Домашняя работа № 1, часть № 2

Автор: Минеева Екатерина

Задача 8

Данная задача – назовем ее $SubSetIntersection$ – является NP полной. Докажем это:

▲ 1. $SubSetIntersection \in$ NP. Действительно, существует полиномиальный от размера входа алгоритм верификации: по сертификату (собственно множеству S) он будет искать пересечение с каждым S_i – можно сделать это за $\underline{O}(n)$ – и сравнивать мощность пересечения с l_i и h_i. Общая сложность, таким образом, $\underline{O}(nk)$ – полином.

2. Докажем, что любая задача из класса NP сводится к $SubSetIntersection$ за полиномиальное время. Достаточно свести одну из NP-полных задач к нашей задаче: например, задачу о вершинном покрытии.

Дано: Граф (V, E), число t.
Вопрос: Существует ли такое $W \subset V$ что $\forall (u, v) \in E : (u \in W) \vee (v \in W)$ и при этом $|W| = t$?

Пусть $|E| = m$. $E = \{(u_1, v_1), (u_2, v_2), \ldots, (u_m, v_m)\}$. Построим сведение к $SubSetIntersection$:

$S = W, \ \ |S| = n$
$S_{m+1} = S, \ l_{m+1} = h_{m+1} = t$
$S_i = \{u_i, v_i\}, \ l_i = 1, \ h_i = 2, \ i = 1 \ldots m$

Докажем корректность сведения:

а) Пусть $\exists T$, удовлетворяющее условиям задачи $SubSetIntersection$. Тогда возьмем в исходном графе в качестве $W = T$. Это будет действительно вершинное покрытие: $\forall 1 \le i \le m : |S_i \cap T| \ge 1 \ \Leftrightarrow \forall (u, v) \in E : (u \in W) \vee (v \in W)$. А в силу того, что $t \le |S \cap T| \le t$ получаем, что $|W| = t$.
б) Пусть существует вершинное покрытие W. Возьмем $T = W$ и абсолютно аналогично предыдущему пункту получим, что такое T удовлетворяет условиям $SubSetIntersection$

Такое сведение действительно полиномиально, так как $n = |V|, \ k = \underline{O}(|E|), \ \forall 1 \le i \le (m+1) : |S_i|, \ l_i, \ h_i = \underline{O}(n)$.

Таким образом, 1) + 2) $\Rightarrow$ $SubSetIntersection$ является NP-полной задачей.

■