

AULA 06 – SOMA DE PA; PG

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO
PROFESSOR PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

RELEMBRANDO

Podemos definir a PA com uma recorrência:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Sendo a razão

$$r = a_{n+1} - a_n$$

Com $n > 0$ natural.

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

GENERALIZANDO

Podemos generalizar a expressão

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

PARA

$$a_n = a_k + (n - k).r$$

EXEMPLOS

1) Considere que o número de países que passaram a participar dos Jogos Olímpicos em um dado período de tempo obedeça à seguinte sequência $(11, a, 29, b, 47)$, que é uma progressão aritmética, então a soma $a+b$ é igual a:

- a) 49
- b) 58
- c) 67
- d) 76
- e) 86

2) Pedro é um tenista profissional que vem treinando 120 saques por dia. Porém, a partir de amanhã, a cada dia de treino ele fará 5 saques a mais que no treino anterior. Se o objetivo de Pedro é alcançar o dia em que treinará 180 saques, ele conseguirá isso no _____ dia de treino, considerando hoje o primeiro dia.

- a) 10°
- b) 12°
- c) 13°
- d) 15°

EXEMPLOS

3) A corrida de São Silvestre, em São Paulo, é uma das mais importantes provas de rua disputadas no Brasil. Seu percurso mede 15 km. João, que treina em uma pista circular de 400 m, pretende participar dessa corrida. Para isso, ele estabeleceu a seguinte estratégia de treinamento: correrá 7000 m na primeira semana; depois, a cada semana, aumentará duas voltas na pista, até atingir a distância exigida na prova. Determine em que semana do treinamento João atingirá a distância exigida na prova.

SOMA DE PROGRESSÃO ARITMÉTICA

Seja a_n uma PA. Podemos dizer que:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n a_{n+1-i}$$

Isto é,

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

Somando as duas equações obtemos

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 \sum_{i=1}^n a_i = n \cdot (a_1 + a_n)$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

EXEMPLOS

4) Determine a soma dos 30 primeiros termos da PA (2, 5,)

5) A soma dos seis termos consecutivos de uma PA é 12 e o último termo é 7. Escreva a PA.

6) Resolver a equação

$1 + 7 + \dots + x = 280$, sabendo se que os termos da esquerda formam uma PA

EXEMPLOS

7) Duas progressões aritméticas, de n termos cada, possuem soma dos termos dadas por $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + x$ e $2 + 4 + 6 + \dots + (x + 1)$, sendo x um número natural ímpar. Sabendo-se que

$$\frac{1 + 3 + 5 + 7 + \dots + x}{2 + 4 + 6 + \dots + (x + 1)} = \frac{115}{116}$$

o valor de x que resolve tal equação é

- a) 113.
- b) 115.
- c) 59.
- d) 229.
- e) 197.

8) No país Diasmelhores, um candidato à Presidência da República foi convidado pela rádio SOMALTO para, durante 20 semanas antes das eleições, divulgar, semanalmente, suas propostas de governo. Ficou estabelecido pela rádio que, na primeira semana, o candidato teria 120 minutos disponíveis para fazer sua propaganda eleitoral e que, a cada semana seguinte, teria 5 minutos a menos que na semana anterior. No final das 20 semanas, o candidato terá utilizado um total de

- a) 2900 minutos.
- b) 1450 minutos.
- c) 3350 minutos.
- d) 6700 minutos.
- e) 2400 minutos.

EXEMPLOS

9) Se em uma progressão aritmética o vigésimo termo é 2 e a soma dos cinquenta primeiros termos é igual a 650, então o número de divisores inteiros do primeiro termo dessa sequência é:

- a) 72
- b) 36
- c) 9
- d) 18

10) Para cada número inteiro positivo n , as linhas do quadro abaixo são definidas segundo a estrutura lógica que segue:

L_1 1

L_2 1, 2

L_3 1, 2, 3

L_4 1, 2, 3, 4

.....

.....

L_n 1, 2, 3,, n

.....

A soma dos números que compõem a linha L_{2020} é igual a

- a) 2 041 210.
- b) 2 441 120.
- c) 2 121 020.
- d) 2 241 210.

PROGRESSÃO GEOMÉTRICA

Podemos definir a PG com uma recorrência:

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

Sendo a razão

$$q = a_{n+1} / a_n$$

EXEMPLOS

11) Determine a razão e os seis primeiros termos das PGs:

a) 4, 8,

b) 6, - 18,

c) 8, 2,

CLASSIFICAÇÃO

Uma PG pode ser classificada em função de seu primeiro termo e de sua razão.

Se $a_1 > 0$

a) 2, 6, ... é crescente, $q > 0$

b) 5, 5 é constante, $q = 1$

c) 256, 64, é decrescente, $0 < q < 1$.

d) 2, - 6 é oscilante, $q < 0$

Se $a_1 < 0$

a) - 2, - 6, ... é decrescente, $q > 0$

b) - 5, - 5 é constante, $q = 1$

c) - 256, - 64, é crescente, $0 < q < 1$.

d) - 2, 6 é oscilante, $q < 0$

EXEMPLO

12) Se $(x, 3x + 2, 10x + 12)$ é uma PG, determine o valor de x , da razão e escreva a PG.

TERMO MÉDIO

Se (a, b, c) formam uma PG, $b^2 = ac$.

Observação; você pode escrever a PG como $(b/q, b, b.q)$

13) A soma de três termos consecutivos de uma PG é 39. e o produto dos três termos é 729 Escreva os três termos da PG.

TERMO GERAL

14) Escrever o termo geral da PG 2, 4,

FÓRMULA

A fórmula do termo geral é $a_n = a_1 q^{n-1}$

Também podemos generalizar: $a_n = a_k q^{n-k}$

Exemplos:

15) Calcular o 10º termo da PG 2, 6,...

16) Numa PG de quatro termos, a razão é 5 e o último termo é 375. Calcular o primeiro termo dessa PG.

17) Numa PG de seis termos, o primeiro termo é 6 e o último termo é 1458. Calcular a razão dessa PG.

MAIS EXEMPLOS

- 18) Numa PG o segundo termo é 8 e o quinto termo é 512. Escrever a PG.
- 19) Em uma PG a soma do segundo termo com o terceiro é 38. A soma do sexto com o sétimo termo é 288. Calcule a razão dessa PG.
- 20) Escreva a PG sabendo que $a_1 + a_2 + a_3 = 7$ e que $a_4 + a_5 + a_6 = 56$.

MAIS EXEMPLOS

21) Seja a PG $(24, 36, \dots)$.
Determine $a_5 + a_6$.

- a) $81/2$
- b) $405/2$
- c) $1215/4$
- d) $1435/4$

22) Uma PG (a_1, a_2, \dots) tem $a_1 = 3/8$ e razão 5. Uma segunda PG (b_1, b_2, \dots) tem razão $5/2$. Se $a_5 = b_4$, b_1 vale:

- a) $25/4$
- b) 5
- c) $3/20$
- d) 15
- e) $9/2$

INTERPOLAÇÃO GEOMÉTRICA

23) Interpolar 3 meios geométricos entre 3 e 48.

MAIS EXEMPLOS

- 24) Interpolar 4 meios geométricos entre 6 e 192.
- 25) Interpolando-se dois meios geométricos entre 18 e x , obtém-se uma PG de razão 3. Determine x .
- 26) Interpolando-se dois meio geométricos entre a e k^{12} , obtém-se uma PG. Determine a razão dessa PG.
- 27) Quantos meios geométricos devem ser inseridos entre 32 e 2048 para que a razão da PG seja 2?
- 28) Inserir dois meios aritméticos entre -2 e 2 .