Русик. Скелетное разложение

Теорема. Пусть $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

$rk(A) = r$. Тогда $\exists\, U \in \mathbb{F}^{m\times r}$, $V \in \mathbb{F}^{n\times r}$

$A = U\cdot V^T = u_1\cdot v_1^T + \ldots + u_r\cdot v_r^T$ $\qquad m\cdot n \gg m\cdot r \quad n\cdot r$

при $r \ll m,n$

Док-во: $u_1, \ldots, u_r$, $U = (u_1, \ldots, u_r)$, $S \in \mathbb{F}^{r\times r}$

$A^{(k)} = U\cdot x_k \Rightarrow A = U\cdot(x_1, \ldots, x_n) = U\cdot V^T = (US)(S^{-1}V^T) =$

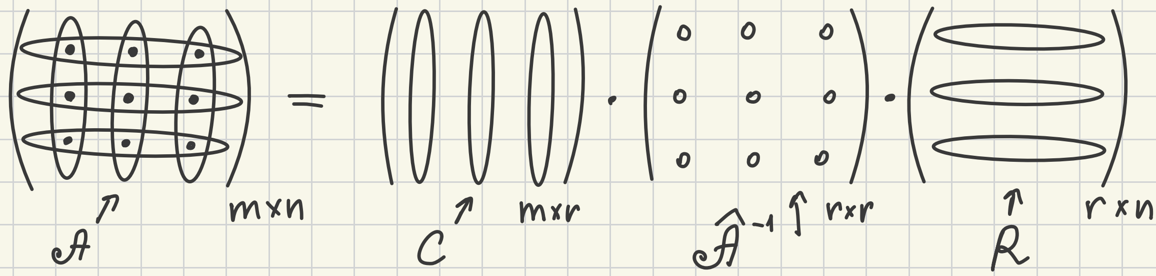
$\overline{U}\cdot\overline{V}^T$

CUR-разложение

Теорема: $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $rk(A) = r$

Пусть $\hat{A}$ - невырожденная $r\times r$ подматрица

Тогда $A = C\cdot\hat{A}^{-1}\cdot R$ $\qquad m\cdot r + r\cdot r + n\cdot r = (m+n)r + r^2 \ll m\cdot n$



Док-во: $\exists\, X$: $A = C\cdot X$ $\qquad R = \hat{A}\cdot X \Rightarrow X = \hat{A}^{-1}\cdot R$

$\Rightarrow A = C\cdot\hat{A}^{-1}\cdot R$

Теорема. $\hat{A} \in \mathbb{F}_{r\times r}$: $|\det\hat{A}| \to \max$

Тогда R – строки $\hat{A}$, C – столбцы $\hat{A}$

$\|A - C\hat{A}^{-1}R\|_C \leq (r+1)\sigma_{r+1}\cdot(A)$

$\|A\|_C = \max |a_{ij}|$

Рассказ окончен

Примеры

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad rk(\mathcal{A}) = 1 \quad \hat{\mathcal{A}} = 2 \quad \hat{\mathcal{A}}^{-1} = 1/2$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad R = (2\ 2\ 2)$$

$\boxed{\text{Упр: Сделать } \mathcal{A} \in \mathbb{F}^{2\times 3}}$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad rk(\mathcal{A}) = 2 \quad V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$ Не экономим :C

Спектральное разложение: $\mathcal{A} = S \cdot \Lambda \cdot S^{-1}$

$\mathcal{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$ $\quad \mathbb{F} = \mathbb{R}; \mathbb{C}$ $\quad \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Существует не всегда

Критерий существования: $\sum \dim$ (собственных подпростр.) $= n$

Жорданова форма: $\mathcal{A} = S \cdot J \cdot S^{-1}$, где

$$J = \begin{pmatrix} J_1(\lambda_1) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & J_k(\lambda_k) \end{pmatrix} \quad J_i(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \lambda_i & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$ жорданов блок

$\mathbb{F} = \mathbb{R} \Rightarrow \exists$ не всегда (т.к. хар. многочлен не всегда имеет n вещ. корней)

$\mathbb{F} = \mathbb{C} \Rightarrow \exists$ всегда

Теорема (разложение Шура)

$\forall A \in \mathbb{C}^{n\times n} \quad \exists\, U \in U(n)$; верхнетреуг. $T \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$A = U \cdot T \cdot U^*$, причем на глав. диагонали T стоят собств. числа матрицы A

Док-во (по индукции) $n=1$ ок

Зафиксируем n. $\exists$ хотя бы одно собств. значение λ_1 и соотв. вектор $\underset{\|v_1\| = v_1 \cdot v_1^* = 1}{v_1}$ => можем дополнить v_1 до ортонорм. базиса $\mathbb{C}^n$: $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ =>

Рассмотрим $U_1 = (v_1\ v_2\ \dots\ v_n) \in U(n)$

$$U_1^* A U_1 = (v_1^* \dots v_n^*)^T \cdot A \cdot (v_1 \dots v_n) = \begin{pmatrix} v_1^* A \overset{=\lambda_1 v_1}{v_1} & v^* A v_2 & \dots \\ \underset{0}{v_2^* A \overset{=\lambda_1 v_1}{v_1}} & & \\ \vdots & & \\ \underset{0}{v_n^* A v_n} & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & \\ 0 & A_1 \in \mathbb{C}^{(n-1)\times(n-1)} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} =$$

предположение индукции

$A_1 = U_2 T_2 U_2^*$,

где T_2 – верхнетреуг

$U_2 \in U(n-1)$

$$= \underset{\in U(n)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2 \end{pmatrix}} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & B \\ 0 & T_2 \end{pmatrix} \cdot \underset{\in U(n)}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & U_2^* \end{pmatrix}}$$

Нормальные матрицы

Опр. $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется нормальной, если $A^*A = AA^*$

(Примеры : эрмитовы $A^* = A$; унитарные $A^* = A^{-1}$; антиэрмитовы $A^* = -A$)

Теорема. A – нормальная <=> унитарно подобна диагон.

(т.е. разложение Шура верхнетреуг. матрица будет диагональной $A = U \cdot \Lambda \cdot U^{-1}$, $U \in U(n)$)

Док-во. <= Пусть $A = U \cdot \Lambda \cdot U^{-1}$

$$A^* A = (U\Lambda U^{-1})^*(U\Lambda U^{-1}) = (U^{-1})^* \Lambda^* U^* U \Lambda U^{-1} = U\Lambda^*\Lambda U^{-1}$$
$$A \cdot A^* = (U\Lambda U^{-1})(U\Lambda U^{-1})^* = U\Lambda U^{-1}(U^{-1})^*\Lambda^* U^* = U\Lambda\Lambda^* U^{-1}$$
$\Big\} =$

$\Rightarrow$ $A^* A = A \cdot A^*$. Воспользуемся разложением Шура $A = UTU^*$.

$$(UTU^*)^*(UTU^*) = (UTU^*)(UTU^*)^*$$
$$UT^*\underbrace{U^*U}_{I}TU^* = UT\underbrace{U^*U}_{I}T^*U^* \qquad U^{-1}| \sim |\cdot U$$

$T^*T = TT^*$, где T - верхнетреуг. $\qquad x^*x = |x|^2 = x \cdot x^*$

$\Downarrow$?

по индукции: $n=1$ верно

Фиксируем n

$$T = \begin{pmatrix} a & x^* \\ 0 & C \end{pmatrix} \Rightarrow \quad T^*T = \begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ x & C^* \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & x^* \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 & \bar{a}x^* \\ xa & xx^* + C^*C \end{pmatrix}$$

$$TT^* = \begin{pmatrix} a & x^* \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \bar{a} & 0 \\ x & C^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a^2| + |x|^2 & x^*C^* \\ Cx & CC^* \end{pmatrix}$$

$C^{(n-1)(n-1)}$

$|x^2| = 0 \Rightarrow x = 0$; $C^*C = CC^* \Rightarrow C$ - диаг.

$\Rightarrow$ T - диагональн. $\boxtimes$

Следствие: ◦ A - эрмитова $\Leftrightarrow$ A - нормальная
все собственные значения - веществ.

◦ A - унитарная $\Leftrightarrow$ A - нормальная ; $|\lambda_i| = 1$

◦ A - косоэрмит. $\Leftrightarrow$ A - нормальная ; λ_i - число мнимое

Приложение Маш (презент. + доска)

◦ ◦ ◦

Частный случай

A - норм. $\Rightarrow$ собств. вектора ортонорм.

Нашли λ_1, v_1 $\qquad A - \lambda_1 \cdot v_1 \cdot v^*$

$$(A - \lambda_1 v_1 v_1^*) v_2 = A \cdot v_2 = \lambda_2 \cdot v_2$$