Домашняя работа № 1

Автор: Минеева Екатерина

Задача 4

Пусть n – количество вершин в графе G. Сначала найдем максимальное такое k, что в графе G есть клика размера k. Для этого можем, например, последовательно запускать $A(G, 1)$, $A(G, 2)$, $A(G, 3), \dots$ Поскольку в графе на n вершинах не может быть клики размера больше n, то потребуется $\underline{\mathrm{O}}(n)$ запусков A. Поскольку и сам алгоритм A работает за полиномиальное время, то всего на поиск размера максимальной клики уходить полиномиальное время.

Зная максимальный размер клики k будем ее искать. Возьмем произвольную вершину v и удалим ее из графа вместе со всеми, ведущими в нее ребрами. Проверим, есть ли в оставшемся графе клика размера k. Возможны 2 варианта:

1. Клики размера k в графе больше нет. Однако в изначальном графе была, следовательно, удаленная вершина v должна входить в клику. После этого будем искать клику размера $k-1$ в подграфе, индуцированном вершинами, соединенными с v в изначальном графе.

2. Клика размера k все еще есть. Тогда про вершину v можно забыть, ее в клику можно не включать, и искать дальше клику в графе без нее.

Таким образом, в итоге клика размера k будет найдена. Заметим, что на каждом шаге либо количество найденных веришн клики увеличивается на 1, либо количество вершин графа, в котором ищется клика, уменьшается на 1. Поэтому всего запусков алгоритма A будет $\underline{\mathrm{O}}(n+k) = \underline{\mathrm{O}}(n)$. Но и работа самого алгоритма A полиномиальна, поэтому в итоге сложность тоже будет полиномиальна от размера G.