UNISINOS

AULA 08 – LOGARITMOS

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO

PROFESSOR PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

DEFINIÇÃO

Definimos

$$a^n = a.a.a.....a \text{ (n parcelas a)},$$

Onde a é denominado base e n é o expoente.

Exemplo: Os valores das potências 2^{10}, 3^8, 4^6, 5^5 e 7^3 são respectivamente iguais a:

( ) a) 512, 6561, 4096, 3125 e 243

( ) b) 512, 6561, 2048, 625 e 343

( ) c) 2048, 2187, 2048, 3125 e 343

( ) d) 1024, 2187, 2048, 625 e 243

( ) e) 1024, 6561, 4096, 3125 e 343

RESPOSTA

$2^{10} = 2.2.2.2.2.2.2.2.2.2 = 1024$

$3^8 = 3.3.3.3.3.3.3.3 = 6561$

$4^6 = 4.4.4.4.4.4 = 4096$

$5^5 = 5.5.5.5.5 = 3125$

$7^3 = 7.7.7 = 343$

(   ) a) 512, 6561, 4096, 3125 e 243

(   ) b) 512, 6561, 2048, 625 e 343

(   ) c) 2048, 2187, 2048, 3125 e 343

(   ) d) 1024, 2187, 2048, 625 e 243

(X) e) 1024, 6561, 4096, 3125 e 343

PROPRIEDADES

Para trabalharmos com as propriedades vamos utilizar a tabela do 2. Entretanto as propriedades valem mesmo se a base não for 2.

Expoente	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência		$2^3 = 8$							

RESPOSTAS

Expoente	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

PROPRIEDADE 1

Note que conforme o expoente aumenta uma unidade, a potência é multiplicada por 2. Podemos pensar o mesmo quando verificamos que ao diminuir uma unidade no expoente, a potência fica dividida por 2

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência		$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

PROPRIEDADE 1

Qualquer potência de expoente 1, é igual a própria base.

$$a^1 = a$$

Expoente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

PROPRIEDADE 2

Dando sequência ao raciocínio anterior, temos o seguinte:

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência		$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

UNISINOS

PROPRIEDADE 2

Qualquer potência de expoente zero, com base diferente de zero é igual a um.

$$a^0 = 1 \, , a \neq 0$$

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

PROPRIEDADE 3

Verifique os seguintes valores

a) 2^4

b) 2^6

c) $16.64 =$

d) A resposta do item anterior está na tabela? Em qual expoente?

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

PROPRIEDADE 3

Note que $2^6 \, . \, 2^4 = 64 \, . \, 16 = 1024 = 2^{10}$

Assim, $2^6 \, . \, 2^4 = 2^{6+4} = 2^{10}$

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

Multiplicação de potências de mesma base: conserva-se a base e adiciona-se o expoente.

$$a^m . a^n = a^{m+n}$$

PROPRIEDADE 4

Verifique os seguintes valores

a) 2^9

b) 2^4

c) $512/16 =$

d) A resposta do item anterior está na tabela? Em qual expoente?

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

PROPRIEDADE 4

Note que $2^9 / 2^4 = 512 / 16 = 32 = 2^5$

Assim, $2^9 / 2^4 = 2^{9-4} = 2^5$

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

Divisão de potências de mesma base: conserva-se as bases e subtraí-se os expoentes.

$$a^m / a^n = a^{m-n}$$

PROPRIEDADE 5

Verifique os seguintes valores

a) 2^3

b) 8^3

c) A resposta do item anterior está na tabela? Em qual expoente?

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

PROPRIEDADE 5

Note que $(2^3)^3 = 8^3 = 512 = 2^9$

Assim, $(2^3)^3 = 2^{3.3} = 2^9$

Expoente	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Potência	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$	$2^8 = 256$	$2^9 = 512$	$2^{10} = 1024$

Potência de Potência: conserva-se as bases e multiplicam-se os expoentes.

$$(a^n)^m = a^{m.n}$$

PROPRIEDADE 6

Já verificamos o raciocínio quando diminui uma unidade no expoente. Seguindo esse raciocínio teremos o seguinte:

Expoente	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
Potência				$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$

PROPRIEDADE 6

Veja que

$2^{-1} = ½ = 1/2^1$

$2^{-2} = ¼ = 1/2^2$

$2^{-3} = 1/8 = 1/2^3$

Expoente	– 3	– 2	– 1	0	1	2	3	4	5	6	7
Potência	$2^{-3} = 1/8$	$2^{-2} = ¼$	$2^{-1} = ½$	$2^0 = 1$	$2^1 = 2$	$2^2 = 4$	$2^3 = 8$	$2^4 = 16$	$2^5 = 32$	$2^6 = 64$	$2^7 = 128$

Toda a potência com expoente negativo (exceto do Zero) é igual a uma fração onde o numerador é sempre o nº1 e o denominador é o mesmo nº elevado ao mesmo expoente, porém, positivo.

$$a^{-n} = 1/a^n$$

EXEMPLOS

1) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F)

a) (   ) $3^{-2} = -9$

b) (   ) $3^2 \times 3^3 = 9^5$

c) (   ) $3^8 : 3^2 = 3^4$

d) (   ) $6^3 : 2^3 = 3^3$

e) (   ) $9^3 : 3^2 = 3^8$

f) (   ) $2^3 \times 3^2 = 2 \times 6^2$

g) (   ) $3^2 \times 3^{-2} = 1$

2) O valor de $2^2 . 3$ é:

(   ) a) 6^2

(   ) b) 12

(   ) c) 18

(   ) d) 9

(   ) e) 15

RESPOSTAS

1) Classifique em verdadeiro (V) ou falso (F)

a) (F) $3^{-2} = -9$ A RESPOSTA É 1/9

b) (F) $3^2 \times 3^3 = 9^5$ A RESPOSTA É 3^5

c) (F) $3^8 : 3^2 = 3^4$ A RESPOSTA É 3^6

d) (V) $6^3 : 2^3 = 3^3$

e) (F) $9^3 : 3^2 = 3^8$ A RESPOSTA É 3^4

f) (V) $2^3 \times 3^2 = 2 \times 6^2$

g) (V) $3^2 \times 3^{-2} = 1$

2) O valor de $2^2 . 3$ é:

( ) a) 6^2

(X) b) 12

( ) c) 18

( ) d) 9

( ) e) 15

MAIS EXEMPLOS

3) Resolvendo $(7/9)^0$, tem-se:

(   ) a) 7/9

(   ) b) 0

(   ) c) 1

(   ) d) – 7/9

(   ) e)

4) O valor de $6^4/3^3$ é:

(   ) a) 2

(   ) b) 48

(   ) c) 24

(   ) d) 6

(   ) e) 12

RESPOSTAS

3) Resolvendo $(7/9)^0$, tem-se:

( ) a) 7/9

( ) b) 0

(X) c) 1

( ) d) – 7/9

( ) e)

4) O valor de $6^4/3^3$ é:

( ) a) 2

(X) b) 48

( ) c) 24

( ) d) 6

( ) e) 12

MAIS EXEMPLOS

5) $(4021)^1$ x $(1000)^0$ é igual a:

( ) a) 4021.000

( ) b) 0

( ) c) 4021

( ) d) 1000

( ) e) 1

6) A razão $(2^4)^8/(4^8)^2$ é igual a:

( ) a) 1/4

( ) b) 1/2

( ) c) 1

( ) d) 2

( ) e) 8

MAIS EXEMPLOS

5) $(4021)^1$ x $(1000)^0$ é igual a:

( ) a) 4021.000

( ) b) 0

(X) c) 4021

( ) d) 1000

( ) e) 1

A razão $(2^4)^8/(4^8)^2$ é igual a:

( ) a) 1/4

( ) b) 1/2

(X) c) 1

( ) d) 2

( ) e) 8

PROPRIEDADE 7 E 8

Vamos seguir agora sem a tabela

Divisão de potências de mesmo expoente: dividem-se as bases e conserva-se o expoente.

$$(a/b)^n = a^n/b^n,\ b \neq 0$$

Exemplos:

$(5/3)^4 = 5^4/3^4 = 625/81$

$(x/2)^{10} = x^{10}/2^{10} = x^{10}/1024$

Multiplicação de potências de mesmo expoente: multiplicam-se as bases e eleva-se o produto ao expoente comum.

$$(a.b)^n = a^n.b^n$$

Exemplo:

$(5.x)^3 = 5^3.x^3 = 125.x^3$

PROPRIEDADE 9 E 10

Quando a base é zero e o expoente não é zero o resultado da potência é zero.

$$0^n = 0 \text{ , } n \neq 0$$

Exemplos:

$0^5 = 0$

$0^{12} = 0$

$0^{734} = 0$

Qualquer potência de base 1 é igual a 1.

$$1^a = 1$$

Exemplos:

$1^5 = 1$

$1^{12} = 1$

$1^{734} = 1$

UNISINOS

PROPRIEDADE 11 E 12

Quando o expoente é negativo, invertemos a base e trocamos o sinal do expoente.

$$(a/b)^{-n} = (b/a)^n$$

Exemplos:

$(2/3)^{-5} = (3/2)^5 = 243/32$

$(x/7)^{-3} = (7/x)^3 = 343/x^3$

Expoente Fracionário: é escrito na forma de raiz.

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$$

Exemplos:

$2^{3/4} = \sqrt[4]{2^3} = \sqrt[4]{8}$

$3^{7/5} = \sqrt[5]{3^7} = \sqrt[5]{2187}$

$5^{1/3} = \sqrt[3]{5^1} = \sqrt[3]{5}$

$11^{1/2} = \sqrt[2]{11^1} = \sqrt{11}$

PROPRIEDADE 13 E 14

Base dez: a quantidade de zeros é igual ao expoente.

$10^3 = 1000$

$10^6 = 1\ 000\ 000$

$10^8 = 100\ 000\ 000$

$10^{-4} = 0{,}0001$

$10^{-6} = 0{,}000001$

$10^{-7} = 0{,}0000001$

Regra dos sinais: expoentes pares tem resultados positivos e expoentes ímpares mantém o sinal da base.

$$(-)^{\text{PAR}} = +$$

$$(+)^{\text{PAR}} = +$$

$$(-)^{\text{ÍMPAR}} = -$$

$$(+)^{\text{ÍMPAR}} = +$$

ATENÇÃO COM OS SINAIS

Exemplos

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$

$(-2)^4 = 16$

$(-2)^5 = -32$

$-2^4 = -16$

$-2^5 = -32$

Regra dos sinais: expoentes pares tem resultados positivos e expoentes ímpares mantém o sinal da base.

$$(-)^{\text{PAR}} = +$$

$$(+)^{\text{PAR}} = +$$

$$(-)^{\text{ÍMPAR}} = -$$

$$(+)^{\text{ÍMPAR}} = +$$

EXEMPLOS

Calcule os valores de

a) $(3/5)^{-2} =$

b) $-(3/4)^{-3} =$

c) $-(1/2)^{-5} =$

d) $(5/6)^{-3} =$

e) $-(1/88)^{-2} =$

EXEMPLOS

Calcule os valores de

a) $(3/5)^{-2} = (5/3)^{2} = 25/9$

b) $-(3/4)^{-3} = -(4/3)^{3} = -64/27$

c) $-(1/2)^{-5} = -(2/1)^{5} = -32$

d) $(5/6)^{-3} = (6/5)^{3} = 216/125$

e) $-(1/88)^{-2} = -(88/1)^{2} = -7744$

EXEMPLOS

1) Os valores de

$(-3)^5$, $(-6)^4$, $(-2)^9$, $(-5)^6$ e -3^4

são respectivamente iguais a:

( ) a) −243, 1296, −512, 15625 e 81

( ) b) −243, 1296, −512, 625 e −81

( ) c) −243, 216, −256, 15625 e 81

( ) d)−243, 1296,−512, 15625 e −81

( ) e) −243, 216, −256, 15625 e 81

2) Os valores de

$(-5)^1$, 1992^0, 2^{-2},4^{-1} e 6^{-2}

são respectivamente iguais a:

( ) a) −5, 1, 1/4, 1/4 e 1/36

( ) b) 5, 1, −4, −4 e −36

( ) c) 5, 1, −4, −4 e 1/36

( ) d) −5, 1, 1/4, −1/4 e −36

( ) e) −5, 1, 1/4, −4 e 1/36

EXEMPLOS

1) Os valores de

$(-3)^5, (-6)^4, (-2)^9, (-5)^6$ e -3^4

são respectivamente iguais a:

(   ) a) –243, 1296, –512, 15625 e 81

(   ) b) –243, 1296, –512, 625 e –81

(   ) c) –243, 216, –256, 15625 e 81

(X) d) –243, 1296, –512, 15625 e –81

(   ) e) –243, 216, –256, 15625 e 81

2) Os valores de

$(-5)^1, 1992^0, 2^{-2}, 4^{-1}$ e 6^{-2}

são respectivamente iguais a:

(x) a) –5, 1, 1/4, 1/4 e 1/36

(   ) b) 5, 1, –4, –4 e –36

(   ) c) 5, 1, –4, –4 e 1/36

(   ) d) –5, 1, 1/4, –1/4 e –36

(   ) e) –5, 1, 1/4, –4 e 1/36

EXEMPLOS

Os valores $(-4)^{-2}$, $(-5)^{-3}$, $(-2)^{-1}$, $(-1)^{-4}$ e -5^{-2} são respectivamente iguais a:

(   ) a) 8, 15, 2, 4 e –10

(   ) b) 1/16, 1/125, –2, –1 e 1/25

(   ) c) 1/16, –1/125, –1/2, 1 e –1/25

(   ) d) 1/16, –1/125, –1/2, 1 e 1/25

(   ) e) –1/16,–1/125, –1/2, –1e –1/25

EXEMPLOS

Os valores $(-4)^{-2}$, $(-5)^{-3}$, $(-2)^{-1}$, $(-1)^{-4}$ e -5^{-2} são respectivamente iguais a:

( ) a) 8, 15, 2, 4 e –10

( ) b) 1/16, 1/125, –2, –1 e 1/25

(X) c) 1/16, –1/125, –1/2, 1 e –1/25

( ) d) 1/16, –1/125, –1/2, 1 e 1/25

( ) e) –1/16,–1/125, –1/2, –1e –1/25

UM EXEMPLO

Suponhamos que uma população tenha hoje 40 mil habitantes e que haja um crescimento populacional de 2% ao ano. Assim:

i) daqui a um ano o número de habitantes será

ii) daqui a dois anos o número de habitantes será

iii) daqui a três anos o número de habitantes será

DEFINIÇÃO

Suponhamos que uma população tenha hoje 40 mil habitantes e que haja um crescimento populacional de 2% ao ano. Assim:

i) daqui a um ano o número de habitantes será

$y_1 = 40000 + (0{,}02).40000 =$

$40000\ (1 + 0{,}02) = 40000.1{,}02 = 40800$

ii) daqui a dois anos o número de habitantes será

$y_2 = y_1 + 0{,}02y_1 = y_1(1 + 0{,}02) = 40000(1{,}02)^2 = 41616$

iii) daqui a três anos o número de habitantes será $y_3 = y_2 + 0{,}02y_2 = y_2\ (1 + 0{,}02) = 40000(1{,}02)^3 = 42448$

Embora tenhamos feito a dedução do valor de y para x inteiro, pode-se mostrar que sob condições bastante gerais ela vale para qualquer valor real.

De um modo geral, se tivermos uma grandeza com valor inicial y_0 e que cresça a uma taxa igual a k por unidade de tempo, então após um tempo x, medido na mesma unidade de k, o valor desta grandeza y será dado por:

$$y = y_0\ (1 + k)^x$$

Tal expressão é conhecida como função exponencial.

No nosso exemplo, teríamos que o número de habitantes daqui a x anos será

$$y = 40.000(1{,}02)^x$$

GRÁFICO

$$y = y_0\ (1 + k)^x$$

É uma expressão válida quando

$k > 0$ (crescimento positivo) ou

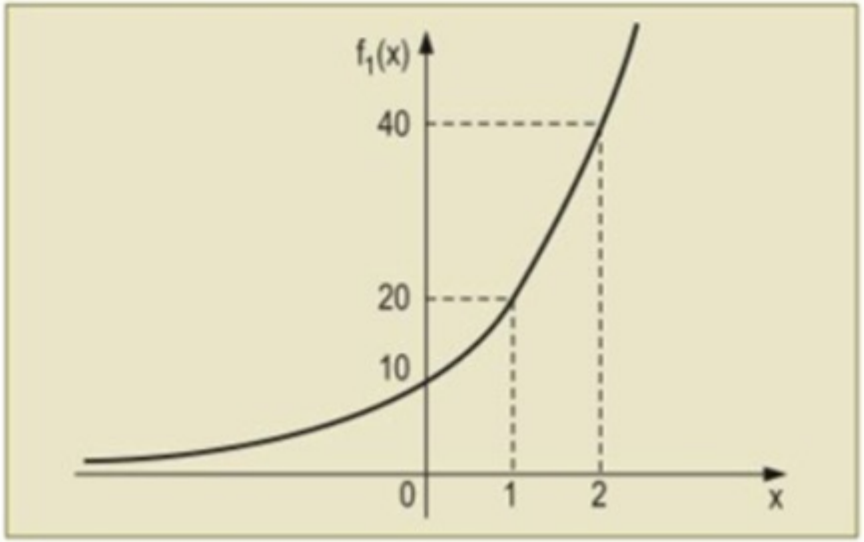
$k < 0$ (crescimento negativo ou decrescimento).

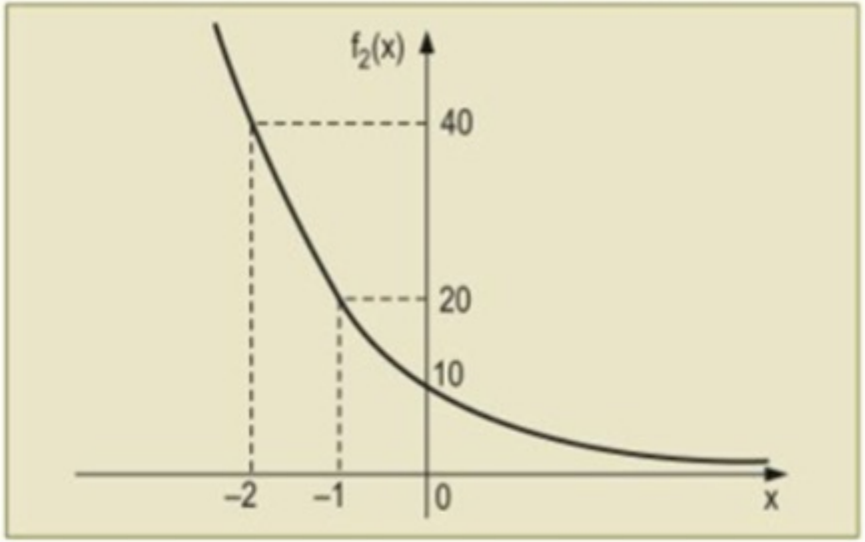
O modelo que deu origem à função exponencial é conhecido como modelo de crescimento exponencial.

Verifica-se que quando

a base (1+ k) é maior que 1 o padrão gráfico da função exponencial é crescente e que

quando a base (1+ k) está entre 0 e 1, o padrão gráfico da função exponencial é decrescente





UNISINOS

EXEMPLO

Uma cidade tem hoje 20000 habitantes e esse número cresce a uma taxa de 3% ao ano. Então:

a) Determine o número de habitantes daqui a 10 anos

b) Determine o número de habitantes daqui a x anos

RESOLUÇÃO

Uma cidade tem hoje 20000 habitantes e esse número cresce a uma taxa de 3% ao ano. Então:

a) O número de habitantes daqui a 10 anos será

$y = 20000(1{,}03)^{10} = 26878.$

b) O número de habitantes daqui a x anos será

$y = 20000(1{,}03)^{x}$

RESOLUÇÃO

Uma cidade tem hoje 20000 habitantes e esse número cresce a uma taxa de 3% ao ano. Então:

a) O número de habitantes daqui a 10 anos será

$y = 20000(1{,}03)^{10} = 26878.$

b) Se daqui a 10 anos o número de habitantes fosse igual a 30 000, a taxa de crescimento anual seria dada por:

$30000 = 20000\ (1 + k)^{10}$

$(1 + k)^{10} = 1{,}5$

Que resulta em $k = 4{,}14\%$

DEFININDO

SABEMOS QUE $2^3 = 8$.

PODEMOS REESCREVER EM FORMA DE LOGARITMO DA SEGUINTE FORMA:

$$\log_2 8 = 3$$

se $a^x = b \leftrightarrow \log_a b = x$

O NÚMERO a É CHAMADO DE BASE.

O NÚMERO b É CHAMADO DE LOGARITMANDO.

O NÚMERO x É CHAMADO DE LOGARITMO.

EXEMPLO: ESCREVA NA FORMA DE LOGARITMO:

a) $2^7 = 128 \leftrightarrow \log_2 128 = 7$

b) $3^5 = 243$

c) $7^2 =$

d) $8^3 =$

CALCULANDO

b) $3^5 = 243 \leftrightarrow \log_3 243 = 5$

c) $7^2 = 49 \leftrightarrow \log_7 49 = 2$

d) $8^3 = 512 \leftrightarrow \log_8 512 = 3$

EXEMPLO: VAMOS CALCULAR $\log_2 64$.

BASTA COLOCAR $\log_2 64 = x$

PELA DEFINIÇÃO $2^x = 64$.

CHEGAMOS EM UMA EQUAÇÃO EXPONENCIAL $2^x = 64 = 2^6$

ASSIM, $\log_2 64 = 6$

1) CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS

a) $\log_2 16$ b) $\log_3 27$

c) $\log_4 128$ d) $\log_{16} 512$

e) $\log 1000$ f) $\log 100$

RESOLUÇÃO

1) CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS

a) $\log_2 16 = x$

b) $\log_3 27 = x$

UNISINOS

RESOLUÇÃO

1) CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS

a) $\log_2 16 = x$

$2^x = 16 = 2^4$

$\log_2 16 = 4$

b) $\log_3 27 = x$

$3^x = 2^7 = 3^3$

$\log_3 27 = 3$

RESOLUÇÃO

c) $\log_4 128 = x$

d) $\log_{16} 512 = x$

RESOLUÇÃO

c) $\log_4 128 = x$

$4^x = 128$

$2^{2x} = 2^7$

$2x = 7$

$\log_4 128 = 7/2$

d) $\log_{16} 512 = x$

$16^x = 512$

$2^{4x} = 2^9$

$4x = 9$

$\log_{16} 512 = 9/4$

BASE 10

e) $\log 1000 = \log_{10} 1000 = x$

f) $\log 100 = \log_{10} 100 = x$

ASSIM QUANDO A BASE NÃO APARECE, ELA VALE 10.

RESOLUÇÃO

e) $\log 1000 = \log_{10} 1000 = x$

$10^x = 1000 = 10^3$

$\log 1000 = 3$

f) $\log 100 = \log_{10} 100 = x$

$10^x = 100 = 10^2$

$\log 100 = 2$

EXEMPLO

CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS:

a) $\log_5 -25$

b) $\log_1 5$

CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA

CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS:

a) $\log_5 -25 = x$

$5^x = -25$ NÃO TEM SOLUÇÃO.

$\nexists \log_5 -25$

b) $\log_1 5 = x$

$1^x = 5$ NÃO TEM SOLUÇÃO

$\nexists \log_1 5$

ASSIM, AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA DO LOGARITMO SÃO:

$a > 0$

$a \neq 1$

$b > 0$

EXERCÍCIO

CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS:

a) $\log_5 5$

b) $\log_7 7$

c) $\log 10$

d) $\log_5 1$

e) $\log_7 1$

f) $\log 1$

PROPRIEDADE 1

CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS:

a) $\log_5 5 = x$

$5^x = 5 = 5^1$

$\log_5 5 = 1$

b) $\log_7 7 = x$

$7^x = 7 = 7^1$

$\log_7 7 = 1$

c) $\log 10 = x$

$10^x = 10 = 10^1$

$\log 10 = 1$

ASSIM, CONSIDERANDO AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

$$\log_a a = 1$$

PROPRIEDADE 2

d) $\log_5 1 = x$

$5^x = 1 = 5^0$

$\log_5 1 = 0$

e) $\log_7 1$

$7^x = 1 = 7^0$

$\log_7 1 = 0$

f) $\log 1 = x$

$10^x = 1 = 10^0$

$\log 1 = 0$

ASSIM, CONSIDERANDO AS CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

$$\log_a 1 = 0$$

PROPRIEDADE 3

1) CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS

a) $\log_2 8$

b) $\log_2 16$

c) $\log_2 32$

d) $\log_2 64$

e) $\log_2 128$

f) $\log_2 256$

g) $\log_2 512$

2) CALCULE OS SEGUINTES VALORES:

a) $\log_2 16 + \log_2 32$

b) $\log_2 (16.32)$

c) $\log_2 8 + \log_2 16$

d) $\log_2 (8.16)$

UNISINOS

PROPRIEDADE 3

1) CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_2 16 = 4$

c) $\log_2 32 = 5$

d) $\log_2 64 = 6$

e) $\log_2 128 = 7$

f) $\log_2 256 = 8$

g) $\log_2 512 = 9$

2) CALCULE OS SEGUINTES VALORES:

a) $\log_2 16 + \log_2 32 = 4 + 5 = 9$

b) $\log_2(16.32) = \log_2(512) = 9$

c) $\log_2 8 + \log_2 16 = 3 + 4 = 7$

d) $\log_2(8.16) = \log_2(128) = 7$

PROPRIEDADE 3

$$\log_c a + \log_c b = \log_c(a.b)$$

Exemplo.

$\log a = 5$ e $\log b = 3$

$\log(a.b) = \log a + \log b = 5 + 3 = 8$

UNISINOS

PROPRIEDADE 4

1) CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_2 16 = 4$

c) $\log_2 32 = 5$

d) $\log_2 64 = 6$

e) $\log_2 128 = 7$

f) $\log_2 256 = 8$

g) $\log_2 512 = 9$

4) CALCULE OS SEGUINTES VALORES:

a) $\log_2 512 - \log_2 64$

b) $\log_2 (512/64)$

c) $\log_2 256 - \log_2 8$

d) $\log_2 (256/8$

UNISINOS

PROPRIEDADE 4

1) CALCULE OS SEGUINTES LOGARITMOS

a) $\log_2 8 = 3$

b) $\log_2 16 = 4$

c) $\log_2 32 = 5$

d) $\log_2 64 = 6$

e) $\log_2 128 = 7$

f) $\log_2 256 = 8$

g) $\log_2 512 = 9$

4) CALCULE OS SEGUINTES VALORES:

a) $\log_2 512 - \log_2 64 = 9 - 6 = 3$

b) $\log_2(512/64) = \log_2(8) = 3$

c) $\log_2 256 - \log_2 8 = 8 - 3 = 5$

d) $\log_2(256/8) = \log_2(32) = 5$

PROPRIEDADE 4

$$\log_c a - \log_c b = \log_c(a/b)$$

Exemplo.

$\log a = 5$ e $\log b = 3$

$\log(a/b) = \log a - \log b = 5 - 3 = 2$

PROPRIEDADE 5

Sabendo que

$\log_c a + \log_c b = \log_c(a.b)$

quanto é o valor de $\log a^3$?

PROPRIEDADE 5

Sabendo que

$\log_c a + \log_c b = \log_c (a.b)$

quanto é o valor de $\log a^3$?

$\log a^3 = \log(a.a.a) =$

$\log a + \log a + \log a = 3\log a$

$\log x^5 = \log(x.x.x.x.x) =$

$\log x + \log x + \log x + \log x + \log x = 5\log x$

$\log b^{10} = \log(b.b.....b) =$

$\log b + \log b + \ldots + \log b = 10\log b$

Assim $\log_c a^n = n.\log_c a$

EXEMPLOS

5) Sabendo que $\log a = 5$,
$\log b = 7$ e $\log c = 2$. Calcule
$\log(a^3.b^2/c)$

$\log(a^3.b^2/c) =$
$\log a^3 + \log b^2 - \log c =$
$3\log a + 2\log b - \log c =$
$3.5 + 2.7 - 2 = 15 + 14 - 2 = 27$

RESUMINDO

DEFINIÇÃO:

$a^x = b \leftrightarrow \log_a b = x$

BASE 10:

$\log 1000 = \log_{10} 1000 = 3$

CONDIÇÕES DE EXISTÊNCIA

$a > 0$, $a \neq 1$, E $b > 0$

P1) $\log_a a = 1$

P2) $\log_a 1 = 0$

P3) $\log_c a + \log_c b = \log_c (a.b)$

P4) $\log_c a - \log_c b = \log_c (a/b)$

P5) $\log_c a^n = n.\log_c a$

PROPRIEDADE 6

1) CALCULE:

a) $\log_3 3 =$

b) $\log_3 9 =$

c) $\log_3 27 =$

d) $\log_3 81 =$

e) $\log_3 243 =$

f) $3^{\log_3 3} =$

g) $3^{\log_3 9} =$

h) $3^{\log_3 27} =$

i) $3^{\log_3 81} =$

j) $3^{\log_3 243} =$

RESPOSTAS

CALCULE:

a) $\log_3 3 = 1$

b) $\log_3 9 = 2$

c) $\log_3 27 = 3$

d) $\log_3 81 = 4$

e) $\log_3 243 = 5$

f) $3^{\log_3 3} = 3^1 = 3$

g) $3^{\log_3 9} = 3^2 = 9$

h) $3^{\log_3 27} = 3^3 = 27$

i) $3^{\log_3 81} = 3^4 = 81$

j) $3^{\log_3 243} = 3^5 = 243$

ASSIM

$$a^{\log_a b} = b$$

POR EXEMPLO, $5^{\log_5 7} = 7$

BASE e

UMA BASE MUITO COMUM, ALÉM DA BASE DEZ, É O NÚMERO DE EULER.

O NÚMERO DE EULER É INDICADO COM A LETRA e E VALE APROXIMADAMENTE 2,71

NA CALCULADORA O LOGARITMO DE BASE e É INDICADO COM ln

ASSIM, POR EXEMPLO

$\log_e 10 = \ln 10 \cong 2{,}3$

LOGARITMO BINÁRIO

UMA BASE MUITO COMUM, ALÉM DA BASE DEZ E O NÚMERO DE EULER É A BASE 2. PODEMOS ESCREVER O LOGARITMO BINÁRIO OU DE BASE DOIS DA SEGUINTE FORMA:

$$\lg x = \log_2 x$$

EM TEORIA DA INFORMAÇÃO, O NÚMERO DE DÍGITOS (BITS) NA REPRESENTAÇÃO BINÁRIA DE UM INTEIRO POSITIVO n É A PARTE INTEIRA DE $1 + \lg n$.

MUDANÇA DE BASE

CONSIDERANDO A EQUAÇÃO

$$2^x = 8$$

PODERÍAMOS ESCREVER NA FORMA DE LOGARITMO DA SEGUINTE FORMA

$$\log_2 8 = x$$

RESOLVER ESSA EXPRESSÃO É FÁCIL, POIS $2^3 = 8$ E, POR CONSEQUÊNCIA, $\log_2 8 = 3$

2) REESCREVA NA FORMA DE LOGARITMOS AS SEGUINTES EQUAÇÕES E AS RESOLVA , SE POSSÍVEL

a) $2^x = 16$

b) $3^x = 81$

c) $10^x = 1000$

d) $e^x = e^2$

e) $7^x = 5$

MUDANÇA DE BASE

a) $2^x = 16 \rightarrow \log_2 16 = 4$

b) $3^x = 81 \rightarrow \log_3 81 = 4$

c) $10^x = 1000 \rightarrow \log 1000 = 3$

d) $e^x = e^2 \rightarrow \ln e^2 = 2$

e) $7^x = 5 \rightarrow \log_7 5 = ?$

PARA OS CASOS EM QUE NÃO É POSSÍVEL FATORAR, EXISTE A MUDANÇA DE BASE.

ESCOLHEMOS A BASE a CONVENIENTE E PROCEDEMOS A SEGUINTE RELAÇÃO:

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

MUDANÇA DE BASE

e) $7^x = 5 \rightarrow \log_7 5 = ?$

SABENDO QUE

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

VAMOS APLICAR NO EXEMPLO. UMA BASE INTERESSANTE PARA TRABALHARMOS É A BASE 10, QUE TEM OS VALORES DADOS NA CALCULADORA

$$\log_7 5 = \frac{\log_c 5}{\log_c 7} = \frac{\log 5}{\log 7} \cong 0{,}8271$$

ENTÃO

$7^{0,8271} \cong 5$

OBSERVAÇÃO: VOCÊ PODE UTILIZAR A BASE e:

$$\log_7 5 = \frac{\ln 5}{\ln 7} \cong 0{,}8271$$

EXEMPLOS

3) DETERMINE, COM O AUXÍLIO DA CALCULADORA A SOLUÇÃO DAS SEGUINTES EQUAÇÕES EXPONENCIAIS:

a) $13^x = 143$

b) $1{,}5^x = 6{,}42$

c) $10^x = 64$

d) $2^x = 8$

EXEMPLOS

3) DETERMINE, COM O AUXÍLIO DA CALCULADORA A SOLUÇÃO DAS SEGUINTES EQUAÇÕES EXPONENCIAIS:

a) $13^x = 143 \rightarrow x = \log_{13}143 = \log 143/\log 13 \cong 1{,}93$

b) $1{,}5^x = 6{,}42 \rightarrow x = \log_{1{,}5}6{,}42 = \log 6{,}42/\log 1{,}5 \cong 4{,}59$

c) $10^x = 64 \rightarrow x = \log 64 \cong 1{,}81$

d) $2^x = 8 \rightarrow x = \log_2 8 = \log 8/\log 2 = 3$

EXEMPLOS

3) DETERMINE, COM O AUXÍLIO DA CALCULADORA A SOLUÇÃO DAS SEGUINTES EQUAÇÕES EXPONENCIAIS:

a) $13^x = 143 \rightarrow x = \log_{13}143 = \log 143/\log 13 \cong 1,93$

b) $1,5^x = 6,42 \rightarrow x = \log_{1,5}6,42 = \log 6,42/\log 1,5 \cong 4,59$

c) $10^x = 64 \rightarrow x = \log 64 \cong 1,81$

d) $2^x = 8 \rightarrow x = \log_2 8 = \log 8/\log 2 = 3$

EXERCÍCIOS

16) O PIB de um país cresce a uma taxa igual a 5% ao ano. Daqui a quantos anos aproximadamente o PIB triplicará?

17) Um automóvel novo vale hoje $ 20.000,00 e sofre desvalorização de 15% ao ano. Daqui a quanto tempo seu valor se reduzirá à metade.