Laborator 2: Probleme

1. Determinaţi soluţiile generale pentru ecuaţiile diferenţiale şi reprezentaţi câteva soluţii:

   (a) $y' = 2x\left(1+y^2\right)$

   (b) $\left(x^2-1\right)y' + 2xy^2 = 0$

   (c) $2x^2y' = x^2 + y^2$

   (d) $y' = -\dfrac{x}{y}$

   (e) $y' = -\dfrac{x}{y^3}$

   (f) $y' = -\dfrac{x+y}{y}$

   (g) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \dfrac{1}{\cos x}$

   (h) $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3$

   (i) $y'' + y = \sin x + \cos x$

   (j) $y'' - y = e^{2x}$

   (k) $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

   (l) $y'' - y' = \dfrac{1}{1+e^x}$

2. Rezolvaţi următoarele probleme Cauchy şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare:

   (a) $y' = 1 + y^2$, $y(0) = 1$;

   (b) $y' = \dfrac{1}{1-x^2}y + 1 + x$, $y(0) = 0$;

   (c) $y' - 2y = -x^2$, $y(0) = \frac{1}{4}$

   (d) $y'' - 5y' + 4y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 8$;

   (e) $y'' - 4y' + 5y = 2x^2e^x$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$;

   (f) $y'' + 4y = 4(\sin 2x + \cos 2x)$, $y(\pi) = y'(\pi) = 2\pi$;

3. Se consideră următoarea ecuaţie diferenţială

$$y'(x) - \frac{1}{2}y(x) = \cos(x).$$

   (a) Reprezentati câmpul de direcţii corespunzător ecuaţiei.

(b) Determinaţi $a \in \mathbb{R}$ astfel încât soluţia ecuaţiei ce satisface condiţia iniţială $y(0) = a$ să fie soluţie periodică.

4. Se consideră următoarea ecuaţie diferenţială

$$y'(x) = ay(x) + b,$$

unde $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.

(a) Determinaţi soluţia generală.

(b) Pentru ce valori $m \in \mathbb{R}$ ale condiţiei iniţiale $y(0)$ (în funcţie de a, b) problema Cauchy $\begin{cases} y'(x) = ay(x) + b \\ y(0) = m \end{cases}$ admite soluţii constante?

(c) Determinaţi parametrii a şi b ştiind că soluţia problemei Cauchy $\begin{cases} y'(x) = ay(x) + b \\ y(0) = 1 \end{cases}$ trece prin punctele de coordonate $(2, 2e^2 - 1)$ şi $(3, 2e^3 - 1)$. Reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare.

5. Determinaţi soluţia problemei Cauchy

$$\begin{cases} y'' - y' - 2y = 0 \\ y(0) = a \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

şi valoarea lui a astfel încât $y(x) \to 0$ pentru $x \to +\infty$.