Семинар 2.

Опр. **Унитарным пр-вом** наз. конечномерн. лин. пр-во $V = \mathbb{C}^n$ (т.к. все лин. пр-ва конечной разм. изоморфны) над полем $\mathbb{C}$ с заданным на нём эрмитовым скалярным произведением.

$x, y \in V \mapsto (x,y) \in \mathbb{C}$:

требование

1) $\underbrace{(x,x)}_{\in \mathbb{R}} \geq 0$; $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$
2) $(x,y) = \overline{(y,x)}$
3) $(x+y, z) = (x,z) + (y,z)$ $\forall x,y,z \in V$
4) $(\lambda x, y) = \lambda (x,y)$. $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow (x, \lambda y) = \overline{\lambda}(x,y)$

Естественное скалярное произв.: $(x,y) = x_1\overline{y_1} + \ldots + x_n\overline{y_n} = y^* x$.

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$,

где x^* – эрмитово сопряжение.

$\underset{m\times n}{A}$; $A^* = \overline{A}^T$; $y^* = (\overline{y_1}, \ldots, \overline{y_n})$.

Пример: $V = \mathbb{C}^{m\times n}$

$A, B \in V$; $\underbrace{(A,B) = tr(B^*A)}_{\text{Фробениусово скал. произв}}$ (Упр. - проверить св. 1)-4))

Опр. **Группой** G наз. непустое мн-во с операцией:

$x, y \in G \mapsto x \cdot y \in G$.

1) $(xy)z = x(yz)$
2) $\exists e \in G$: $e \cdot x = x \cdot e = x$. $\forall x \in G$.
3) $\forall x \in G$ $\exists x^{-1} \in G$: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

Опр. **Ортогональная матрица** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$: $A^T = A^{-1}$ $(\Leftrightarrow A^TA = I = AA^T)$

Утв. Мн-во ортогон. матриц образует группу:

$$O(n) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T = A^{-1}\}$$

Упр.: проверить $\begin{pmatrix} \forall A,B \in O(n) \quad A \cdot B \in O(n) \\ \forall A \in O(n) : A^{-1} \in O(n) \\ I \in O(n) \end{pmatrix}$

Эквивал. определение: Ортогон. группа – группа всех лин. пр-ий пр-ва $\mathbb{R}^n$, сохраняющих фиксированную невырожд. квадр. форму Q на V. (либо, эквив-но, фиксир. скал. пр-ие)

Мы рассматриваем квадр. формы, задающие скал. произв. поэтому мы их помножеем опред., поэтому можем рассматривать $\underline{Q = B_E = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}}$ — норм вид.

Поэтому: $Q(\varphi(x)) = Q(x) \Leftrightarrow Q(\underset{n\times n}{A}\underset{n\times 1}{x}) = Q(x) \Leftrightarrow (Ax)^T \underset{B_E}{\cdot} (Ax) = x^T \underset{B_E}{\cdot} x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^T A^T A x = x^T x \Leftrightarrow A^T A = I$

наше лин. пр-ие.

Псевдоунитарное ($\mathbb{C}^{p,q}$) **(или псевдоевклидово** ($\mathbb{R}^{p,q}$)**) пр-во** — пр-во конечной размерности над полем $\mathbb{C}$ ($\mathbb{R}$ соот-но) с индефинитным скал. произв. (без требования положит. опр-ти)

Естественное скалярное пр-е на $\mathbb{C}^{p,q}$: $(x,y) = x_1\bar{y}_1 + \ldots + x_p\bar{y}_p - x_{p+1}\bar{y}_{p+1} - \ldots - x_n\bar{y}_n$

$= y^* \eta x$, где $\eta = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & -1 \end{pmatrix}$ $\boxed{n = p+q}$

„метрика" по сути это норм. вид квадр. формы

Пример: в физике пр-во Минковского $\mathbb{R}^{1,3}$.

Псевдоортог. группа: $O(p,q) = \{A \in \mathbb{R}^{n\times n} : A^T \eta A = \eta\}$

Вернёмся к $O(n)$: Простое св-во: $A \in O(n) \Rightarrow \det A = \pm 1$.

Важная подгруппа: $SO(n) = \{A \in O(n) : \det A = 1\}$
спец. ортог. группа

Пример: $n = 2$

$O(2) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \right\}_{\varphi \in \mathbb{R}}}_{SO(2)} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{pmatrix} \right\}_{\varphi \in \mathbb{R}}$ ← Упражнение (в обе стороны)

Ещё несколько фактов про $O(n)$:

① Столбцы / строки ортонормированы
$\Updownarrow$
② Матрица перехода от одного ортонорм. базиса к другому ортонорм. в-а. ортогональной

Аналогично в $\mathbb{C}$:

Унитарная группа: $U(n) = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} : A^* A = I\}$
$\Updownarrow$
$A^* = A^{-1}$.

Св-во: $A \in U(n) \Rightarrow |\det A| = 1$.

Пример: $U(1) = \{ e^{i\varphi} : \varphi \in \mathbb{R} \} = \{ z \in \mathbb{C} : |z| = 1 \}$

Подгруппа: $SU(n) = \{ A \in U(n) : \det A = 1 \}$

Эквивал. опред.: $U(n)$ – группа всех невырожд. лин. пр-ий пр-ва $\mathbb{C}^n$, сохраняющих эрмитово скал. произв.

Аналогично: строки/столбцы унит. матрицы ортонорм. относ. эрм. скал. произв.

Псевдоунитарная группа: $U(p,q) = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^* \eta A = \eta \}$

$\eta = \mathrm{diag}(\underbrace{1, \dots, 1}_{p}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{q})$

В $\mathbb{C}$ всё можно привести к норм. виду $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$, но из-за операции A^* здесь это бесполезно (не сработает)

Если бы мы определили $(\cdot,\cdot)$ как $A^T A$, то

$O(n, \mathbb{C}) = \{ A \in \mathbb{C}^{n \times n} : A^T \eta A = \eta \}$

$\quad \parallel$

$O(p, q, \mathbb{C})$

Векторные нормы.

Нормированное пр-во. лин. пр-во $V = \mathbb{F}^n$ с введенной нормой

$x \in V \mapsto \|x\| \in \mathbb{R}$.

1. $\|x\| \geq 0$; $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\| \quad \forall x \in V, \lambda \in \mathbb{F}$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in V$

Заметим, что в 1) можно оставить только $\|x\| = 0 \Rightarrow x = 0$.

Следствие: (обратное нер-во Δ) : $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in V$ (Упр.)

Примеры норм:

- p-норма: $\|x\|_p = \left(|x_1|^p + \dots + |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ (Упр.: проверить, что норма при $p \geq 1$, $p \in \mathbb{R}$)

Частн. случаи:

$\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_n|$

$\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} = \sqrt{x^* x}$ ("евклидова норма")

$\|x\|_\infty = \max\limits_{1 \leq i \leq n} |x_i|$ (т.к. $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ при $p \to \infty$)

Нер-во Гёльдера: $|y^* x| \leq \|x\|_p \|x\|_q$; $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Частный случай (К-Б): $|y^* x| \leq \|x\|_2 \|y\|_2$

Утв. Все нормы в $V = F^n$ эквивалентны, т.е. $\forall$ двух норм $\|\cdot\|_\alpha$ и $\|\cdot\|_\beta$ в F^n $\exists\, c_1 > 0, c_2 > 0$: $c_1\|x\|_\alpha \le \|x\|_\beta \le c_2\|x\|_\alpha$ $\forall x \in F^n$.

Примеры: (Упр. Проверить:
$$\|x\|_2 \le \|x\|_1 \le \sqrt{n}\,\|x\|_2$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\,\|x\|_\infty$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\,\|x\|_\infty$$
)

Матричные нормы:

$$F^{m\times n} \cong F^{m\cdot n}$$

$A \in F^{m\times n}$

$$vec(A) \in F^{m\times n}, \quad vec(A) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \\ a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

Норма матрицы наз-ся **субмультипликативной**, если:
$$\|AB\| \le \|A\|\cdot\|B\|, \quad A, B \in F^{m\times n}$$

Пример. Норма Фробениуса: $\|A\|_F = \sqrt{\sum_j\sum_i |a_{ij}|^2} = \sqrt{tr(A^*A)} = \sqrt{tr(AA^*)} = \|vec(A)\|_2$

p-норма: $\|A\|_p := \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p = 1} \|Ax\|_p$.
(Операторная норма)

Литература:
- Golub, Vanloan „Matrix Computations"
- Курс Оселедца (github)
- Курс Рахубы (github)

Откуда взялось: Рассмотрим лин. оператор $A: V_1 \to V_2$
Опер. A наз-ся ограниченным, если $\exists M \ge 0: \forall x \in V_1: \|Ax\| \le M\cdot\|x\|$

Утв. Если V_1 – конечномерно, то любой оператор ограничен.
$\Rightarrow$ можно ввести норму $\|A\| = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$

Более общо: $\|A\|_{p,q} = \sup_{x\ne 0} \frac{\|Ax\|_q}{\|x\|_p} = \sup_{\|x\|_p=1} \|Ax\|_q$

Норма Чебышева (не явл. субмультипл.): $\|A\|_C := \max_{i,j} |a_{ij}| = \|vec(A)\|_\infty$

Ещё: $\|A\|_{sum} = \sum_{i,j} |a_{ij}| = \|vec\,A\|_1$

$$\|A\|_1 = \sup_{\|x\|_1 = 1} \|Ax\|_1 \overset{\text{упр.}}{=} \max_j \sum_i |a_{ij}|$$

$$\|A\|_2 = \underset{\text{(потом)}}{\sigma_1(A)} = \sqrt{\lambda_1(A^*A)}$$

$$\|A\|_\infty = \dots \overset{\text{Упр}}{=} \max_i \sum_j |a_{ij}|$$

Упр.:
$$\|A\|_2 \le \|A\|_F \le \sqrt{n}\,\|A\|_2 \qquad \frac{1}{\sqrt{n}}\|A\|_\infty \le \|A\|_2 \le \sqrt{m}\,\|A\|_\infty$$
$$\|A\|_C \le \|A\|_2 \le \sqrt{mn}\,\|A\|_C$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_1 \le \|A\|_2 \le \sqrt{n} \|A\|_1$$

Важные для нас св-ва:

1. $A \in U(n)$: $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{C}^n$
2. $U \in U(m)$, $V \in U(n)$: $\|UAV\|_2 = \|A\|_2 \quad \forall A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, $\|UAV\|_F = \|A\|_F$