Домашняя работа № 5

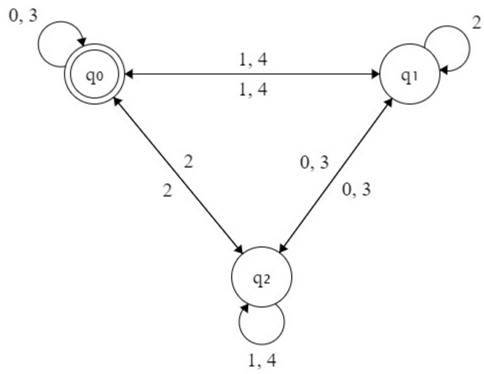
Автор: Минеева Екатерина

<u>Задача 2 (b)</u>

Пусть $\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ – запись числа в пятеричной системе счисления $s_i \in \{0, 1, \dots 4\}, i = 0, 1 \dots, n$. Заметим, что на каждом шаге, при приписывании к текщему числу $\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ в конец цифры $s \in \{0, 1, \dots 4\}$, остаток при делении на 3 числа $\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_n s}$ однозначно определяется остатком при делении на 3 числа $\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_n}$ и цифрой s. Действительно: Если $\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_n} = 3p + t$, то $\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_n s} = 5(3p + t) + s$, то есть $\overline{s_0 s_1 s_2 \dots s_n s} \equiv 5t + s \mod 3$.

Используя эти соображения, сделаем в автомате 3 состояния q_0, q_1, q_2, отвечающий соответственно остаткам 0, 1 и 2 при делении на 3. И начальным, и финальным состоянием буде, конечно, q_0. Ниже приведена таблица переходов из состояний по символам алфавита и сам автомат:

$q \diagdown s$	0	1	2	3	4
q_0	0	1	2	0	1
q_1	2	0	1	2	0
q_2	1	2	0	1	2



Докажем, что данный автомат минимален.

▲ Допустим, существует автомат с меньшим числом состояний. Если стостояние только одно, то в случае, если оно финальное, то автомат допускает все числа; если же оно финальным не является, то автомат не допускает ни одно число. Оба варианта не соответствуют языку из условия, поэтому состояния хотя бы 2.

Начальное состояние q_0 будет одновременно и финальным, поскольку пустая строка задает 0, а $3 \mid 0$. Другое (не начальное) состояние q_1 не может быть финальным: аналогично, иначе бы автомат допускал все числа. Поскольку 0 и 3 делятся на 3, а 1, 2, 4 – не делятся, то из q_0 по символам 1, 2, 4 осуществляется переход в q_1, по символам 0 и 3 – остаемся в q_0. Таким образом все переходы из q_0 определены однозначно.

Рассмотрим теперь числа $11_5 = 6_{10}$, $14_5 = 9_{10}$, $22_5 = 12_{10}$. Все они делятся на 3, поэтому из стостояния q_1 по символам 1, 2 и 4 осуществляется переход в q_0. Но при этом тогда автомат допускает $12_5 = 7_{10}$, но 7 не делится на 3 – противоречие. Следовательно, построенный атомат минимален.

■