UNISINOS

AULA 13 – RECORRÊNCIAS

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO

PROFESSOR PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

INDUÇÃO

Quando trabalhamos com indução, mostramos que determinada relação era verdadeira para todo natural n, utilizando três passos:

i) Verificamos que vale para o primeiro;

ii) Supomos que vale para o k – ésimo e

iii) Provamos que valor para o k + 1 – ésimo.

Exemplo: Mostrar que

$1 + 2 + 3 + \ldots + n = n.(n + 1)/2$

i) Vemos que vale para $n = 1$, poi

$1 = 1.(1 + 1)/2$

ii) Supomos que

$1 + 2 + 3 + \ldots + k = k.(k + 1)/2$

iii) Verificamos que

$1 + 2 + 3 + \ldots + k + k + 1 =$

$k.(k + 1)/2 + k + 1 =$

$(k + 1).(k + 2)/2,$

o que completa a demonstração.

RECURSÃO

Chamamos de processo recursivo, o processo de construir uma sequência com duas informações:

i) Um valor inicial

ii) Uma metodologia para calcular o próximo elemento

O processo recursivo lembra muito o processo indutivo e é, por vezes lembrado como o método Droste

SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci é conhecida por utilizar – se de dois valores iniciais. Dessa forma,

$a_1 = 0$ e $a_2 = 1$

$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$

Assim,

$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 0 = 1$

$a_4 = a_3 + a_2 = 1 + 1 = 2$

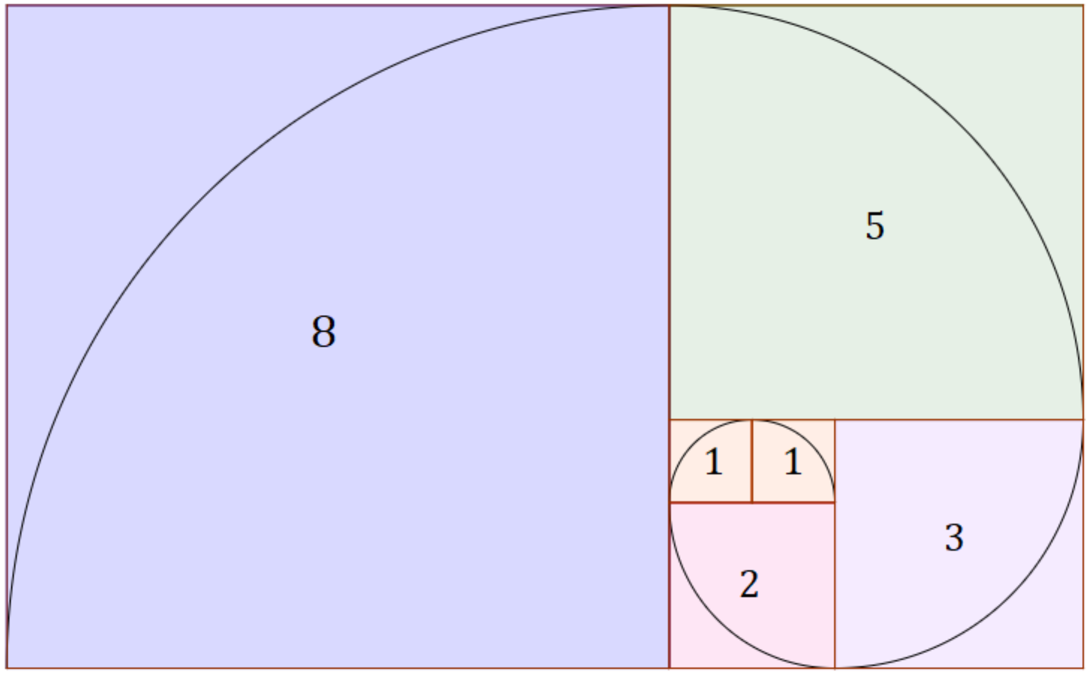
$a_5 = a_4 + a_3 = 2 + 1 = 3$

$a_6 = a_5 + a_4 = 3 + 2 = 5$

$a_7 = a_6 + a_5 = 5 + 3 = 8$

$a_8 = a_7 + a_6 = 8 + 5 = 13$....

A sequência de Fibonacci tem uma fórmula fechada



EXEMPLOS

Nos dois exemplos que vimos, é importante informar que as soluções não recursivas são mais ágeis, mas a proposição recursiva é mais curta.

1) Na sequência a_n definida recursivamente abaixo, encontre a_2, a_3, a_4 e a_5.

$a_1 = 2$

$a_n = 2.a_{n-1}, n > 2$

2) Apresente uma sequência recursiva a_n para

$$a_n = a^n, n > 0$$

SOLUÇÃO

1) Na sequência a_n definida recursivamente abaixo, encontre a_2, a_3, a_4 e a_5.

$a_1 = 2$

$a_n = 2.a_{n-1}, n > 2$

$a_2 = 2.a_1 = 2.2 = 4$

$a_3 = 2.a_2 = 2.4 = 8$

$a_4 = 2.a_3 = 2.8 = 16$

$a_5 = 2.a_4 = 2.16 = 32$

2) Apresente uma sequência recursiva a_n para

$$a_n = a^n, n > 0$$

$a_1 = a$

$a_n = a.\ a_{n-1}, n > 1.$

RESOLVENDO UMA RECURSÃO

Na função a_n definida recursivamente anteriormente, encontramos a_2, a_3, a_4 e a_5 e verificamos um padrão.

$a_1 = 2 = 2^1$

$a_n = 2.a_{n-1}$, $n > 2$

$a_2 = 2.a_1 = 2.2 = 4 = 2^2$

$a_3 = 2.a_2 = 2.4 = 8 = 2^3$

$a_4 = 2.a_3 = 2.8 = 16 = 2^4$

$a_5 = 2.a_4 = 2.16 = 32 = 2^5$

Temos a sensação de que

$a_n = 2^n$.

Podemos mostrar por indução:

i) Verificamos que $a_1 = 2^1$;

ii) Supomos que $a_k = 2^k$ e

iii) Verificamos que $a_{k+1} = 2.a_k = 2.2^k = 2^{k+1}$.

EXEMPLOS

Na função a_n definida recursivamente abaixo, determinar uma fórmula fechada para a_n

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 3, n > 1$

Na função a_n definida recursivamente abaixo, determinar uma fórmula fechada para a_n

$a_1 = 1$

$a_n = 2. a_{n-1} + 1, n > 1$

SOLUÇÃO

Na função a_n definida recursivamente abaixo, determinar uma fórmula fechada para a_n

$a_1 = 1$

$a_n = a_{n-1} + 3, n > 1$

Geramos a seguinte sequência:

1, 4, 7, 10, 13, ... Esta sequência é uma Progressão Aritmética ou PA.

Chamamos 3 de razão e a fórmula fechada é

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

Assim, $a_n = 1 + (n - 1).3 = 3n - 2$.

Na função a_n definida recursivamente abaixo, determinar uma fórmula fechada para a_n

$a_1 = 1$

$a_n = 2. a_{n-1} + 1, n > 1$

A função é denominada problema da Torre de Hanói e gera a sequência:

1, 3, 7, 15, 31, ...

Uma fórmula fechada para a_n é

$a_n = 2^n - 1$

RECURSÕES JÁ VISTAS

Podemos definir a PG com uma recorrência:

$$a_{n+1} = a_n.q$$

com a_1 definido

e

podemos definir a PA com uma recorrência:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

com a_1 definido.

RECURSÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

Uma recorrência de primeira ordem expressa x_{n+1} em função de x_n. Ela é dita linear se, e somente se, essa função for do primeiro grau.

$x_{n+1} = 2x_n - n^2$ é linear

$x_{n+1} = n.x_n$ é linear

$x_{n+1} = {x_n}^2$ não é linear.

Em geral é fácil resolver uma equação de recorrência linear homogênea de primeira ordem, como podemos ver nos exemplos a seguir:

Exemplo:

Uma recursão importante:

Resolva

$x_{n+1} = nx_n$,

$x_1 = 1$, isto é, ache uma fórmula fechada para x_n.

RECURSÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

Resolva

$x_{n+1} = nx_n,$

$x_1 = 1,$

isto é, ache uma fórmula fechada para x_n.

$x_2 = 1x_1$

$x_3 = 2x_2 = 2 \cdot 1x_1 = 2!x_1$

$x_4 = 3x_3 = 3 \cdot 2 \cdot 1x_1 = 3!x_1$

$x_5 = 4x_4 = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1x_1 = 4!x_1$

$. . . . .$

$x_n = (n-1)x_{n-1} = (n-1) \cdot (n-2)!x_1 = (n-1)!x_1$

Como $x_1 = 1$ segue que $x_n = (n-1)!$

Obs: essa equação é uma equação homogênea.

Resolva

$x_{n+1} = 9x_n,$

$x_1 = C$, isto é, ache uma fórmula fechada para x_n.

RECURSÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

Resolva

$x_{n+1} = 9x_n$,

$x_1 = C$,

isto é, ache uma fórmula fechada para x_n.

$x_2 = 9x_1$

$x_3 = 9x_2 = 9.9.x_1 = 9^2x_1$

$x_4 = 9x_3 = 9.9.9x_1 = 9^3x_1$

$x_5 = 9x_4 = 9.9.9.9.x_1 = 9^4x_1$

. . . .

$x_n = 9x_{n-1} = 9.9^{n-2}.x_1 = 9^{n-1}x_1$

Como $x_1 = C$ segue que $x_n = C.9^{n-1}$

.

Resolva

$x_{n+1} = x_n + 3^n$

$x_1 = 2$, isto é, ache uma fórmula fechada para x_n.

RECURSÃO LINEAR DE PRIMEIRA ORDEM

Resolva $x_{n+1} = x_n + 3^n$ e $x_1 = 2$, isto é, ache uma fórmula fechada para x_n.

$x_2 = 3^1 + x_1$

$x_3 = 3^2 + x_2$

$x_4 = 3^3 + x_3$

$x_5 = 3^4 + x_4$

. . . .

$x_n = 3^{n-1} + x_{n-1}$

Somando, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} 3^i$$

Como já vimos soma de PG, podemos dizer que

$$x_n = 2 + 3.\frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{3^n + 1}{2}$$

UM TIPO ESPECIAL DE RECORRÊNCIA

Resolva $x_{n+1} = x_n + f(n)$ e x_1 conhecido

$x_2 = f(1) + x_1$

$x_3 = f(2) + x_2$

$x_4 = f(3) + x_3$

$x_5 = f(4) + x_4$

. . . .

$x_n = f(n – 1) + x_{n – 1}$

Somando, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

Se a soma for a de PA ou PG, sabemos calcular!

EXEMPLOS

Resolva as recorrências abaixo

a) $a_{n+1} = a_n + n$ e $a_1 = 0$

b) $a_{n+1} = a_n + 2^n$ e $a_1 = 1$

c) $a_{n+1} = a_n + 2^{-n}$ e $a_1 = 2$

RESPOSTAS

Resolva as recorrências abaixo

a) $a_{n+1} = a_n + n$ e $a_1 = 0 \rightarrow a_n = n(n + 1)/2$

b) $a_{n+1} = a_n + 2^n$ e $a_1 = 1 \rightarrow a_n = 2^n - 1$

c) $a_{n+1} = a_n + 2^{-n}$ e $a_1 = 2 \rightarrow a_n = 3 - 2^{-n+1}$

UNISINOS

ALTERANDO

Resolva $a_{n+1} = 2a_n + 4^n$ e $x_1 = 3$

Note que essa recorrência não é igual a anterior. Em uma recorrência como esta, fazemos o seguinte artifício: procuramos uma solução da equação homogênea

$$b_{n+1} = 2b_n$$

Uma solução dessa equação homogênea é

$$b_n = 2^{n-1}.$$

Na sequência, podemos fazer

$$a_n = b_n.x_n = 2^{n-1}x_n.$$

Quando substituímos, obtemos:

$$2^n x_{n+1} = 2^n x_n + 4^n$$

Que pode ser reescrita como:

$$x_{n+1} = x_n + 2^n$$

Que pode ser resolvida como a anterior!

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i) = 3 + 2.\frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1}$$

$$= 2^n + 1$$

Pois, $a_1 = 2^0 x_1 = 3$

Finalizamos, colocando

$$a_n = b_n.x_n = 2^{n-1}(2^n + 1)$$

GENERALIZANDO

Para resolver $a_{n+1} = g(n)a_n + f(n)$ e x_1 conhecido, determinamos a solução da equação homogênea

$$b_{n+1} = g(n)b_n$$

e fazemos

$$a_n = b_n . x_n$$

Essa transformação permite escrevermos

$$x_{n+1} = x_n + f(n) \text{ e } x_1 \text{ conhecido}$$

Somando, obtemos:

$$x_n = x_1 + \sum_{i=1}^{n-1} f(i)$$

EXEMPLOS

Resolva as recorrências abaixo

a) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ e $a_1 = 2$

b) $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$ e $a_1 = 2$

c) $a_{n+1} = 3a_n + 4^n$ e $a_1 = 5$

RESPOSTAS

Resolva as recorrências abaixo

a) $a_{n+1} = 2a_n + 1$ e $a_1 = 2 \rightarrow a_n = 3.2^{n-1} - 1$
b) $a_{n+1} = 3a_n + 3^n$ e $a_1 = 2 \rightarrow a_n = (n+1).3^{n-1}$
c) $a_{n+1} = 3a_n + 4^n$ e $a_1 = 5 \rightarrow a_n = 3^{n-1} + 4^n$