פיסיקה קוונטית 1 (115203)
גיליון 5 -

הטכניון - הפקולטה לפיסיקה

סמסטר אביב 2025-26

1 זהות בקומוטטורים

נתונים שני אופרטורים A, B ונתון כי האופרטור B מתחלף עם יחסי החילוף שלהם, כלומר:

$$[B, [A, B]] = 0$$

הוכיחו כי לכל פונקציה אנליטית. $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתקיים:

$$[A, f(B)] = [A, B] f'(B)$$

הסיקו זהות עבור קומוטטור מהצורה $[X, f(P)]$.

2 מצבים עצמיים של אופרטורים

א. נתון אופרטור הרמיטי W כך ש: $W |w_i\rangle = w_i |w_i\rangle$. כמו כן, נתון כי הספקטרום של האופרטור W הוא דיסקרטי.
הראו כי בהינתן $|\psi\rangle$:
תוצאה של מדידת W תמיד תהיה w_i אמ"מ $|\psi\rangle = |w_i\rangle$, או $|\psi\rangle = \sum_n a_n |w_i, n\rangle$ אם w_i מנוון.
הערה חשובה: הכוונה ב"תמיד" היא כאשר חוזרים על הניסוי ושוב ושוב, ולא עבור מערכת שמתפתחת בזמן!

ב. נתון: $\Lambda |\lambda_i\rangle = \lambda_i |\lambda_i\rangle$. מודדים את W ומקבלים ערך w_j. לאחר מכן, מודדים את Λ, ואח"כ מודדים שוב את W.

1. הראו שלכל w_j מדידת W בפעם השניה תתן בודאות w_j אמ"מ $[W, \Lambda] = 0$.
2. הראו כי אם $[W, \Lambda] = i\Gamma$ וגם ל- Γ אין ע"ע אפס, אז לכל w_j לא ניתן לדעת בודאות מהי תוצאת מדידת W בפעם השניה.

3 פונקצית גל לורנציאנית

מערכת מתוארת על ידי פונקצית גל:

$$\psi(x) = \sqrt{a^3} \frac{1}{x^2 + a^2}$$

כאשר a פרמטר ממשי.

א. נרמלו את $\psi(x)$.
הדרכה: השתמשו באינטגרל הבא: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+a^2} \mathrm{d}x = \pi (a^2)^{-1/2}$ ובגזירה לפי a^2.

ב. חשבו את $\langle X \rangle, \langle X^2 \rangle, \Delta X$, וגם את $\langle P \rangle, \langle P^2 \rangle, \Delta P$.

ג. חשבו את $\Delta X \Delta P$

4 המילטוניאן במרחב הדואלי (תרגיל בונוס)

חשבו את

$$\langle\psi(t)|\, H$$

5 ניוון במצבים (תרגיל בונוס)

נתון כי חלקיק יכול להימדד בצבעים $|r\rangle$, $|g\rangle$, $|b\rangle$. נתון גם כי הוא יכול להמדד במצב קשה $|h\rangle$ או רך $|s\rangle$ בלבד. הסבירו מדוע לפחות $|h\rangle$ או $|s\rangle$ מנוונים.

6 מדידות במרחב רציף

נתון כי מדידת טמפרטורה T יכולה לקבל כל ערך בין 0 ל- 1. נסמן את הע"ע והו"ע של T ב$|t\rangle$, וננרמל: $\langle t|t'\rangle = \delta(t-t')$. נתון כי:

$$|\psi\rangle = \int_{1/2}^{1} c\,|t'\rangle\,\mathrm{d}t'$$

כאשר c הוא קבוע כלשהו (כלומר אינו תלוי ב t).

א. מהם ערכי הטמפרטורה האפשריים שנמדוד עבור $|\psi\rangle$?

ב. נניח:

$$|\psi\rangle = \int_{1/2}^{1} c(t')\,|t'\rangle\,\mathrm{d}t'$$

כאשר $c(t') \neq 0$ פונקציה חלקה וסופית כלשהי. מהם ערכי הטמפרטורה האפשריים כעת?

7 המילטוניאן תלוי בזמן

נתונה מערכת עם 2 מצבים, $|1\rangle$, $|2\rangle$, וההמילטוניאן הבא:

$$H(t) = A\,|1\rangle\langle 1| + B\cos(\omega t)\,|1\rangle\langle 2| + B\cos(\omega t)\,|2\rangle\langle 1| - A\,|2\rangle\langle 2|$$

א. מהם ערכי האנרגיה שניתן למדוד?

ב. מהו $[H(t), H(t')]$?