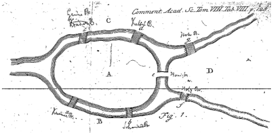
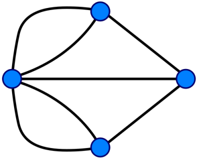




Algoritmica grafurilor
XI. Cuplaje in grafuri. Masuri de calitate. Numere Ramsey

Mihai Suciu

Facultatea de Matematică și Informatică (UBB)
Departamentul de Informatică

Mai, 16, 2018

Continut

Cuplaje în grafuri - recapitulare C10

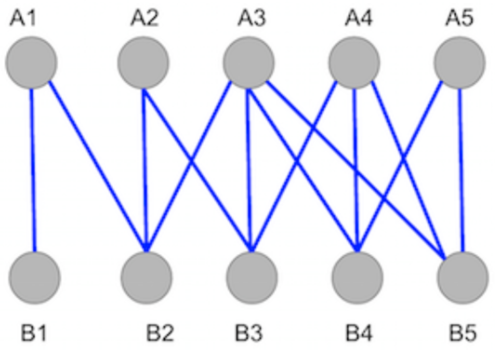
- Un cuplaj în G este o mulțime de muchii M în care nici o pereche de muchii nu are un vârf comun. vârfurile adiacente la muchiile din M se numesc vârfuri *saturate de M* (sau *M-saturate*). Celelalte vârfuri se numesc *M-nesaturate*.

Tipuri de cuplaje:

- un cuplaj perfect al lui G este un cuplaj care saturează toate vârfurile lui G,
- un cuplaj maxim al lui G este un cuplaj care are cel mai mare număr posibil de muchii,
- un cuplaj maximal al lui G este un cuplaj care nu poate fi lărgit prin adăugarea unei muchii.

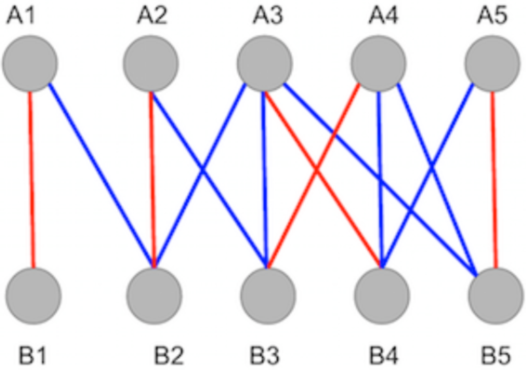
Cuplaje în grafuri

Un graf bipartit:



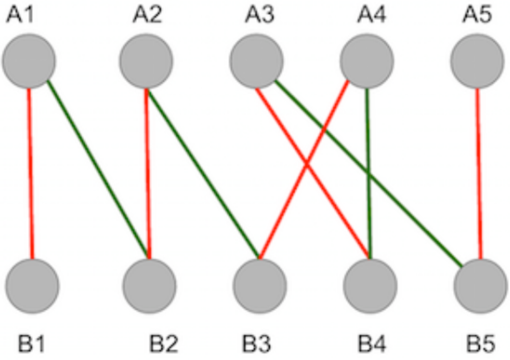
Cuplaje în grafuri

Un cuplaj aleator în G



Cuplaje în grafuri - lanț M-alternant

Un *lanț M-alternant* (*cale M-alternantă*) este un lanț în G în care toate muchiile alternează între muchii din M și muchii ce nu aparțin cuplajului M.



Cuplaje în grafuri - M-lanț de creștere

Un *M-lanț de creștere* (*M-cale de creștere*) este un lanț M-alternant care are ambele capete M-nesaturate.

Teorema lui Berge

Un cuplaj M al unui graf $G = (V, E)$ este maxim **dacă și numai dacă** G nu conține M-lanțuri de creștere.

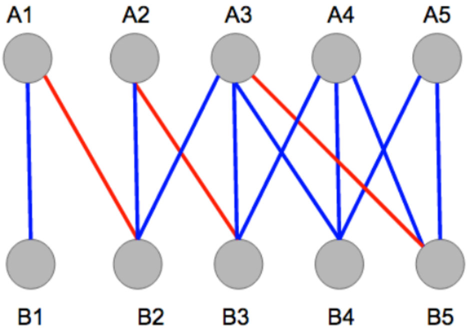
Demonstrație

Vezi cursul 10.

Cuplaje în grafuri

Este cuplajul M de mai jos maxim?

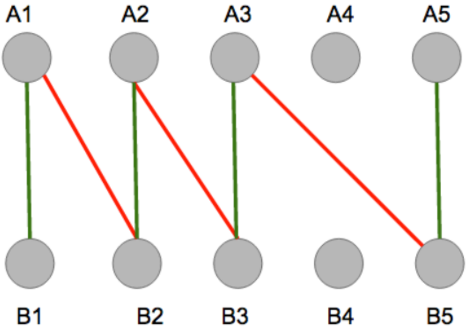
- $M = \{(A1, B2), (A2, B3), (A3, B5)\}$



Cuplaje în grafuri

Nu, deoarece conține un M-lanț de creștere.

- M-lanț de creștere $(B1, A1, B2, A2, B3, A3, B5, A5)$



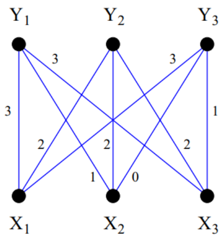
Etichetarea grafurilor

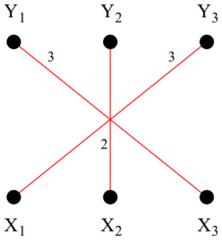
Fie un graf bipartit ponderat unde:

- muchia $(x, y) \in E$ are asociată ponderea $w(x, y)$
- ponderea cuplajului M este suma ponderilor muchiilor din cuplajul M

$$w(M) = \sum_{(x,y)\in M} w(x, y)$$

Problema: pentru graful bipartit G găsiți un cuplaj de pondere maximă.





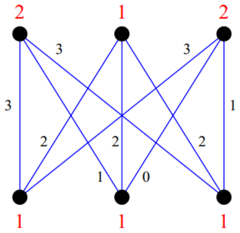
Etichetarea grafurilor

- o etichetare a vârfurilor este o funcție $l : V \to \mathbb{R}$,
- o etichetare fezabilă respectă:

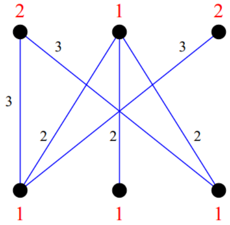
$$l(x) + l(y) \geq w(x, y), \forall x \in X, y \in Y,$$

- un graf egal (ținând cont de l) este un graf $G = (V, E_l)$ unde:

$$E_l = \{(x, y) | l(x) + l(y) = w(x, y)\}.$$



(a) etichetare fezabila l



(b) Graf egal G_l

Etichetarea grafurilor (II)

Teorema Kuhn-Munkres

Dacă l este fezabilă și M este un cuplaj perfect în E_l atunci M este un cuplaj de pondere maximă.

- Teorema KM transformă problema găsirii unui cuplaj de pondere maximă (problemă de optimizare) într-o problemă combinatorială ce presupune găsirea unui cuplaj perfect.
- pentru un cuplaj M și o etichetare fezabilă l avem:

$$w(m) \leq \sum_{v \in V} l(v)$$

(seamană cu teorema fluxului maxim și a tăieturii minime)

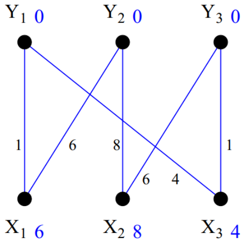
Un posibil algoritm

cuplaj(G)

```
start cu o etichetare fezabilă l și un cuplaj M în E_l
while cuplajul M nu e perfect do
    caută un M-lanț de creștere pentru M în E_l (crește dimensiunea lui M)
    if nu există un M-lanț de creștere then
        îmbunătățește l la l' astfel încât E_l ⊂ E_l'
```

- în fiecare pas se crește dimensiunea lui M sau E_l
- conform teoremei Kuhn-Munkres, M va fi un cuplaj de pondere maximă

Găsirea unei etichetări fezabile inițiale



- pentru a găsi inițial o etichetare fezabilă se poate folosi:

$$\forall y \in Y, l(y) = 0, \;\; \forall x \in X, l(x) = \max_{y \in Y}\{w(x, y)\}$$

- astfel este evident

$$\forall x \in X, y \in Y, w(x, y) \leq l(x) + l(y)$$

Îmbunătățirea etichetării

- fie l o etichetare fezabilă
- se definește un vecin al lui $u \in V$ un set $S \subseteq V$ astfel:

$$N_l(u) = \{v | (u, v) \in E_l\}, \quad N_l(S) = \cup_{u \in S} N_l(u)$$

Lema

Fie $S \subseteq X$ și $T = N_l(S) \neq Y$. Fie

$$\alpha_l = \min_{x \in S, y \notin T} \{l(x) + l(y) - w(x, y)\} \tag{1}$$

$$l'(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_l & \text{dacă } v \in S, \\ l(v) + \alpha_l & \text{dacă } v \in T, \\ l(v) & \text{altfel.} \end{cases} \tag{2}$$

Atunci l' este o etchetare fezabilă și

1. dacă $(x, y) \in E_l$ pentru $x \in S, y \in T$ atunci $(x, y) \in E_{l'}$
2. dacă $(x, y) \in E_l$ pentru $x \notin S, y \notin T$ atunci $(x, y) \in E_{l'}$
3. există o muchie $(x, y) \in E_{l'}$ pentru $x \in S, y \notin T$

Metoda maghiară - exemplu matriceal

Vreau să organizez o petrecere, vreau să angajez un mizician, bucătar și serviciu de curățenie. Am la dispoziție 3 companii, fiecare poate furniza un singur serviciu. Ce companie trebuie să furnizeze fiecare serviciu astfel încât costul total să fie minim?

Companie	Cost muzician	Cost bucatar	Cost curățenie
A	108	125	150
B	150	135	175
C	122	148	250

Metoda maghiară - exemplu matriceal (II)

Companie	Cost muzician	Cost bucatar	Cost curățenie
A	108	125	150
B	150	135	175
C	122	148	250

Fie matricea asociată tabelului:

108	125	150
150	135	175
122	148	250

Metoda maghiară - exemplu matriceal (III)

Fie matricea asociată tabelului:

108	125	150
150	135	175
122	148	250

Pas 1. Se scade valoarea minimă de pe fiecare rând din fiecare element de pe rând:

0	17	42
15	0	40
0	26	128

Metoda maghiară - exemplu matriceal (IV)

Pas 1. Se scade valoarea minimă de pe fiecare rând din fiecare element de pe rând:

0	17	42
15	0	40
0	26	128

Pas 2. Se scade valoarea minimă de pe fiecare coloană din fiecare element de pe coloană:

0	17	2
15	0	0
0	26	88

Metoda maghiară - exemplu matriceal (V)

Pas 3. Se desenează linii pe rândurile și coloanele din matrice ce conțin valoarea 0 astfel încât să se traseze cât mai puține linii:

0	17	2
15	0	0
0	26	88

Au fost trasate doar două linii ($2 < n = 3$), algoritmul continuă.

Metoda maghiară - exemplu matriceal (VI)

Se caută cea mai mică valoare care nu este acoperită de nicio linie. Se scade această valoare de pe fiecare rând pe care nu s-au trasat linii și apoi se adaugă la fiecare coloană pe care am trasat linii. Apoi, se revine la Pasul 3.

-2	15	0
15	0	0
-2	24	86

(a) Scade val. minimă

0	15	0
17	0	0
0	24	86

(b) Adaugă pe col.

Metoda maghiară - exemplu matriceal (VII)

Se revine la Pasul 3:

0	15	0
17	0	0
0	24	86

Am trasat 3 linii, $n = 3$, algoritmul a terminat. Se alege o alocare prin alegerea unui set de valori 0 astfel încât fieacere rând sau coloană sa aibă o singură valoare selectată.

0	15	0
17	0	0
0	24	86

Ex. compania C trebuie sa furnizeze muzicianul, compania A trebuie să furnizeze serviciul de curățenie → compania B ne dă bucătarul.

Metoda maghiară - exemplu matriceal (VIII)

Soluția finală:

108	125	**150**
150	**135**	175
122	148	250

Putem verifica soluția și exhaustiv:

- $108 + 135 + 250 = 493$
- $108 + 148 + 175 = 431$
- $150 + 125 + 250 = 525$
- $150 + 148 + 150 = 448$
- $122 + 125 + 175 = 422$
- $122 + 135 + 150 = 407$

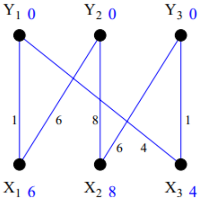
Metoda maghiară

metoda_maghiară(G)

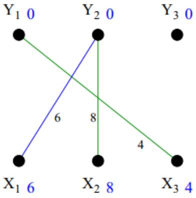
1: generează o etichetare iniținală l și un cuplaj M în E_l
2: **if** M nu este un cuplaj perfect **then**
3:     alege un vârf liber $x \in X$
4:     $S = \{u\}, T = \varnothing$
5:     **if** $N_l(S) = T$ **then**
6:         actualizează etichetele conform (1) și (2) (forțând $N_L(S) \neq T$)
7:     **if** $N_l(S) \neq T$ **then**
8:         alege $y \in N_l(S) - T$
9:         **if** y e liber **then**
10:             $u - y$ este un lanț-M de creștere.
11:             îmbunătățește M și sari la linia 2
12:         **else**
13:             $T = T \cup \{y\}$ și sari la linia 5

Complexitatea algoritmului $O(V^4)$, ulterior redusă la $O(V^3)$.

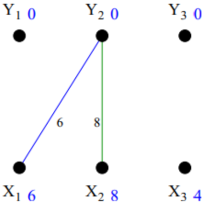
Metoda maghiară - exemplu



(a) graful inițial



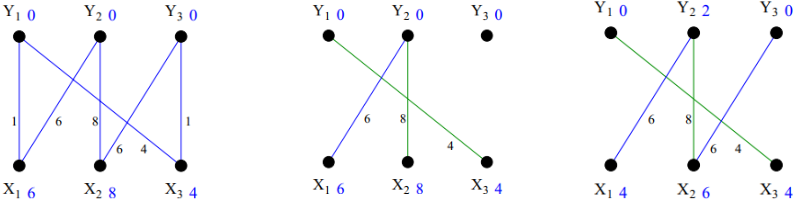
(b) E_l și cuplaj



(c) lanț alternant

- graful inițial, etichetarea vârfurilor și graful egal asociat
- cuplajul inițial $M = \{(x_3, y_1), (x_2, y_2)\}$, $S = \{x_1\}$, $T = \varnothing$
- deoarece $N_l(S) \neq T$ mergi la linia 7: alege $y_2 \in N_l(S) - T$
- y_2 este în cuplaj, crește lanțul alternant prin adăugarea lui (y_2, x_2), $S = \{x_1, x_2\}$, $T = \{y_2\}$
- $N_l(S) = T$, sari la linia 5

Metoda maghiară - exemplu (II)



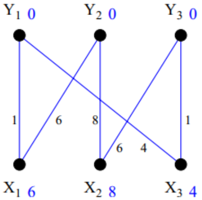
(a) graful inițial (b) vechiul graf E_l și M (c) noul graf E_l și M

- $S = \{x_1, x_2\}$, $T = \{y_2\}$ și $N_l(S) = T$
- se determină α_l

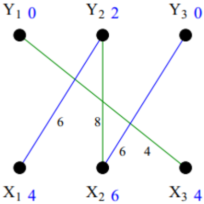
$$\alpha_l = \min_{x \in S, y \notin T} \begin{cases} 6+0-1 & (x_1, y_1) \\ 6+0-0 & (x_1, y_3) \\ 8+0-0 & (x_2, y_1) \\ 8+0-6 & (x_2, y_3) \end{cases} = 2$$

Metoda maghiară - exemplu (III)

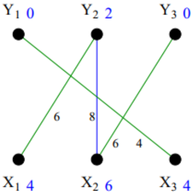
- redu etichetele lui S cu 2, mărește etichetele lui T cu 2
- acum $N_l(S) = \{y_2, y_3\} \neq \{y_2\} = T$, $S = \{x_1, x_2\}$



(a) graful inițial



(b) noul graf E_l și M



(c) cuplaj nou

- alege $y_3 \in N_l(S) - T$ și adaugă în T
- y_3 nu e în cuplaj, am găsit un lanț de creștere (x_1, y_2, x_2, y_3)
- cuplajul $\{(x_1, y_2), (x_2, y_3), (x_3, y_1)\}$ are costul $6 + 6 + 4 = 16$ care este egal cu suma etichetelor grafului final

Numere Ramsey