Домашняя работа № 4

Автор: Минеева Екатерина

Задача B2. Электросхема - 2

Сначала "концентрируем"отмеченные вершины в одну: все потенциальные перемычки проведенные к какой-либо из отмеченных вершин из неотмеченной, считаются проведенными в новую вершину, отвечающую всем выделенным. Если же какая-то из потенциальных перемычек соединяет две отмеченные, то мы про нее "забываем", поскольку ее проводить нам не надо.

Таким образом, первый шаг свел задачу к построению минимального остовного дерева в новом графе. Для поиска которого используется алгоритм Крускала, реализованный при помощи DSU – системы непересекающихся множеств.

Оценка сложности алгоритма:

Концентрация отмеченных вершин в одну занимает $\underline{O}(nm)$ времени. Поскольку ребер в получившемся графе тоже $\underline{O}(nm)$, алгоритм Крускала, реализованный при помощи DSU работает за $\underline{O}(nm \log mn)$, т.к 1) он состоит из сортировки – как раз-таки $\underline{O}(nm \log(nm))$, и 2) прохода по отсортированному массиву, где на каждом шаге выполняется запрос are_joined к DSU и в некоторых случаях $join$. Вообще говоря, это занимает $\underline{O}(nm \cdot \alpha(nm))$ времени (где α – обратная функция Аккермана) но, поскольку сортировка все равно необходима, докажем, что серия из nm таких запросов занимает $\underline{O}(nm \log(nm))$ времени. Этого будет достаточно, чтобы получить нужную асимптотику.

▲ Ранг определяется индуктивно: у корня множества из одного элемента ранг равен 0. При подвешивании к дереву с большим ранго дерева с меньшим рангом, ранг не меняется. При подвешивании к одному дереву дерева с таким же рангом, то у того корня, который стал рангом нового дерева, ранг увеличивается на 1, у другого – не меняется.

Заметим теперь, что глубина дерева с соответствующим корнем не превосходит его ранга (с учетом переподвешиваний может быть и меньше). Пусть максимальный ранг вершины после нескольких запросов – k. Таким образом, мы k раз объединяли множества одинакового размера. Значит изначально (начинаем с одноэлементных множеств) было не меньше $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^k \approx 2^k$. Таким образом, логарифмируя получившееся неравенство, мы получаем, что максимальный ранг вершины в серии из mn запросов к структуре не превосходит $\log(mn)$, поэтому стоимость каждого из запросов не превосходит $\underline{O}(\log(nm))$, а общая сложность получается $\underline{O}(nm \log(nm))$.

■