# Домашняя работа № 2

## Автор: Минеева Екатерина

Задача А1. Рыцарь и доспехи

Если про входным данным построить граф Г, где сухопутные ориентированные проходы (ребра) направленны от комнаты с меньшим номером к большему, а водные проходы-ребра – в противоположную, то условие существования двух комнат А и В таких, что между ними есть и исключительно водный, и исключительно сухопутный маршрут, эквивалентно существования цикла в графе Г. Докажем это:

▲ Если существуют комнаты А и В удовлетворяющие условию, то существование цикла в графе Г очевидно, поэтому займемся доказательством в другую сторону.

Утверждение: если в графе Г, удовлетворяющем условию, есть цикл длины $n$, то в этом цикле найдутся вершины А и В, что существует путь из вершины А в В такой, что все ребра в нем ведут от вершины с меньшим номером к большем, и существует путь из В в А такой, что все ребра в нем ведут от вершины с большим номером к меньшему, либо наоборот. (Это эквивалентная переформулировка существованию исключительно водного и сухопутного путя.)

База: $n = 3$. Очевидно, что тогда циклом является треугольник (для любой пары вершин ребро может быть направлено только в одну из двух возможных сторон). Тогда очевидно такие А и В есть.

Шаг: Предположим, что для циклов длины $< k$ все верно. Пусть теперь есть цикл длины $k$:
$v_{i_0} \to v_{i_1} \to \ldots \to v_{i_j} \to v_{i_{j+1}} \ldots \to v_{i_p} \to v_{i_{p+1}} \to \ldots \to v_{i_k} = v_{i_0}$
(Сразу оговорим, что в нашем цикле все вершины, кроме начальной, встречаются не более одного раза. Если какая-то врешина встречается два раза, то можно выкинуть часть цикла между ними. Это условие позволит везде писать строгие неравенства между вершинами.)

Для определенности будем считать, что $v_{i_0} < vi_1$. Пусть тогда j – наименьший индекс, для которого выполняется $v_{i_j} > v_{i_{j+1}}$. Такой точно есть, иначе из транизитивности «$<$» мы бы получили, что $v_{i_0} < v_{i_0}$, а это невозможно. Далее есть два варианта:

1. $\forall p > j : v_{i_p} > v_{i_{p+1}}$. Заметим, что тогда можно взять $A = v_{i_0}, B = v_{i_j}$ и все условия будут выполняться.

2. $\exists p > j : v_{i_p} < v_{i_{p+1}}$. При этом будем считать, что это p – наименьшее. Посмотрим на ребро между $v_{i_j}$ и $v_{i_{p+1}}$ (по условию задачи оно обязательно есть), опять же возможны два варианта:

a) $v_{i_j} \to v_{i_{p+1}}$. Тогда перейдем от нашего цикла к циклу$v_{i_0} \to \ldots \to v_{i_j} \to v_{i_{p+1}} \to \ldots \to v_{i_k} = v_{i_0}$, его длина меньше $k$, поэтому применим предположение индукции.

b) $v_{i_j} \leftarrow v_{i_{p+1}}$. Рассмотрим тогда цикл $v_{i_j} \to v_{i_{j+1}} \ldots \to v_{i_p} \to v_{i_{p+1}} \to v_{i_j}$ и применим предположение индукции к нему.

■

Для поиска цикла в графе Г воспользуемся обходом в глубину, сложность работы которого это $\underline{O}(N + M)$, где $N$ - количество вершин (комнат), $M$ - количество ребер. Исходя из условия задачи, нетрудно посчитать, что $M = 1 + 2 + 3 + \cdots + (N - 1) = \frac{1}{2}N(N - 1)$, что есть $\underline{O}(N^2)$.

Итого сложность алгоритма $\underline{O}(N^2)$.