Introducere

- Teoria lui Ramsey = teorie referitoare la studiul obiectelor combinatoriale și a condițiilor care se ocupă cu distribuția submulțimilor de elemente ale unei mulțimi.
  - Numită după matematicianul și filozoful englez Frank P. Ramsey (1903-1930).
  - Rezultate semnificative au fost descoperite ulterilor de P. Erdös.
  - În prezent: temă activă de cercetare în TGC: numeroase probleme nerezolvate încă.
- Problema grupului de persoane întrunite:

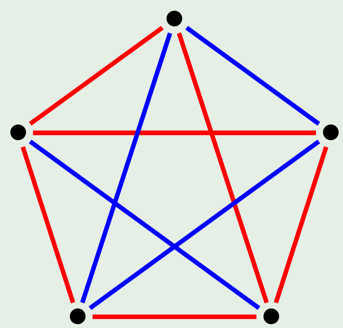
  Care este numărul minim $R(m, n)$ de persoane care trebuie invitate la o întrunire, pentru a fi siguri că una din următoarele condiții are loc:

  1. *ori există un grup de m persoane care se cunosc toate între ele*
  2. *ori există un grup de n persoane în care nimeni nu se cunoaște cu nimeni.*

Noțiuni preliminare

- O 2-colorare a muchiilor unui graf G este o funcție care atribuie o culoare din o mulțime de 2 culori la toate muchiile lui G.

Exemplu (O 2-colorare a lui K_5)

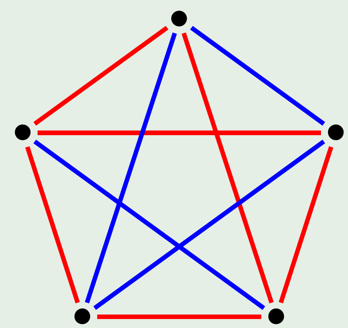


Pentru două numere pozitive date p și q, numărul Ramsey (clasic) $R(p, q)$ asociat lor este cel mai mic întreg n astfel încât orice 2-colorare a lui K_n cu roșu și albastru să conțină un subgraf K_p roșu, sau un subgraf K_q albastru.

Noțiuni preliminare

- O 2-colorare a muchiilor unui graf G este o funcție care atribuie o culoare din o mulțime de 2 culori la toate muchiile lui G.

Exemplu (O 2-colorare a lui K_5)



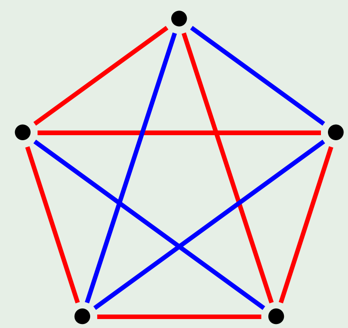
Pentru două numere pozitive date p și q, numărul Ramsey (clasic) $R(p,q)$ asociat lor este cel mai mic întreg n astfel încât orice 2-colorare a lui K_n cu roșu și albastru să conțină un subgraf K_p roșu, sau un subgraf K_q albastru.

Întrebare: care este valoarea lui $R(1,3)$?

Noțiuni preliminare

- O 2-colorare a muchiilor unui graf G este o funcție care atribuie o culoare din o mulțime de 2 culori la toate muchiile lui G.

Exemplu (O 2-colorare a lui K_5)



Pentru două numere pozitive date p și q, numărul Ramsey (clasic) $R(p, q)$ asociat lor este cel mai mic întreg n astfel încât orice 2-colorare a lui K_n cu roșu și albastru să conțină un subgraf K_p roșu, sau un subgraf K_q albastru.

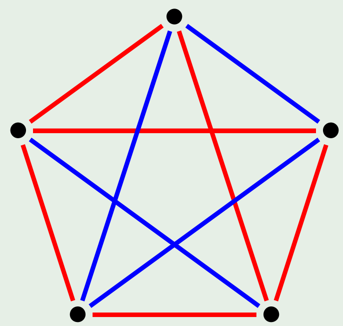
Întrebare: care este valoarea lui $R(1, 3)$?

Răspuns: 1 . . . *de ce?*

Noțiuni preliminare

- O 2-colorare a muchiilor unui graf G este o funcție care atribuie o culoare din o mulțime de 2 culori la toate muchiile lui G.

Exemplu (O 2-colorare a lui K_5)

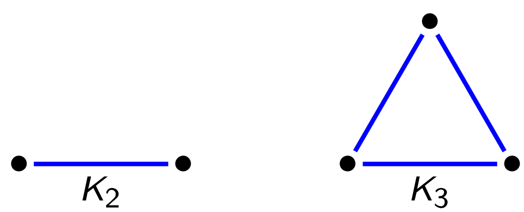


Pentru două numere pozitive date p și q, numărul Ramsey (clasic) $R(p, q)$ asociat lor este cel mai mic întreg n astfel încât orice 2-colorare a lui K_n cu roșu și albastru să conțină un subgraf K_p roșu, sau un subgraf K_q albastru.

Întrebare: care este valoarea lui $R(1, 3)$?
Răspuns: 1 ... *de ce?*
Întrebare: care este valoarea lui $R(1, q)$?

Fapt: $R(2,4) = 4$.

DEMONSTRAŢIE. Conform definiției, $R(2,4) \geq 2$.
$R(2,4) \geq 4$ deoarece existența următoarelor 2-colorări de muchii indică faptul că $R(2,4) \notin \{2,3\}$.



Orice colorare roșu-albastru a lui K_4 conține fie un K_2 roșu sau un K_4 albastru deoarece:

- Dacă există o muchie roșie, există un subgraf K_2 roșu.
- Altfel, toate muchiile sunt albastre, deci graful însuși este un subgraf K_4 albastru.

Exerciții

1. Câte 2-colorări diferite (modulo simetrii) are K_3? K_4? K_5? K_{10}?
2. Dați o demonstrație simplă a faptului că $R(1,k)=1$ pentru toți întregii pozitivi k.
3. Dați o demonstrație simplă a faptului că $R(2,k)=k$ pentru toți întregii $k \geq 2$.
4. Explicați de ce, pentru toții întregii pozitivi p și q are loc $R(p,q)=R(q,p)$.
5. Dacă $2 \leq p' \leq p$ și $2 \leq q' \leq q$, demonstrați că $R(p',q') \leq R(p,q)$. Mai mult, egalitatea $R(p',q')=R(p,q)$ are loc în acest caz dacă și numai dacă $p'=p$ și $q'=q$.

O problemă Ramsey clasică

- Câte persoane trebuiesc invitate la o petrecere a.î. să existe cel puțin un grup de 3 persoane care se cunosc toți între ei, sau un grup de 3 persoane în care nimeni nu se cunoaște cu nimeni?

O problemă Ramsey clasică

- Câte persoane trebuiesc invitate la o petrecere a.î. să existe cel puțin un grup de 3 persoane care se cunosc toți între ei, sau un grup de 3 persoane în care nimeni nu se cunoaște cu nimeni?
- Sau, în teoria lui Ramsey: Care este valoarea minimă a lui n a.î. orice colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_n să conțină fie un K_3 roșu sau un K_3 albastru?

O problemă Ramsey clasică

- Câte persoane trebuiesc invitate la o petrecere a.î. să existe cel puțin un grup de 3 persoane care se cunosc toți între ei, sau un grup de 3 persoane în care nimeni nu se cunoaște cu nimeni?
- Sau, în teoria lui Ramsey: Care este valoarea minimă a lui n a.î. orice colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_n să conțină fie un K_3 roșu sau un K_3 albastru?

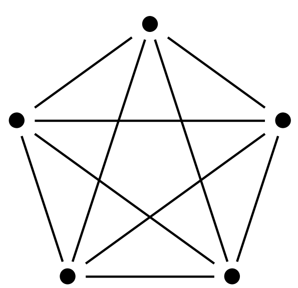
▷ Altfel spus, care este valoarea lui $R(3,3)$?

O problemă Ramsey clasică

Teoremă

$R(3,3) = 6$.

DEMONSTRAŢIE. $R(3,3) > 5$ deoarece 2-colorarea lui K_5 de mai jos nu conține nici un K_3 roșu și nici un K_3 albastru.

K_5: 

Fie o colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_6, și v unul din noduri.

- v este incident la 5 muchii.
- Conform Principiului Porumbelului, fie v este incident la ≥ 3 muchii roșii, fie v este incident la ≥ 3 muchii albastre.

Putem presupune că, în general, v este incident la 3 muchii roșii (v,x), (v,y), (v,z).

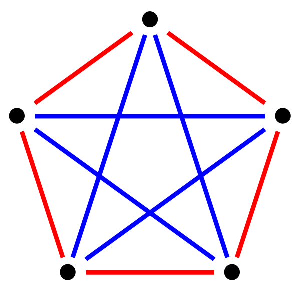
O problemă Ramsey clasică

Teoremă

$R(3,3) = 6$.

DEMONSTRAŢIE. $R(3,3) > 5$ deoarece 2-colorarea lui K_5 de mai jos nu conține nici un K_3 roșu și nici un K_3 albastru.

K_5:



Fie o colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_6, și v unul din noduri.

- v este incident la 5 muchii.
- Conform Principiului Porumbelului, fie v este incident la ≥ 3 muchii roșii, fie v este incident la ≥ 3 muchii albastre.

Putem presupune că, în general, v este incident la 3 muchii roșii (v, x), (v, y), (v, z).

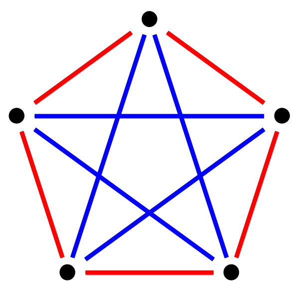
O problemă Ramsey clasică

Teoremă

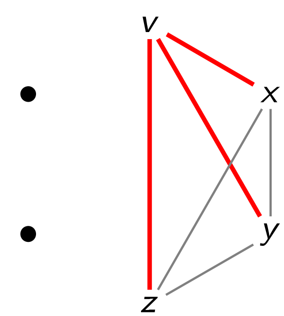
$R(3,3) = 6$.

DEMONSTRAŢIE. $R(3,3) > 5$ deoarece 2-colorarea lui K_5 de mai jos nu conține nici un K_3 roșu și nici un K_3 albastru.

K_5:



K_6:



Fie o colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_6, și v unul din noduri.

- v este incident la 5 muchii.
- Conform Principiului Porumbelului, fie v este incident la ≥ 3 muchii roșii, fie v este incident la ≥ 3 muchii albastre.

Putem presupune că, în general, v este incident la 3 muchii roșii (v,x), (v,y), (v,z).

O problemă Ramsey clasică

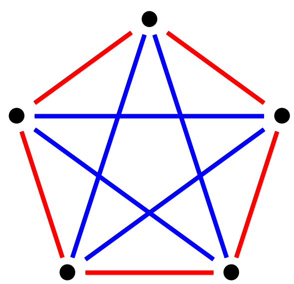
Teoremă

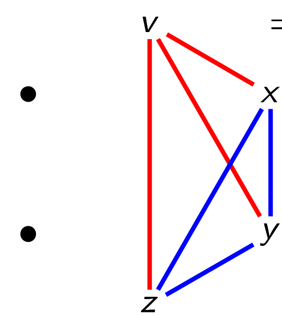
$R(3,3) = 6$.

DEMONSTRAȚIE. $R(3,3) > 5$ deoarece 2-colorarea lui K_5 de mai jos nu conține nici un K_3 roșu și nici un K_3 albastru.

Subcazul 1: toate muchiile (x,y),(x,z),(y,z) sunt albastre

$\Rightarrow$ există un K_3 albastru

K_5: 

K_6: 

Fie o colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_6, și v unul din noduri.

- v este incident la 5 muchii.
- Conform Principiului Porumbelului, fie v este incident la ≥ 3 muchii roșii, fie v este incident la ≥ 3 muchii albastre.

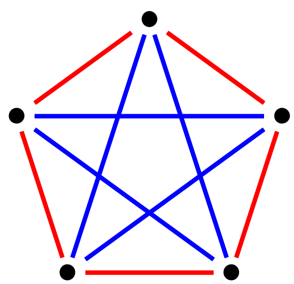
Putem presupune că, în general, v este incident la 3 muchii roșii (v,x), (v,y), (v,z).

O problemă Ramsey clasică

Teoremă

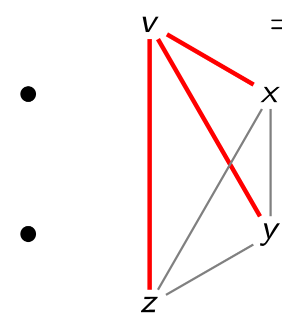
$R(3,3) = 6$.

Demonstrație. $R(3,3) > 5$ deoarece 2-colorarea lui K_5 de mai jos nu conține nici un K_3 roșu și nici un K_3 albastru.

K_5: 

Subcazul 2: cel puțin una din muchiile (x,y),(x,z),(y,z) este roșie

$\Rightarrow$ există un K_3 roșu

K_6: 

Fie o colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_6, și v unul din noduri.

- v este incident la 5 muchii.
- Conform Principiului Porumbelului, fie v este incident la ≥ 3 muchii roșii, fie v este incident la ≥ 3 muchii albastre.

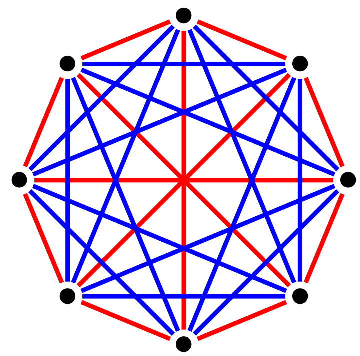
Putem presupune că, în general, v este incident la 3 muchii roșii (v,x), (v,y), (v,z).

Altă problemă Ramsey

Teoremă

$R(3,4) = 9$.

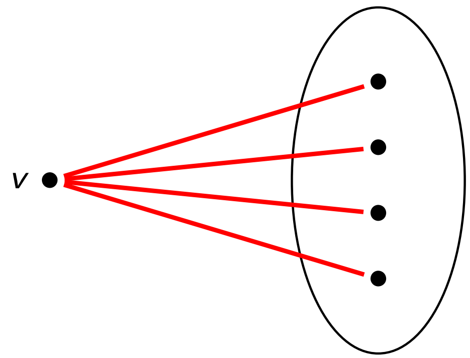
DEMONSTRAŢIE. 2-colorarea lui K_8 de mai jos nu conține nici un K_3 roșu și nici un K_4 albastru, deci $R(3,4) > 8$.



Vom demonstra că $R(3,4) \leq 9$ știind că $R(2,4) = 4$ și $R(3,3) = 6$. Să presupunem că muchiile lui $G = K_n$ ($n \geq 9$) au fost colorate cu roșu-albastru, și fie v un nod al lui G. Distingem 3 cazuri:

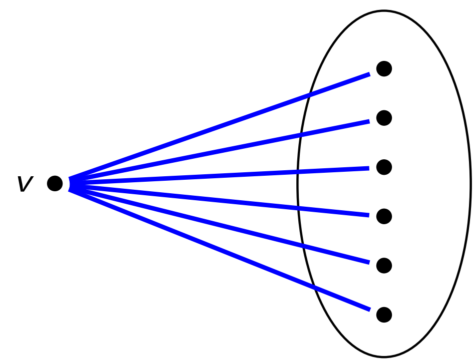
(*vezi slide-urile următoare.*)

Fie $S :=$ mulțimea nodurilor incidente la v cu o muchie roșie.

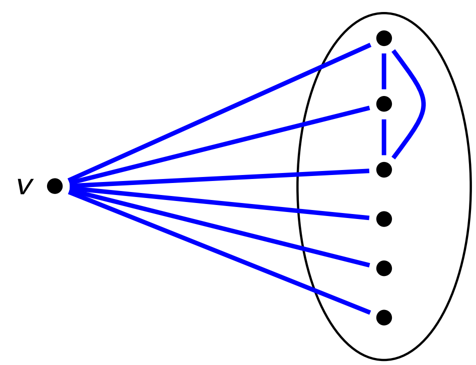


$R(2,4) = 4$ și $|S| \geq 4 \Rightarrow$ fie S are un K_2 roșu sau un K_4 albastru. Prima posibilitate implică faptul că G are un K_3 roșu, iar a doua implică faptul că G are un K_4 albastru.

Fie T :=mulțimea nodurilor incidente la v cu o muchie albastră.



$|T| = 6$ și $R(3,3) = 6 \Rightarrow T$ conține un K_3 roșu sau albastru. Primul caz implică faptul că G are un K_3 roșu. În cazul al doilea avem situația ilustrată mai jos $\Rightarrow G$ conține un K_4.



Fie T :=mulțimea nodurilor incidente la v cu o muchie albastră. Deoarece presupunem că G are ≥ 9 noduri, trebuie ca G să aibe exact 9 noduri $\Rightarrow$ v este incident la 3 muchii roșii și 5 albastre. Deoarece v a fost ales arbitrar, putem presupune că această proprietate are loc pentru toate nodurile lui G.

$\Rightarrow$ subgraful roșu al lui G are 9 noduri, și fiecare nod are gradul 3. Această situație este imposibilă deoarece orice graf are un număr par de noduri cu grad impar.

Mai jos sunt indicate **toate** valorile cunoscute de numere Ramsey:

$$R(1,k)=1,$$
$$R(2,k)=k,$$
$$R(3,3)=6,\ R(3,4)=9,\ R(3,5)=14,\ R(3,6)=18,$$
$$R(3,7)=23,\ R(3,8)=28,\ R(3,9)=36,$$
$$R(4,4)=18,\ R(4,5)=25.$$

- În general, determinarea valorilor exacte ale numerelor Ramsey este extrem de dificilă.

Limite cunoscute

Teoremă (Erdös și Szekeres)

Dacă $p \geq 2$ *și* $q \geq 2$ *atunci* $R(p, q) \leq \dfrac{(p + q - 2)!}{(p - 1)!(q - 1)!}$.

Teoremă

Dacă $p \geq 2$ *și* $q \geq 2$, *atunci* $R(p, q) \leq R(p - 1, q) + R(p, q - 1)$.

Teoremă

Pentru orice $q \geq 3$, $R(3, q) \leq \dfrac{q^2 + 3}{2}$.

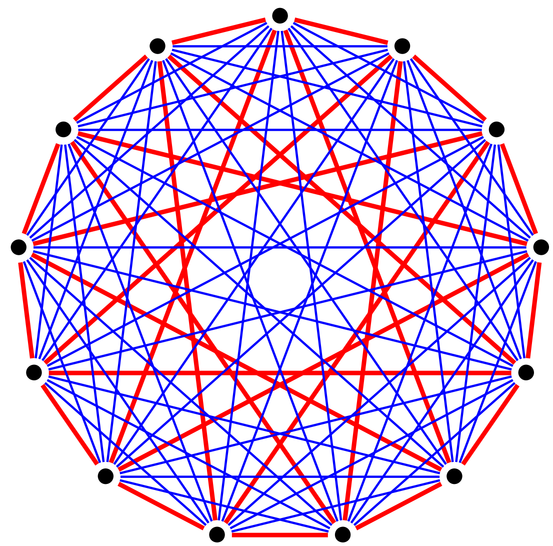
Teoremă (Erdös)

Dacă $p \geq 3$ *atunci* $R(p, p) > \lfloor 2^{n/2} \rfloor$.

Exerciții

1. Să se demonstreze că $R(3,5) \geq 14$. Graful următor este extrem de util.

K_{13}



2. Folosiți a doua teoremă de pe slide-ul precedent în combinație cu rezultatul din exercițiul precedent pentru a demonstra că $R(3,5) = 14$.
3. Folosiți a doua teoremă de pe slide-ul precedent pentru a demonstra teorema a treia.

Teoria lui Ramsey pentru grafuri

Generalizare a teoriei clasice a lui Ramsey.

Definiție

Numărul Ramsey $R(G, H)$ asociat la două grafuri G și H este valoarea minimă a lui n a.î. orice colorare roșu-albastru a muchiilor lui K_n conține fie o copie roșie a lui G sau o copie albastră a lui H.

Remarcă

În acest context, numărul Ramsey clasic $R(p, q)$ coincide cu $R(K_p, K_q)$.

Teoremă

Dacă G este un graf de ordin p iar H un graf de ordin q, atunci $R(G, H) \leq R(p, q)$.

DEMONSTRAȚIE. Evident.

- Numărul cromatic $\chi(G)$ al unui graf G este cel mai mic număr k astfel încât G este k-colorabil. Acest lucru înseamnă că:
  - folosim k culori pentru nodurile lui G.
  - nodurile adiacente în G au culori diferite.
- $C(H) =$ ordinul (adică numărul de noduri) al celei mai mari componente conexe a grafului H.

Teorema următoare indică o relație între $R(G, H)$, numărul cromatic $\chi(G)$ al lui G, și mărimea $C(H)$ a celei mai mari componente conexe a lui H:

Teoremă

$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(C(H) - 1) + 1.$

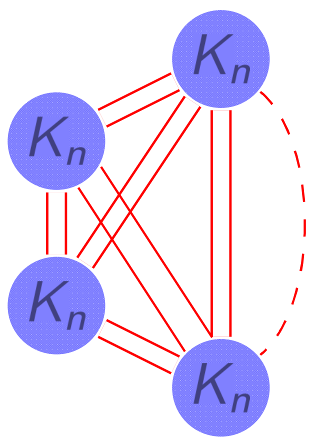
O margine inferioară pentru $R(G, H)$

Teoremă

$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(C(H) - 1) + 1.$

DEMONSTRAŢIE. Fie $m = \chi(G) - 1$ și $n = C(H) - 1$. Fie S graful $K_{m \cdot n}$ format din m copii ale lui K_n toate muchiile posibile între copii. Apoi se colorează albastru muchiile din fiecare copie a lui K_n, și roșu toate celelalte muchii.

S :



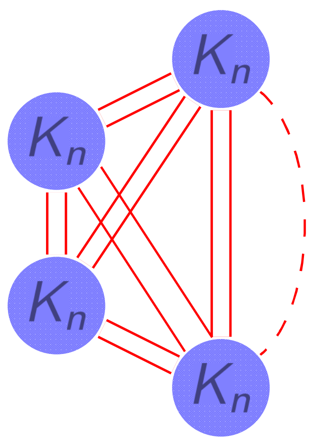
O margine inferioară pentru $R(G, H)$

Teoremă

$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(C(H) - 1) + 1.$

Demonstrație. Fie $m = \chi(G) - 1$ și $n = C(H) - 1$. Fie S graful $K_{m \cdot n}$ format din m copii ale lui K_n toate muchiile posibile între copii. Apoi se colorează albastru muchiile din fiecare copie a lui K_n, și roșu toate celelalte muchii.

S :



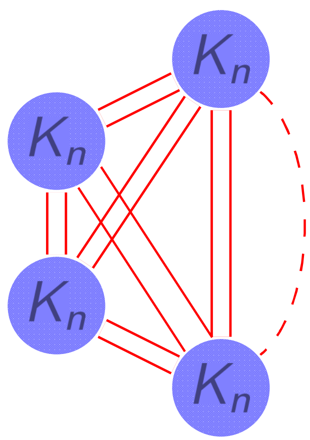
Nu există copie albastră a lui $C(H)$ în S fiindcă $C(H)$ are $n + 1$ noduri și nu intră în nici un K_n
$\Rightarrow$ nu poate exista o copie albastră a lui H în S.

Teoremă

$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(C(H) - 1) + 1.$

DEMONSTRAŢIE. Fie $m = \chi(G) - 1$ şi $n = C(H) - 1$. Fie S graful $K_{m \cdot n}$ format din m copii ale lui K_n toate muchiile posibile între copii. Apoi se colorează albastru muchiile din fiecare copie a lui K_n, şi roşu toate celelalte muchii.

S :



Nu există copie albastră a lui $C(H)$ în S fiindcă $C(H)$ are $n + 1$ noduri şi nu intră în nici un K_n
$\Rightarrow$ nu poate exista o copie albastră a lui H în S.

Nu există nici o copie roşie a lui G în S fiindcă
dacă colorăm fiecare copie a lui K_n în S cu o culoare diferită
atunci producem o m-colorare a lui G.
Dar G nu este m-colorabil deoarece $\chi(G) = m + 1$.

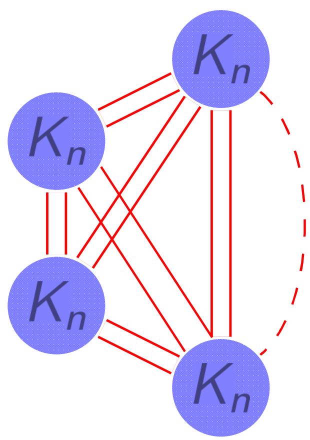
O margine inferioară pentru $R(G, H)$

Teoremă

$R(G, H) \geq (\chi(G) - 1)(C(H) - 1) + 1.$

DEMONSTRAŢIE. Fie $m = \chi(G) - 1$ şi $n = C(H) - 1$. Fie S graful $K_{m \cdot n}$ format din m copii ale lui K_n toate muchiile posibile între copii. Apoi se colorează albastru muchiile din fiecare copie a lui K_n, şi roşu toate celelalte muchii.

S :



Nu există copie albastră a lui $C(H)$ în S fiindcă $C(H)$ are $n + 1$ noduri şi nu intră în nici un K_n
$\Rightarrow$ nu poate exista o copie albastră a lui H în S.

Nu există nici o copie roșie a lui G în S fiindcă
dacă colorăm fiecare copie a lui K_n în S cu o culoare diferită
atunci producem o m-colorare a lui G.
Dar G nu este m-colorabil deoarece $\chi(G) = m + 1$.

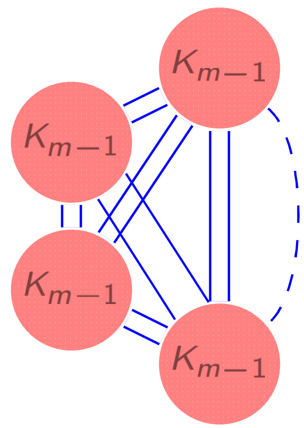
S ESTE PREA MIC: avem nevoie de $p > |S| = m \cdot n = (\chi(G) - 1)(C(H) - 1)$ noduri pentru a garanta existența unei copii albastre a lui H sau a unei copii roșii a lui G în K_p.

Teoremă

Dacă T_m este arbore cu m noduri atunci $R(T_m, K_n) = (m-1)(n-1)+1$.

DEMONSTRAŢIE. Rezultatul are loc pt. $m = 1$ sau $n = 1$. De acum încolo presupunem $m \geq 2$ şi $n \geq 2$.

AFIRMAŢIA A. $R(T_m, K_n) \geq (m-1)(n-1)+1$.



Pt. a demonstra acest lucru, fie $K_{(m-1)(n-1)}$ format din $n-1$ copii roşii ale lui K_{m-1}, şi toate muchiile posibile dintre copii colorate albastru. Nu poate exista nici un T_m roşu şi nici un K_n albastru$\Rightarrow$ Are loc afirmaţia A.

AFIRMAŢIA B. $R(T_m, K_n) \leq (m-1)(n-1)+1$.

O demonstraţie a acestei afirmaţii este în [Harris *et al.* 2008]

Teoremă

Dacă T_m este un arbore de ordin m și dacă $m-1$ divide $n-1$ atunci $R(T_m, K_{1,n}) = m+n-1$.

În teorema de mai jos, $m\,K_2$ reprezintă graful format din m copii ale lui K_2, iar $n\,K_2$ are o semnificație similară.

Teoremă

Dacă $m \geq n \geq 1$ atunci $R(m\,K_2, n\,K_2) = 2\,m+n-1$.

Exerciții

1. Să se calculeze $R(P_3, P_3)$.
2. Să se calculeze $R(P_3, C_4)$.
3. Să se calculeze $R(C_4, C_4)$.
4. Demonstrați că $R(K_{1,3}, K_{1,3}) = 6$.
5. Demonstrați că $R(2\,K_3, K_3) = 8$.

Reamintim că

- C_n reprezintă ciclul cu n noduri.
- $K_{m,n}$ este graful bipartit complet dintre două mulțimi X și Y cu cardinalitățile $|X| = m$, $|Y| = n$. Mulțimea de muchii a acestui graf este $E = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$.
- P_n este o cale prin n noduri.