Laborator 5: Modele matematice date prin ecuaţii diferenţiale de ordinul II

Exerciţiul 1 *Se consideră ecuaţia diferenţială ce descrie mişcarea oscilatorului armonic (fără frecare):*

$$x'' + \omega_0^2\, x = 0$$

(a) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei;

(b) În expresia soluţiei generale faceţi substituţia

$$\begin{aligned} c_1 &= R\cos(\delta) \\ c_2 &= R\sin(\delta) \end{aligned}$$

şi simplificaţi expresia acesteia. ($R-$ reprezintă amplitudinea mişcării, $\delta-$ reprezintă faza mişcării)

(c) Determinaţi soluţia ecuaţiei ce satisface condiţiile $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$ şi determinaţi R, amplitudinea mişcării, δ faza mişcării în funcţie de ω_0, x_0 şi v_0.

(d) Determinaţi amplitudinea, faza, perioada mişcării $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$ şi reprezentaţi grafic soluţiile corespunzătoare următoarelor date:

$$\begin{aligned} (i)\ \omega_0 &= \sqrt{5},\ x_0 = 2,\ v_0 = 3 \\ (ii)\ \omega_0 &= 3,\ x_0 = 7,\ v_0 = 5 \end{aligned}$$

Exerciţiul 2 *Se consideră ecuaţia diferenţială ce descrie mişcarea oscilatorului armonic cu frecare*

$$x'' + \lambda x' + \omega_0^2 x = 0$$

(a) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul $\lambda^2 > 4\omega_0^2$ (cazul supra-amortizarii);

(b) Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare datelor $\lambda = 25$, $\omega_0 = 10$ şi condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$;

(c) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul $\lambda^2 = 4\omega_0^2$ (cazul amortizarii critice);

(d) Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare datelor $\lambda = 20$, $\omega_0 = 10$ şi condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$;

(e) Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul $\lambda^2 < 4\omega_0^2$ (cazul amortizarii slabe);

(f) Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia corespunzătoare datelor $\lambda = 5$, $\omega_0 = 10$ şi condiţiile iniţiale $x(0) = 1$, $x'(0) = 5$.

(Indicaţie: pentru specificarea ipotezelor se foloseşte comanda ***assume****)*

Exerciţiul 3 *Se consideră ecuaţia diferenţială ce descrie mişcarea oscilatorului armonic (fără frecare) asupra căruia acţinează o forţă periodică de forma* $F(t) = F_0 \cos(\omega t)$*:*

$$x'' + \omega_0^2\, x = F_0 \cos(\omega t)$$

(a) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul* $\omega_0 \neq \omega$ *(cazul de nerezonanţă);*

(b) *Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia ecuaţiei ce satisface* $x(0) = 0$ *şi* $x'(0) = 0$ *pentru* $\omega_0 = 5$, $\omega = 5.5$ *şi* $F_0 = 2$ *(soluţie pulsatorie);*

(c) *Determinaţi soluţia generală a ecuaţiei în cazul* $\omega_0 = \omega$ *(cazul de rezonanţă);*

(d) *Determinaţi şi reprezentaţi grafic soluţia ecuaţiei ce satisface* $x(0) = 0$ *şi* $x'(0) = 0$ *pentru* $\omega_0 = \omega = 5$ *şi* $F_0 = 2$*;*

(e) *Notăm cu* $x(\cdot, \omega)$ *soluţia ecuaţiei ce satisface condiţiile* $x(0) = 0$, $x'(0) = 0$*. Arătaţi că*

$$\lim_{\omega \to \omega_0} x(t, \omega) = x(t, \omega_0)\,.$$