Домашняя работа № 1

Автор: Минеева Екатерина

Задача 2.7

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

▲ $T(n) = \Omega(n^2)$, т. к. $T(n) = T(n/2+2) + T(n/2-2) + n^2 \geq n^2$.

Пусть при $n < 8$ рекурсия не вызывается, а выполняется $\leq d$ операций.
Возьмем $M = \max(d, 8)$. И докажем, что $\forall n \;\; T(n) \leq M \cdot n^2$ (то есть , что $T(n) = \bar{O}(n)$):

База
Докажем базу для всех $n < 8$.
Т.к при $n < 8$ выполняется $\leq d$ операций и $M \geq d$, $\forall\, n < 8 : \; T(n) \leq M \cdot n^2$

Шаг
Предположим, что $\forall n < k \, T(n) \leq M \cdot n^2$.
Если $k < 8$, то этот случай разобран в базе и делать ничего не нужно.
Если $k \geq 8$, то воспользовавшись предположением индукции, докажем, что $T(k) \leq M \cdot k^2$

$$T(k) = T(\frac{k}{2}+2) + T(\frac{k}{2}-2) + k^2 \leq M(\frac{k}{2}+2)^2 + M(\frac{k}{2}-2)^2 + k^2 =$$

$$= \frac{Mk^2}{4} + 2Mk + 4M + \frac{Mk^2}{4} - 2Mk + 4M + k^2 = \frac{Mk^2}{2} + 8M + k^2 \leq$$

$$(\text{Т.к. } M \geq 8) \quad \leq \frac{Mk^2}{2} + 8M + \frac{Mk^2}{8} \leq Mk^2 \quad \Leftarrow$$

$$\Leftarrow \quad \frac{k^2}{2} + 8 + \frac{k^2}{8} \leq k^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8 \leq \frac{3k^2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 8^2 \leq 3k^2$$ - верно, поскольку $k \geq 8$. Шаг доказан.

$$T(n) = \Omega(n^2) \text{ и } T(n) = \bar{O}(n) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^2)$$

■