04.10.

Сингулярное разложение (SVD)

Теорема. $\forall A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ $\exists$ $U \in U(m) = \{V \in \mathbb{C}^{m\times n} : V^*V = I\}$, $V \in U(n)$

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times m}{U}\,\underset{m\times n}{\Sigma}\,\underset{n\times n}{V^*}, \text{ где } \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & & 0 \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sigma_p \end{pmatrix} \quad p = \min(m,n)$$

$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq 0 \quad \sigma_i \in \mathbb{R}$

$$AA^* = U\Sigma V^*(U\Sigma V^*)^* = U\Sigma \underbrace{VV^*}_{I}\Sigma^* U^* = U\Sigma\Sigma^T U^*$$

(аналогично $A^*A = V\Sigma^T\Sigma V^*$) спектральное разлож.

$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i(A^*A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^*)}$ - сингулярные числа

$$\left.\begin{aligned} &A = \sum_{i=1}^{r} \sigma_i \cdot u_i \cdot v_i^*, \quad rk(A) = r \\ &Av_i = \sigma_i u_i, \quad A^*u_i = \sigma_i v_i \end{aligned}\right\} \text{ Следствия}$$

Док-во. $\sigma_1 := \|A\|_2$; $\|v_1\|_2 = \|u_1\|_2 = 1$ $v_1 \in \mathbb{C}^n$ $u_1 \in \mathbb{C}^m$:

$Av_1 = \sigma_1 u_1$

Дополним до ортонорм. базисов $\Rightarrow$ $V = [v_1, V_1] \in U(n)$, $U = [u_1, U_1] \in U(m)$

$$\Rightarrow A_1 := U^*AV = \begin{bmatrix} u_1^*Av_1 & u_1^*AV_1 \\ U_1^*Av_1 & U_1^*AV_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & \boxed{B} \end{bmatrix}$$

$$\left\|A_1 \cdot \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ w \end{pmatrix}\right\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix} \sigma_1 & w^* \\ 0 & B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ w \end{bmatrix}\right\|_2^2 = \left\|\begin{bmatrix} \sigma_1^2 + w^*w \\ Bw \end{bmatrix}\right\|_2^2 \geq (\sigma_1^2 + w^*w)^2$$

$$\sigma_1^2 = \|A\|_2^2 = \|UAV^*\|_2^2 = \|A_1\|_2^2 \geq (\sigma_1^2 + w^*w) \Rightarrow w = 0$$

т.к. $\|A_1\|_2 \geq \|A_1 y\|_2 : \|y\|_2$

$$\Rightarrow A_1 = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

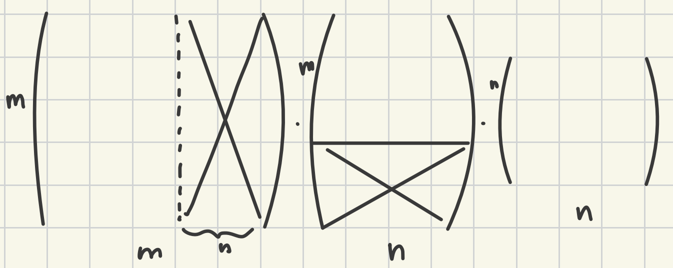
По предположению индукции: $B = U_B \Sigma_B V_B^*$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & V_B^*\end{bmatrix} \underbrace{U^* A V}_{A_1 = \begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \Sigma_B\end{bmatrix}} \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & V_B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\sigma_1 & 0\\ 0 & \Sigma_B\end{bmatrix}$$

Тонкое (thin SVD)

$$\underset{m\times n}{A} = \underset{m\times p}{U_p}\,\underset{p\times p}{\Sigma_p}\,\underset{p\times n}{V_p^*}, \text{ где } p = \min(m,n)$$

Пример $m > n \Rightarrow p = n$

$A =$ 

Компактное SVD: $A = U_r \Sigma_r V_r^*$, $r = rk(A)$

Усечённое (truncated SVD) $A \neq \tilde{A} = U_t \cdot \Sigma_t \cdot V_t^*$, $t < r$

Наивный алгоритм: Пусть $m \geq n$, $A^*A \Rightarrow \Sigma; V$

$(A^*A = V\Sigma^T\Sigma V) \Rightarrow U_r = A V_r \Sigma_r^{-1}$

Приближение матрицы с заданным рангом

Опред. Норма называется унитарно-инвариантной, если $\|UAV\| = \|A\|\ \forall A \in F^{m\times n};\ U \in U(m)\ V \in U(n)$

Опред. Нормы Шаттена

$\|A\|_{p,\text{shattn}} := (\sigma_1^p + \dots + \sigma_r^p)^{\frac{1}{p}}$

При $p = 1$: ядерная норма: $\|A\|_* = \sigma_1 + \dots + \sigma_r$

Теорема (Эккера-Янга). Рассмотрим усечён. SVD:

$A_t = U_t \Sigma_t V_t^*$, где $t < rk(A)$

Тогда $\min \| A - B \| = \| A - A_t \|$ $\quad B := rk(B) \leq t$

для $\forall$ унитар. инвариант. нормы $\| \cdot \|$

Упражнение. Доказать для $\| \cdot \|_2$; $\| \cdot \|_F$

$\| A - A_t \|_2 = \sigma_{t+1}$ $\quad \| A - A_t \|_F = \sqrt{\sum_{t+1}^{r} \sigma_1^2}$

HSVD (hyperbolic SVD)

$\underset{\substack{\cap \\ U(m)}}{U} \cdot \underset{m \times n}{A} \cdot \underset{\substack{\cap \\ U(p,q)}}{V} = \ldots$ $\leftarrow$ потом расскажут