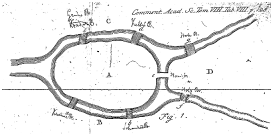
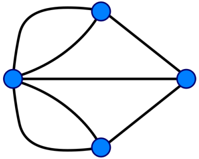




Algoritmica grafurilor
XIII. Drum critic, clică

Mihai Suciu

Facultatea de Matematică și Informatică (UBB)
Departamentul de Informatică

Mai, 30, 2018

Continut

1. Drum critic
   - Arce ca si activitati
   - Varfuri ca si activitati
2. Clica

Drum critic - graful activităților

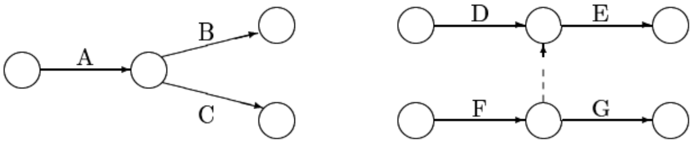
Graful activităților

un graf $G = (V, E, W)$ conex aciclic orientat cu următoarele proprietăți:

- arcele grafului reprezintă activități, ponderea arcelor reprezintă timpul necesar execuției unei activități;
- există un vârf de start, v_1, pentru care $N^{in}(v_1) = \emptyset$;
- există un vârf ce reprezintă finalul activităților, v_n, pentru care $N^{out}(v_n) = \emptyset$.

Drum critic - Introducere

Conexiuni între activități:



- activitatea A trebuie încheiată înainte ca activitățile B și C să înceapă;
- posibil să existe activități cu timp de execuție 0, folosite doar la forțarea ordinii execuției activităților.
- activitatea E poate începe doar după execuția activităților D și F, G poate începe după execuția activității F.

Drum critic

- Ne interesează timpul maxim necesar pentru a termina proiectul;
- acest timp maxim este drumul de lungime maximă în graful activităților, drum între vârfurile de start și fnalizare;
- pentru a rezolva această problemă putem folosi algoritmi de drum minim înlocuind problema de minim cu una de maxim;
- mai există o opțiune.

Drum critic - descompunere în nivele

- Vârfurile unui graf de activități în care activitățile sunt arcele pot fi distribuite pe nivele;
- vârful ce reprezintă activitatea de start este pe nivelul 1;
- dacă $(v_i, v_j) \in E$ atunci nivelul vârfului v_i este inferior nivelului lui v_j

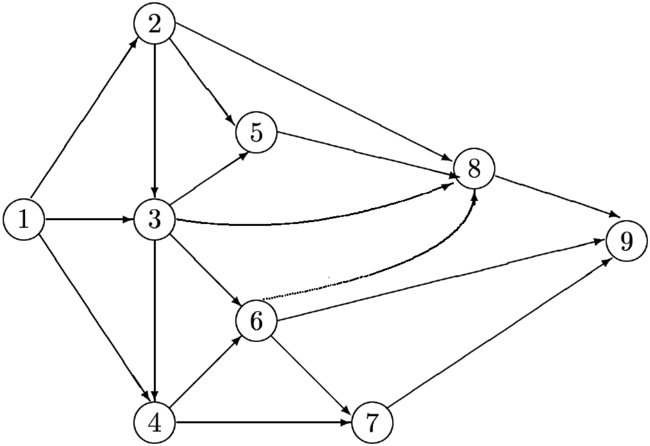
Algoritmul pentru descompunere în nivele este (l este un atribut ce indică nivelul vârfului):
DESCOMPUNERE_NIVELE(G)

for $v \in V$ **do**
    $v.l = 1$
for $1 \leq i \leq n$ **do**
    NEXT(i)

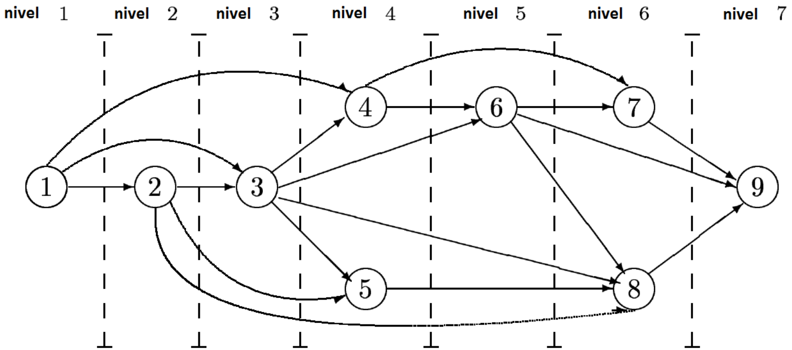
Drum critic - descompunere în nivele (II)

NEXT(i)
  for $1 \leq j \leq n$ **do**
    if $(a_{ij}) \neq 0 \wedge v_j.l \leq v_i.l$ **then**
      $v_j.l = v_i.l + 1$
      if $j < i$ **then**
        NEXT(j)

Drum critic - descompunere în nivele (exemplu)



Drum critic - descompunere în nivele (exemplu II)

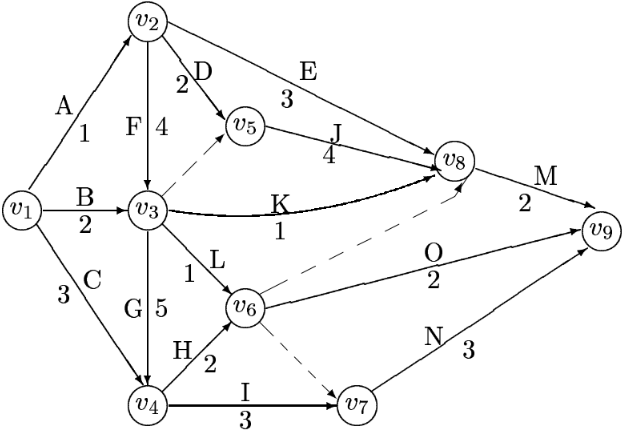


Drum critic - graful activităților

activitate	activitate precedenta	timp executie
A	–	1
B	–	2
C	–	3
D	A	2
E	A	3
F	A	4
G	B, F	5
H	C, G	2
I	C, G	3
J	B, F, D	4
K	B, F	1
L	B, F	1
M	E, H, J, K, L	2
N	H, I, L	3
O	H, L	2

Drum critic - graful activităților (II)

Graful corespunzator activitalor:



Drum critic - graful activităților (III)

- Fie vârfurile grafului de activități $v_1, ..., v_n$ distribuite pe nivele în această ordine;
- algoritmul CPM (Critical Path Method) da timpii t_i si t_i^* atașați fiecărui vârf v_i din graful de activități;
- vârfurile pot fi considerate ca evenimente în proiect;
- dacă 0 este momentul începerii proiectului atunci t_i reprezintă timpul cel mai devreme și t_i^* reprezintă timpul cel mai târziu când activitățile de la evenimentul v_i pot începe.

Drum critic - graful activităților(IV)

CPM(i)

$t_1 = 0$

for $2 \leq j \leq n$ **do**

$t_j = \max_{v_i \in N^{in}(v_j)}(t_i + d_{ij})$

$t_n^* = t_n$

for $n - 1 \geq i \geq 1$ **do**

$t_i^* = \min_{v_j \in N^{out}(v_i)}(t_j^* - d_{ij})$

Drum critic - graful activităților (V)

De exemplu putem avea timpii:

varf	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
t_i	0	1	5	10	5	12	13	12	16
t_i^*	0	1	5	10	10	13	13	14	16

Drum critic - graful activităților (VI)

Putem defini următoarele resurse de timp pe perioada proiectului:

- $R_t(v_i, v_j) = t_j^* - t_i - d_{ij} =$ timp disponibil, activitatea (v_i, v_j) poate să înceapă cel târziu după $R_t(v_i, v_j)$ timp fără a influența durata totala a proiectului;
- $R_f(v_i, v_j) = t_j - t_i - d_{ij} =$ timpul liber, activitatea (v_i, v_j) poate să înceapă cel târziu după $R_f(v_i, v_j)$ timp fără a influența următoarea activitate;
- $R_s(v_i, v_j) = \max\{t_j - t_i^* - d_{ij}, 0\} =$ timp sigur, activitatea (v_i, v_j) poate fi terminată cel târziu dupa R_s timp fără a influența durata totală a proiectului;
- vârfurile pentru care acești timpi sunt egali cu 0 sunt pe drumul critic, activitățile de pe acest drum trebuie terminate fără întârzieri.

Drum critic - graful activităților (VII)

activitate	timp executie	R_t	R_f	R_s
A	1	0	0	0
B	2	3	3	3
C	3	7	7	7
D	2	7	2	2
E	3	10	8	8
F	4	0	0	0
G	5	0	0	0
H	2	1	0	0
I	3	0	0	0
J	4	5	3	0
K	1	8	6	6
L	1	7	6	6
M	2	2	2	0
N	3	0	0	0
O	2	2	2	1

Drum critic - graful activităților (VIII)

Putem modifica algoritmul lui Floyd-Warshall pentru a determina dumul de lungime maximă între două vârfuri, pentru exemplul de mai sus aceste drumuri sunt:

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
v_1	0	1	5	10	5	12	13	12	16
v_2	$-\infty$	0	4	9	4	11	12	11	15
v_3	$-\infty$	$-\infty$	0	5	0	7	8	7	11
v_4	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	2	3	2	6
v_5	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	$-\infty$	4	6
v_6	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	0	0	3
v_7	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$-\infty$	3
v_8	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	2
v_9	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0

Drum critic - graful activităților (IX)

Momentele de timp t_i și t_i^*:

varf	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9
t_i	0	1	**5**	10	5	12	13	12	16
t_i^*	0	1	5	10	10	13	13	14	16

Drum critic - vârfuri ca și activități

Acest model a fost discutat la seminar.

Problema clicii

Definiție

O clică este un subgraf complet al unui graf dat.

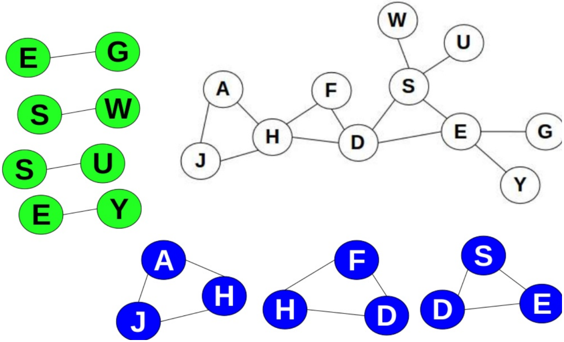
Problema presupune găsirea de mulțimi de vârfuri în graf care formează subgrafuri complete.
Problema este $NP-$completă.

Definiție

Clică maximă: un subgraf care nu poate fi extins.

Aplicații în grafuri ce reprezintă rețele sociale (găsirea de comunități), chimie, bioinformatică, etc.

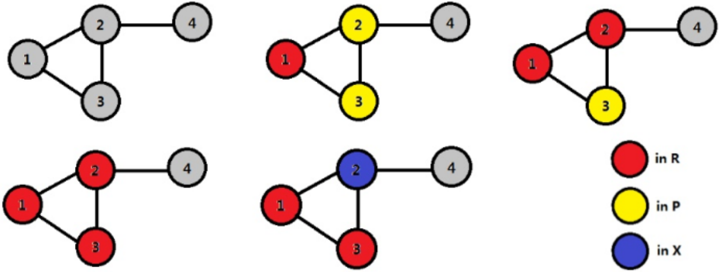
Problema clicii - exemplu



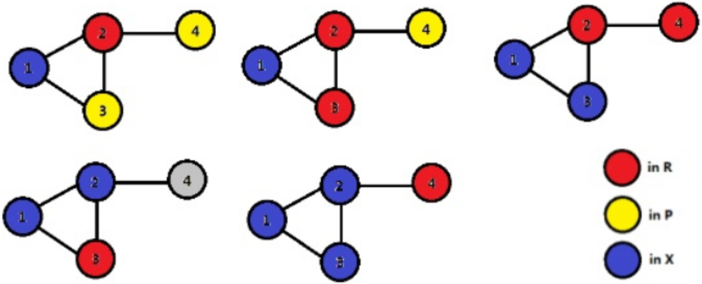
Algoritmul lui Bron-Kerbosch pentru problema clicii

$R = \{\}$
$P = \{V\}$
$X = \{\}$
BronKerbosch(P,R,X)
if $P \cup X = \emptyset$
    R este o clică maximă
for $v \in P$
    BronKerbosch$(P \cap N(v), R \cup \{v\}, X \cap N(v))$
    $P = P \setminus \{v\}$
    $X = X \cup \{v\}$

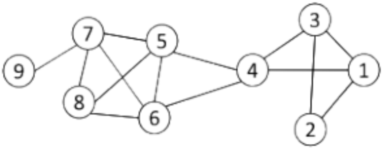
Exemplu Bron-Kerbosch



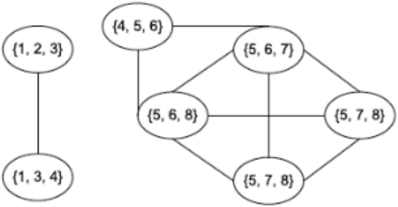
Exemplu Bron-Kerbosch (II)



Exemplu - rețele sociale



Cliques of size 3:
{1, 2, 3}, {1, 3, 4}, {4, 5, 6}, {5, 6, 7}, {5, 6, 8}, {5, 7, 8}, {6, 7, 8}



Communities:
{1, 2, 3, 4}
{4, 5, 6, 7, 8}