

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования

«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

(национальный исследовательский университет)» (МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчёт по лабораторной работе №5 по дисциплине "Анализ алгоритмов"

Тема Муравьиный алгоритм и метод полного перебора для решения задачи коммивояжёра

Студент Варламова Е. А.

Группа ИУ7-51Б

Преподаватели Волкова Л.Л.

Оглавление

B	веде	ние	3
1	Ана	алитическая часть	4
	1.1	Полный перебор	4
	1.2	Муравьиный алгоритм	
	1.3	Вывод из аналитической части	
2	Кон	нструкторская часть	7
	2.1	Разработка алгоритмов	7
	2.2	Вывод из конструкторской части	
3	Tex	нологическая часть	10
	3.1	Средства реализации	10
	3.2	Реализация алгоритмов	
	3.3	Тестирование	16
	3.4	Вывод из технологической части	
4	Исс	следовательская часть	17
	4.1	Время выполнения алгоритмов	17
	4.2	Автоматическая параметризация	17
	4.3	Вывод из исследовательской части	21
За	клю	очение	22
л.	итеп	arvna	22

Введение

Муравьиный алгоритм — один из эффективных полиномиальных алгоритмов для нахождения приближённых решений задачи коммивояжёра, а также решения аналогичных задач поиска маршрутов на графах. Суть подхода заключается в анализе и использовании модели поведения муравьёв, ищущих пути от колонии к источнику питания, и представляет собой метаэвристическую оптимизацию.

Цель лабораторной работы

Целью данной лабораторной работы является изучение муравьиного алгоритма и приобретение навыков параметризации методов на примере муравьиного алгоритма.

Задачи лабораторной работы

В рамках выполнения работы необходимо решить следующие задачи:

- решить задачу коммивояжера при помощи алгоритма полного перебора и муравьиного алгоритма;
- реализовать алгоритмы полного перебора и муравьиный алгоритм для решения задачи коммивояжёра;
- замерить и сравнить время выполнения реализаций алгоритмов;
- провести параметризацию реализации муравьиного алгоритма;
- сделать выводы на основе проделанной работы.

1 Аналитическая часть

В данном разделе представлены теоретические сведения о рассматриваемых алгоритмах. Задача коммивояжёра – поиск минимального гамильтонова пути во взвешенном графе.

1.1 Полный перебор

Пронумеруем все города от 1 до n. Базовому городу присвоим номер n. Каждый тур по городам однозначно соответствует перестановке целых чисел 1, 2, ..., n.

Задачу коммивояжера можно решить образуя все перестановки первых n целых положительных чисел. Для каждой перестановки строится соответствующий тур и вычисляется его стоимость. Обрабатывая таким образом все перестановки, запоминается тур, который к текущему моменту имеет наименьшую стоимость. Если находится тур с более низкой стоимостью, то дальнейшие сравнения производятся с ним.

Сложность алгоритма полного перебора составляет O(n!), где n – число городов.

1.2 Муравьиный алгоритм

Моделирование поведения муравьев связано с распределением феромона на тропе — ребре графа в задаче коммивояжера. При этом вероятность включения ребра в маршрут отдельного муравья пропорциональна количеству феромона на этом ребре, а количество откладываемого феромона пропорционально длине маршрута. Чем короче маршрут, тем больше феромона будет отложено на его ребрах, следовательно, с большей вероятностью муравьи будут включать его в свой маршрут. Моделирование такого подхода, использующего только положительную обратную связь, приводит к преждевременной сходимости к локальному оптимуму. Избежать этого можно, моделируя отрицательную обратную связь в виде испарения феромона. При этом если феромон испаряется быстро, то это приводит к потере памяти колонии и забыванию хороших решений, с другой стороны, большое время испарения может привести к получению устойчивого локально оптимального решения. Теперь, с учетом особенностей задачи коммивояжера, возможно описать локальные правила поведения муравьев при выборе пути.

• Муравьи имеют собственную «память». Поскольку каждый город может быть посещей только один раз, у каждого муравья есть список уже посещенных городов — список запретов. Обозначим через $J_{i,k}$ список городов, которые необходимо посетить муравью k, находящемуся в городе i.

• Муравьи обладают «зрением» — видимость есть эвристическое желание посетить город j, если муравей находится в городе i. Будем считать, что видимость обратно пропорциональна расстоянию между городами i и $j-D_{ij}$:

$$\eta_{ij} = \frac{1}{D_{ij}}. ag{1.1}$$

• Муравьи обладают «обонянием» — они могут улавливать след феромона, подтверждающий желание посетить город j из города i, на основании опыта других муравьев. Количество феромона на ребре (i,j) в момент времени t обозначим через $\tau_{ij}(t)$.

На этом основании можно сформулировать вероятностно-пропорциональное правило 1.2, определяющее вероятность перехода k-ого муравья из города i в город j:

$$\begin{cases} P_{i,j,k}(t) = \frac{[\tau_{ij}(t)]^{\alpha} * [\eta_{ij}]^{\beta}}{\sum_{l \in J_{i,k}} [\tau_{il}(t)]^{\alpha} * [\eta_{il}]^{\beta}}, & j \in J_{i,k}; \\ P_{i,j,k}(t) = 0, & j \notin J_{i,k}, \end{cases}$$
(1.2)

где α , β — параметры, задающие веса следа феромона, при $\alpha=0$ алгоритм вырождается в жадный алгоритм (будет выбран ближайший город). Заметим, что выбор города является вероятностным, правило 1.2 лишь определяет ширину зоны города j; в общую зону всех городов $J_{i,k}$;, генерируется случайное действительное число от 0 до 1, которое и определяет выбор муравья. Правило 1.2 не изменяется в ходе алгоритма, но у двух разных муравьев значение вероятности перехода будут отличаться, т. к. они имеют разный список разрешенных городов.

Пройдя ребро (i,j), муравей откладывает на нем некоторое количество феромона, которое должно быть связано с оптимальностью сделанного выбора. Пусть $T_k(t)$ есть маршрут, пройденный муравьем k к моменту времени t, а $L_k(t)$ — длина этого маршрута. Пусть также Q — параметр, имеющий значение порядка длины оптимального пути. Тогда откладываемое количество феромона может быть задано в виде:

$$\Delta \tau_{i,j,k}(t) = \begin{cases} \frac{Q}{L_k(t)}, & (i,j) \in T_k(t); \\ 0, & (i,j) \notin T_k(t). \end{cases}$$

$$(1.3)$$

Правила внешней среды определяют, в первую очередь, испарение феромона. Пусть $\rho \in [0,1]$ есть коэффициент испарения, тогда правило испарения имеет вид

$$\tau_{ij}(t+1) = (1-\rho) * \tau_{ij}(t) + \Delta \tau_{ij}(t); \Delta \tau_{ij}(t) = \sum_{k=1}^{m} \Delta \tau_{ij,k}(t);$$
(1.4)

где m — количество муравьев в колонии. Обычно оно совпадает с n.

В начале алгоритма количество феромона на ребрах принимается равным небольшому положительному числу. Общее количество муравьев остается постоянным и равным количеству городов, каждый муравей начинает маршрут из своего города.

Во время моделирования испарения феромона его количество на ребре может достигнуть нулевого значения, в результате чего вероятность продвижения по этому ребру всегда будет нулевой. Во избежание этой ситуации при обновлении количества феромона стоит сравнивать его с каким-либо положительным минимальным значением и не допускать выхода за его границу.

Сложность алгоритма: $O(t_{max} * max(m, n^2))$, где t_{max} — время жизни колонии, m — количество муравьев в колонии, n —количество городов [1].

1.3 Вывод из аналитической части

В данном разделе были рассмотрены особенности алгоритмов решения задачи коммивояжёра.

2 Конструкторская часть

В данном разделе представлены схемы рассматриваемых алгоритмов.

2.1 Разработка алгоритмов

На рисунках 2.1 - 2.3 приведены схемы алгоритмов решения задачи коммивояжера.

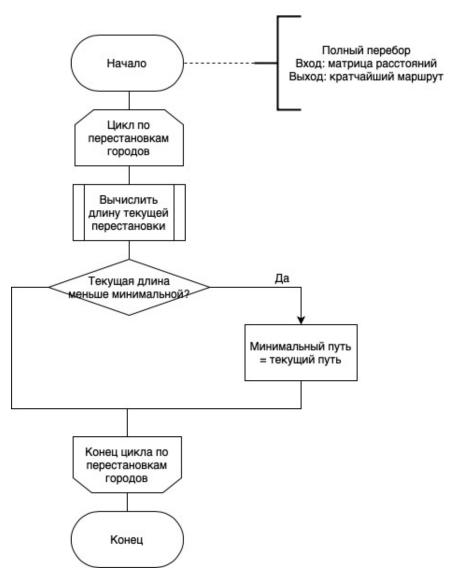


Рис. 2.1: Схема алгоритма полного перебора

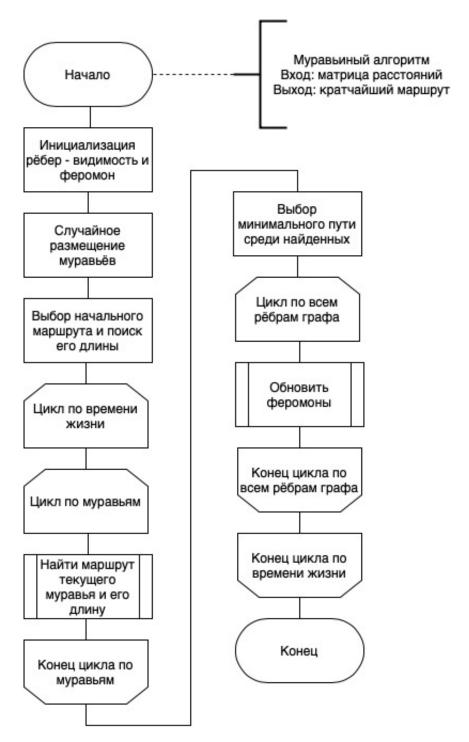


Рис. 2.2: Схема муравьиного алгоритма

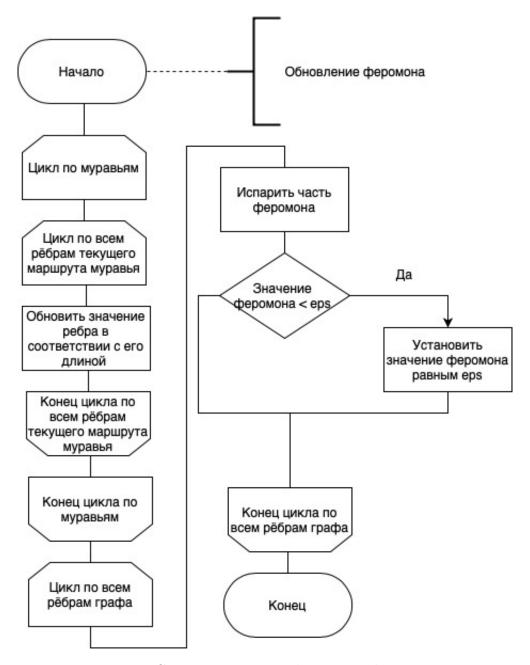


Рис. 2.3: Схема алгоритма обновления феромона

2.2 Вывод из конструкторской части

На основе теоретических данных, полученных аз аналитического раздела, были построенны схемы алгоритмов для решения задачи коммивояжёра.

3 Технологическая часть

В данном разделе приведены средства реализации и листинги кода.

3.1 Средства реализации

В качестве языка программирования был выбран С. Данный выбор обусловлен тем, что он является языком высокого уровня. В качестве среды программирования была выбрана среда CLion.

3.2 Реализация алгоритмов

В листингах 3.1 - 3.2 представлены листинги алгоритмов решения задачи коммивояжёра.

Листинг 3.1: Алгоритм полного перебора

```
int nperm(size_t *seq, size_t n)
3
    size t i = n;
    do {
       if (i < 2)
         return EXIT_FAILURE;
       i --:
    } while (seq[i-1] > seq[i]);
9
10
    size t j;
11
    for (j = n; j > i \&\& seq[i - 1] > seq[--j];) {}
12
13
    swp(seq + i - 1, seq + j);
14
15
    for (j = n; i < --j; i++)
16
       swp(seq + i, seq + j);
17
18
    return EXIT SUCCESS;
19
20
21
  int cnt_dist(mtx_t *mtx, size_t *route)
^{22}
23
    int dst = 0, td;
^{24}
25
    for (size t i = 0; i < mtx \rightarrow n - 1; i++)
26
27
       td = mtx->data[route[i]][route[i + 1]];
28
       if (td < 0)
29
         return -1;
30
31
       dst += td;
32
    }
33
    td = mtx \rightarrow data[0][mtx \rightarrow n - 1];
35
    if (td < 0)
36
       return -1;
37
38
    dst += td;
39
40
    return dst;
41
42
43
  int commis_voyageur_bf(mtx_t *mtx, size_t **route)
44
45
    *route = malloc(mtx->n * sizeof(size_t));
46
    size t * tr = malloc(mtx->n * sizeof(size t));
47
48
```

```
for (size_t i = 0; i < mtx->n; i++)
49
       tr[i] = i;
50
51
     bool found = false;
52
     int dst, m;
53
54
    do {
55
       dst = cnt \ dist(mtx, tr);
56
57
       if (dst >= 0 \&\& (!found || dst < m))
58
59
         found = true;
60
         m = dst:
61
         memcpy(*route, tr, mtx->n * sizeof(mtx->n));
62
63
    } while (nperm(tr, mtx\rightarrown) == EXIT SUCCESS);
64
65
     free(tr);
66
67
     if (!found)
68
       free(*route);
70
       return -1;
71
72
73
     return m;
74
75 }
```

Листинг 3.2: Муравьиный алгоритм

```
int commis voyageur ant(mtx t *mtx, size t **route, antp t *param)
3
    mtxf t *dist = create mtxf(mtx->n, mtx->m);
    mtxf t *fero = create mtxf(mtx->n, mtx->m);
5
    ant_t *colony = malloc(mtx->n * sizeof(ant_t));
    float *p = malloc((mtx->n-1) * sizeof(float));
    *route = malloc(mtx->n * sizeof(size_t));
9
10
    int L = 0;
11
12
    for (size_t i = 0; i < mtx->n; i++)
13
14
      for (size_t j = 0; j < mtx->m; j++)
15
16
        dist \rightarrow data[i][j] = 1.0 / (float)mtx \rightarrow data[i][j];
17
18
        if (mtx->data[i][j] > 0)
19
20
```

```
fero \rightarrow data[i][j] = 1.0;
21
            L += mtx -> data[i][j];
22
          }
23
          else
24
            fero \rightarrow data[i][j] = 0.0;
25
       }
26
27
       colony[i].unvis = malloc((mtx\rightarrown - 1) * sizeof(size t));
28
       colony[i].route = malloc(mtx->n * sizeof(size t));
29
     }
30
31
     L /= 2;
32
33
     //start alg
34
35
     bool found = false;
36
37
     for (size t i = 0; i < param \rightarrow ANT TIME; i++)
38
39
       for (size t ant = 0; ant < mtx->n; ant++)
40
41
          colony [ant]. route [0] = colony [ant]. cur = ant;
42
          size t c = 1;
43
          for (size t j = 0; j < mtx->n; j++, c++)
44
45
            if (ant == j)
46
              c--;
47
            else
48
               colony[ant].unvis[c-1] = j;
49
          }
50
51
          colony [ant]. unv len = mtx \rightarrow n - 1;
52
          size t route cnt = 1;
53
54
          while (colony[ant].unv len)
56
            float s = 0.0;
57
            for (size t q = 0; q < colony[ant].unv len; <math>q++)
58
59
               size t ai = colony[ant].cur, aj = colony[ant].unvis[q];
60
               p[q] = powf(fero \rightarrow data[ai][aj], param \rightarrow ALPHA) + powf(dist \rightarrow data[ai][aj])
61
                   ][aj], param—>BETA);
               s += p[q];
63
            float r = (float)rand() / (float)RAND MAX;
64
            p[0] /= s;
65
            for (size t q = 1; q < colony[ant].unv len; <math>q++)
66
67
               p[q] /= s;
68
               p[q] += p[q - 1];
69
```

```
}
70
71
            size t q = 0;
72
            bool select = false;
73
            while (q < colony[ant].unv_len && !select)</pre>
            {
75
               if (r < p[q])
76
                 select = true;
77
              q++;
78
            }
79
80
            colony [ant]. route [route cnt] = colony [ant]. cur = colony [ant]. unvis [q
                 -1;
            route_cnt++;
82
83
84
            size t k;
85
            for (k = 0; k < colony[ant].unv_len; k++)
86
               if (k = q - 1)
87
                 break;
88
89
            for (size_t e = k; e < colony[ant].unv_len - 1; e++)
90
               colony[ant].unvis[e] = colony[ant].unvis[e + 1];
91
92
            colony[ant].unv_len——;
93
          }
94
95
          int dst = cnt dist(mtx, colony[ant].route);
          if (dst >= 0 \&\& (!found || dst < L))
98
            found = true;
99
            L = dst:
100
            memcpy(*route, colony[ant].route, mtx->n * sizeof(size_t));
101
102
103
          colony[ant].dst = dst;
104
105
106
       for (size_t i = 0; i < mtx->n; i++)
107
          for (size_t j = 0; j < mtx->m; j++)
108
            if (fero \rightarrow data[i][j] > 0)
109
110
               fero \rightarrow data[i][j] *= 1.0 - param \rightarrow RO;
111
               if (fero \rightarrow data[i][j] < 0.1)
112
                 fero \rightarrow data[i][j] = 0.1;
113
            }
114
115
       int from, to;
116
       for (size t ant = 0; ant < mtx->n; ant++)
117
118
```

```
for (size_t r = 0; r < mtx->n - 1; r++)
119
120
             from = colony[ant].route[r];
121
             to = colony[ant].route[r + 1];
122
123
             fero -> data[from][to] += param->Q / colony[ant].dst;
125
126
          fero \rightarrow data[mtx \rightarrow n - 1][0] += param \rightarrow Q / colony[ant].dst;
127
       }
128
     }
129
130
     destroy_mtxf(dist);
131
     destroy_mtxf(fero);
132
     for (size_t i = 0; i < mtx->n; i++)
133
134
        free(colony[i].unvis);
135
        free (colony [i]. route);
136
137
     free (colony);
138
     free(p);
139
140
     if (!found)
141
        return -1;
142
143
     return L;
144
145
```

3.3 Тестирование

При оценивании успешности выполнения реализации алгоритмов стоит отметить, что муравьиный алгоритм не гарантирует нахождения глобального оптимума, поэтому длины полученного минимального маршрута у муравьиного алгоритма и полного перебора могут отличаться. В приведённых тестах значения длины пути у обоих алгоритмов совпали.

В таблице 3.1 приведены тестовые данные.

Таблица 3.1: Тестирование реализаций алгоритмов

Матрица смежности	Ожидаемый результат	Полученный результат
$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 & 6 & 8 \\ 3 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 5 & 0 \\ 6 & 1 & 5 & 6 & 1 \\ 8 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	10	10
$\begin{bmatrix} 0 & 10 & 15 & 20 \\ 10 & 0 & 35 & 25 \\ 15 & 35 & 0 & 30 \\ 20 & 25 & 30 & 0 \end{bmatrix}$	70	70

Все тесты пройдены успешно.

3.4 Вывод из технологической части

В данном разделе были разработаны и протестированы алгоритмы решения задачи коммивояжёра.

4 Исследовательская часть

В данном разделе приведен анализ характеристик разработанного ПО.

4.1 Время выполнения алгоритмов

Время выполнения алгоритма замерялось с помощью стандартной функции clock(). Для каждого размера матрицы замер проводился 10 раз, затем усреднялся. Полученные результаты приведены в таблице 4.1. Время указано в мс.

Таблица 4.1: Сравнение времени исполнения алгоритмов решения задачи коммивояжера.

Размер графа	Полный перебор	Муравьиный алгоритм	
3	0	10	
4	0	20	
5	0	40	
6	0	30	
7	0	30	
8	20	50	
9	200	70	
10	2099	90	
11	24272	110	

4.2 Автоматическая параметризация

В ходе параметризации были проанализированы следующие значения параметров алгоритма: α изменяется от 0 до 6, β вычисляется как разность 6 — α ; время жизни колонии от 10 до 190, коэффициент испарения от 0 до 1. Исследуется разность длины найденного пути, найденного муравьиным алгоритмом, и длины оптимального пути.

В таблицах 4.2 - 4.5 приведены выборка результатов параметризации для трёх матриц расстояний размером 10×10 . Полным перебором был посчитан оптимальный путь — он составил 226 для первой матрицы, 249 и 166 для второй и тертьей. В столбцах разность 1 — 3 записаны разности между результатом алгоритма и оптимальным значением пути для каждой матрицы.

Таблица 4.2: Выборка из результатов параметризации для матриц размером 10×10 .

α	Время	ρ	Разность 1	Разность 2	Разность 3
3.2	130	0.3	3	25	18
3.2	130	0.6	0	25	15
3.2	130	0.9	15	0	0
3.2	190	0.1	0	4	18
3.2	190	0.3	7	19	26
3.2	190	0.6	26	27	18
3.2	190	0.9	15	12	23
3.6	10	0.1	64	63	62
3.6	10	0.3	30	61	44
3.6	10	0.6	32	32	19
3.6	10	0.9	5	10	2
3.6	70	0.1	3	4	16
3.6	70	0.3	7	0	2
3.6	70	0.6	10	0	13
3.6	70	0.9	7	0	2
3.6	130	0.1	3	6	10
3.6	130	0.3	7	9	3
3.6	130	0.6	0	4	8
3.6	130	0.9	3	0	21
3.6	190	0.1	0	0	0
3.6	190	0.3	3	0	13
3.6	190	0.6	0	0	16
3.6	190	0.9	0	6	3
4.0	10	0.1	31	64	60
4.0	10	0.3	33	19	36
4.0	10	0.6	7	21	18
4.0	10	0.9	7	27	8
4.0	70	0.1	5	0	13

Таблица 4.3: Выборка из результатов параметризации для матриц размером 10×10 .

α	Время	ρ	Разность 1	Разность 2	Разность 3
4.0	70	0.3	3	0	10
4.0	70	0.6	3	4	18
4.0	70	0.9	0	0	17
4.0	130	0.1	0	0	8
4.0	130	0.3	0	0	25
4.0	130	0.6	0	0	3
4.0	130	0.9	0	0	1
4.0	190	0.1	0	0	26
4.0	190	0.3	0	0	8
4.0	190	0.6	0	0	2
4.0	190	0.9	0	0	13
4.4	10	0.1	57	46	82
4.4	10	0.3	34	4	13
4.4	10	0.6	23	0	22
4.4	10	0.9	10	32	10
4.4	70	0.1	0	14	18
4.4	70	0.3	7	0	21
4.4	70	0.6	0	0	16
4.4	70	0.9	0	0	10
4.4	130	0.1	0	9	18
4.4	130	0.3	0	0	16
4.4	130	0.6	0	0	15
4.4	130	0.9	0	4	19
4.4	190	0.1	3	0	17
4.4	190	0.3	0	0	18
4.4	190	0.6	0	0	3
4.4	190	0.9	0	0	14
4.8	10	0.1	27	53	69

Таблица 4.4: Выборка из результатов параметризации для матриц размером 10×10 .

α	Время	ρ	Разность 1	Разность 2	Разность 3
4.8	10	0.3	21	35	25
4.8	10	0.6	30	31	8
4.8	10	0.9	0	0	23
4.8	70	0.1	3	0	22
4.8	70	0.3	0	0	20
4.8	70	0.6	3	6	2
4.8	70	0.9	3	10	3
4.8	130	0.1	7	4	15
4.8	130	0.3	0	4	13
4.8	130	0.6	0	6	19
4.8	130	0.9	0	9	3
4.8	190	0.1	4	0	18
4.8	190	0.3	0	4	10
4.8	190	0.6	0	0	5
4.8	190	0.9	0	0	15
5.2	10	0.1	44	19	60
5.2	10	0.3	35	27	3
5.2	10	0.6	49	49	39
5.2	10	0.9	5	35	38
5.2	70	0.1	15	19	13
5.2	70	0.3	10	14	16
5.2	70	0.6	12	10	21
5.2	70	0.9	12	28	0
5.2	130	0.1	0	9	16
5.2	130	0.3	0	27	6
5.2	130	0.6	7	6	15
5.2	130	0.9	10	20	2
5.2	190	0.1	0	9	17

Таблица 4.5: Выборка из результатов параметризации для матриц размером 10×10 .

α	Время	ρ	Разность 1	Разность 2	Разность 3
5.2	190	0.3	0	4	15
5.2	190	0.6	7	23	2
5.2	190	0.9	4	13	0
5.6	10	0.1	52	69	62
5.6	10	0.3	58	63	86
5.6	10	0.6	66	60	46
5.6	10	0.9	88	57	22
5.6	70	0.1	19	47	21
5.6	70	0.3	27	56	31
5.6	70	0.6	31	36	25
5.6	70	0.9	23	42	49

4.3 Вывод из исследовательской части

При небольших размерах графа (от 3 до 8) алгоритм полного перебора выигрывает по времени у муравьиного. Однако, при увеличении размера графа (от 9 и выше), ситуация меняется в обратную сторону: муравьиный алгоритм начинает значительно выигрывать по времени у алгоритма полного перебора. На размерах графа 11, муравьиный алгоритм работает в 220 раз быстрее.

При параметризации в качестве тестовых данных использовались матрицы расстояний с одинаковым разбросом длин рёбер. Наиболее стабильные результаты автоматической параметризации получаются при наборе $\alpha=3.6..4.8,\ \beta=6-\alpha,\ \rho=0.6.$ При времени жизни колонии, превышающем число городов, результат является более точным.

Тогда можно сделать вывод, что при числе городов, меньшем девяти стоит использовать алгоритм полного перебора для получения точного результата. Для иного числа городов стоит использовать муравьиный алгоритм с выявленными параметрами. Однако нужно понимать, что результат работы муравьиного алгоритма не всегда является оптимальным маршрутом.

Заключение

В рамках данной лабораторной работы лабораторной работы была достигнута её цель: изучен муравьиный алгоритм и приобретены навыки параметризации методов на примере муравьиного алгоритма. Также выполнены следующие задачи:

- решена задача коммивояжера при помощи алгоритма полного перебора и муравьиного алгоритма;
- реализованы алгоритмы полного перебора и муравьиный алгоритм для решения задачи коммивояжёра;
- замерено и сравнено время выполнения реализаций алгоритмов;
- проведена параметризация реализации муравьиного алгоритма;
- сделаны выводы на основе проделанной работы.

Литература

[1] М.В. Ульянов. Ресурсно-эффективные компьютерные алгоритмы. Разработка и анализ. ФИЗМАТЛИТ, 2007. с. 308.