Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана
(национальный исследовательский университет)»
(МГТУ им. Н.Э. Баумана)

ФАКУЛЬТЕТ «Информатика и системы управления»

КАФЕДРА «Программное обеспечение ЭВМ и информационные технологии»

Отчет по лабораторной работе №1 по дисциплине «Моделирование»

Тема Программная реализация приближенного аналитического метода и численных алгоритмов первого и второго порядков точности при решении задачи Коши для ОДУ.

Студент Варламова Е. А.

Группа ИУ7-61Б

Оценка (баллы) ____________________

Преподаватель Градов В. М.

Москва — 2022 г.

Контрольные вопросы

Вопрос 1. Укажите интервалы значений аргумента, в которых можно считать решением заданного уравнения каждое из первых 4-х приближений Пикара, т.е. для КАЖДОГО приближения указать свои границы применимости. Точность результата оценивать до второй цифры после запятой. Объяснить свой ответ.

Ответ.

Интервал, в котором можно считать решением заданного уравнения некоторое приближение определяется так: находятся такие аргументы, при которых значение приближения отличается от приближений более высоких порядков или от результатов численных методов. Наименьший интервал, определяемый этим правилом, и будет являться искомым интервалом. На рисунках в первом столбце значение аргумента, в следующих четырёх 4 приближения (во втором столбце - 1, в третьем - 2 итд)

Таким образом,

Интервал для первого приближения: [-0.67; 0.67] (рис. 1).

0.67	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10	0.10
0.68	0.10	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11
0.69	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11	0.11

Рис. 1: Интервал для первого приближения

Интервал для второго приближения [-0.82; 0.82] (рис. 2).

0.82	0.18	0.19	0.19	0.19	0.19	0.19
0.83	0.19	0.19	0.20	0.20	0.20	0.20
0.84	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20	0.20

Рис. 2: Интервал для второго приближения

Интервал для третьего приближения [-1.27; 1.27] (рис. 3).

1.27	0.68	0.77	0.78	0.78	0.78	0.78
1.28	0.70	0.79	0.80	0.81	0.81	0.81
1.29	0.72	0.81	0.83	0.83	0.83	0.83

Рис. 3: Интервал для третьего приближения

Интервал для четвёртого приближения [-1.58; 1.58] (рис. 4).

1.57	1.29	1.66	1.82	1.88	1.88	1.88
1.58	1.31	1.70	1.87	1.94	1.95	1.95
1.59	1.34	1.75	1.92	2.00	2.01	2.01

Рис. 4: Интервал для четвертого приближения

Вопрос 2. Пояснить, каким образом можно доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах.

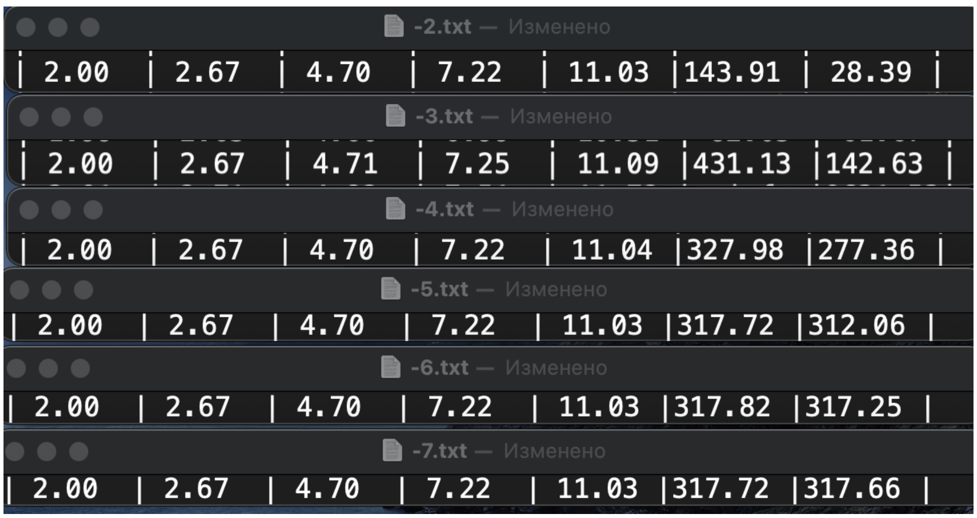
Ответ.

Доказать правильность полученного результата при фиксированном значении аргумента в численных методах можно с помощью уменьшения шага. Если при уменьшении шага полученный результат изменится незначительно, его можно считать правильным.

Вопрос 3. Каково значение решения уравнения в точке x=2, т.е. привести значение u(2).

Ответ.

При уменьшении шага (10e-2, 10e-3 .. 10e-7) видно, что значение u(2) стремится к 318 (рис. 6). При этом анализируются значения, приведённые в 6 столбце (метод Рунге), так как он точнее метода Эйлера, а приближения Пикара при аргументе 2 нельзя считать решениями (показано в вопросе № 1).



-2.txt — Изменено

2.00	2.67	4.70	7.22	11.03	143.91	28.39

-3.txt — Изменено

2.00	2.67	4.71	7.25	11.09	431.13	142.63

-4.txt — Изменено

2.00	2.67	4.70	7.22	11.04	327.98	277.36

-5.txt — Изменено

2.00	2.67	4.70	7.22	11.03	317.72	312.06

-6.txt — Изменено

2.00	2.67	4.70	7.22	11.03	317.82	317.25

-7.txt — Изменено

2.00	2.67	4.70	7.22	11.03	317.72	317.66

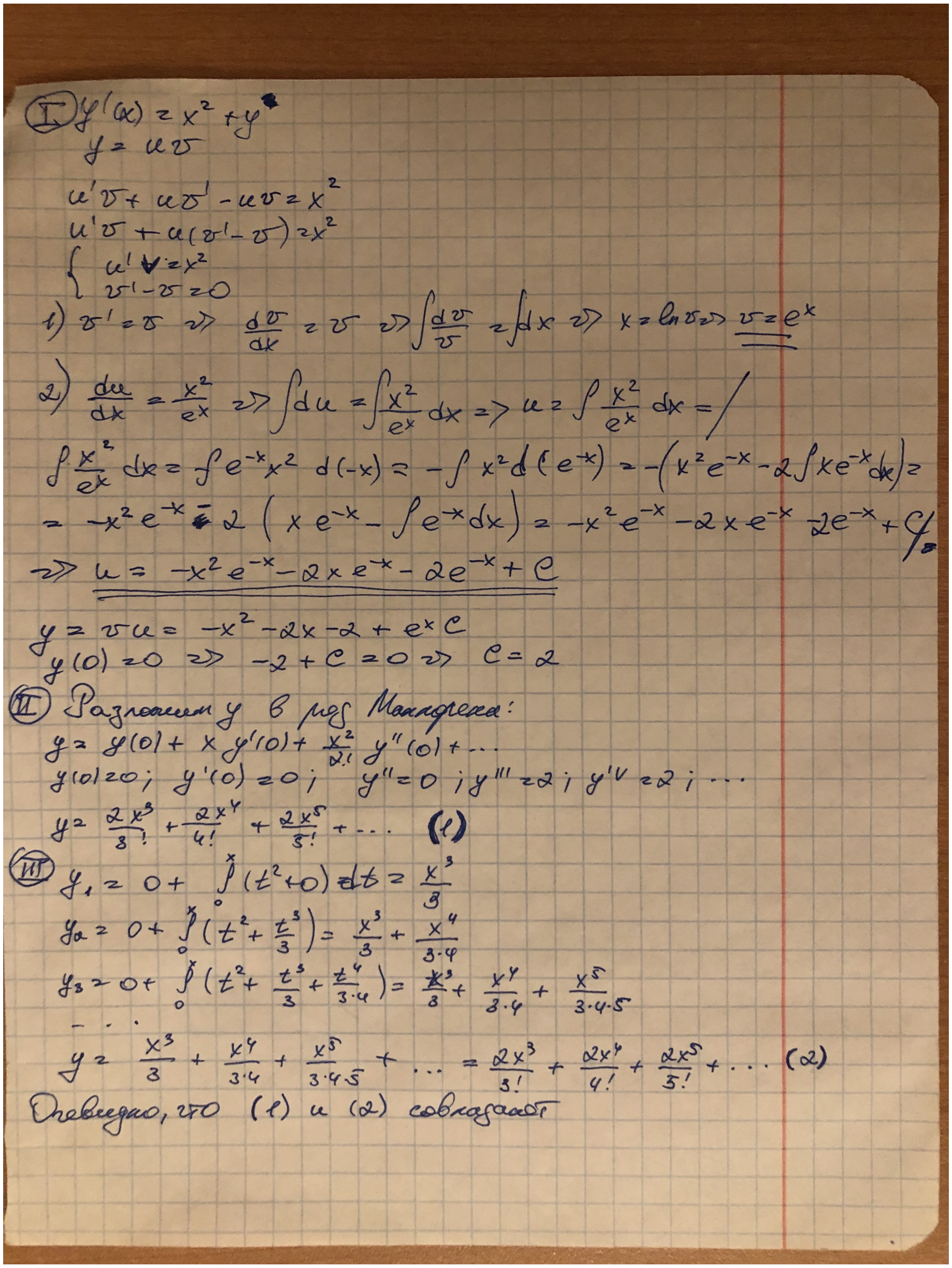
Рис. 5: Значение решения уравнения в точке x=2 при разном шаге

Вопрос 4. Дайте оценку точки разрыва решения уравнения.

Ответ. Точка разрыва второго рода в точке $x = 2$, так как решение уходит в бесконечность.

Вопрос 5. Покажите, что метод Пикара сходится к точному аналитическому решению уравнения

$$u'(x) = x^2 + u,$$
$$u(0) = 0$$



I) $y'(x) = x^2 + y$

$y = uv$

$u'v + uv' - uv = x^2$

$u'v + u(v' - v) = x^2$

$$\begin{cases} u'v = x^2 \\ v' - v = 0 \end{cases}$$

1) $v' = v \Rightarrow \frac{dv}{dx} = v \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int dx \Rightarrow x = \ln v \Rightarrow v = e^x$

2) $\frac{du}{dx} = \frac{x^2}{e^x} \Rightarrow \int du = \int \frac{x^2}{e^x} dx \Rightarrow u = \int \frac{x^2}{e^x} dx = /$

$\int \frac{x^2}{e^x} dx = \int e^{-x} x^2 \, d(-x) = -\int x^2 d(e^{-x}) = -\left(x^2 e^{-x} - 2\int x e^{-x} dx\right) =$

$= -x^2 e^{-x} - 2\left(x e^{-x} - \int e^{-x} dx\right) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$

$\Rightarrow u = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - 2e^{-x} + C$

$y = vu = -x^2 - 2x - 2 + e^x C$

$y(0) = 0 \Rightarrow -2 + C = 0 \Rightarrow C = 2$

II) Разложим y в ряд Маклорена:

$y = y(0) + x y'(0) + \frac{x^2}{2!} y''(0) + \dots$

$y(0) = 0; \; y'(0) = 0; \; y'' = 0; \; y''' = 2; \; y^{IV} = 2; \dots$

$y = \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots \quad (1)$

III) $y_1 = 0 + \int_0^x (t^2 + 0)\, dt = \frac{x^3}{3}$

$y_2 = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{3}\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4}$

$y_3 = 0 + \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{3 \cdot 4}\right) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5}$

...

$y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{3 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots = \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^4}{4!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots \quad (2)$

Очевидно, что (1) и (2) совпадают

Рис. 6: Решение