Рассказ Русик

**Опред.** Эрмитова $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется положительно определённой, если:

- $x^* A x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$
- $\lambda(A) > 0$
- $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$ лин.незав. : $A = G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_{ij} = x_i^* x_j$ ($A = B^* B$)
- Все главные миноры положит. (критерий Сильвестра)

**Опред.** Эрмитора $A \in M_n(\mathbb{C})$ называется отрицательно определённой, если:

- $x^* A x < 0 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$
- $\lambda(A) < 0$
- $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}^n$ лин.незав. : $A = -G(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $g_{ij} = x_i^* x_j$
- Главные миноры (и угловые) чередуются по знакам (нечёт −, чёт +) ((нечёт размер −, чёт +))

2) <=> 1) $A = U \Lambda U^*$ – спектральное разложение

$x^* A x = (x^* U) \Lambda (U^* x) = (U^* x)^* \Lambda (U^* x) = y^* \Lambda y > 0$

3) => 1) $A = B^* B \qquad x^* B^* B x = (Bx)^* (Bx) > 0$

Утверж. $A$ положе.опред ($A > 0$) $\Rightarrow \exists! B > 0 \quad B^2 = A$

Док-во. Пусть $A = U \Lambda U^*$, тогда $B = U \sqrt{\Lambda} U^*$, где $\sqrt{\Lambda} = \mathrm{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$

$B^2 = U \sqrt{\Lambda} \underbrace{U^* U}_{I} \sqrt{\Lambda} U^* = U \Lambda U^*$ проверили

Пусть $e_1, \dots, e_n$ – собств. орт.базис $B$ $\quad (\mu_i \in \lambda(B))$

$A e_i = B^2 e_i = B \cdot (B e_i) = B \cdot (\mu_i e_i) = \mu_i \cdot B e_i = \mu_i^2 e_i$

$U_{\mu_i} = U'_{\mu_i^2}$ ($U_\lambda$ - подпрост. с соб.знач. $\lambda$)

# Теорема о полярном разложении.

Пусть $A \in M_n(\mathbb{C}) \Rightarrow \exists S$ - эрмитова, $U$ - унитарная

$$\boxed{A = SU}$$

Док-во. $AA^* = SUU^*S^* = SS^* = S^2$ $\quad S = \sqrt{AA^*}$ - единств.

$U = S^{-1} \cdot A$, если $A$ невырождена

Проверка $U$ - унит.: $U^*U = (S^{-1}A)^*(S^{-1}A) = A^* \underbrace{S^{-1} S^{-1}} \cdot A =$

$= A^*(AA^*)^{-1}A = A^*(A^*)^{-1}(A)^{-1}A = I$

Если $A$ вырождена. $AA^*$, ортонорм. базис $z_1, \dots, z_n$

$AA^* z_i = k_i^2 z_i$, $\quad S z_i = k_i z_i$

$k_1, \dots, k_m > 0$, $k_{m+1} = \dots = k_n = 0$

Пусть $w_i = A^* \frac{z_i}{k_i}$, $i \in \{1, 2, \dots, m\}$, $W = \langle w_1, w_2, \dots, w_n \rangle$

$(w_i, w_j) = \frac{1}{k_i k_j} \cdot (A^* z_i, A^* z_j) = \frac{1}{k_i k_j} \cdot (z_i, AA^* z_j) = \frac{k_j}{k_i} \cdot (z_i, z_j)$

$w_1, \dots, w_n$ - дополненный базис $\quad U w_i = z_i$

- $i \le m$ $\quad A w_i = AA^* z_i : k_i = k_i z_i$

  $SU w_i = S z_i = k_i z_i$ $\quad$ Совпали

- $m < i \le n$ $\quad SU w_i = S z_i = 0$

$(A w_i, A w_i) = (w_i, A^* A w_i) = \dots = 0$ $\quad$ Совпали