



**Министерство науки и высшего образования Российской
Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего образования
«Московский государственный технический университет
имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)**

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные
технологии»

Лабораторная работа № 3

**Тема Построение и программная реализация алгоритма сплайн-
интерполяции табличных функций.**

Студент Варламова Е.А.

Группа ИУ7-41Б

Оценка (баллы) _____

Преподаватель Градов В.М.

Москва.
2021 г

Цель работы. Получение навыков владения методами интерполяции таблично заданных функций с помощью кубических сплайнов.

1. Исходные данные

1. Таблица функции с количеством узлов N , заданная с помощью формулы $y = x^2$ в диапазоне $[0..10]$ с шагом 1.
2. Значение аргумента x в первом интервале, например, при $x=0.5$ и в середине таблицы, например, при $x= 5.5$.

2. Код программы

(код интерполяции полиномом Ньютона не приведён, однако был взят из 2 лабораторной)

```
def spline(n, x, y, plot_x):
    n -= 1
    h = [0]
    for i in range(1, n + 1):
        h.append(x[i] - x[i - 1]) # 1 .. n

    ksi = [0, 0, 0]
    eta = [0, 0, 0]
    for i in range(2, n + 1):
        ksi.append(-(h[i]) / (h[i - 1] * ksi[i] + 2 * (h[i - 1] + h[i])))
        f = 3 * ((y[i] - y[i - 1]) / h[i] - (y[i - 1] - y[i - 2]) / h[i - 1])
        eta.append((f - h[i - 1] * eta[i]) / (h[i - 1] * ksi[i] + 2 * (h[i - 1] + h[i])))

    c = []
    for i in range (n + 2):
        c.append(0)
    for i in range (n + 1, 1, -1):
        c[i - 1] = c[i] * ksi[i] + eta[i]

    a = [0]
    b = [0]
    d = [0]
    for i in range(1, n + 1):
        a.append(y[i - 1])
        b.append((y[i] - y[i-1]) / h[i] - h[i] * (c[i+1] + 2 * c[i]) / 3)
        d.append((c[i+1] - c[i]) / (3 * h[i]))

    pos = -1
    for i in range(n):
        if x[i] <= plot_x and x[i + 1] > plot_x:
            pos = i + 1
            break

    return (a[pos] + b[pos] * (plot_x - x[pos-1]) + c[pos] * (plot_x - x[pos-1])**2 +
d[pos] * (plot_x - x[pos-1])**3)

n = 11
x = []
y = []
for i in range(n):
    x.append(i)
    y.append(i * i)
print(spline(n, x, y, 0.5))
print(Newton_interpolation(3, x, y, 0.5))
```

3. Результат работы программы

	$x = 0.5$	$x = 5.5$
Сплайн-интерполяция	0.3415055	30.2503453
Интерполяция полиномом Ньютона 3- ей степени	0.25	30.25

4. Ответы на вопросы

1. Получить выражения для коэффициентов кубического сплайна, построенного на двух точках.

Точки: (x_0, y_0) (x_1, y_1)

$$\psi(x) = a_i + b_i(x - x_{i-1}) + c(x - x_{i-1})^2 + d(x - x_{i-1})^3$$

$$h = x_1 - x_0$$

В узлах значения многочлена и интерполируемой функции совпадают:

$$\psi(x_0) = y_0 = a //$$

$$\psi(x_1) = y_1 = a + b * h + c * h^2 + d * h^3 \quad (1)$$

Так как участок всего один, примем, что вторая производная равна нулю на концах участка интерполирования, тогда:

$$\psi''(x) = 2 * c + 6 * d * (x - x_0)$$

$$\psi''(x_0) = 2 * c = 0 \Rightarrow c = 0 //$$

$$\psi''(x_1) = 2 * c + 6 * d * h = 0$$

$$0 + 6 * d * h = 0 \Rightarrow d = 0 //$$

Подставим в (1) коэффициенты:

$$y_1 = y_0 + b * h \Rightarrow b = (y_1 - y_0) / h = (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0) //$$

Итог: $a = y_0$; $b = (y_1 - y_0) / (x_1 - x_0)$; $c = d = 0$

2. Выписать все условия для определения коэффициентов сплайна, построенного на 3-х точках

В узлах значения многочлена и интерполируемой функции совпадают.

Поэтому для первого интервала:

$$\psi_1(x_0) = y_0 \quad (1)$$

$$\psi_1(x_1) = y_1 \quad (2)$$

Для второго интервала:

$$\psi_2(x_1) = y_1 \quad (3)$$

$$\psi_2(x_2) = y_2 \quad (4)$$

Приравниваем во внутреннем узле первые и вторые производные:

$$\psi_1'(x_1) = \psi_2'(x_1) \quad (5)$$

$$\psi_1''(x_1) = \psi_2''(x_1) \quad (6)$$

Вторые производные на концах участка интерполирования задаются равными нулю:

$$\psi_1''(x_0) = 0 \quad (7)$$

$$\psi_2''(x_2) = 0 \quad (8)$$

Получили 8 условий, что логично: 3 точки создают 2 интервала, на каждом из которых определяются 4 коэффициента, значит нужно 8 уравнений.

3. Определить начальные значения прогоночных коэффициентов, если принять, что для коэффициентов сплайна справедливо $C1 = C2$.

$$c_{i-1} = \xi_i c_i + \eta_i \Rightarrow c1 = \xi * c2 + \eta$$

Получаем: $\xi = 1, \eta = 0$

4. Написать формулу для определения последнего коэффициента сплайна C_N , чтобы можно было выполнить обратный ход метода прогонки, если в качестве граничного условия задано $kC_{N-1} + mC_N = p$, где k, m и p - заданные числа.

$$C_{N-1} = \xi_N * C_N + \eta_N$$

$$(p - m * C_N) / k = \xi_N * C_N + \eta_N$$

$$p - m * C_N = k * \xi_N * C_N + k * \eta_N$$

$$C_N = (p - k * \eta_N) / (k * \xi_N + m)$$