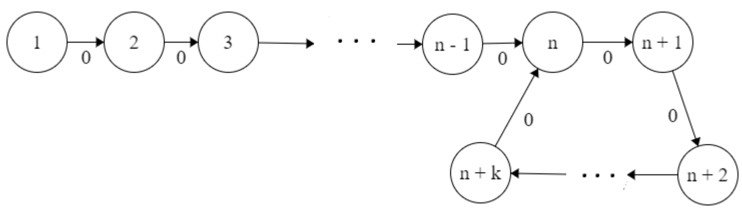
Домашняя работа № 5

Автор: Минеева Екатерина

Задача 3

Докажем, что данный язык будет регулярным.

Поскольку язык L регулярный в алфавите 0, то существует некоторый автомат A, который распознает этот язык. Посмотрим, как может выглядеть этот автомат: ориентированный граф, из каждой веришины, кроме начальной, исходит ровно одна стрелка (автомат детерминированный). "Выйдем" из начального состояния и "пойдем по стрелкам": поскольку автомат конечный, в какой-то момент мы попадем в состояние, где мы уже были. Таким образом, общий вид автомата, задающего некоторый регулярный язык в алфавите 0 такой:



(Могут быть еще состояния, недостижимые из начального, но их рассматривать смысла нет.)

Рассмотрим 2 случая:

1) Среди состояний с номерами $n,\ n+1, \ldots,\ n+k$ нет финальных состояний. Тогда язык, порождаемый таким автоматом, будет конечным. Значит и множество $\{t \mid 0^t \in L\}$ конечно, а любое конечное множество является регулярным. То есть в этом случае утвержедение доказано.

2) Среди состояний с номерами $n,\ n+1, \ldots,\ n+k$ есть финальные состояния. Пусть их номера $n+m_1,\ n+m_2, \ldots,\ n+m_s$. Тогда слова, которые допускает этот автомат могут быть двух типов:

а) длины $< n-1$ – то есть мы не дошли до цикла. Таких конечное число. Следовательно, множество $L' = \{t \mid 0^t \in L, t < n-1\}$ является регулярным языком.

б) длины $\geq n-1$ – то есть мы попали в цикл. Заметим, что если мы оказались в финальном состоянии (а это может быть только одно из состояний $n+m_1,\ n+m_2, \ldots,\ n+m_s$ – выйти из цикла уже нельзя) и при этом слово кончилось, то длина слова равна $n-1+kq+m_i$, где $1 \leq i \leq s$. Таким образом $L'' = \{t \mid 0^t \in L, t \geq n-1\} = \{t \mid t < n-1, \exists 1 \leq i \leq s : t \equiv n-1+m_i \mod k\}$. При этом n, k, $m_1,\ m_2, \ldots,\ m_s$ естественно известны. Автомат распознающий язык L'' строится аналогично задаче 2b.

Осталость только сказать, что, поскольку регулярные языки замкнуты относительно объединения, а языки L' и L'' – регулярные, то и $L' \cup L'' = \{t \mid 0^t \in L\}$ является регулярным языком.

Утверждение доказано.