раз$)$
  - ⋆ лемма о характеристических многочленах + подобие A и J

⋆ Размер жордановой клетки в J с числом λ_i не превосходит m_i $(i = 1, \ldots, s)$

⋆ Ненулевые элементы J^n являются произведениями полиномов на экспоненты:
  - ⋆ по лемме о степенях жордановой матрицы,
    $\binom{n}{j-i}\lambda^{n+i-j} = \frac{\lambda^{i-j}}{(j-i)!} n(n-1)\cdots(n+i-j+1)\lambda^n = p(n)\lambda^n$

⋆ Матрицы T и T^{-1}, как и вектор $\vec{f_0}$, не зависят от n

⇒ Элементы матрицы $T^{-1}J^nT = A^n$ и вектора $\vec{f_n} = A^n\vec{f_0}$ — линейные комбинации произведений вида $p(n)\lambda^n$

Пример ⟹

Собираем все вместе (2)

Пример: пусть $J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}$, $T[i,j] = t_{ij}$, $T^{-1}[i,j] = \tau_{ij}$; тогда

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & \frac{n}{\lambda}\lambda^n & 0 \\ 0 & \lambda^n & 0 \\ 0 & 0 & \mu^n \end{bmatrix},\ J^nT = \begin{bmatrix} (t_{11} + \frac{t_{21}}{\lambda}n)\lambda^n & (t_{12} + \frac{t_{22}}{\lambda}n)\lambda^n & (t_{13} + \frac{t_{23}}{\lambda}n)\lambda^n \\ t_{21}\lambda^n & t_{22}\lambda^n & t_{23}\lambda^n \\ t_{31}\mu^n & t_{32}\mu^n & t_{33}\mu^n \end{bmatrix},$$

$$T^{-1}J^nT = \begin{bmatrix} (\tau_{11}t_{11} + \tau_{12}t_{21} + \frac{\tau_{11}t_{21}}{\lambda}n)\lambda^n + \tau_{13}t_{31}\mu^n & (\dots) & (\dots) \\ (\tau_{21}t_{21} + \tau_{22}t_{21} + \frac{\tau_{21}t_{21}}{\lambda}n)\lambda^n + \tau_{23}t_{32}\mu^n & (\dots) & (\dots) \\ (\tau_{31}t_{21} + \tau_{32}t_{21} + \frac{\tau_{31}t_{21}}{\lambda}n)\lambda^n + \tau_{33}t_{33}\mu^n & (\dots) & (\dots) \end{bmatrix}$$

- ⋆ Любая функция, удовлетворяющая соотношению $f(n) = a_1f(n-1) + \dots + a_kf(n-k)$, имеет вид $f(n) = p_1(n)\lambda_1^n + \dots + p_s(n)\lambda_s^n$, где $p_i(n)$ — многочлен степени не выше $m_i - 1$, $i = 1, \dots, s$
- ⇒ $f(n)$ является линейной комбинацией специальных решений $\lambda_1^n, \dots, n^{m_1-1}\lambda_1^n, \dots, \lambda_s^n, \dots, n^{m_s-1}\lambda_s^n$,

что и требовалось доказать □

Тут не до конца!