Домашняя работа № 1

Автор: Минеева Екатерина

Задача 1

Однолетночная машина Тьюринга:

Пусть машина Тьюринга начинает работу в состоянии q_{start} и каретка указывает на первый символ входного слова. В состоянии q_{accept} машина завершает работу и принимает слово, в состоянии q_{reject} отвергает слово и завершеает работу.

Если первый символ слова проблельный, то все слово пусто и это палиндром. Если первый символ 0 или 1, то запомниаем его и стираем:

$\delta(q_{start},\ \sqcup) = (q_{accept},\ \sqcup,\ R)$
$\delta(q_{start},\ 0) = (q_0,\ \sqcup,\ R)$
$\delta(q_{start},\ 1) = (q_1,\ \sqcup,\ R)$

После этого мы идем до конца слова до упора (пока не наткнемся на пробел справа), чтобы проверить совпадает ли последний символ с первым:

$\delta(q,\ s) = (q,\ s,\ R)$, если $q \in \{q_0, q_1\},\ s \in \{0, 1\}$
$\delta(q_0,\ \sqcup) = (q_{check0},\ \sqcup,\ L)$
$\delta(q_1,\ \sqcup) = (q_{check1},\ \sqcup,\ L)$

В данный момент картека смотрит на последний символ слова. Если он оказался пустым, то все слово состояло из единственного первого символа, который был стерт, значит слово было палиндромом. Если последний символ 0 или 1 и при этом первый символ слова тоже был таким же, то пока противоречий нет, стираем последний символ тоже. Если же первый и последний символ не совпали, то слово палиндромом быть не может.

$\delta(q_{check\ 0},\ 0) = (q_{comeback},\ \sqcup,\ L)$
$\delta(q_{check\ 1},\ 1) = (q_{comeback},\ \sqcup,\ L)$
$\delta(q_{check\ 0},\ 1) = (q_{reject},\ \sqcup,\ L)$
$\delta(q_{check\ 1},\ 0) = (q_{reject},\ \sqcup,\ L)$
$\delta(q_{check\ 0},\ \sqcup) = (q_{accept},\ \sqcup,\ L)$
$\delta(q_{check\ 1},\ \sqcup) = (q_{accept},\ \sqcup,\ L)$

Возвращаемся до начала слова и переходим в начальное состояние. Если машина дошла до этого шага, то длина слова на ленте уменьшилась на 2 символа и при этом если исходное слово было палиндромом, то и новое слово – палиндром и наоборот.

$\delta(q_{comeback},\ s) = (q_{comeback},\ s,\ L),\ s \in 0, 1$
$\delta(q_{comeback},\ \sqcup) = (q_{start},\ \sqcup,\ R)$

Оценим время работы такой машины. Заметим, что от состояния q_{start} до попадания в q_{start} еще раз совершается $\underline{\mathrm{O}}(n)$ действий, где n – длина входного слова. Действительно, начиная с q_{start} до тех пор, пока машина не дойдет до последнего символа слова (т.е до состояний q_{check}) каретка перемещается только вправо, а после этого только влево, пока не вернется обратно в начало слова. Поскольку после каждой итерации цикла длина слова уменьшается на 2, всего итераций будет $\underline{\mathrm{O}}(n)$. Таким образом, сложность работы такой машины – $\underline{\mathrm{O}}(n^2)$.

Двухлетночная машина Тьюринга:

Пусть аргументы функции переходов δ – это тройка (q, s_1, s_2), где q – текущее состояние, $s_1,\ s_2$ – симоволы, над которыми находится каретка машины на первой и второй лентах соответственно. Значение функции – пятерка $(q',\ s_1',\ s_2',\ m_1,\ m_2)$, где q' – состояние, в которое переходит машина, $s_1',\ s_2'$ – символы, которые машина печатает на первой и второй лентах соответственно и $m_1,\ m_2$ – перемещения каретки на первой и второй ленте. Предполагается, что перед началом работы машины входное слово написано на первой ленте, вторая – пуста.

Сначала проходимся по слову до конца и копируем его на другую ленту:

$\delta(q_{start},\ s,\ \sqcup) = (q_{start},\ s,\ s,\ R,\ R),\ s \in \{0, 1\}$
$\delta(q_{start},\ \sqcup,\ \sqcup) = (q_{comeback},\ \sqcup,\ \sqcup,\ L,\ L)$

После этого на первой ленте возвращаемся к началу слова, а на второй оставляем каретку над последним символом слова.

$\delta(q_{comeback},\ s_1,\ s_2) = (q_{comeback},\ s_1,\ s_2,\ L,\ 0)\ ,\ s_1 \in \{0, 1\},\ s_2 \in \{0, 1, \sqcup\}$
$\delta(q_{comeback},\ \sqcup,\ s_2) = (q_{compare},\ \sqcup,\ s2,\ R,\ 0)\ ,\ s_2 \in \{0, 1, \sqcup\}$

Далее сравниваем первый символ с последним, второй с предпоследним и т.д., проверяя тем самым условие, что $w^R = w$.

$$\delta(q_{compare},\ s_1,\ s_2) = \begin{cases} (q_{reject},\ s1,\ s2,\ R,\ L) & s_1 \neq s_2 \\ (q_{accept},\ s_1,\ s_2,\ R,\ L) & s_1 = s_2 = \sqcup \\ (q_{compare},\ s_1,\ s_2,\ R,\ L) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что не все переходы в данной машине определены, однако, при корректном входе необходимости в них не возникнет. Тем не менее, можно считать, что любой не определенный выше переход приводит к q_{reject}.

Оценим время работы: на копирование слова на вторую ленту происходит за один проход то есть за $\underline{O}(n)$, возврат к началу слова – еще один проход и тоже $\underline{O}(n)$, сравнение двух слов также происходит за $\underline{O}(n)$. Итого сложность $\underline{O}(n)$.