

AULA 06 – SOMA DE PG

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO
PROFESSOR PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

RELEMBRANDO

Considere a PA

$$a_{n+1} = a_n + r$$

ou

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

A soma da PA é dada por

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$$

AVANÇANDO

Considere a PG

$$a_{n+1} = a_n \cdot q$$

ou

$$a_n = a_1 q^{n-1}$$

Vamos determinar a soma da PG

PG FINITA

Na PA vimos que

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$S = a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \dots + a_3 + a_2 + a_1$$

$$2 \sum_{i=1}^n a_i = n \cdot (a_1 + a_n)$$

Na PG, um raciocínio possível é:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n$$

$$Sq = qa_1 + qa_2 + qa_3 + \dots + qa_{n-2} + qa_{n-1} + qa_n = a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n + 1$$

$$= a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_{n-2} + a_{n-1} + a_n - a_1 + a_{n+1} = S - a_1 + a_{n+1}$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1} = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

EXEMPLOS

1) Considere a PG $(1, 3, \dots)$. Determine:

a) a soma dos seis primeiros termos

b) O valor de n para que $S_n = 29524$

2) Determine x de modo que $x + 3x + \dots + 729x = 5465$, sabendo – se que o lado esquerdo da igualdade é a soma dos elementos de uma PG.

EXEMPLOS

- 3) Calcule a soma dos dez primeiros termos da PG (1, 2, ...)
- 4) Qual é a soma dos cinco primeiros termos de uma PG, com $a_1 = 80$ e $q = \frac{1}{2}$?
- 5) Calcular a soma dos seis primeiros termos da PG (5, 10, ...)
- 6) Em uma PG crescente sabe-se que $a_2 = 6$ e $a_4 = 54$. Calcule S_6 .
- 7) Dada a PG (1, - 2 , ... , calcule S_{10} .

MATEMÁTICA FINANCEIRA

8) Uma mercadoria custou R\$ 100.000,00 e foi vendida por R\$ 125.000,00.

- a) o lucro foi de R\$ _____.
- b) o lucro foi de _____% do custo.
- c) o lucro foi de _____% da venda.
- d) a venda foi _____% do custo.

9) Um carro foi vendido por R\$ 10.000,00, com prejuízo de 20% sobre o preço da compra. O carro havia sido comprado, em reais, por:

- a) 10.200,00 b) 11.500,00 c) 12.000,00 d) 12.500,00 e) 13.000,00

CONCEITOS INICIAIS DE MATEMÁTICA FINANCEIRA

CAPITAL (C)

O Capital é o valor aplicado através de alguma operação financeira. Também conhecido como: Principal, Valor Atual, Valor Presente ou Valor Aplicado.

PERÍODO (t)

O período (ou tempo) pode ser exato (365 dias no ano) ou comercial (360 dias no ano, 30 dias por mês)

JURO (J)

O juro é a remuneração pelo empréstimo do dinheiro.

JUROS SIMPLES: o juro de cada intervalo de tempo sempre é calculado sobre o capital inicial emprestado ou aplicado.

JUROS COMPOSTOS: o juro de cada intervalo de tempo é calculado a partir do saldo no início de correspondente intervalo. Ou seja: o juro de cada intervalo de tempo é incorporado ao capital inicial e passa a render juros também.

TAXA DE JUROS (i)

A taxa de juros indica qual remuneração será paga ao dinheiro emprestado, para um determinado **período** (t). Ela vem normalmente expressa da forma percentual, em seguida da especificação do período de tempo a que se refere:

8 % a.a. - (a.a. significa ao ano).

10 % a.t. - (a.t. significa ao trimestre).

Outra forma de apresentação da taxa de juros é a unitária, que é igual a taxa percentual dividida por 100, sem o símbolo %:

0,15 a.m. - (a.m. significa ao mês).

0,10 a.q. - (a.q. significa ao quadrimestre)

MONTANTE

Montante = Capital + Juros

Observação: podemos chamar de Valor Futuro

$$M = C + J$$

$$M = C.(1 + it)$$

JUROS SIMPLES

O regime de juros será simples quando o percentual de juros incidir apenas sobre o valor principal.

$$J = C.i.t$$

onde J = Juro, C = Capital, i = taxa de juros (em decimal) e t = períodos/tempo, ou

$$J = C.i.t/100$$

onde i está em porcentagem.

Uma aplicação financeira em juros simples é uma PA.

EXEMPLOS

10) Tenho uma dívida de R\$1000,00 que deve ser paga com juros de 8% a.m. pelo regime de juros simples e devemos pagá-la em 2 meses. Determine o Juro e o Montante.

11) Qual o capital que aplicado a juros simples de 1,2% a.m. rende R\$3.500,00 de juros em 75 dias?

12) Se a taxa de uma aplicação é de 150% ao ano, quantos meses serão necessários para dobrar um capital aplicado através de capitalização simples?

JUROS COMPOSTOS

Consideremos um capital de R\$ 1000,00, aplicado a juros compostos à taxa de 2% ao mês. Isto significa que:

i) daqui a um mês o montante será

$$y_1 = 1000 + 0,02.1000 = 1000 (1 + 0,02) = 1000.1,02 = \text{R\$}1020,00$$

ii) daqui a dois meses o montante será

$$y_2 = y_1 + 0,02.y_1 = y_1.(1 + 0,02) = 1000.(1,02)^2 = \text{R\$ } 1040,40$$

iii) daqui a três meses o montante será

$$y_3 = y_2 + 0,02.y_2 = y_2.(1 + 0,02) = 1000.(1,02)^3 = \text{R\$ } 1061,21$$

O regime de juros compostos é uma PG!

JUROS COMPOSTOS

O regime de juros compostos é o mais comum no sistema financeiro e portanto, o mais útil para cálculos de problemas do dia-a-dia. Os juros gerados a cada período são incorporados ao principal para o cálculo dos juros do período seguinte.

$$M = C \cdot (1 + i)^n$$

onde n = número de períodos

COMPARAÇÃO

Na aplicação de R\$ 1000,00 durante 5 meses, à taxa de 2% a.m., calcular o montante produzido com juros compostos.

COMPOSTO

	CAPITAL	MONTANTE
1º período	$R\$1000,00 \times 1,02$	R\$ 1020,00
2º período:	$R\$ 1020,00 \times 1,02$	R\$ 1040,40
3º período:	$R\$ 1040,40 \times 1,02$	R\$ 1061,21
4º período:	$R\$ 1061,21 \times 1,02$	R\$ 1082,43
5º período:	$R\$ 1082,43 \times 1,02$	R\$ 1104,08

SIMPLES

	JUROS	MONTANTE
$R\$ 1000,00 \times 0,02$	$= R\$ 20,00$	R\$ 1020,00
$R\$ 1000,00 \times 0,02$	$= R\$ 20,00$	R\$ 1040,00
$R\$ 1000,00 \times 0,02$	$= R\$ 20,00$	R\$ 1060,00
$R\$ 1000,00 \times 0,02$	$= R\$ 20,00$	R\$ 1080,00
$R\$ 1000,00 \times 0,02$	$= R\$ 20,00$	R\$ 1100,00

EXERCÍCIOS

- 13) Calcular o montante, ao final de um ano de aplicação, do capital R\$ 600,00, à taxa composta de 4% ao mês.
- 14) Qual a aplicação inicial que, empregada por 1 ano e seis meses, à taxa de juros compostos de 3% ao trimestre, se torna igual a R\$ 477,62?
- 15) Um capital de \$ 1.000,00 foi aplicado a juros compostos, durante 4 meses, produzindo um montante de \$ 1.061,36. A taxa mensal de juros é dada por
- 16) O PIB de um país cresce a uma taxa igual a 5% ao ano. Daqui a quantos anos aproximadamente o PIB triplicará?
- 17) Um automóvel novo vale hoje \$ 20.000,00 e sofre desvalorização de 15% ao ano. Daqui a quanto tempo seu valor se reduzirá à metade.

INVESTIMENTO

Um investimento rende 1% ao mês. Se você investir R\$100,00, determine o montante obtido depois de:

- a) 1 mês
- b) 2 meses
- c) 3 meses
- d) 5 meses
- e) 10 meses
- f) n meses

INVESTIMENTO

Um investimento rende 1% ao mês. Se você investir R\$100,00, determine o montante obtido depois de:

a) 1 mês $S_1 = 100.1,01$

b) 2 meses $S_2 = 100.1,01 + 100.1,01^2$

c) 3 meses $S_3 = 100.1,01 + 100.1,01^2 + 100.1,01^3$

d) 5 meses $S_5 = 100.1,01 + 100.1,01^2 + 100.1,01^3 + 100.1,01^4 + 100.1,01^5$

e) 10 meses $S_{10} = 100.1,01 + \dots + 100.1,01^{10}$

f) n meses $S_n = 1,01 \cdot (1,01^n - 1) / (1,01 - 1) = 101 \cdot (1,01^n - 1)$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n p = p \cdot (1 + i) \frac{(1 + i)^n - 1}{i}$$

SOMA DA PG INFINITA

Relembrando

Se $a_1 > 0$

a) 2, 6, ... é crescente, $q > 0$

b) 5, 5 é constante, $q = 1$

c) 256, 64, é decrescente, $0 < q < 1$.

d) 2, - 6 é oscilante, $q < 0$

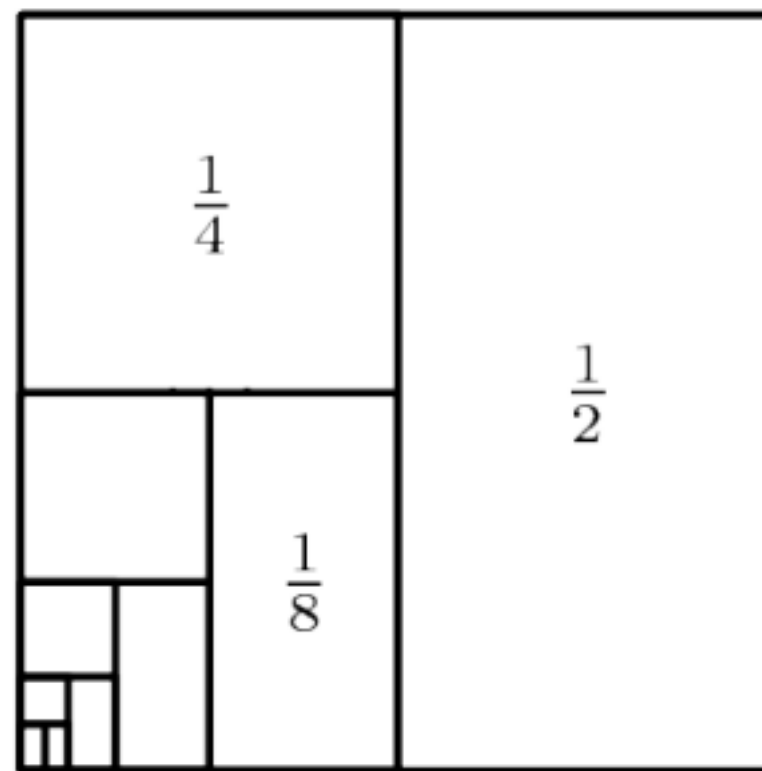
Se $a_1 < 0$

a) - 2, - 6, ... é decrescente, $q > 0$

b) - 5, - 5 é constante, $q = 1$

c) - 256, - 64, é crescente, $0 < q < 1$.

d) - 2, 6 é oscilante, $q < 0$



SOMA DE PG INFINITA

Considere uma PG infinita, $(a_1, a_2, \dots, a_n, \dots)$.

Se $|q| > 1$, $S_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Se $q = 1$, $S_n \rightarrow \infty$, quando $n \rightarrow \infty$.

Se $q = -1$, S_n pode assumir valores distintos.

Se $|q| < 1$, dizemos que $a_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. É possível demonstrar que S_n converge nesse caso. Como

$$\sum_{i=1}^n a_i = \frac{a_{n+1} - a_1}{q - 1}$$

Podemos dizer que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

EXEMPLOS

- 18) Calcular o limite da soma da PG $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots$
- 19) Calcular o limite da soma da PG $\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots$
- 20) Calcular o valor da expressão $0,555\dots = 0,5 + 0,05 + 0,005 + \dots$
- 21) Em um pomar são colhidas semanalmente apenas as frutas que já estão maduras. Dessa maneira, o dono do pomar percebeu que na primeira semana foram colhidos 1000 kg e que, a cada semana, havia uma queda de 5% na colheita em relação a semana anterior. Sendo assim, qual é a quantidade máxima de frutas que pode ser colhida nesse pomar?

EXEMPLOS

22) Os lados de um triângulo equilátero medem 24 cm. Os pontos médios são conectados para construir outro triângulo equilátero cujos pontos médios dos lados são outra vez conectados para formar outro triângulo equilátero e esse processo continua indefinidamente. Calcule a soma dos perímetros dos triângulos equiláteros dessa sequência.

