UNISINOS

AULA 16 – RECORRÊNCIAS

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO

PROFESSOR PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

RECURSÃO LINEAR DE SEGUNDA ORDEM

Uma recorrência de segunda ordem é expressa x_{n+1} em função de x_n e de x_{n-1} e é dita linear se, e somente se, essa função for do primeiro grau.

Vamos resolver recursões lineares de segunda ordem com o formato

$$x_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0$$

É possível mostrar que essa equação tem soluções do formato

$$x_n = q^n$$

Fazendo a devida substituição, temos uma equação associada à recorrência:

$$q^2 + bq + c = 0$$

PRIMEIRO CASO: $\Delta > 0$

Exemplo: a sequência de Fibonacci é conhecida por utilizar–se de dois valores iniciais. Dessa forma,

$x_0 = 0$ e $x_1 = 1$

$x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$, $n > 1$

Vamos resolver recursões lineares de segunda ordem com o formato

$$x_{n+1} + bx_n + cx_{n-1} = 0$$

Nesse exemplo, fazemos

$x_{n+1} - x_n - x_{n-1} = 0$

Nesse exemplo, teríamos $b = -1$ e $c = -1$

Fazendo a devida substituição, temos uma equação associada à recorrência:

$$q^2 + bq + c = 0$$

obtemos: $q^2 - q - c = 0$

As raízes dessa equação são:

$$\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

PRIMEIRO CASO: $\Delta > 0$

Quando temos $\Delta > 0$ a solução é do formato

$$a_n = c_1 q_1{}^n + c_2 q_2{}^n$$

onde q_1 e q_2 são as raízes da equação anterior. Da mesma forma c_1 e c_2 são determináveis com os termos iniciais.

Nesse exemplo, teríamos

$$c_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

e

$$c_2 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$$

Fazendo a substituição, obtemos:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

EXEMPLOS

Determinar uma fórmula fechada para

a) $a_{n+1} - a_n - 6a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 1$ e $a_1 = -4$

b) $a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 4$ e $a_1 = 7$

c) $a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 4$

SOLUÇÃO

Determinar uma fórmula fechada para

a) $a_{n+1} - a_n - 6a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 1$ e $a_1 = -4$

$1{,}4(-2)^n - 0{,}4.3^n$

b) $a_{n+1} - 5a_n + 6a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 4$ e $a_1 = 7$

$a_n = 5.2^n - 3^n$

c) $a_{n+1} - 4a_n + a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 4$

$a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$

SEGUNDO CASO: $\Delta = 0$

Vamos resolver

$a_{n+1} + 6a_n + 9a_{n-1} = 0$, com

$a_0 = 2$ e $a_1 = 5$.

Fazendo a devida substituição, temos uma equação associada à recorrência:

$$q^2 + bq + c = 0$$

obtemos: $q^2 + 6q + 9 = 0$ que tem só uma raiz real, $q = -3$.

Quando temos $\Delta = 0$ a solução é do formato

$$a_n = c_1 {q_1}^n + c_2 n {q_2}^n$$

No exemplo, obtemos $c_1 = 2$ e $c_2 = -11/3$

UNISINOS

EXEMPLOS

Determinar uma fórmula fechada para

a) $a_{n+1} - 6a_n + 9a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 5$ e $a_1 = 27$

b) $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 4$ e $a_1 = 7$

c) $a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 4$

EXEMPLOS

Determinar uma fórmula fechada para

a) $a_{n+1} - 6a_n + 9a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 5$ e $a_1 = 27$

$a_n = 3^n.(4 + 5n)$

b) $a_{n+1} - 2a_n + a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 4$ e $a_1 = 7$

$a_n = 3n + 1$

c) $a_{n+1} - 4a_n + 4a_{n-1} = 0$, com $a_0 = 2$ e $a_1 = 4$

$a_n = 2^{n+1}$

TERCEIRO CASO: $\Delta < 0$

Vamos resolver

$a_{n+1} - 2a_n + 4a_{n-1} = 0$, com

$a_0 = 1$ e $a_1 = 1$.

Fazendo a devida substituição, temos uma equação associada à recorrência:

$$q^2 + bq + c = 0$$

obtemos: $q^2 - 2q + 4 = 0$ que não temos raízes real, $q = -3$.

Quando temos $\Delta < 0$ a equação do segundo grau tem raízes complexas. No exemplo as raízes são $1 \pm i\sqrt{3}$.

Nesses casos, a solução é do formato

$$a_n = r^n[c_1\cos(n\theta) + c_2\mathrm{sen}(n\theta)]$$

onde r e θ são, respectivamente, o módulo e o argumento das raízes q na forma trigonométrica.

Nesse exemplo, obteríamos

$$x_n = 2^n\cos(60°n)$$