Домашняя работа № 1

Автор: Минеева Екатерина

<u>Задача 1.4</u>

$$1.\quad \sqrt{n}\,(n \bmod 11) = \bar{o}\left(\frac{n}{\log n}+2\right)$$

▲

Заметим, что $\forall n\;\; n \bmod 11 < 11 \Rightarrow \forall n\;\; \sqrt{n}\,(n \bmod 11) < 11\sqrt{n}$. При этом с одной стороны, $\forall n\;\; \dfrac{\sqrt{n}\,(n \bmod 11)}{\frac{n}{\log n}+2} \geq 0$.

С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\,(n \bmod 11)}{\frac{n}{\log n}+2} \leq \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{11\log n}{\sqrt{n}} = (\text{Лопиталь}) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{11}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{22}{\sqrt{n}} = 0.$

По принципу двух милиционеров получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n}\,(n \bmod 11)}{\frac{n}{\log n}+2} = 0 \;\Rightarrow\; \sqrt{n}\,(n \bmod 11) = \bar{o}\left(\dfrac{n}{\log n}+2\right)$

■

$$2.\quad (\log n)^{2.5} = \bar{o}\left(\frac{n}{\log n}+2\right)$$

▲

$$0 \leq \lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^{2.5}}{\frac{n}{\log n}+2} \leq \lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^{2.5}}{\frac{n}{\log n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(\log n)^{3.5}}{n} = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n^{2/7}}\right)^{7/2} = (\text{Лопиталь}) = \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2/7\cdot n\cdot n^{-5/7}}\right)^{7/2} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2/7\cdot n^{2/7}}\right)^{7/2} = 0 \;\;\Rightarrow\;\; (\log n)^{2.5} = \bar{o}\left(\frac{n}{\log n}+2\right)$$

■

$$3.\quad (\log n)^{2.5} \quad \text{и} \quad \sqrt{n}\,(n \bmod 11) \quad \text{не сравнимы}$$

▲

Рассмотрим последовательности $x_n = 11n\;\; (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty)$, $\;y_n = 11n+10\;\; (\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty)$.

С одной стороны, $\forall n\;\; \sqrt{x_n}\,(x_n \bmod 11) = 0 \;\;\Rightarrow\;\; \forall n\;\; (\log x_n)^{2.5} > \sqrt{x_n}\,(x_n \bmod 11) \quad (*)$

С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\log y_n)^{2.5}}{\sqrt{y_n}\,(y_n \bmod 11)} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\log(11n+10))^{2.5}}{10\sqrt{11n+10}} = 0$ (Аналогично (1) по Лопиталю)

То есть $\exists N\;\forall n > N\;\; (\log y_n)^{2.5} < \sqrt{y_n}\,(y_n \bmod 11)$. Из этого и (*) $\Rightarrow$ $(\log n)^{2.5}$ и $\sqrt{n}\,(n \bmod 11)$ не сравнимы.

■