Домашняя работа № 1

Автор: Минеева Екатерина

Задача 1.6

Сделаем сначала некоторые преобразования: $2^{3\log_7 n} = 7^{log_7 2\cdot 3\log_7 n} = n^{3\log_7 2}$. При этом $1 < 3\log_7 2 < 2$.

$$1.\quad 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(2^{n/3}\right) \qquad \text{и} \qquad 2^{n/3} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$$

▲

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{2^{3\log_7 n}}{2^{n/3}} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^{n/3}} = \ (\text{Лопиталь})\ = \lim_{n\to\infty} \frac{2n}{\frac{1}{3}\ln 2 \cdot 2^{n/3}} = \ (\text{Лопиталь})\ = \lim_{n\to\infty} \frac{18}{\ln^2 2 \cdot 2^{n/3}} = 0. \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(2^{n/3}\right) \Rightarrow 2^{n/3} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$$

■

$$2.\quad 2^{n/3} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}(2^{n/3})$$

▲

$$0 \le \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n/3}}{\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{10n/21}}{n^{n/7}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{10n/21}}{2^{\log_2 n\cdot n/7}} \le 2^{\lim_{n\to\infty} n/7(2-\log_2 n)} = 0 \text{ т.к } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{7}\,(2-\log_2 n) = -\infty$$

$$\Rightarrow 2^{n/3} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \ \Rightarrow \ \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}(2^{n/3})$$

■

$$3.\quad 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \qquad \text{и} \qquad \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$$

▲

Т.к. $f(x) = \bar{o}(g(x))$ и $g(x) = \bar{o}(h(x)) \ \Rightarrow \ f(x) = \bar{o}(h(x))$, $(1) + (2) \ \Rightarrow \ 2^{3\log_7 n} = \bar{o}\left(\left(\frac{n}{2}\right)^{n/7}\right) \Rightarrow \left(\frac{n}{2}\right)^{n/7} = \underline{\mathrm{O}}\ \left(2^{3\log_7 n}\right)$

■