Задача 4.3

In [1]:

```
import scipy.stats as sps
import numpy as np
import pandas as pd
import matplotlib.pyplot as plt
%pylab inline
```

```
Populating the interactive namespace from numpy and matplotlib
```

In [2]:

```
theta_arr = np.arange(0, 1, 0.01)
```

$X = (X_1, \dots X_n)$ - выборка из распределения Бернулли, дискретная плотность будет равна:

$$P(X_i = x) = \theta^x (1-\theta)^{(1-x)}$$

Найдем эффективную оценку параметра θ:

$$f(X, \theta) = \theta^{\sum_{i=1}^n X_i} (1-\theta)^{n - \sum_{i=1}^n X_i}$$

$$L(X, \theta) = \ln f(X) = \ln(\theta) + \left(n - \sum_{i=1}^n X_i\right) \ln(1-\theta)$$

$$U(X, \theta) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\theta} - \frac{n - \sum_{i=1}^n X_i}{1-\theta} = \frac{n}{\theta(1-\theta)}(\overline{X} - \theta)$$

Тогда $\overline{X}$ - эффективная оценка параметра θ, информация Фишера равна $\frac{n}{\theta(1-\theta)}$. Нижняя оценка дисперсии из неравенства Крамера-Рао - $\frac{\theta(1-\theta)}{n}$

In [3]:

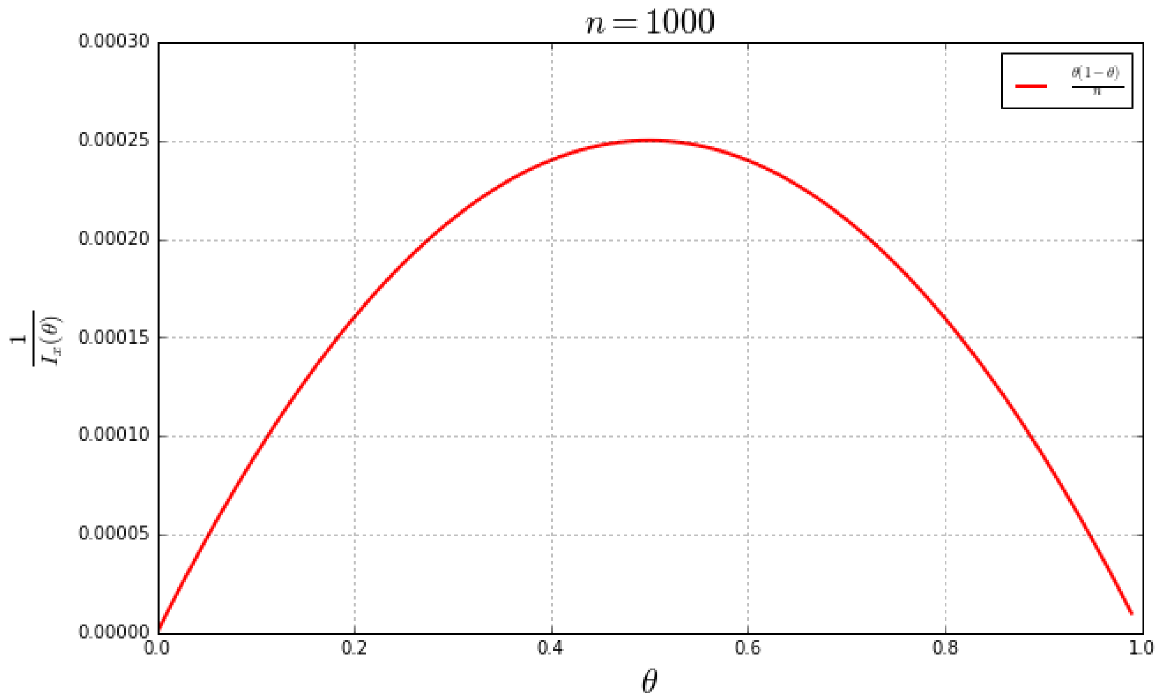
```
n = 1000
```

Построим график зависимости нижней оценки дисперсии произвольной несмещенной оценки от θ:

In [4]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(theta_arr, theta_arr * (1 - theta_arr) / n, color='red', linewidth=2, label=

plt.legend()
plt.xlim((0, 1))
plt.ylim((0, 0.0003))
plt.xlabel(r'$\theta$', fontsize = 20)
plt.ylabel(r'$\frac{1}{I_x(\theta)}$', fontsize = 20)
plt.title(r'$n = 1000$', fontsize = 20)
plt.grid()
```



Дисперсия равна нижней оценке, если оценка эффективная. Из графика можно сделать вывод, что дисперсия эффективной оценки наибольшая при $\theta = 0.5$. При $\theta = 0$ и $\theta = 1$ дисперсия эффективной оценки равна 0. Так как $D_\theta\widehat{\theta} = E_\theta(\widehat{\theta} - \theta)^2 = 0$ и $(\widehat{\theta} - \theta)^2$ - неотрицательная случайная величина, по свойствам математического ожидания она равна 0 почти наверное. Значит, при $\theta = 0$ и $\theta = 1$ эффективная оценка почти наверное равна θ.

Для каждого θ сгенерируем выборку размера n:

In [5]:

```
sample = np.eye(theta_arr.size, n)
for i in range(theta_arr.size):
    sample[i] = sps.bernoulli.rvs(theta_arr[i], loc = 0, size = n)
```

Для каждого параметра θ посчитаем эффективную оценку и бутстрепную оценку дисперсии:

In [6]:

```
effective_estimation = np.empty(theta_arr.size)
s = np.arange(1, n + 1)
for i in range(theta_arr.size):
    effective_estimation[i] = sample[i, :].mean()
```

In [7]:

```
m = 500
```

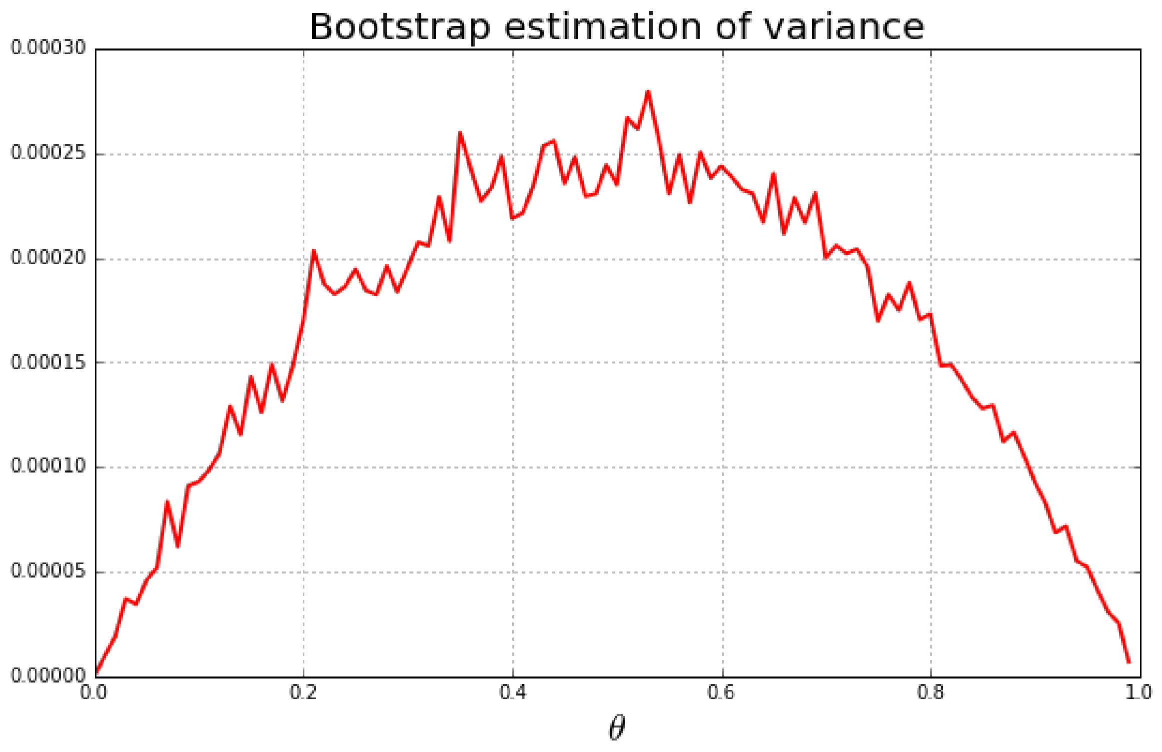
In [8]:

```
var_bootstrap_estimation = np.empty(theta_arr.size)
for i in range(theta_arr.size):
    effective_estimation_bootstrap_sample = np.zeros(m)
    for j in range(m):
        effective_estimation_bootstrap_sample[j] = sps.bernoulli.rvs(effective_estima
    var_bootstrap_estimation[i] = effective_estimation_bootstrap_sample.var()
```

In [13]:

```
plt.figure(figsize=(10, 6))
plt.plot(theta_arr, var_bootstrap_estimation, color='red', linewidth=2)

plt.legend()
plt.xlim((0, 1))
plt.ylim((0, 0.0003))
plt.xlabel(r'$\theta $', fontsize = 20)
plt.title('Bootstrap estimation of variance', fontsize = 20)
plt.grid()
```



Заметим, что значения бутсрепной оценки дисперсии близки к нижней оценке дисперсии из неравенства Крамера-Рао.