Домашняя работа № 1

Автор: Минеева Екатерина

Задачи на асимптотику

Задача 1.4

$$1.\quad \sqrt{n}\ (n \bmod 11) = \bar{o}\left(\frac{n}{\log n} + 2\right)$$

▲

Заметим, что $\forall n\ \ n \bmod 11 < 11 \Rightarrow \forall n\ \ \sqrt{n}\,(n \bmod 11) < 11\sqrt{n}$. При этом с одной стороны, $\forall n\ \ \dfrac{\sqrt{n}\ (n \bmod 11)}{\frac{n}{\log n} + 2} \geq 0$.

С другой стороны, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ (n \bmod 11)}{\frac{n}{\log n} + 2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{11\log n}{\sqrt{n}} = (\text{Лопиталь}) = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{11}{n}}{\frac{1}{2\sqrt{n}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{22}{\sqrt{n}} = 0.$

По принципу двух милиционеров получаем, что $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}\ (n \bmod 11)}{\frac{n}{\log n} + 2} = 0 \ \Rightarrow\ \sqrt{n}\,(n \bmod 11) = \bar{o}\left(\frac{n}{\log n} + 2\right)$

■

$$2.\quad \frac{n}{\log n} + 2 = \underline{\mathrm{O}}\ (\sqrt{n}\ (n \bmod 11)\ )$$

▲

Поскольку $f(x) = \bar{o}(g(x)) \Rightarrow g(x) = \underline{\mathrm{O}}(f(x))$. Поэтому (2) является следствием (1).

■

$$3.\quad (\log n)^{2.5} = \bar{o}\ \left(\frac{n}{\log n} + 2\right)$$

▲

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{2.5}}{\frac{n}{\log n} + 2} \leq \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{2.5}}{\frac{n}{\log n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log n)^{3.5}}{n} = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\log n}{n^{2/7}}\right)^{7/2} = \ (\text{Лопиталь})\ = \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2/7 \cdot n \cdot n^{-5/7}}\right)^{7/2} =$$

$$= \left(\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2/7 \cdot n^{2/7}}\right)^{7/2} = 0 \quad\Rightarrow\quad (\log n)^{2.5} = \bar{o}\ \left(\frac{n}{\log n} + 2\right)$$

■

$$4.\quad \frac{n}{\log n} + 2 = \underline{\mathrm{O}}\ ((\log n)^{2.5})$$

▲

Поскольку $f(x) = \bar{o}(g(x)) \Rightarrow g(x) = \underline{\mathrm{O}}(f(x))$. Поэтому (4) является следствием (3).

■

$$5.\quad (\log n)^{2.5} \quad \text{и} \quad \sqrt{n}\,(n \bmod 11) \quad \text{не сравнимы}$$

▲

Рассмотрим последовательности $x_n = 11n \ \ (\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty)$, $\ y_n = 11n + 10 \ \ (\lim\limits_{n\to\infty} y_n = +\infty)$.

$$\text{С одной стороны,}\ \ \forall n \ \ \sqrt{x_n}\,(x_n \bmod 11) = 0 \ \ \Rightarrow \ \ \forall n \ \ (\log x_n)^{2.5} > \sqrt{x_n}\,(x_n \bmod 11) \qquad (*)$$

$$\text{С другой стороны,}\quad \lim_{n\to\infty} \frac{(\log y_n)^{2.5}}{\sqrt{y_n}\,(y_n \bmod 11)} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\log(11n+10))^{2.5}}{10\sqrt{11n+10}} = 0 \text{ (Аналогично (1) по Лопиталю)}$$

То есть $\exists N \ \forall n > N \ \ (\log y_n)^{2.5} < \sqrt{y_n}\,(y_n \bmod 11)$. Из этого и $(*) \Rightarrow$ $(\log n)^{2.5}$ и $\sqrt{n}\,(n \bmod 11)$ не сравнимы.

■

Задача 1.6

Сделаем сначала некоторые преобразования: $2^{3\log_7 n} = 7^{log_7 2\cdot 3\log_7 n} = n^{3\log_7 2}$. При этом $1 < 3\log_7 2 < 2$.

$$1.\quad 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(2^{n/3}\right) \qquad \text{и} \qquad 2^{n/3} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$$

▲

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3\log_7 n}}{2^{n/3}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^{n/3}} = \text{ (Лопиталь) } = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\frac{1}{3}\ln 2\cdot 2^{n/3}} = \text{ (Лопиталь) } = \lim_{n\to\infty} \frac{18}{\ln^2 2\cdot 2^{n/3}} = 0. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(2^{n/3}\right) \Rightarrow 2^{n/3} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$$

■

$$2.\quad 2^{n/3} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}(2^{n/3})$$

▲

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n/3}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{10n/21}}{n^{n/7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{10n/21}}{2^{\log_2 n\cdot n/7}} \le 2^{\lim_{n\to\infty} n/7(2-\log_2 n)} = 0 \text{ т.к } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{7}\,(2-\log_2 n) = -\infty$$

$$\Rightarrow 2^{n/3} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}(2^{n/3})$$

■

$$3.\quad 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$$

▲

Т.к. $f(x) = \bar{o}(g(x))$ и $g(x) = \bar{o}(h(x)) \Rightarrow f(x) = \bar{o}(h(x))$, $(1) + (2) \Rightarrow 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \Rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$

■

Задача 2.2

Не всегда верно, что $f(n+1) = O(f(n))$. Рассмотрим, например, функцию $f(n) = \dfrac{1}{n^n}$.

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{(n+1)^{n+1}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n^n}{n^{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \quad \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{f(n+1)}{f(n)} = 0 \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow\ \forall C\, \forall N\ \exists n > N\ \ f(n+1) < f(n)$. То есть утверждение $f(n+1) = O(f(n))$ в данном случае не верно.

Задачи на реккурентные соотношения

Задача 1.4

Применим основную теорему об оценках: поскольку $2n^3+n^4 = \Theta(n^{\log_2 4})$ (т.к. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^4+2n^3}{n^4} = 1$), $T(n) = \Theta(n^4 \lg n)$

Задача 2.7

$$T(n) = \Theta(n^2)$$

▲ Во-первых $T(n) = \Omega(n^2)$, т. к. $T(n) = T(n/2+2) + T(n/2-2) + n^2 \geq n^2$.

Пусть при $n < 8$ рекурсия не вызывается, а выполняется $\leq d$ операций.
Возьмем $M = \max(d, 8)$. И докажем, что $\forall n \;\; T(n) \leq M \cdot n^2$ (то есть , что $T(n) = \bar{O}(n)$):

База
Докажем базу для всех $n < 8$.
Т.к при $n < 8$ выполняется $\leq d$ операций и $M \geq d$, $\forall\ n < 8:\ T(n) \leq M \cdot n^2$

Шаг
Предположим, что $\forall n < k\, T(n) \leq M \cdot n^2$.
Если $k < 8$, то этот случай разобран в базе и делать ничего не нужно.
Если $k \geq 8$, то воспользовавшись предположением индукции, докажем, что $T(k) \leq M \cdot k^2$

$$T(k) = T(\frac{k}{2}+2) + T(\frac{k}{2}-2) + k^2 \leq M(\frac{k}{2}+2)^2 + M(\frac{k}{2}-2)^2 + k^2 =$$

$$= \frac{Mk^2}{4} + 2Mk + 4M + \frac{Mk^2}{4} - 2Mk + 4M + k^2 = \frac{Mk^2}{2} + 8M + k^2 \leq$$

$$(\text{Т.к. } M \geq 8) \quad \leq \frac{Mk^2}{2} + 8M + \frac{Mk^2}{8} \leq Mk^2 \quad \Leftarrow$$

$\Leftarrow \quad \dfrac{k^2}{2} + 8 + \dfrac{k^2}{8} \leq k^2 \quad \Leftrightarrow \quad 8 \leq \dfrac{3k^2}{8} \quad \Leftrightarrow \quad 8^2 \leq 3k^2$ - верно, поскольку $k \geq 8$. Шаг доказан.

$$T(n) = \Omega(n^2) \text{ и } T(n) = \bar{O}(n) \quad \Rightarrow \quad T(n) = \Theta(n^2)$$

■