AULA 10 – INDUÇÃO MATEMÁTICA

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO

PROFESSOR PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

CONJECTURAS

Conforme o dicionário Oxford, conjecturar é o “ato ou efeito de inferir ou deduzir que algo é provável, com base em presunções, evidências incompletas, pressentimentos; conjetura, hipótese, presunção, suposição”.

Vamos fazer conjecturas sobre o valor lógico das proposições abaixo:

1) $n^2 + n + 41$ é um número primo, $\forall\ n \in N$.

2) $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito,$\forall\ n \in N^*$.

3) Todo número inteiro par maior que 2 é soma de dois primos.

RESPOSTAS

1) $n^2 + n + 41$ é um número primo, $\forall\, n \in N$.

Quando $n < 40$, a afirmação é verdadeira.

Quando $n = 40$ a afirmação é falsa.

Assim a proposição é falsa e demonstramos isso com um contraexemplo

2) $991n^2 + 1$ não é um quadrado perfeito,$\forall\, n \in N^*$.

Essa é uma equação de Pell. Algoritmos computacionais determinam com certa velocidade que, quando n=12055735790331359447442538767, temos $991n^2 + 1 = 379516400906811930638014896080^2$.

O mais importante aqui é verificar que não se pode ter afirmativas como verdadeiras sem provas matemáticas precisas.

UNISINOS

CONJECTURA FORTE DE GOLDBACH

Todo número inteiro par maior que 2 é soma de dois primos.

$4 = 2 + 2$

$6 = 3 + 3$

$10 = 3 + 5$

$12 = 7 + 5$

Algoritmos atuais conseguiram mostrar que para números até 4.10^{18} a afirmação é verdadeira, mas isso não é aceito como prova.

INDUÇÃO MATEMÁTICA

Uma proposição aparentemente verdadeira para os primeiros naturais pode ser falsa. Para ter certeza da veracidade da proposição precisamos provar que ela sempre é verdadeira, para isso uma ferramenta é o Princípio da Indução Finita (ou Matemática).

Princípio da Indução Finita

Seja p(n) uma propriedade relativa aos números naturais. Seja $a \in N$.

Se

(i) (Base de indução) p(a) é verdadeira

e

(ii) (Passo de indução) $n \geq a$, $p(n) \Rightarrow p(n+1)$ é verdade.

Então p(n) é verdadeira para todo $n \in N$, $n \geq a$.

EFEITO DOMINÓ

Um exemplo simples que ilustra o Princípio da Indução Matemática é o "efeito dominó": uma fila sem fim de peças do jogo dominó para a qual, ao derrubar a primeira peça, todas as demais peças são derrubadas em cadeia.

Para isto suponhamos verdadeiras as seguintes proposições:

a) a primeira peça é derrubada na direção das demais;

b) se qualquer peça está suficientemente próxima da seguinte da fila, então, ao ser derrubada, fará com que a sua vizinha seguinte também seja derrubada.

EXEMPLOS

Exemplos/exercícios: Utilize o Princípio de Indução Matemática para provar:

1)

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}, \forall \mathrm{n} \geq 1.$$

EXEMPLOS

2)

$$1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^n = 2^{n+1} - 1, \forall n \geq 0$$

EXEMPLOS

3)

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2, \qquad \forall n \geq 1.$$

EXEMPLOS

4)

$$\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}+\frac{1}{4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}, \forall n \geq 1.$$

UNISINOS

EXEMPLOS

5)

$$1 + 5 + 9 + \cdots + (4n - 3) = n(2n - 1), \forall n \geq 1$$

EXEMPLOS

6)

$2^{3n} - 1$ é divisível por 7, $\forall n \geq 1$.

EXEMPLOS

7)

$$2^{5n+1} + 5^{n+2} \text{ é divisível por 3, } \forall n \geq 1.$$

EXEMPLOS

8)

$$10^{n} + 3.4^{n+2} + 5 \text{ é múltiplo de } 9, \ \forall n \geq 1.$$

UNISINOS

EXEMPLOS

9) Quanto vale a soma

a)

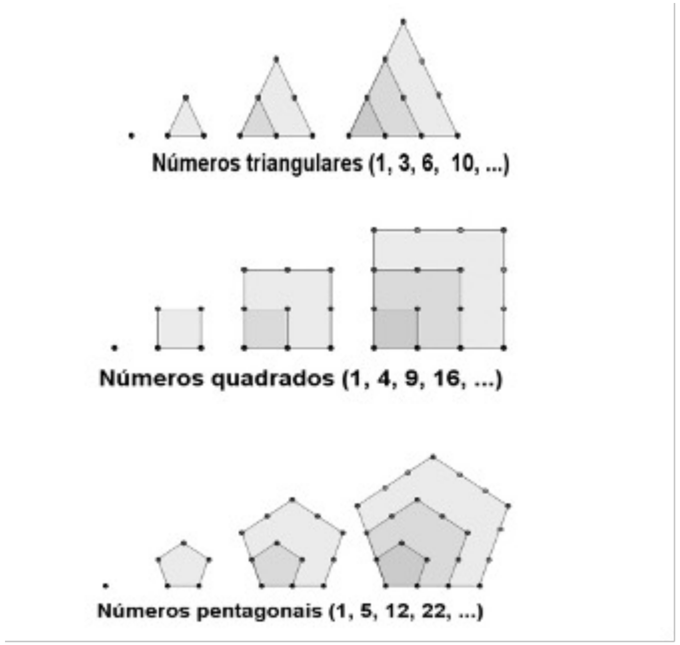
$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 50005 =$$

b)

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{992} =$$

EXEMPLOS

10) Os pitagóricos sempre buscavam compreender a natureza íntima dos números. Sendo assim, elaboraram os números figurados que são números expressos como reunião de pontos equidistantes numa determinada configuração geométrica, isto é, a quantidade de pontos representa um número, e estes são agrupados de formas geométricas sugestivas. Os diagramas abaixo trazem alguns números figurados.



A partir disto e das fórmulas estudadas, responda:

a) Quantos pontos terá o 50º triângulo da sequência de números triangulares?

b) Qual é o valor do 200º número quadrado?

c) Quantos pontos são necessários para formar o 35° número pentagonal?