

## Семинар 2.

Оп. Универсальный пр-вом над. некомпактн. лин. пр-ва  $V = \mathbb{C}^n$   
 над полем  $\mathbb{C}$  с заданным на ней  
матричным скалярным произведением.  
 пр-ва матрицей разм. изоморфизм.

$$x, y \in V \mapsto (x, y) \in \mathbb{C} : \quad \begin{aligned} 1) & \quad (x, x) \geq 0 ; \quad (x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ 2) & \quad (x, y) = \overline{(y, x)} \\ 3) & \quad (x+y, z) = (x, z) + (y, z) \quad \forall x, y, z \in V \\ 4) & \quad (\lambda x, y) = \lambda (x, y). \quad \forall \lambda \in \mathbb{C} \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \text{требование} \\ \Rightarrow (x, \lambda y) = \lambda (x, y) \end{array} \right.$$

Составное скалярное произв.:  $(x, y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_n \bar{y}_n = y^* x$ .  
 где  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ,  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ ,  
 где  $x^*$  - матричное сопряжение.  
 $A_{m \times n}; A^* = \overline{A}^T; y^* = (\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_n)$ .

Пример:  $V = \mathbb{C}^{m \times n}$   
 $A, B \in V; \quad \underline{(A, B) = \operatorname{tr}(B^* A)}$ , (Упр. - проверить  
 об. 1)-4))

Фиксируя сопр. произв

Оп. Группой  $G$  наз. подмножество лин-го с операцией:

$$x, y \in G \mapsto x \cdot y \in G.$$

- 1)  $(xy)z = x(yz)$
- 2)  $\exists e \in G: e \cdot x = x \cdot e = x \quad \forall x \in G$ .
- 3)  $\forall x \in G \quad \exists x^{-1} \in G: x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$ .

Оп. Ортогональная матрица  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :  $A^T = A^{-1}$  ( $\Leftrightarrow A^T A = I = A A^T$ )  
 и.б. Мн-во ортогон. матриц образует группу:

$$O(n) = \{ A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T = A^{-1} \}$$

Упр.: проверить  $\left( \begin{array}{c} \forall A, B \in O(n) \\ \forall A \in O(n) \end{array} : A \cdot B \in O(n) \right)$   
 $I \in O(n)$

Доказан. определение: Ортогон. группа - группа всех лин. пр-вов  $\mathbb{R}^n$ ,  
 сохраняющих фиксированную метрику квадр. формы  $Q$  на  $V$  (либо, эквив-ко,  
 мы рассматриваем квадр. формы, задающие скл. произв. поэто либо они помогают опред., либо

скл. произв. пр-ие

Момент рассматривался  $Q = B_E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  — норм. баз.

$$\text{Покажем: } Q(\varphi(x)) = Q(x) \Leftrightarrow Q(Ax) = Q(x) \Leftrightarrow (Ax)^T (Ax) = x^T x \Leftrightarrow x^T A^T A x = x^T x \Leftrightarrow A^T A = I.$$

↑  
норм.  
норм. пр-е.

$\mathbb{P}^{p,q}$   $\mathbb{R}^{p,q}$   
Псевдогиперболическое (или псевдоевклидовое) пр-во — пр-во конечной размерности над полем  $\mathbb{C}$  ( $\mathbb{R}$  изот-ко) с инфинитесимальн. скл. групп. (без требование псевдометр. опр-ти)

Сингулярное склонение пр-е на  $\mathbb{P}^{p,q}$ :  $(x,y) = x_1 \bar{y}_1 + \dots + x_p \bar{y}_p - x_{p+1} \bar{y}_{p+1} - \dots - x_n \bar{y}_n$

$$= y^* n x, \text{ где } n = \begin{pmatrix} 1 & p & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

"метрика"  
но чудо это норм. баз  
абсол. фикция

Пример: в задаче пр-во Минковского  $M^{1,3}$ .

Псевдоорт. группа:  $O(p,q) = \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T n A = n\}$

Вернёмся к  $O(n)$ ; Простое сл-во:  $A \in O(n) \Rightarrow \det A = \pm 1$ .

Важная подгруппа  
синг. орт. группы  $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$

$$\text{Пример: } n=2 \quad O(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \right\} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \right\} \quad \varphi \in \mathbb{R} \quad \begin{matrix} \text{Упражнение} \\ (без сторон)$$

Ещё несколько фактов про  $O(n)$ :

- ① Столбцы/строки ортогонормированные!
- ② Матрица перехода от одних ортогонормир. базисов к другим ортогонормир. базисам есть ортогонормированной

Аналогично в  $\mathbb{C}$ :

Унитарная группа:  $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^* A = I\}$

$$A^* = A^{-1}.$$

Сл-во:  $A \in U(n) \Rightarrow |\det A| = 1$ .

Пример:  $U(1) = \{ e^{i\varphi}; \varphi \in \mathbb{R} \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z|=1 \}$

Подгруппа:  $SU(n) = \{ A \in U(n) : \det A = 1 \}$

Лекция опред.:  $U(n)$  - группа всех неворотн. автом. пр-ий нр-ва  $\mathbb{C}^n$ , сохраняющая  $\eta$  (единственное симпл. произв.)

Аналогично: строки/столбцы умн. матриц откос. элем. симпл. произв.

Невдогматическая группа:  $U(p,q) = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^T \eta A = \eta \}$

$$\eta = \text{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q})$$

В  $\mathbb{C}$  би: можно привести к норм. виду  $\begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ , но из-за операции  $A^*$  здес' это бесполезно, тк сработает)

Если для лин. определения  $(\cdot, \cdot)$  имеем  $A^T A = \eta$ ,

$$O(n, \mathbb{C}) = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^T \eta A = \eta \}$$

$$O(p, q, \mathbb{C})$$

## Векторные нормы.

Нормированное пр-во лин. нр-ва  $V = \mathbb{F}^n$  с нормой

$$x \in V \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}.$$

①  $\|x\| \geq 0$ ;  $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ .

②  $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{F}$ .

③  $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Доказательство 1) можно оставить только  $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Следствие:  $| \|x\| - \|y\| | \leq \|x-y\| \quad \forall x, y \in V$  (упр.)  
(обратное нр-во ①)

Примеры норм:

•  $p$ -норма:  $\|x\|_p = \left( |x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$  (Упр.: проверить, что норма при  $p \geq 1$ )

Частные случаи:  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^* x} \quad (\text{«евклидова норма»})$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i| \quad (\text{т.к. } \|x\|_p \rightarrow \|x\|_\infty \text{ при } p \rightarrow \infty)$$

Нер-во Гёльдера:  $|y^* x| \leq \|x\|_p \|y\|_q ; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ .

Частный случай (К-Б):  $|y^* x| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

Уб. Все нормы в  $V = \mathbb{F}^n$  эквивалентны, т.е. любые нормы  $\|\cdot\|_\alpha$  и  $\|\cdot\|_\beta$  в  $\mathbb{F}^n$  эквивалентны, т.е.  $\exists c_1, c_2 > 0, c_2 > 0: c_1 \|x\|_\alpha \leq \|x\|_\beta \leq c_2 \|x\|_\alpha$  для  $x \in \mathbb{F}^n$ .

Пример: (Упр. Проверить:  $\|x\|_\alpha \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$ ,  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty$ ,  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty$ )

$$\mathbb{F}^{m \times n} \cong \mathbb{F}^{m \cdot n}$$

*Матричные нормы:*

$$A \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

$$\text{vec}(A) \in \mathbb{F}^{m \cdot n}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ \vdots \\ a_{1n} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{m2} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Норма матрицы наз-ся субмногометрической, если:

$$\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|, A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

Пример. Норма Радемахера:  $\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{tr}(A^*A)} = \sqrt{\text{tr}(AA^*)} = \|\text{vec}(A)\|_2$

Р-норма:  $\|A\|_P := \sup_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_P}{\|x\|_P} = \sup_{\|x\|_P=1} \|Ax\|_P$ .  
 (Операторная норма)

Литература:

- Golub, Van Loan - Matrix Computations
- Курс Основы (github)
- Курс Радиотехники (github)

Откуда видно: Рассмотрим лин. оператор  $A: U_1 \rightarrow U_2$   
 Опер.  $A$  наз-ся ограниченным, если  $\exists M > 0: \forall x \in U_1: \|Ax\| \leq M \cdot \|x\|$

Уб. Состав  $U_1$ -кокомпактно, то любой оператор ограничен.  
 $\Rightarrow$  можно ввести норму  $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Более общую:  $\|A\|_{p,q} = \sup_{x \in \mathbb{F}^n} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_q$

Норма Чебышева (не обл. субмногометр.):  $\|A\|_\infty := \max_{i,j} |a_{ij}| = \|\text{vec}(A)\|_\infty$

Кроме:  $\|A\|_{\text{sum}} = \sum_{i,j} |a_{ij}| = \|\text{vec}(A)\|_1$ ,

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1=1} \|Ax\|_1 \stackrel{\text{Упр.}}{=} \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \sigma_1(A) = \sqrt{\lambda_1(A^*A)}$$

$$\|A\|_\infty = \dots = \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Упр.:

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_F \leq \sqrt{n} \|A\|_2$$

$$\|A\|_C \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{mn} \|A\|_C$$

$$\frac{1}{m} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_1$$

Banercoe gne nae C-Ba.

- ①  $A \in U(n)$ :  $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
- ②  $A, V \in U(n)$ :  $\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{n \times n}$   
 $\|UAV\|_F = \|A\|_F$