# Домашняя работа № 1

## Автор: Минеева Екатерина

Задача 5

Пусть $n$ – количество вершин в графе $G$. Сначала проверим, что граф возможно раскрасить в $k$ цветов, для этого запустим $A(G, k)$. Если ответ нет – выводим нет, если ответ да, начинаем искать раскраску.

Заметим, что если вершины графа раскрашены в $k$ цветов, то вершины одного цвета – независимые множества и всего таких множеств – $k$. Если же сконцентрировать любое количество вершины одного цвета в одну вершину, то новый граф также можно покрасить в $k$ цветов.

Используя это соображение, будем последовательно искать раскраску, на i-ом шаге определяя, какие вершины будут окрашены в цвет $c_i$ .

1 шаг: Выбираем произвольую вершину $v$ и красим ее в цвет $c_1$. Каждую вершину $w$, не соединенную с $v$, пробуем покрасить в $c_1$: конденсируем $v$ и $w$ в одину вершину и проверяем при помощи алгоритма $A$, можно ли новый граф раскрасить в $k$ цветов. Если можно, то оставляем $v$ и $w$ сконцентрированными в одну и уже в новом графе выбираем следующую вершину. Если нельзя, то $w$ ни в какой цвет пока не красим и переходим к следующей вершине. Таким образом, по завершении 1 шага:

а) некоторое множество вершин, попарно не соединенных ребрами, будут сконденсированы в одну вершину $V_1$ и покрашены в $c_1$.

б) новый граф с вершиной $V_1$ вместо всех вершин цвета $c_1$ можно покрасить в $k$ цветов.

в) ни одну из вершин, кроме $V_1$, нового графа нельзя покрасить в $c_1$.

То есть граф, из которого будет удалена вершина $V_1$ можно будет покрасить в $k - 1$ цвет.

2 шаг: Имеем граф, в котором ни одна вершина не покрашена, и при этом его можно раскрасить в $k - 1$ цветов. Действуем аналогично шагу 1.

...

$k$ шаг: Имеем граф, который можно покрасить в 1 цвет. Красим все в оставшийся цвет.

Заметим, что всего шагов $k = \underline{O}(n)$ при этом на каждом шаге неокрашенных вершин тоже $\underline{O}(n)$, следовательно, на каждом шаге алгоритм $A$ вызывается $\underline{O}(n)$ раз. То есть всего запусков $A$ – $\underline{O}(n^2)$, что тоже полиномиально от размера входа. в силу полиномиальности $A$.