# Г-1. Маршруты, циклы, связность

13 ноября 2024 г. 13:37

Графы. Основные понятия

## Основные понятия

- Граф: пара $G = (V, E)$
  - $V$ — непустое множество (множество вершин)
  - $E$ — бинарное мультиотношение на $V$ (множество ребер)
- ⋆ Рассматриваем только конечные графы ($V$ и $E$ конечны)
  - кратность ребра — это его кратность как элемента $E$
  - если $E$ симметрично — граф неориентированный
    - иначе — ориентированный (орграф)
  - Матрица смежности — это матрица мультиотношения $E$
    - обозначается $M_G$
  - ребро — упорядоченная пара
    - ребро $(u, v)$ (или $u \to v$) исходит из $u$ и входит в $v$
  - ребро $(u, v)$ неориентированного графа — это пара ребер $u \to v$, $v \to u$
  - ⋆ это правило распространяется на петли — ребра вида $(u, u)$

Важно [
    - ⋆ петля $(u, u)$ неориентированного графа учитывается в матрице смежности как $M_G[u, u] = 2$

  - ⋆ степень исхода вершины $\deg^-(u)$ = число ребер вида $(u, v)$ с учетом кратности
  - ⋆ степень захода вершины $\deg^+(u)$ = число ребер вида $(v, u)$ с учетом кратности
    - ⋆ в неориентированном графе просто степень вершины $\deg(u) = \deg^-(u) = \deg^+(u)$
- ⋆ В ближайших лекциях граф = неориентированный граф
- ⋆ Обыкновенный граф — неориентированный граф без петель и кратных ребер
- ⋆ Полный граф — обыкновенный граф с условием $E = V^2 \setminus \Delta$ → любая пара вершин соединена ребром
  - обозначается $K_n$, где $n = |V|$

число вершин

## Маршруты и связность

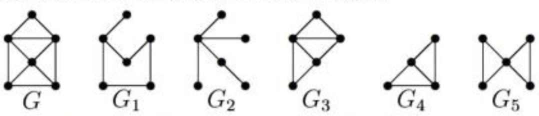
- Маршрут — это последовательность $\{v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_n, v_n\}$, где $e_i = (v_{i-1}, v_i)$ для всех $i$
  - ⋆ в графе без кратных ребер маршрут записывают как последовательность вершин
  - ⋆ $n$ — длина маршрута, тривиальный маршрут $\{v_0\}$ имеет длину 0
  - ⋆ часто говорят «маршрут из $v_0$ в $v_n$» или $(v_0, v_n)$-маршрут

Частные случаи маршрутов [
  - ⋆ цепь: маршрут, в котором все ребра различны
  - ⋆ путь (простая цепь): цепь, в которой все вершины различны
  - ⋆ циклический маршрут: $v_n = v_0$, $n > 0$
  - ⋆ цикл: циклический маршрут, в котором все ребра различны
  - ⋆ простой цикл: цикл, в котором все вершины различны (кроме $v_0 = v_n$)
- ★ На маршрут часто смотрят как на граф, состоящий из всех его вершин и ребер
  - ⋆ стандартные обозначения: $P_n$ / $C_n$ — путь / простой цикл на $n$ вершинах
- Вершины $u$ и $v$ связаны, если существует $(u, v)$-маршрут
  - ⋆ а значит и $(v, u)$-маршрут, поскольку граф неориентированный
- ⋆ связанность — отношение эквивалентности на $V$
  - ⋆ его классы $V_1, \ldots, V_k$ определяют графы $(V_1, E_1), \ldots, (V_k, E_k)$ такие, что $E_1 \cup \ldots \cup E_k = E$
  - ⋆ эти графы называются компонентами связности $G$
- ⋆ Граф связен, если у него одна компонента связности
  - ⋆ отношение связанности совпадает с $V^2$

## Подграфы

- Граф $G' = (V', E')$ — подграф графа $G = (V, E)$, если $V' \subseteq V$ и $E' \subseteq E$
  - ⋆ $G'$ — суграф, если $V' = V$
  - ⋆ $G'$ — порожденный подграф, если $E' = E_{|V'}$

  Для приведенного ниже графа $G$
  - суграфами являются $G_1, G_2$
  - порожденными подграфами являются $G_3, G_4$



$G$ $G_1$ $G_2$ $G_3$ $G_4$ $G_5$

! Выведите формулу для числа подграфов полного графа $K_n$

Для графа $G = (V, E)$ определены операции
  - удаление ребра $e$: $G - e = (V, E \setminus \{e\})$
  - удаление вершины $v$: $G - v = (V \setminus \{v\}, E \setminus \{(v, u) \mid u \in V\})$
- ⋆ Любой подграф графа $G$ можно получить из $G$ удалением вершин и ребер
  - ⋆ только удаление ребер ⇔ результат — суграф
  - ⋆ только удаление вершин ⇒ результат — порожденный подграф
  - ⋆ любой порожденный подграф можно получить удалением вершин
- ⋆ Компонента связности графа $G$ — связный подграф графа $G$

## Циклы

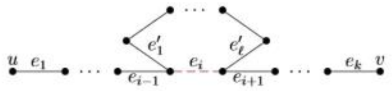
- Циклы — это не только маршруты, но и подграфы
  - поэтому можно говорить «граф содержит цикл»

**Лемма о разрыве цикла**

Ребро $e$ принадлежит некоторому циклу графа $G \Rightarrow$ число компонент связности графов $G$ и $G - e$ совпадает.

т.е. если удалить из цикла ребро, то граф останется связным

Доказательство:
- $e$ входит в некоторый цикл $\Rightarrow$ $e$ входит в простой цикл $e, e'_1, \ldots, e'_\ell$
- пусть вершины $u$ и $v$ связаны в $G$; докажем, что они связаны в $G-e$
- в $G$ найдется $(u,v)$-путь, скажем, $e_1, e_2, \ldots, e_k$
- если в этом пути нет ребра $e$, то $u$ и $v$ связаны в $G-e$ этим же путем
- если $e = e_i$, где $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$, то в графе $G-e$ есть $(u,v)$-маршрут $e_1, \ldots, e_{i-1}, e'_1, \ldots, e'_\ell, e_{i+1}, \ldots, e_k$, как на рисунке



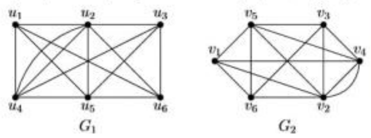

$\Rightarrow$ $u$ и $v$ связаны в $G-e$ □

# Равенство и изоморфизм графов

## Равенство и изоморфизм графов

- Графы $G_1 = (V_1, E_1)$ и $G_2 = (V_2, E_2)$ **равны**, если $V_1 = V_2, E_1 = E_2$
  - в упражнении из предыдущего фрагмента надо считать неравные подграфы
- Иногда считают, что множество вершин — это некое «стандартное» множество, например, $\{1, \ldots, n\}$
  - тогда равенство графов $G_1$ и $G_2$ определяют равенством $M_{G_1} = M_{G_2}$
- **Изоморфизм** графов $G_1$ и $G_2$ — это биекция $\phi : V_1 \to V_2$, сохраняющая ребра
  - для любых $u, v \in V$ число ребер $(u, v)$ в $E_1$ равно числу ребер $(\phi(u), \phi(v))$ в $E_2$
- $G_1$ и $G_2$ **изоморфны** ($G_1 \cong G_2$), если между ними существует изоморфизм
- Использование матрицы смежности подразумевает линейный порядок на множестве вершин
  - $V = \{v_1 < v_2 < \cdots < v_n\}$
- Изоморфизм указывает, как надо переупорядочить вершины $G_2$, чтобы матрица смежности совпала с $M_{G_1}$
  - а именно, $\phi(v_1) < \phi(v_2) < \cdots < \phi(v_n)$

Пример: графы на рисунке изоморфны, $\phi(u_i) = v_i$ — изоморфизм




$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Изоморфизм графов (2)

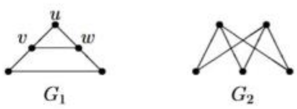
**Теорема**

Графы $G_1$ и $G_2$ изоморфны $\Leftrightarrow M_{G_1} = \Pi M_{G_2} \Pi^{-1}$, где $\Pi$ — матрица некоторой перестановки.

Доказательство: упражнение □

- Доказательство изоморфизма графов — довольно сложная задача
  - перебирать все $n!$ биекций — долго
- Два заданных графа неизоморфны, если у них различаются такие элементы, которые у изоморфных графов должны совпасть
- Изоморфизм сохраняет степени вершин
  - $\Rightarrow$ $G_1$ и $G_2$ имеют одно и то же **мультимножество** степеней вершин
  - мультимножество степеней вершин — это **разбиение** числа $2m$, где $m = |E|$
    - сумма степеней вершин равна $2m$
- Изоморфизм сохраняет подграфы
  - Если $G_1 \cong G_2$, $G'$ — подграф $G_1$, то $G_2$ содержит подграф, изоморфный $G'$

Пример: графы на рисунке неизоморфны
  - имеют одно и то же распределение степеней вершин $(3, 3, 2, 2, 2)$, но первый граф содержит подграф $K_3$ (на вершинах $u, v, w$), а второй — нет

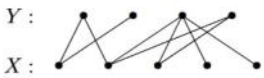


# Двудольные графы

## Двудольные графы

- В этом фрагменте графы содержат более одной вершины и не имеют петель
- Граф $G = (V, E)$ — **двудольный**, если
  - существует **разбиение** $V$ на классы $X$ и $Y$ (**доли**) такое, что у всякого ребра графа $G$ одна вершина принадлежит $X$, а другая — $Y$
  - для двудольного графа часто пишут $G = (X, Y, E)$

**Пример**:




- Граф $G$ двудольный $\Leftrightarrow$ каждая компонента связности $G$ — двудольный или одноэлементный граф
  - если $G$ не связен, то разбиение $G$ на доли не единственно
- Частные случаи двудольных графов:
  - деревья и леса
  - паросочетания
    - **паросочетанием** называется граф, в котором все вершины имеют степень 1

## Двудольные графы (2)

- Обычно двудольные графы возникают, когда множества $X$ и $Y$ имеют различную природу и существует естественное бинарное отношение $E \subseteq X \times Y$
- **Задача о назначениях**: дан список из не более чем $|X|$ подмножеств некоторого множества $X$, выбрать в каждом подмножестве элемент так, чтобы все выбранные элементы были различны
  - Построим двудольный граф $(X, Y, \in)$, где $Y$ — список подмножеств; нужно найти паросочетание, содержащее все вершины из $Y$
- **Задача об узловых станциях**: дан набор маршрутов в некотором графе, найти наименьшее множество вершин, пересекающееся с каждым из маршрутов
  - ! опишите двудольный граф для этой задачи самостоятельно

# Критерий двудольности

## Критерий двудольности

**Теорема (критерий двудольности)**

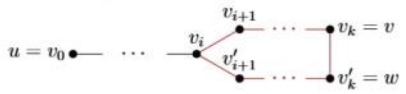
Граф $G$ двудольный $\Leftrightarrow$ любой цикл в $G$ имеет четную длину.

\# Если нет циклов, то он двудольный

- **Доказательство (необходимость):**
  - пусть $(v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k)$ — цикл в $G$, $v_k = v_0$
  - $\Rightarrow$ для любого $i$ вершины $v_i$ и $v_{i+1}$ принадлежат разным долям (определение двудольности)
  - $\Rightarrow$ $k$ четно
- **Доказательство (достаточность):**
  - пусть $G$ — граф, в котором все циклы имеют четную длину
  - если все компоненты связности $G$ двудольны или одноэлементны, то $G$ двудолен
  - $\Rightarrow$ можно считать, что $G$ связен
  - $d(u, v)$ (**расстояние** между $u$ и $v$) — наименьшая длина $(u, v)$-маршрута в $G$
  - зафиксируем в $G$ произвольные вершины $u, v, w$ так, чтобы $v$ и $w$ были смежны
  - докажем, что $\delta = |d(u, v) - d(u, w)| = 1$
  - к любому $(u, v)$-маршруту можно добавить ребро $(v, w)$, получая $(u, w)$-маршрут на единицу большей длины
  - $\Rightarrow$ $d(u, w) \leqslant d(u, v) + 1$
  - аналогично, $d(u, v) \leqslant d(u, w) + 1$
  - $\Rightarrow$ $\delta \leqslant 1$; осталось показать, что $\delta \neq 0$ $\Longrightarrow$

## Критерий двудольности (окончание доказательства)

- Условие $\delta \neq 0$ докажем от противного:
  - пусть $\delta = 0$, $d(u, v) = d(u, w) = k$
  - рассмотрим кратчайший $(u, v)$-путь и кратчайший $(u, w)$-путь
  - первые вершины этих путей совпадают, а последние — различаются
  - $\Rightarrow$ в $G$ имеется такой подграф:

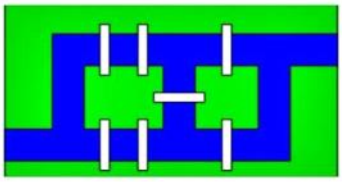



  - этот подграф содержит цикл
    $v_i \to v_{i+1} \ldots \to v_k = v \to w = v'_k \to \ldots \to v'_{i+1} \to v_i$
    нечетной длины $2(k-i)+1$ $\Rightarrow$ противоречие с условием теоремы
  - итак, $\delta = 1$, т.е. среди чисел $d(u, v)$, $d(u, w)$ одно четное и одно нечетное
- Положим
  $X = \{v \in V \mid d(u, v) - \text{нечетное}\}$, $\quad Y = \{v \in V \mid d(u, v) - \text{четное}\}$
  - $X \cap Y = \varnothing$, $X \cup Y = V$, $X, Y \neq \varnothing$
  - $\Rightarrow$ $\{X, Y\}$ — разбиение $V$
  - расстояния от $u$ до любых двух смежных вершин графа $G$ имеют разную четность
  - $\Rightarrow$ одна из этих вершин лежит в $X$, а другая — в $Y$
  - $\Rightarrow$ граф $G$ по определению двудольный □

Эйлеров цикл и эйлерова цепь

## Эйлеров цикл

- Цикл в графе $G$ называется эйлеровым, если он содержит все ребра $G$
  - ★ как подграф, эйлеров цикл совпадает с $G$ с точностью до вершин степени 0 (изолированных вершин)
- Эйлерова цепь — это цепь, содержащая все ребра $G$
  - эйлеров цикл — частный случай эйлеровой цепи
- Граф эйлеров (полуэйлеров), если в нем есть эйлеров цикл (цепь)
- Источник понятия — старая головоломка о кенигсбергских мостах:
- Город Кенигсберг расположен на берегах реки Прегель и двух островах на этой реке; части города соединены мостами (см. рисунок)
- Можно ли обойти все мосты, пройдя по каждому из них ровно один раз?



★ В головоломке спрашивается о наличии эйлеровой цепи в графе с 4 вершинами (берега и острова реки) и 7 ребрами (мосты)

Теорема Эйлера о циклах

## Теорема Эйлера о циклах

**Теорема Эйлера о циклах**

Граф без изолированных вершин является эйлеровым тогда и только тогда, когда он связен и степени всех его вершин четны.

Доказательство (необходимость):
- Пусть $G$ — эйлеров граф без изолированных вершин
  - $\Rightarrow$ Каждая вершина инцидентна хотя бы одному ребру
  - $\Rightarrow$ Эйлеров цикл проходит по всем вершинам
  - $\Rightarrow$ Любые две вершины в $G$ соединены цепью (частью эйлерова цикла)
  - $\Rightarrow$ $G$ связен
- «Обойдем» $G$ по эйлерову циклу
- Для произвольной вершины $v$
  - мы «зайдем» в вершину $v$ столько же раз, сколько «выйдем» из нее
  - инцидентное $v$ ребро используется либо только для захода в $v$, либо только для выхода из $v$
  - ★ петля используются и для захода, и для выхода
  - при подсчете степени вершины каждая петля учитывается дважды
  - остальные ребра разбиваются на пары (входящее ребро, исходящее ребро)
  - $\Rightarrow$ Степень $v$ четна □

выхода из $v$

- ⋆ петля используются и для захода, и для выхода
- при подсчете степени вершины каждая петля учитывается дважды
- остальные ребра разбиваются на пары (входящее ребро, исходящее ребро)

⇒ Степень $v$ четна □

## Теорема Эйлера о циклах — достаточность

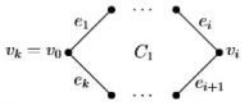
Доказательство (достаточность):

- Пусть $G$ связен, степени всех вершин в $G$ четны; построим в $G$ эйлеров цикл
- Если в $G$ есть петли, то можно
  - удалить петли (связность графа и четность степеней вершин не нарушатся)
  - построить эйлеров цикл в получившемся графе
  - встроить петли в построенный цикл, получая эйлеров цикл в $G$

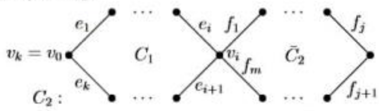
⇒ В дальнейшем считаем, что в $G$ нет петель

- Пусть $v_0$ — произвольная вершина графа $G$
  - $\deg(v_0) > 0$ ⇒построим цепь с началом в $v_0$
    - ребра $e_1, e_2, \ldots$ выбираем произвольно
    - останавливаемся, когда цепь нельзя продолжить (все ребра, инцидентные текущей вершине $v_k$ уже вошли в цепь)
    - ⇒ остановимся через конечное число шагов
  - пусть построена цепь $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, e_k, v_k$
  - докажем, что $v_k = v_0$, т.е. мы построили цикл
  - от противного: пусть $v_k \neq v_0$
  - ⇒ проходя по цепи от $v_0$ к $v_k$, мы входили в $v_k$ $\ell > 0$ раз, а выходили $\ell-1$ раз
  - все ребра, по которым мы входили и выходили, различны
  - ⇒ в цепи $2\ell-1$ ребер, инцидентных $v_k$
  - это не все ребра в $G$, инцидентные $v_k$, так как $\deg(v_k)$ четна
  - ⇒ противоречие с правилом построения цепи ⇒$v_k = v_0$
- Окончание доказательства ⟹

## Теорема Эйлера о циклах — достаточность (2)




- Пусть $C_1$ — построенный цикл:
  - Если $C_1$ — эйлеров, построение закончено
- Пусть $C_1$ не эйлеров, т.е. в графе $G_1 = G - \{e_1, \ldots, e_k\}$ есть ребра
- Среди этих ребер есть ребро $f_1$, инцидентное какой-то вершине $v_i$ цикла $C_1$
  - ⋆ иначе $C_1$ — компонента связности связного графа $G$, не совпадающая с $G$
- ⋆ В графе $G_1$ степени всех вершин четны
  - при удалении ребер $e_1, \ldots, e_k$ степень каждой из вершин $v_1, \ldots, v_k$ уменьшилась на четное число, а степени остальных вершин не изменились
- Рассмотрим компоненту связности графа $G_1$, содержащую ребро $f_1$
  - в ней можно построить цикл $\bar{C}_2$ из ребер $f_1, \ldots, f_m$ тем же способом, которым был построен цикл $C_1$:




  - последовательность ребер $e_1, \ldots, e_i, f_1, f_2, \ldots, f_m, e_{i+1}, \ldots, e_k$ образует цикл $C_2$
  - ⋆ в $C_2$ больше ребер, чем в $C_1$
  - ⋆ если цикл $C_2$ эйлеров, построение закончено
  - ⋆ иначе повторим процедуру, расширив цикл $C_2$ до $C_3$, и т.д.
- ⋆ число ребер в $G$ конечно ⇒ какой-то цикл $C_j$ окажется эйлеровым □

Комментарии и приложения

## Комментарии к теореме Эйлера о циклах

- ★ Если $G$ — эйлеров граф, $e$ — какое-то его ребро, то граф $G - e$ полуэйлеров
  - если в эйлеровом цикле удалить произвольное ребро, останется эйлерова цепь
- ⇒ Верна следующая версия теоремы Эйлера:
- ★ Граф без изолированных вершин является полуэйлеровым ⇔ он связен и в нем не более двух вершин нечетной степени
- ⋆ Понятия эйлерова цикла/цепи переносятся без изменений на орграфы
- ⇒ Анализ доказательства дает теорему Эйлера для орграфов:
- ★ Орграф без изолированных вершин является эйлеровым ⇔ он сильно связен и для любой вершины степень исхода равна степени захода
- ! Сформулируйте ориентированную версию критерия для полуэйлеровых графов
  - будьте внимательны!
- ⋆ Граф кенигсбергских мостов не является полуэйлеровым
  - все 4 вершины имеют нечетную степень (проверьте!)

## Приложения эйлеровых графов

- Задача китайского почтальона: дан граф с неотрицательными весами ребер, требуется найти циклический маршрут наименьшего веса, содержащий все ребра графа
  - практическая задача: составление маршрутов поливальных/посыпальных машин на улицах города
  - если граф эйлеров, то оптимальным маршрутом является эйлеров цикл
  - неэйлеров граф превращают в эйлеров заменой некоторых ребер на кратные
    - соответствует дополнительному «холостому» проходу по ребру
- Задача о разрезании лазером: в станок для лазерной резки подается лист металла, который нужно разрезать на детали в соответствии с чертежом
  - лазер не должен проходить один и тот же отрезок дважды (может оплавиться край детали)
  - лазер можно отключить и переустановить на другую точку листа, но это сложная процедура, и количество отключений надо минимизировать

! Опишите связь этой задачи с эйлеровыми графами

! Чем отличается работа с неэйлеровыми графами в задаче о разрезании лазером и задаче китайского почтальона?

Возможно для КП

Диаметр графа и эйлеровость

## Диаметр эйлеровых графов

- $d(u,v)$ — расстояние от $u$ до $v$ (наименьшая длина $(u,v)$-маршрута) в графе $G$
  - $d(u,u)=0$, $d(u,v)=\infty$ если $(u,v)$-маршрута не существует
  - в неориентированном графе $d(u,v)=d(v,u)$
- Диаметр графа: $diam(G)=\max_{u,v\in V} d(u,v)$
  - диаметр графа/орграфа, не являющегося связным/ сильно связным, бесконечен
  - реальный мир: огромные графы с маленьким диаметром (шесть рукопожатий)
- Диаметр орграфа называют ориентированным диаметром
  - неориентированный диаметр $\overline{diam}(G)$ орграфа $G$ — это диаметр графа $G'$, полученного симметризацией $G$ (стиранием всех стрелок)
  - это «диаметр для пешеходов»: по улицам с односторонним движением пешеход может двигаться в любую сторону
- $\overline{diam}(G)\leqslant diam(G)$, и разница может быть сколь угодно велика
  - например, $\overline{diam}(G)<\infty=diam(G)$
- Теорема Бабаи (2006): если $G$ — эйлеров, то $diam(G)=O(\overline{diam}(G)\cdot\Delta\cdot\ln n)$, где $\Delta$ — максимальная степень вершины в $G$, $n$ — число вершин
- Пусть $T$ — порождающее множество группы $G$; граф Кэли $\Gamma(G,T)$ имеет множество вершин $G$ и множество ребер $\{(u,v)\mid \exists t\in T: v=ut\}$
  - граф Кэли эйлеров (объясните, почему)
  - можно определить диаметр группы $G$: $diam(G)=\max_T diam(\Gamma(G,T))$
  - гипотеза Бабаи: диаметр симметрической группы $S_n$ полиномиален от $n$

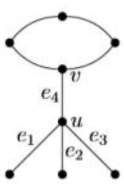
Мосты и точки сочленения

## Мосты и точки сочленения

Пусть $G$ — произвольный неориентированный граф

- Ребро $e$ графа $G$ называется мостом, если $G-e$ имеет больше компонент связности, чем $G$
- Вершина $v$ графа $G$ называется точкой сочленения, если $G-v$ имеет больше компонент связности, чем $G$

  Пример: граф на рисунке имеет четыре моста и две точки сочленения
  - ребра $e_1$, $e_2$, $e_3$ и $e_4$ и вершины $u,v$




- Мосты и точки сочленения обычно рассматривают для связных графов
- Единственный связный граф с мостом и без точек сочленения — цепь длины 1
  - во всех остальных случаях хотя бы одна из инцидентных мосту вершин является точкой сочленения
- Мосты и точки сочленения моделируют узкие места в сетях связи

## Свойства мостов

**Лемма о циклах**

Для любого графа $G$, $e$ — мост $\Leftrightarrow$ $e$ не содержится ни в одном цикле $G$.

Доказательство (необходимость):

- $e$ содержится в некотором цикле

$\Rightarrow$ по лемме о разрыве цикла, $G - e$ и $G$ имеют одни и те же компоненты связности

$\Rightarrow$ $e$ не мост $\Rightarrow$ мост не содержится ни в одном цикле

Достаточность:

- $e = (u, v)$ не содержится ни в одном цикле
- если в $G - e$ есть $(u, v)$-цепь, эта цепь вместе с $e$ образует цикл, что невозможно

$\Rightarrow$ $u$ и $v$ лежат в разных компонентах связности $G - e$

- но в одной компоненте связности $G$, благодаря ребру $e$

$\Rightarrow$ число компонент связности увеличилось

$\Rightarrow$ $e$ — мост □

## Свойства мостов (2)

**Лемма об удалении моста**

Удаление моста увеличивает число компонент связности графа $G$ ровно на 1.

Доказательство:

- пусть $G_e$ — компонента связности графа $G$, содержащая мост $e = (u, v)$
- все компоненты $G$, кроме $G_e$, переходят в граф $G - e$ без изменения

$\Rightarrow$ достаточно показать, что в графе $G_e - e$ две компоненты связности

- докажем, что любая вершина $w \in G_e$ связана в $G_e - e$ либо с $u$, либо с $v$:
  - $G_e$ связен $\Rightarrow$ существует $(w, u)$-путь $P$
  - если $e \notin P$, то $w$ и $u$ связаны в $G_e - e$
  - если $e \in P$, то $P = (w, e_1, \ldots, v, e, u)$ $\Rightarrow$ $w$ и $v$ связаны в $G_e - e$ □

## Свойства точек сочленения

**Лемма о точке сочленения**

Вершина $v$ связного графа $G$ является точкой сочленения $\Leftrightarrow$ в $G$ найдутся две отличные от $v$ вершины $u$ и $w$ такие, что любой $(u, w)$-путь содержит $v$.

Доказательство (необходимость):

- $v$ — точка сочленения графа $G$ $\Rightarrow$ $G - v$ не связный
- пусть $u$ и $w$ — любые вершины из разных компонент связности графа $G - v$

$\Rightarrow$ любой $(u, w)$-путь проходит через $v$

Достаточность:

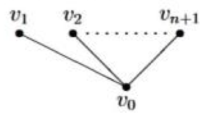
- пусть вершины $u \neq v$ и $w \neq v$ таковы, что любой $(u, w)$-путь содержит $v$

$\Rightarrow$ в графе $G - v$ вершины $u$ и $w$ не связаны

$\Rightarrow$ $G - v$ не связный $\Rightarrow$ $v$ — точка сочленения □

★ В отличие от удаления моста, удаление точки сочленения может привести к сколь угодно большому росту числа компонент связности

Пример: в графе на рисунке при удалении $v_0$ число компонент увеличивается на $n$

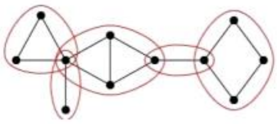



Двусвязные графы. Блоки

## Двусвязные графы. Блоки

- Связный граф без точек сочленения называется двусвязным
- ★ Если граф моделирует сеть связи, то двусвязность — это отказоустойчивость:
  - выход из строя одного узла не нарушает функционирования остальной сети, независимо от того, какой узел вышел из строя
  - выход из строя одной линии не нарушает функционирования остальной сети, независимо от того, какая линия вышла из строя
    - кроме случая, когда сеть связи — цепь длины 1
- ★ Рассматривают и более сильные требования отказоустойчивости:
  - выход из строя любых $k$ узлов не нарушает функционирования остальной сети ($(k+1)$-связные графы)
  - выход из строя любых $k$ линий не нарушает функционирования остальной сети (реберно $(k+1)$-связные графы)
- ⋆ Задача мониторинга связности локальной сети с глобальным интернетом
- Компонента двусвязности (блок) графа $G$ — это любой максимальный по включению двусвязный подграф $G$

  Пример: в графе на рисунке 5 блоков (обведены красным)



- ★ Блоки, в отличие от компонент связности, могут иметь общие вершины

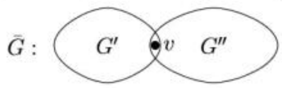
## Лемма о блоках

**Лемма о блоках**

Два различных блока графа $G$ либо не имеют общих вершин, либо имеют единственную общую вершину, являющуюся точкой сочленения $G$.

Доказательство:

- пусть компоненты двусвязности $G'$ и $G''$ графа $G$ имеют общую вершину $v$
- рассмотрим граф $\bar{G}$, состоящий из всех вершин и ребер графов $G'$ и $G''$:




- $\bar{G}$ связен, но не двусвязен по определению блока

$\Rightarrow$ в $\bar{G}$ есть точка сочленения, и ей может быть только вершина $v$
  - если удалить любую другую вершину из $G'$, то $G'$ останется связным $\Rightarrow$ для любой оставшейся в $G'$ вершины $u$ найдется $(u, v)$-путь $\Rightarrow$ для любой вершины $w \in G''$ найдется $(u, w)$-путь $\Rightarrow$ $\bar{G}$ останется связным
  - при удалении вершины из $G''$ рассуждаем аналогично
- поскольку $v$ — точка сочленения, подграфы $G'$ и $G''$ не могут иметь других общих вершин: если такая вершина $v'$ есть, то граф $\bar{G} - v$ связен, поскольку любая его вершина связана с $v'$ в силу двусвязности графов $G'$ и $G''$ □

! Докажите, что блок — это порожденный подграф

## Дерево блоков

- Граф блоков $B(G)$ графа $G$ определяется следующим образом:
  - вершинами являются блоки и точки сочленения $G$
  - каждая точка сочленения соединена неориентированным ребром со всеми блоками, в которые она входит

– двудольный граф

**Теорема о графе блоков**

Граф блоков связного графа $G$ является деревом.

Доказательство:

- $B(G)$ очевидно связен; докажем, что в $B(G)$ нет циклов
- пусть имеется цикл $B_1, a_1, \ldots, B_k, a_k, B_1$ $(k \geqslant 2)$

$\Rightarrow$ любые вершины из блоков, например, $B_1$ и $B_k$ соединены двумя путями (один проходит через $a_k$, а другой — нет)

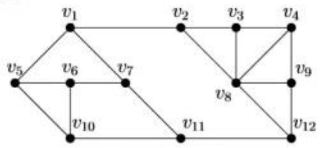
$\Rightarrow$ $a_k$ не точка сочленения по лемме о точке сочленения □

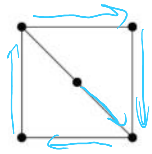
Гамильтонов цикл

## Гамильтонов цикл: определения и примеры

- Цикл в графе $G$ называется **гамильтоновым**, если он содержит все вершины $G$ по одному разу
  - ⋆ гамильтонов цикл — это простой цикл, содержащий все вершины графа
  - ⋆ как подграф, гамильтонов цикл изоморфен $C_n$, где $n$ — число вершин в $G$
- **Гамильтонов путь** — это путь, содержащий все вершины $G$
  - гамильтонов цикл — частный случай гамильтонова пути
- Граф **гамильтонов** если в нем есть гамильтонов цикл

Примеры:



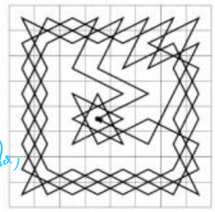
— цикла нет, есть путь

- ⋆ Граф слева гамильтонов; например,
  $v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_8 \to v_4 \to v_9 \to v_{12} \to v_{11} \to v_7 \to v_6 \to v_{10} \to v_5 \to v_1$
- ⋆ Граф справа негамильтонов
  - но гамильтонов путь в нем очевидно есть
- ★ Гамильтонов граф является связным (далее увидим, что двусвязным)
- ⋆ Считаем, что петель и кратных ребер нет (на гамильтоновость это не влияет)

## Происхождение

- Задача об обходе конем: обойти доску $n \times n$ шахматным конем, посетив все поля по одному разу и вернувшись на исходное поле
  - впервые упоминается в индийском трактате IX века
  - занимались, в том числе, Муавр и Эйлер
  - справа приведено одно из решений для доски $8 \times 8$
  - для нечетных $n$ у задачи нет решения (почему?), поэтому для нечетных $n$ не требуют возвращения в исходную точку

Если не возвращаться, то можно



- Головоломка Гамильтона: обойти додекаэдр по ребрам, посетив все вершины по одному разу и вернувшись в исходную вершину
  - середина XIX века
  - справа приведено одно из решений
  - ★ графы всех правильных многогранников гамильтоновы
  - ★ существуют выпуклые многогранники с негамильтоновыми графами

# Задача коммивояжера

## Задача коммивояжера

- Задача коммивояжера (TSP): дан список городов, соединенных дорогами с известными длинами; коммивояжер должен посетить все города по одному разу и вернуться в свой город. Найти кратчайший маршрут коммивояжера
  - изучается математиками примерно с 1930-х
    - эвристика «идти в ближайший непосещенный город» может не найти ответ
    - термин: Джулия Робинсон (1949)
  - самая известная оптимизационная задача о графах
- Математическая формулировка: дан граф $G = (V, E)$, в котором каждому ребру $e \in E$ приписан неотрицательный вес $w(e)$; требуется найти в $G$ гамильтонов цикл, сумма весов ребер в котором минимальна
  - ⋆ можно дополнить $G$ до полного графа ребрами очень большого веса; если оптимальный маршрут в полном графе
    - ⋆ содержит добавленное ребро, то в исходном графе решения нет
    - ⋆ не содержит добавленных ребер, то он оптимален в исходном графе
- Вариации:
  - евклидова TSP
    - вершины — точки на плоскости, веса — евклидовы расстояния
  - метрическая TSP
    - веса удовлетворяют неравенству треугольника: $w(v_1, v_2) \leqslant w(v_1, v_3) + w(v_3, v_2)$
  - асимметричная TSP
    - граф ориентирован, $w(u, v)$ может не совпадать с $w(v, u)$
  - TSP с предшествованием
    - на вершинах задан (частичный) порядок, маршрут должен быть с ним согласован

## Приложения задачи коммивояжера

**Приложения**:

- реальные логистические задачи
  - развоз товаров по магазинам, курьеры, школьные автобусы, ...
- проектирование чипов
- сборка ДНК из фрагментов

# Теорема Оре

## Теорема Оре

- Если в графе очень много ребер, он должен быть гамильтоновым
- Наиболее известны три достаточных условия гамильтоновости:
  теорема Дирака (самое слабое), теорема Хвáтала (самое сильное) и

**Теорема Оре**

Пусть $G$ — обыкновенный граф с $n$ вершинами, $n > 2$. Если $\deg(u) + \deg(v) \geqslant n$ для любых двух несмежных вершин $u$ и $v$ графа $G$, то граф $G$ гамильтонов.

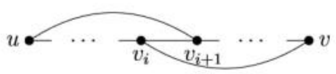
**Доказательство:** от противного

- пусть существует граф $G$, удовлетворяющий всем условиям теоремы и не являющийся гамильтоновым
- ⋆ если возможно, добавим к $G$ новое ребро так, чтобы граф остался негамильтоновым
- ⋆ новый граф тоже удовлетворяет всем условиям теоремы
- будем повторять данную процедуру, пока это возможно
- в какой-то момент получим граф $G'$, который удовлетворяет всем условиям теоремы и является максимальным негамильтоновым
  - превращается в гамильтонов при добавлении любого ребра
  - существование такого $G'$ следует из того, что полный граф гамильтонов
- получим противоречие, построив гамильтонов цикл в $G'$ $\Longrightarrow$

## Доказательство теоремы Оре (окончание)

- Пусть $u$ и $v$ — произвольные несмежные вершины графа $G'$
- ⋆ В $G'$ нет гамильтонова цикла, но при добавлении ребра $(u, v)$ появится
  $\Rightarrow$ в $G'$ есть гамильтонов $(u, v)$-путь:


- Пусть $S = \{i \mid u \text{ смежна с } v_{i+1}\}$ и $T = \{i \mid v \text{ смежна с } v_i\}$
  - ⋆ $|S| = \deg(u)$, $|T| = \deg(v)$
  - $\Rightarrow$ $|S| + |T| \geqslant n$ по условию теоремы
  - элементы множеств $S$ и $T$ являются числами 1 до $n-1$
  - $\Rightarrow$ $S \cap T \neq \varnothing$
  - пусть $i \in S \cap T \Rightarrow$ в $G'$ есть ребра $(u, v_{i+1})$ и $(v_i, v)$:




$\Rightarrow$ В графе $G'$ есть гамильтонов цикл
  - $u \to v_2 \to \cdots \to v_i \to v \to v_{n-1} \to \cdots \to v_{i+1} \to u$
- Требуемое противоречие получено □

# Необходимое условие гамильтоновости

## Гамильтоновость и двусвязность

**Лемма**

Любой гамильтонов граф двусвязен.

Доказательство:

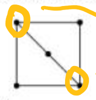
- если граф $G$ не двусвязен, то в нем есть точка сочленения $v$
- по лемме о точке сочленения найдутся вершины $u$ и $w$, отличные от $v$ и такие, что любой $(u,w)$-путь содержит $v$

$\Rightarrow$ любой цикл в $G$, содержащий $u$ и $w$, содержит $v$ как минимум дважды

$\Rightarrow$ в $G$ нет цикла, содержащего все вершины по одному разу □

★ Не любой двусвязный граф гамильтонов

обобщенная точка сочленения 2-го порядка (delete → получим 3 комп. связности)

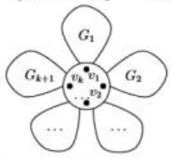
- Минимальный пример: 
- Есть ли более сильные необходимые условия гамильтоновости?
- Множество вершин $\{v_1,\ldots,v_k\}$ связного графа $G$ называется обобщенной точкой сочленения $k$-го порядка, если граф $G-\{v_1,\ldots,v_k\}$ имеет более $k$ компонент связности
  - ★ в графе из примера есть обобщенная точка сочленения второго порядка
  - ★ обобщенная точка сочленения первого порядка = точка сочленения

## Необходимое условие гамильтоновости

**Теорема**

Любой гамильтонов граф не имеет обобщенных точек сочленения

- Доказательство:
  - пусть граф $G$ имеет обобщенную точку сочленения $\{v_1,\ldots,v_k\}$, а граф $G-\{v_1,\ldots,v_k\}$ — компоненты связности $G_1,G_2,\ldots,G_{k+1}$:




  - ★ компонент связности может быть и больше, но для рассуждения это неважно
  - рассмотрим какой-нибудь цикл $C$, содержащий все вершины графа $G$
  - обходя $C$, мы должны хотя бы раз зайти в «лепесток» — подграф $G_i$ $(i=1,\ldots,k+1)$ и хотя бы раз из него выйти

  $\Rightarrow$ $C$ содержит хотя бы $k+1$ путь, соединяющий вершины из разных «лепестков»
  - любой путь между вершинами из разных «лепестков» содержит какую-то из вершин $v_1,\ldots,v_k$

  $\Rightarrow$ по принципу Дирихле какая-то вершина $v_i$ встречается по крайней мере в двух из упомянутых путей, т.е. дважды встречается в цикле $C$

  $\Rightarrow$ $C$ — не гамильтонов цикл □

Пара слов о вычислительной сложности

## Задачи поиска эйлерова и гамильтонова цикла: сравнение

★ Несмотря на внешнюю схожесть определений эйлерова и гамильтонова циклов, задачи поиска этих циклов в графе разительно отличаются по сложности

- Поиск эйлерова цикла — это вычислительно простая (tractable) задача:
  - ★ теорема Эйлера — критерий, позволяющий установить наличие или отсутствие эйлерова цикла в графе с $n$ вершинами и $m$ ребрами за время $O(n^2)$
    - ★ если граф задан списками смежности, то и проверку связности, и вычисление степеней вершин можно реализовать за время $O(m)$
  - ★ если эйлеров цикл есть, его легко найти (например, алгоритмом из доказательства теоремы Эйлера, хотя есть и другие)
    - ★ при подходящей организации данных можно тоже уложиться во время $O(m)$
  - ★ поиск эйлерова цикла — характерный представитель класса **P** задач, разрешимых за полиномиальное от размера входных данных время
    - вычислительно простые = полиномиальные

★ Ни критерия гамильтоновости графа, ни эффективного алгоритма нахождения гамильтонова цикла в произвольном гамильтоновом графе не известно

★ В современной математике есть консенсус, что таких алгоритмов не существует: задача поиска гамильтонова цикла — вычислительно трудная (intractable)

  - ★ задачи о гамильтоновом цикле (включая задачу коммивояжера) входят в класс **NP**, содержащий **P**, а точнее, в подкласс наиболее трудных задач из **NP**, называемых **NP**-полными
  - ★ доказательство строгости включения **P** ⊆ **NP** — одна из сложнейших проблем современной математики, самая известная из семи проблем тысячелетия

- Подробности рассказываются в курсе теории алгоритмов

## Простые и сложные задачи (окончание)

- Кроме задач об эйлеровом и гамильтоновом циклах нам встречалась еще одна интересная с точки зрения вычислительной сложности задача: проверка изоморфности двух графов
  - неизвестно, является ли эта задача трудной, простой или «промежуточной»
  - ⋆ из NP-полноты проверки изоморфности следуют результаты теории сложности, которые выглядят нереалистично; поэтому есть консенсус, что она не NP-полна
  - если полиномиальный алгоритм существует, он вероятно очень сложен
  - ⋆ с 1980-х годов известен алгоритм со сложностью $2^{O(\sqrt{n \log n})}$
  - ⋆ в 2015 году Ласло Бабаи предъявил (а в 2017 исправил) алгоритм, проверяющий изоморфность за время $2^{O(\log^c n)}$, где $c$ — константа
  - ★ изоморфизм — это перестановка, и задача проверки изоморфности оказалась задачей из теории групп, где все как правило очень сложно

- Трудные задачи оптимизации имеют важный дополнительный аспект: приближенные решения
  - ⋆ для метрической (в том числе евклидовой) TSP существует полиномиальный алгоритм, гарантирующий нахождение гамильтонова цикла, вес которого не более чем в 1.5 раза превосходит вес минимального гамильтонова цикла
    - такой алгоритм называют 1.5-приближенным
  - ⋆ в общем случае таких алгоритмов нет
  - ! пусть вам свыше дан полиномиальный $C$-приближенный алгоритм для общей задачи TSP, где $C > 1$ — некоторая константа;
    постройте полиномиальный алгоритм поиска гамильтонова цикла