Задача 4.1

In [1]:

```
import scipy.stats as sps
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
%pylab inline
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

In [2]:

```
n = 1000
m = 100
```

In [8]:

```
s = np.arange(1, n + 1)
```

In [3]:

```
def find_average_g(sample, theta):
    s = np.arange(1, n + 1)
    first = np.eye(m, n)
    second = np.eye(m, n)
    third = np.eye(m, n)
    fourth = np.eye(m, n)
    for i in range(m):
        first[i] =  2 * sample[i].cumsum() / s
    for j in range(m):
        max_in_array = sample[j][0]
        min_in_array = sample[j][0]
        for i in range(n):
            max_in_array = max(max_in_array, sample[j][i])
            min_in_array = min(min_in_array, sample[j][i])
            second[j][i] = (i + 2) * min_in_array
            third[j][i] = max_in_array + min_in_array
            fourth[j][i] = (float) (i + 2) / (i + 1) * max_in_array
    g_1 = (first - theta) ** 2
    g_2 = (second - theta) ** 2
    g_3 = (third - theta) ** 2
    g_4 = (fourth - theta) ** 2
    average_g = np.eye(4, n)
    for i in range(n):
        average_g[0][i] = g_1[:, i].mean()
        average_g[1][i] = g_2[:, i].mean()
        average_g[2][i] = g_3[:, i].mean()
        average_g[3][i] = g_4[:, i].mean()
    return average_g
```

$\theta = 1$

In [4]:

```
theta = 1
```

Сгенерируем m выборок из равномерного распределения на отрезке $[0, \theta]$:

In [5]:

```
sample = np.eye(m, n)
for i in range(m):
    sample[i] = sps.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = n)
```

Для каждой выборки посчитаем оценки $2\overline{X}$, $(n+1)X_{(1)}$, $X_{(1)} + X_{(n)}$, $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$, найдем среднеквадратичную функцию потерь $g\left(\widehat{\theta}, \theta\right) = \left(\widehat{\theta} - \theta\right)^2$ и усредним по выборкам для каждого фиксированного значения n:

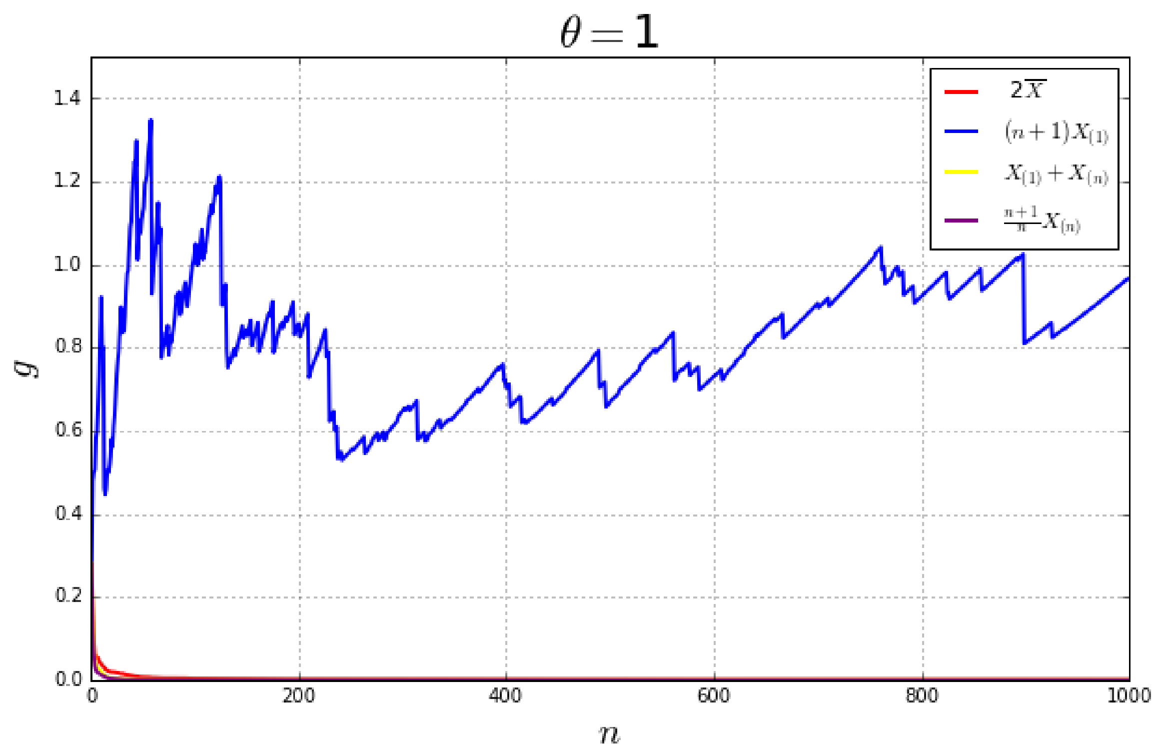
In [6]:

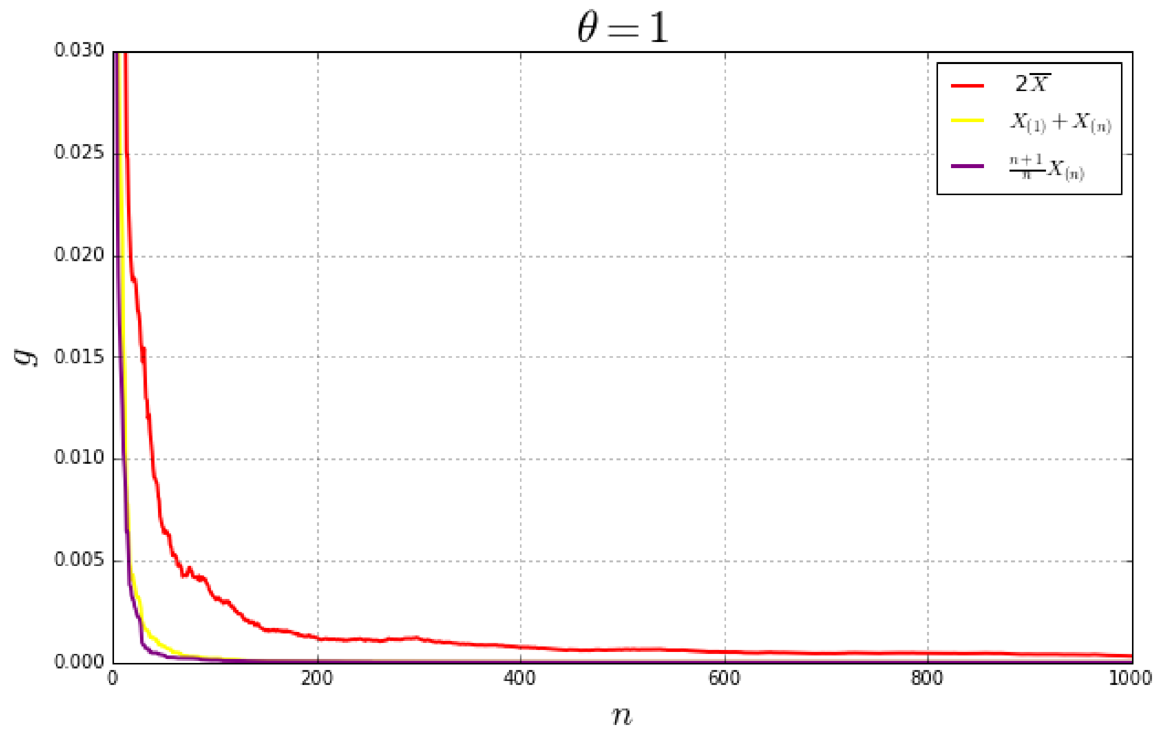
```
average_g = find_average_g(sample, 1)
```

Построим график зависимости усредненного $g(n)$ для всех оценок:

In [9]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(s, average_g[0], color='red', linewidth=2, label=' 2$\overline{X}$')
plt.plot(s, average_g[1], color='blue', linewidth=2, label='${(n + 1)}X_{(1)}$')
plt.plot(s, average_g[2], color='yellow', linewidth=2, label='$ X_{(1)} + X_{(n)}$')
plt.plot(s, average_g[3], color='purple', linewidth=2, label=r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

plt.legend()
plt.xlim((0, n))
plt.ylim((0, 1.5))
plt.xlabel('$n$', fontsize = 20)
plt.ylabel('$g$', fontsize = 20)
plt.title(r'$\theta = $'+ str(theta), fontsize = 25)
plt.grid()

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(s, average_g[0], color='red', linewidth=2, label=' 2$\overline{X}$')
plt.plot(s, average_g[2], color='yellow', linewidth=2, label='$ X_{(1)} + X_{(n)}$')
plt.plot(s, average_g[3], color='purple', linewidth=2, label=r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

plt.legend()
plt.xlim((0, n))
plt.ylim((0, 0.03))
plt.xlabel('$n$', fontsize = 20)
plt.ylabel('$g$', fontsize = 20)
plt.title(r'$\theta = 1$', fontsize = 25)
plt.grid()

plt.show()
```





$\theta = 10$

In [10]:

```
theta = 10
sample = np.eye(m, n)
for i in range(m):
    sample[i] = sps.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = n)
```

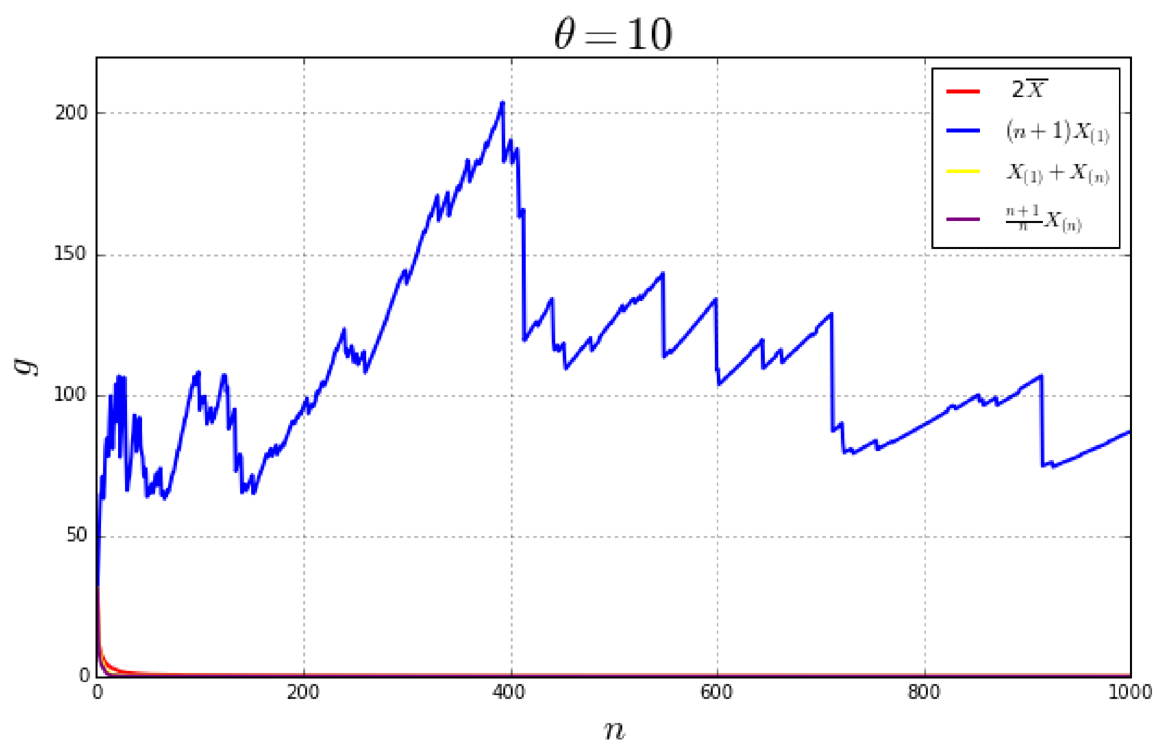
In [11]:

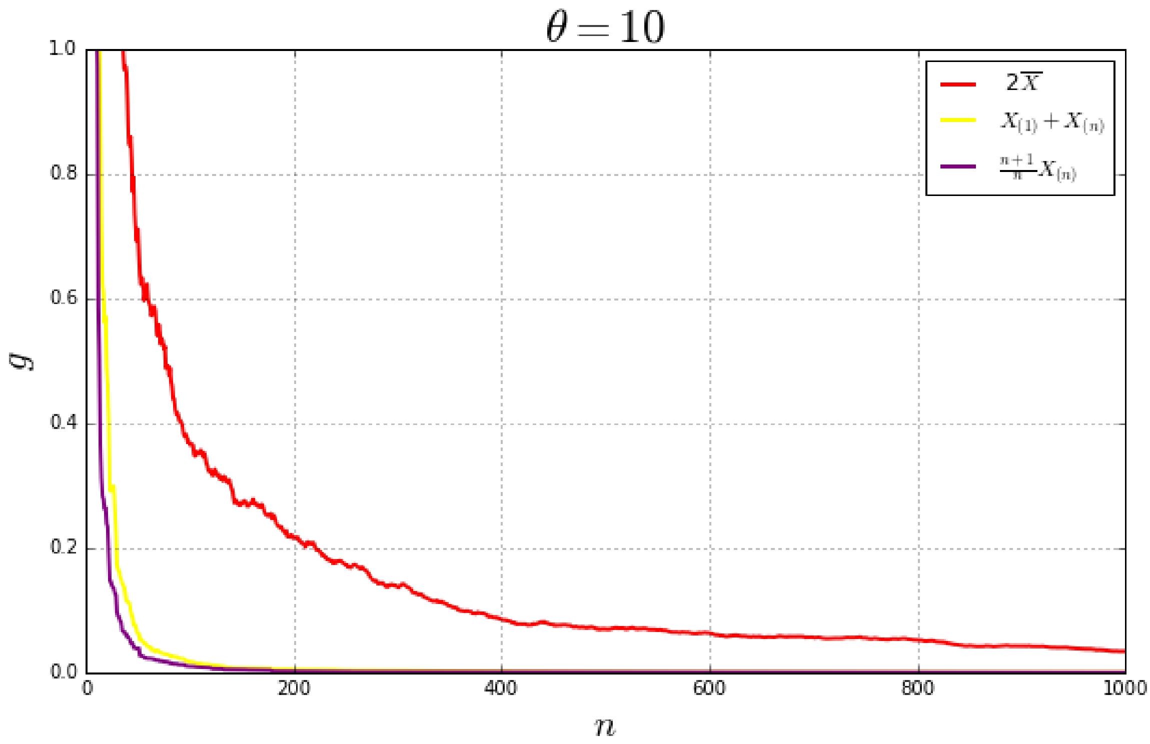
```
average_g = find_average_g(sample, theta)
```

График зависимости $g(n)$:

In [12]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(s, average_g[0], color='red', linewidth=2, label=' 2$\overline{X}$')
plt.plot(s, average_g[1], color='blue', linewidth=2, label='${(n + 1)}X_{(1)}$')
plt.plot(s, average_g[2], color='yellow', linewidth=2, label='$ X_{(1)} + X_{(n)}$')
plt.plot(s, average_g[3], color='purple', linewidth=2, label=r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

plt.legend()
plt.xlim((0, n))
plt.ylim((0, 220))
plt.xlabel('$n$', fontsize = 20)
plt.ylabel('$g$', fontsize = 20)
plt.title(r'$\theta = 10$', fontsize = 25)
plt.grid()

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(s, average_g[0], color='red', linewidth=2, label=' 2$\overline{X}$')
plt.plot(s, average_g[2], color='yellow', linewidth=2, label='$ X_{(1)} + X_{(n)}$')
plt.plot(s, average_g[3], color='purple', linewidth=2, label=r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

plt.legend()
plt.xlim((0, n))
plt.ylim((0, 1))
plt.xlabel('$n$', fontsize = 20)
plt.ylabel('$g$', fontsize = 20)
plt.title(r'$\theta = 10$', fontsize = 25)
plt.grid()

plt.show()
```





$\theta = 25$

In [13]:

```
theta = 25
sample = np.eye(m, n)
for i in range(m):
    sample[i] = sps.uniform.rvs(loc = 0, scale = theta, size = n)
```

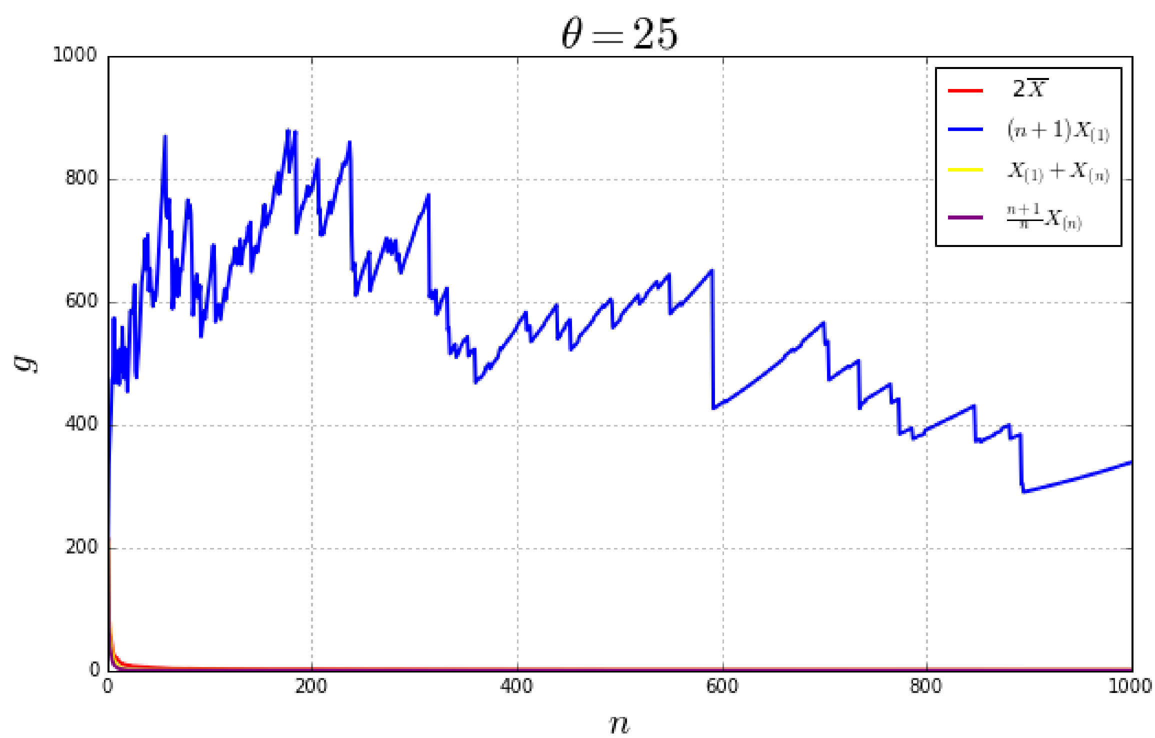
In [14]:

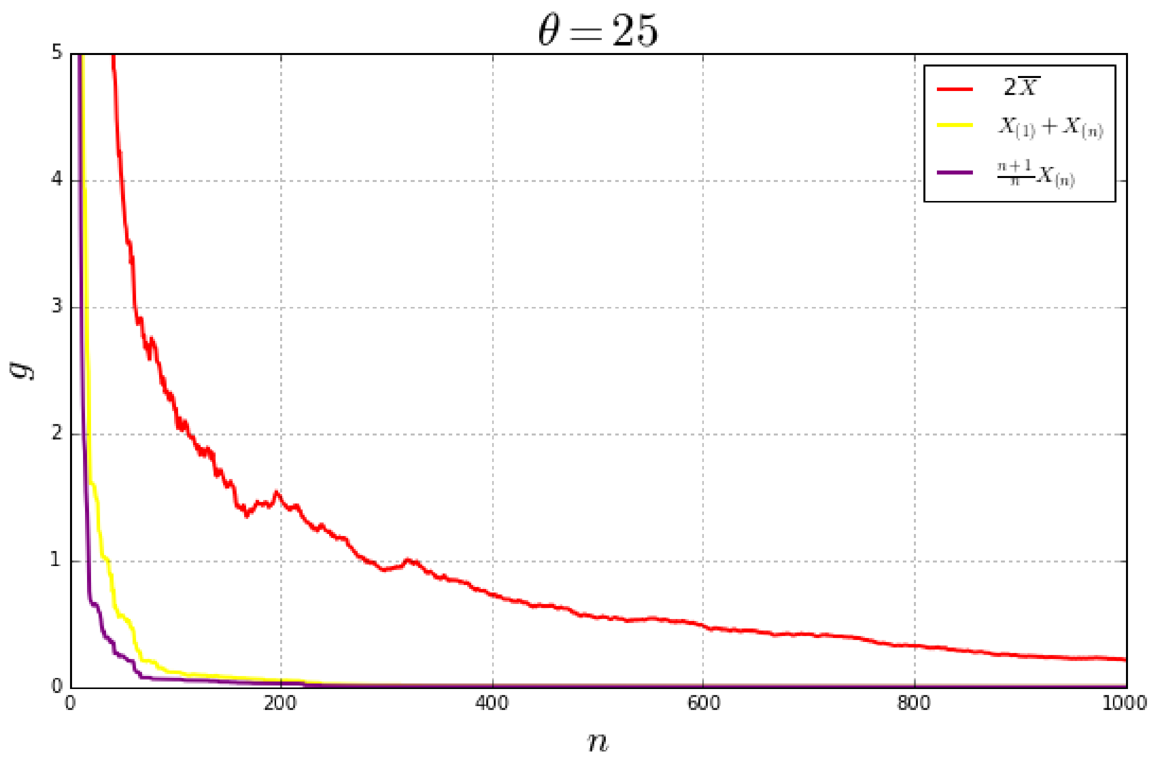
```
average_g = find_average_g(sample, theta)
```

График зависимости $g(n)$:

In [16]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(s, average_g[0], color='red', linewidth=2, label=' 2$\overline{X}$')
plt.plot(s, average_g[1], color='blue', linewidth=2, label='${(n + 1)}X_{(1)}$')
plt.plot(s, average_g[2], color='yellow', linewidth=2, label='$ X_{(1)} + X_{(n)}$')
plt.plot(s, average_g[3], color='purple', linewidth=2, label=r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

plt.legend()
plt.xlim((0, n))
plt.ylim((0, 1000))
plt.xlabel('$n$', fontsize = 20)
plt.ylabel('$g$', fontsize = 20)
plt.title(r'$\theta = 25$', fontsize = 25)
plt.grid()

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(s, average_g[0], color='red', linewidth=2, label=' 2$\overline{X}$')
plt.plot(s, average_g[2], color='yellow', linewidth=2, label='$ X_{(1)} + X_{(n)}$')
plt.plot(s, average_g[3], color='purple', linewidth=2, label=r'$\frac{n+1}{n}X_{(n)}$

plt.legend()
plt.xlim((0, n))
plt.ylim((0, 5))
plt.xlabel('$n$', fontsize = 20)
plt.ylabel('$g$', fontsize = 20)
plt.title(r'$\theta = 25$', fontsize = 25)
plt.grid()

plt.show()
```





Из графиков видно, что при любом значении θ функция потерь оценки $(n+1)X_{(1)}$ сильно отличает оценка единственная является несостоятельной. Из теоретической задачи 1, в равномерном подхо квадратичной функцией потерь оценка $\frac{n+1}{n}X_{(n)}$ лучше двух других, оценка $2\overline{X}$ лучше $(n+1)X_{(1)}$. Ф оценок:

$$R\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}, \theta\right) = \frac{\theta^2}{n(n+2)}$$

$$R\left(2\overline{X}, \theta\right) = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$R\left((n+1)X_{(1)}, \theta\right) = \frac{n\theta^2}{n+2}$$

И для любых $n \geq 1$:

$$\frac{\theta^2}{n(n+2)} \leq \frac{\theta^2}{3n} \leq \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$R\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}, \theta\right) \leq R\left(2\overline{X}, \theta\right) \leq R\left((n+1)X_{(1)}, \theta\right)$$

Найдем функцию риска для оценки $X_{(1)} + X_{(n)}$. Эта оценка несмещённая, значит функция риска ра оценки. min и max - борелевские функции, следовательно, $X_{(1)}$ и $X_{(n)}$ - борелевские функции от не случайных величин - независимы, и дисперсия их суммы равна сумме дисперсий:

$$R\left(X_{(1)} + X_{(n)}, \theta\right) = D_\theta\left(X_{(1)} + X_{(n)}\right) = D_\theta X_{(1)} + D_\theta X_{(n)}$$

$$D_\theta X_{(1)} = E_\theta X_{(1)}^2 - (E_\theta X_{(1)})^2 = \frac{2\theta^2}{(n+1)(n+2)} - \left(\frac{\theta}{n+1}\right)^2 = \frac{\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}(2n+2-n-2) =$$

$$D_\theta X_{(n)} = E_\theta X_{(n)}^2 - (E_\theta X_{(n)})^2 = \frac{n\theta^2}{n+2} - \left(\frac{n\theta}{n+1}\right)^2 = n\theta^2\left(\frac{n^2+2n+1-n^2-2n}{(n+1)^2(n+2)}\right) = \frac{}{(n+}$$

Получаем функцию риска:

$$R\left(X_{(1)} + X_{(n)}, \theta\right) = \frac{2n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)}$$

Заметим, что при $n \geq 3$:

$$\frac{\theta^2}{n(n+2)} \leq \frac{2n\theta^2}{(n+1)^2(n+2)} \leq \frac{\theta^2}{3n} \leq \frac{n\theta^2}{n+2}$$

$$R\left(\frac{n+1}{n}X_{(n)}, \theta\right) \leq R\left(X_{(1)} + X_{(n)}, \theta\right) \leq R\left(2\overline{X}, \theta\right) \leq R\left((n+1)X_{(1)}, \theta\right)$$

Из графиков видно, что при любых значениях θ значение усредненной функции потерь g при одном
меньше у тех оценок, которые лучше. При увеличении θ при фиксированном n значение g для кажд
увеличится.