Задача 9.3

In [2]:

```
import numpy as np
import scipy.stats as sps
import matplotlib.pyplot as plt
%pylab inline
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

$X_1, \ldots, X_n$ - выборка из стандартного нормального распределения:

In [3]:

```
n = 100
```

In [4]:

```
sample = sps.norm.rvs(size=n)
```

Доверительный интервал для a при известном σ^2

$X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения $N(a, 1)$. Заметим, что $\overline{X} \sim N(a, \frac{1}{n})$. Тогда $\sqrt{n} \cdot (\overline{X} - a) \sim N(0, 1)$, тогда $P(U_{\frac{1-\gamma}{2}} \leq \sqrt{n} \cdot (\overline{X} - a) \leq U_{\frac{1+\gamma}{2}})$ и доверительный интервал для a - $\left(\overline{X} - \frac{U_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}; \overline{X} + \frac{U_{\frac{1+\gamma}{2}}}{\sqrt{n}}\right)$, где $U_{\frac{1+\gamma}{2}}$ $-$ $\left(\frac{1+\gamma}{2}\right)$-квантиль стандартного нормального распределения.

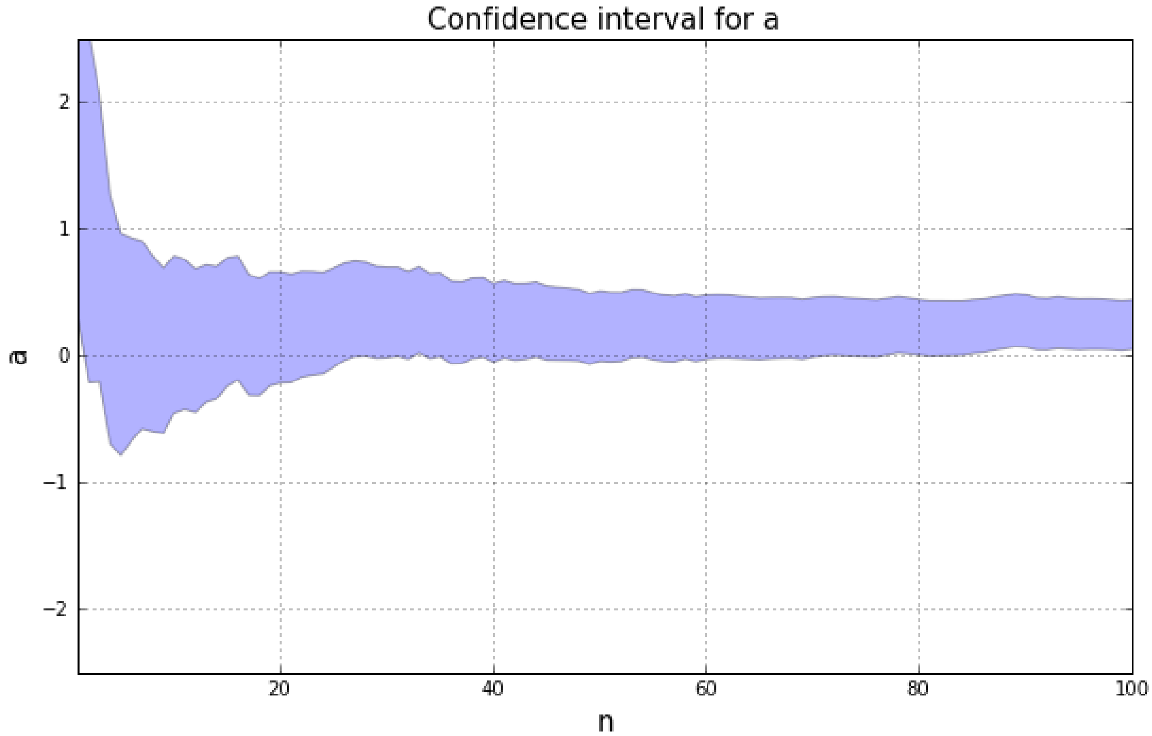
In [5]:

```
gamma = 0.95
```

In [6]:

```
s = np.arange(1, n + 1, 1)
means = sample.cumsum() / s

plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.fill_between(s, means - sps.norm.ppf((1 + gamma) / 2) / np.sqrt(s), means + sps.n
                 alpha=0.3)
plt.xlim((1, n))
plt.ylim((-2.5, 2.5))
plt.xlabel('n', fontsize=15)
plt.ylabel('a', fontsize=15)
plt.title('Confidence interval for a', fontsize=15)
plt.grid()
plt.show()
```

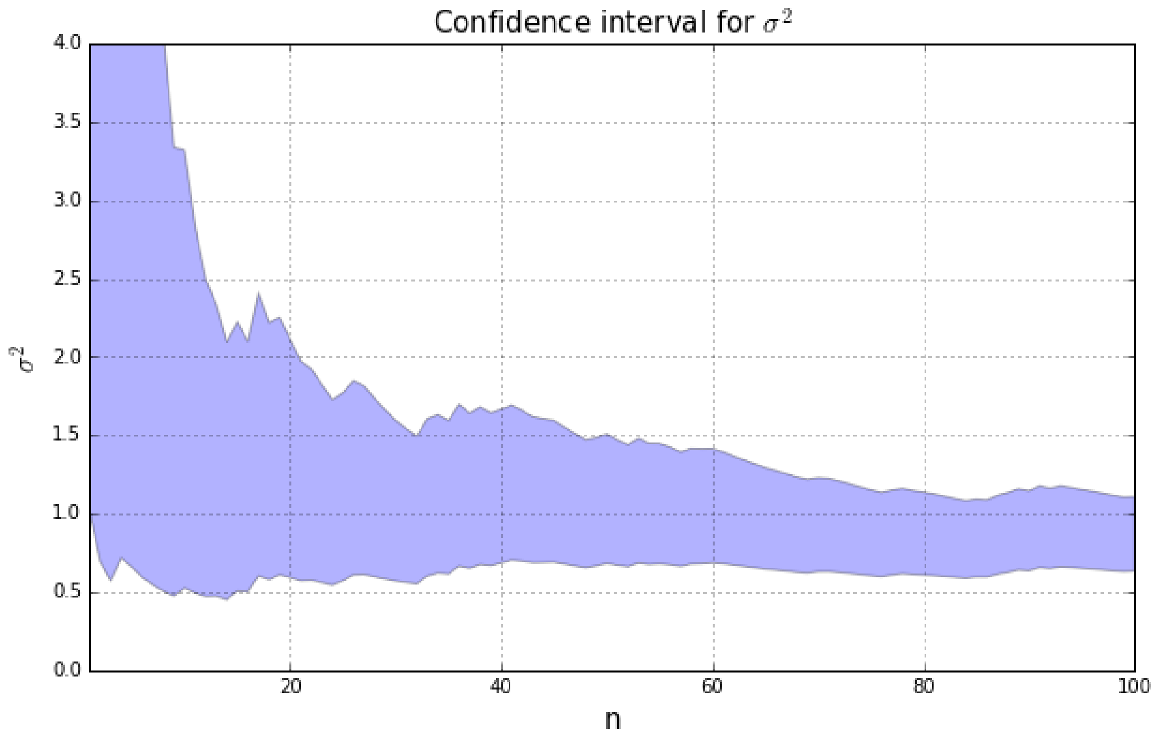


Доверительный интервал для σ^2 при известном a

$X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения $N(0, \sigma^2)$. Тогда точный доверительный интервал для σ^2 - $\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{U_{\frac{1+\gamma}{2}}}; \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i^2}{U_{\frac{1-\gamma}{2}}} \right)$, где $U_{\frac{1+\gamma}{2}}$ и $U_{\frac{1-\gamma}{2}}$ - квантили распределения χ_n^2.

In [7]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.fill_between(s, (sample ** 2).cumsum() / sps.chi2.ppf((1 + gamma) / 2, s), (sampl
                 sps.chi2.ppf((1 - gamma) / 2, s), alpha=0.3)
plt.xlim((1, n))
plt.ylim((0, 4))
plt.xlabel('n', fontsize=15)
plt.ylabel(r'$\sigma^2$', fontsize=15)
plt.title(r'Confidence interval for $\sigma^2$', fontsize=15)
plt.grid()
plt.show()
```



Доверительный интервал для σ^2 при неизвестном a

$X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения $N(a, \sigma^2)$. $\frac{\|X - Z\cdot\hat{\theta}\|^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$. Тогда $P(U_{\frac{1-\gamma}{2}} \leq \frac{\|X - Z\cdot\hat{\theta}\|^2}{\sigma^2} \leq U_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$. Доверительный интервал для σ^2 - $\left(\frac{\|X - Z\cdot\hat{\theta}\|^2}{U_{\frac{1+\gamma}{2}}}; \frac{\|X - Z\cdot\hat{\theta}\|^2}{U_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$, где $U_{\frac{1-\gamma}{2}}$ – $\frac{1-\gamma}{2}$-квантиль χ^2_{n-1}, $U_{\frac{1+\gamma}{2}}$ – $\frac{1+\gamma}{2}$-квантиль χ^2_{n-1}.

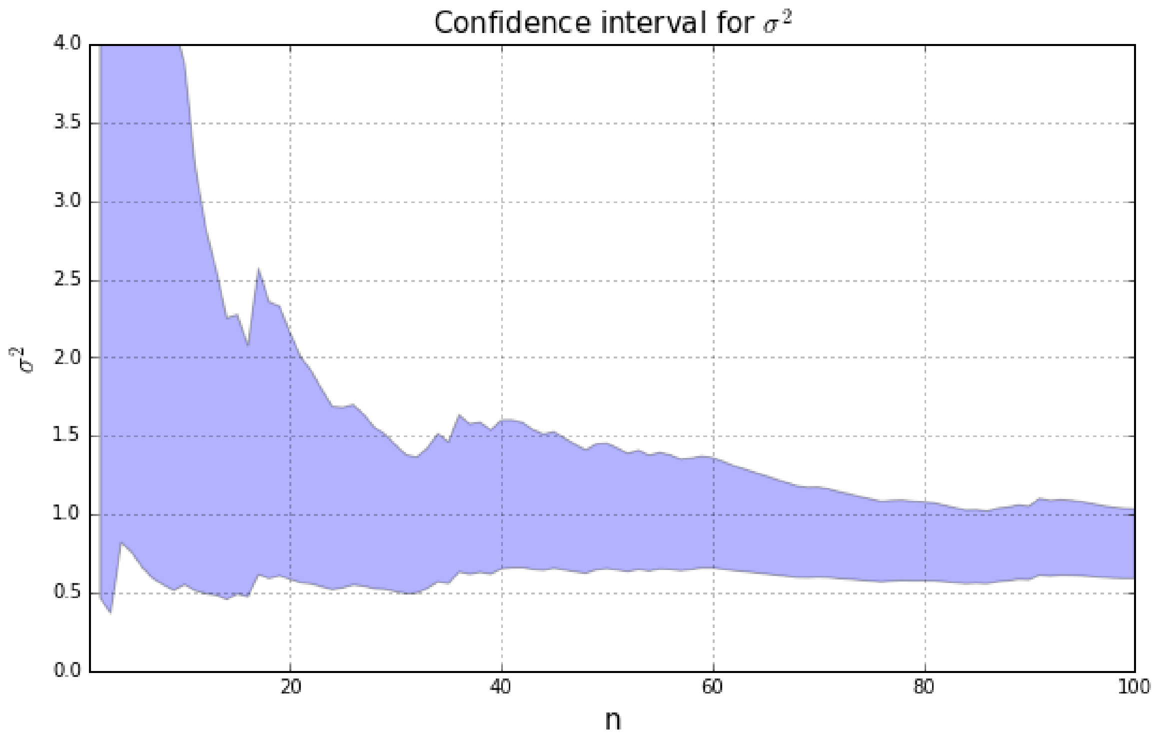
Построим гауссовскую линейную модель: $\begin{pmatrix} X_1 \\ .. \\ X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 \\ .. \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$, значит, $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$, $\hat{\theta} = (Z^T Z)^{-1} Z^T X = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n X_i = \overline{X}$. Тогда $\|X - Z \cdot \hat{\theta}\|^2 = n \cdot S^2$, $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2$ - выборочная дисперсия, получаем доверительный интервал - $\left(\frac{n\cdot S^2}{U_{\frac{1+\gamma}{2}}}; \frac{n\cdot S^2}{U_{\frac{1-\gamma}{2}}}\right)$

In [8]:

```
sample_var = np.empty(n)
for i in range(n):
    sample_var[i] = sample[:i + 1].var()
```

In [9]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
#plt.fill_between(s, 0, sample_var * s / sps.chi2.ppf(1 - gamma, s - 1), alpha=0.4)
plt.fill_between(s, sample_var * s / sps.chi2.ppf((1 + gamma) / 2, s - 1),
                 sample_var * s / sps.chi2.ppf((1 - gamma) / 2, s - 1), alpha=0.3)
plt.xlim((1, n))
plt.ylim((0, 4))
plt.xlabel('n', fontsize=15)
plt.ylabel(r'$\sigma^2$', fontsize=15)
plt.title(r'Confidence interval for $\sigma^2$', fontsize=15)
plt.grid()
plt.show()
```

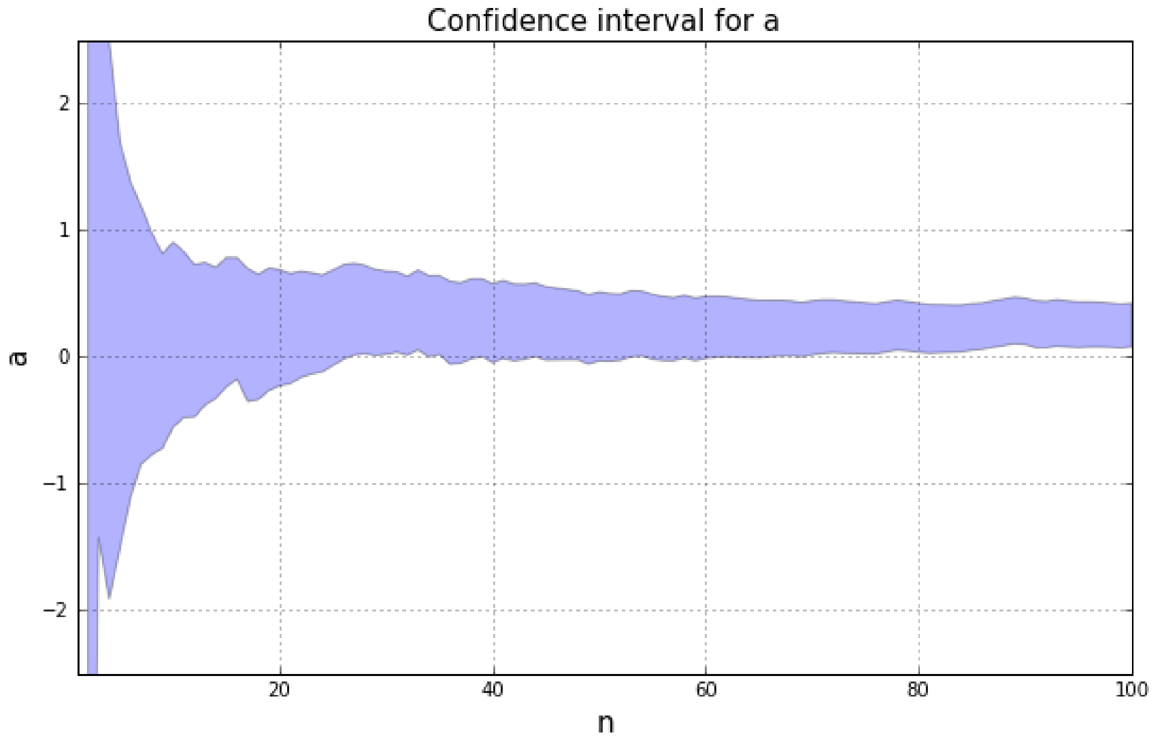


Доверительный интервал для a при неизвестном σ^2

$X_1, \ldots, X_n$ - выборка из распределения $N(a, \sigma^2)$. $\frac{\sqrt{n}(\hat{\theta} - a)}{\sqrt{\frac{\|X - Z \cdot \hat{\theta}\|^2}{n-1}}} = \frac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - a)}{\sqrt{S^2}} \sim T_{n-1}$, T_{n-1} - распределение Стьюдента. Значит, $P(U_{\frac{1-\gamma}{2}} \leq \frac{\sqrt{n-1}(\overline{X} - a)}{\sqrt{S^2}} \leq U_{\frac{1+\gamma}{2}}) = \gamma$. Доверительный интервал для a - $\left(\overline{X} - U_{\frac{1+\gamma}{2}} \cdot \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}}; \overline{X} - U_{\frac{1-\gamma}{2}} \cdot \frac{\sqrt{S^2}}{\sqrt{n-1}}\right)$, U-квантили распределения Стьюдента.

In [10]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.fill_between(s, means - np.sqrt(sample_var / s) * sps.t.ppf((1 + gamma) / 2, s -
                means - np.sqrt(sample_var / s) * sps.t.ppf((1 - gamma) / 2, s - 1),
plt.xlim((1, n))
plt.ylim((-2.5, 2.5))
plt.xlabel('n', fontsize=15)
plt.ylabel(r'a', fontsize=15)
plt.title(r'Confidence interval for a', fontsize=15)
plt.grid()
plt.show()
```



Из графиков видно, что точные доверительные интервалы для a и для σ^2 уменьшаются при увеличении n, при этом истинные значения параметров($a = 0, \sigma^2 = 1$) всегда в него попадают.