UNISINOS

AULA 03 – FIBONACCI – PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

MATEMÁTICA PARA COMPUTAÇÃO

PROFESSOR PLATÃO GONÇALVES TERRA NETO

DEFINIÇÃO

Dentre os tipos de sequências numéricas existentes, a sequência de Fibonacci merece um destaque especial por conta de sua aplicabilidade, propriedades e de suas curiosidades.

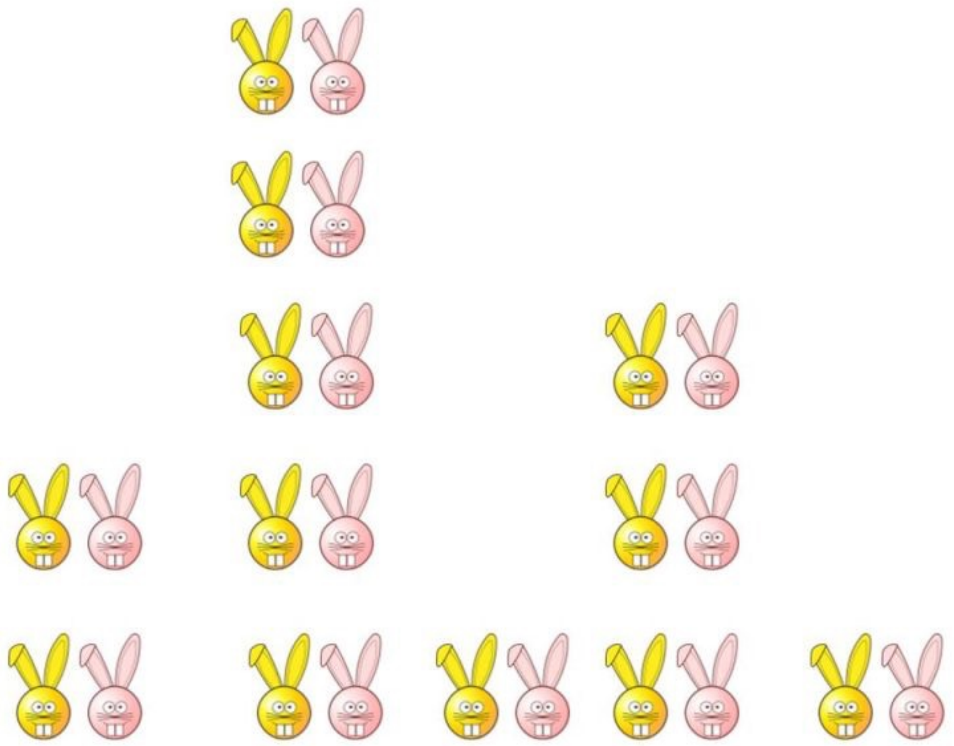
Fibonacci foi um matemático italiano da cidade de Pisa eé considerado o primeiro grande matemático europeu depois da decadência helênica e o mais talentoso matemático ocidental da idade média.

Fibonacci nasceu aproximadamente no ano de 1170 e faleceu provavelmente no ano de 1250. Fibonacci foi enterrado em um cemitério em Pisa, perto da Catedral. No fundo desse cemitério, encontra-se uma estátua de Fibonacci.

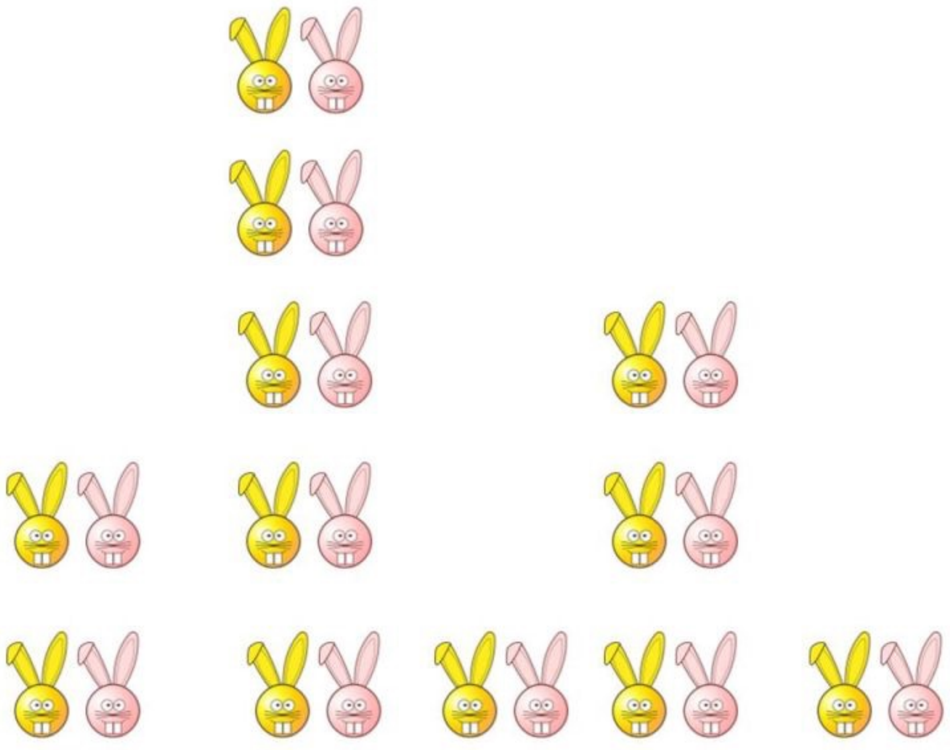
Fibonacci contribuiu para a difusão do sistema de numeração indoarábico por meio do livro "Liber Ábaci", livro de Ábaco ou livro de Cálculo. Esse livro foi publicado no ano de 1202 e além de iniciar na Europa o entendimento dos algarismos indo – arábicos o livro traz problemas envolvendo álgebra, geometria e importantes problemas sobre juros.

O PROBLEMA DOS COELHOS

Fibonacci sugeriu um problema que ficou conhecido como o problema dos coelhos; o problema menciona um casal de coelhos dentro de um cercado; pergunta - se quantos pares de coelhos serão gerados em um ano, sendo que esses coelhos geram um novo casal a cada mês, leva-se em conta também que os novos casais se tornam férteis a partir do segundo mês de vida.



O PROBLEMA DOS COELHOS



O resultado desse problema analisado mês a mês resulta justamente na sequência numérica que recebeu o nome de sequência de Fibonacci:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610,...;

essa sequência foi denominada de sequência de Fibonacci pelo matemático Francês Edouard Lucas no século XIX.

A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI

A sequência de Fibonacci pode ser escrita através de uma recorrência

$f_1 = 1$

$f_2 = 1$

$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$, $n>0$

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610

ps: alguns autores utilizam a sequência iniciando em 0.

O NÚMERO DE OURO

Ao dividirmos cada número da sequência de Fibonacci, exceto o primeiro, pelo seu anterior, vamos perceber que acontecerá algo curioso, os resultados dessas divisões se tornarão cada vez mais próximos de um valor: 1,6180339887..., esse número irracional foi denominado de número de ouro, frequentemente representado pela letra grega ϕ (phi).

Podemos dizer que $\phi = \lim_{n \to \infty} \frac{f_{n+1}}{f_n}$

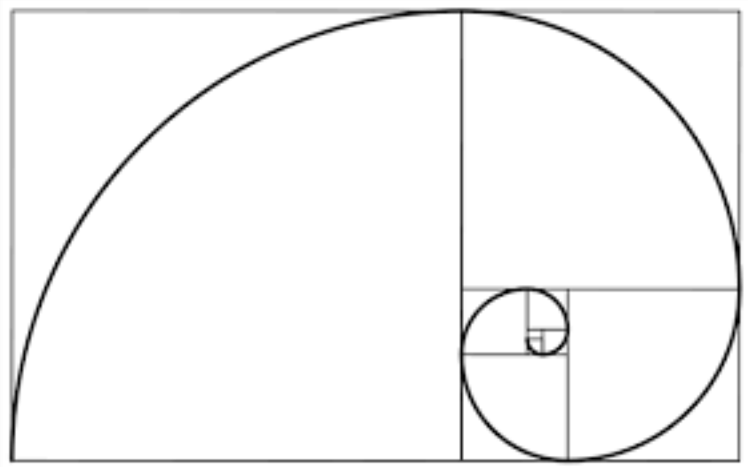
CURIOSIDADES

1) $(a_{n+1})^2 = a_n a_{n+2} + (-1)^n$

2)

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

3) Se $n|m$ então $a_n|a_m$



O SOMATÓRIO

Seja a_n uma sequência numérica. Indicamos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n$$

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{8} (2i - 1)$$

Exercícios:

a)

$$\sum_{i=1}^{10} (2i)$$

b)

$$\sum_{i=1}^{6} (i^2)$$

c)

$$\sum_{i=3}^{7} (3^i)$$

RESPOSTAS

Seja a_n uma sequência numérica. Indicamos

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots a_n$$

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{8} (2i - 1)$$
$$= 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15$$
$$= 64$$

Exercícios:

a)

$$\sum_{i=1}^{10} (2i) = 110$$

b)

$$\sum_{i=1}^{6} (i^2) = 91$$

c)

$$\sum_{i=3}^{7} (3^i) = 3267$$

SOMATÓRIO E FIBONACCI

Vamos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{i+2} - 1$$

Exercício

a)

$$\sum_{i=1}^{10} f_i$$

b)

$$\sum_{i=5}^{12} f_i$$

SOMATÓRIO E FIBONACCI

Vamos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = f_{i+2} - 1$$

$f_1 = f_3 - f_2$

$f_2 = f_4 - f_3$

$f_3 = f_5 - f_4$

...

$f_{n-1} = f_{n+1} - f_n$

$f_n = f_{n+2} - f_{n+1}$

Exercício

a)

$$\sum_{i=1}^{10} f_i = f_{12} - 1 = 143$$

b)

$$\sum_{i=5}^{12} f_i = \sum_{i=1}^{12} f_i - \sum_{i=1}^{4} f_i = f_{14} - f_6$$

$$= 377 - 8 = 369$$

MAIS SOMAS DE FIBONACCI

Vamos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2i+1} - 1$$

Vamos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2i}$$

UNISINOS

MAIS SOMAS DE FIBONACCI

Vamos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i} = f_{2i+1} - 1$$

$f_2 = f_3 - f_1$

$f_4 = f_5 - f_3$

$f_6 = f_7 - f_5$

...

$f_{2n-2} = f_{2n-1} - f_{2n-3}$

$f_{2n} = f_{2n+1} - f_{2n-1}$

Vamos demonstrar que

$$\sum_{i=1}^{n} f_{2i-1} = f_{2i}$$

$f_3 = f_4 - f_2$

$f_5 = f_6 - f_4$

$f_7 = f_8 - f_6$

...

$f_{2n-3} = f_{2n-2} - f_{2n-4}$

$f_{2n-1} = f_{2n} - f_{2n-2}$

PROPRIEDADES DO SOMATÓRIO

$$\sum_{i=1}^{n} 1 = n$$

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{20} 1 = 20$$

$$\sum_{i=1}^{n} k = kn$$

Exemplo

$$\sum_{i=1}^{30} 2 = 60$$

PROPRIEDADES DO SOMATÓRIO

$$\sum_{i=1}^{n} ka_i = k\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Exemplo

Vimos que

$$\sum_{i=1}^{6} (i^2) = 91$$

Assim

$$\sum_{i=1}^{6} (3i^2) = 3.91 = 273$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$$

Exemplo

Vimos que

c)

$$\sum_{i=1}^{10} (2i) = 110$$

Assim

$$\sum_{i=1}^{10} (2i - 5) = \sum_{i=1}^{10} (2i) - \sum_{i=1}^{10} (5) = 110 - 5.10 = 60$$

PROPRIEDADES DO SOMATÓRIO

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{k} a_i + \sum_{i=k+1}^{n} a_i$$

Usamos essa propriedade nesse exemplo

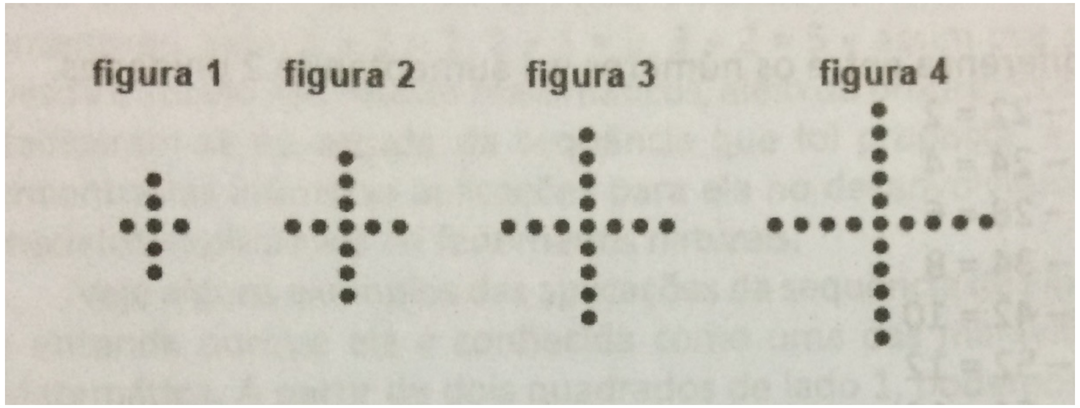
$$\sum_{i=3}^{7} (3^i) = 3267$$

Podíamos ter feito

$$\sum_{i=1}^{7} (3^i) = \sum_{i=1}^{2} (3^i) + \sum_{i=3}^{7} (3^i)$$

PROGRESSÕES ARITMÉTICAS

Exemplo: Qual é o número total de pontos na 15º figura?



Verifica-se que cada o próximo termo é obtido somando-se 4

Esse problema caracteriza uma Progressão Aritmética (PA). Uma progressão aritmética – PA é uma seqüência de números em que cada termo posterior, a partir do segundo, é igual ao anterior somado com um número fixo denominado razão r da progressão.

O exemplo ao lado é uma PA de razão 4

CLASSIFICAÇÃO

$A = (2, 5, 8, 11, \ldots)$: P.A crescente de razão 3

$a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_5 = 14$ e $r = 3$

$B = (4, 2, 0, -2, \ldots)$ P.A. decrescente de razão – 2

$a_1 = 4$ $a_3 = 0$ $a_6 = -6$ $r = -2$

$C = (a+1, a+2, a+3, \ldots)$: PA crescente de razão 1

Classificação de uma progressão aritmética: uma PA é classificada como crescente se $r > 0$, decrescente, se $r < 0$ ou constante se $r = 0$.

DEFINIÇÃO

Podemos definir a PA com uma recorrência:

$$a_{n+1} = a_n + r$$

Sendo a razão

$$r = a_{n+1} - a_n$$

Com $n > 0$ natural.

EXEMPLOS

1. Classificar as progressões aritméticas:

a) (3, 4, 5, 6, 7, ...)

b) (5, 5, 5, 5, ...)

c) (10, 8, 6, ...)

2. Calcular a razão e o quinto termo na progressão aritmética (3, 9, 15, ...)

3. Se a sequência $[(x + 4)^2, (x - 1)^2, (x + 2)^2, \ldots]$ é uma PA, calcular o valor de x e escrever a PA.

TERMO MÉDIO

Na PA $A = (2, 5, 8, 11, \ldots)$ escrevam os dez primeiros termos.

TERMO MÉDIO

Na PA A = (2, 5, 8, 11, ...) escrevam os dez primeiros termos.

A cada três elementos, somem os extremos.

2, 5, 8 → soma dos extremos: $2 + 8 = 10$

5, 8, 11 → soma dos extremos: $5 + 11 = 16$

8, 11, 14 → soma dos extremos: $8 + 14 = 22$

11, 14, 17→ soma dos extremos: $11 + 17 = 28$

14, 17, 20 → soma dos extremos: $14 + 20= 34$

17, 20, 23 → soma dos extremos: $17 +23 = 40$

20, 23, 26 → soma dos extremos: $20 + 26= 46$

23, 26, 29 → soma dos extremos: $23 + 29= 52$

Se três termos formam uma PA

$(a, a + r, a + 2r)$, o dobro do termo médio é a soma dos extremos.

EXEMPLO: Calcular o valor de x tal que os números $x - 1$, $2x$ e $x + 5$ formem, nessa ordem, uma PA;

TERMO MÉDIO

EXEMPLO: Calcular o valor de x tal que os números $x - 1$, $2x$ e $x + 5$ formem, nessa ordem, uma PA;

$(x - 1) + (x + 5) = 2.2x \rightarrow x - 1 + x + 5 = 4x$

$2x + 4 = 4x \rightarrow 4 = 4x - 2x \rightarrow 4 = 2x \rightarrow x = 2$

TESTANDO: Se $x = 2$ a sequência fica 1, 4, 7 que é uma PA de razão 3.

Se três termos formam uma PA

$(a, b, c) \rightarrow 2b = a + c$

EXEMPLO: Calcular o valor de x tal que os números

$3x - 1$, $x + 3$ e $x + 9$

formem, nessa ordem, uma PA;

Observação: também podemos escrever $(x - r, x, x + r)$

UNISINOS

EXEMPLO

EXEMPLO: Calcular o valor de x tal que os números

$3x - 1, x + 3$ e $x + 9$

formem, nessa ordem, uma PA;

RESOLUÇÃO:

$2.(x + 3) = (3x - 1) + (x + 9)$

$2x + 6 = 3x - 1 + x + 9$

$6 + 1 - 9 = 3x + x - 2x$

$-2 = 2x \rightarrow x = -1$

TESTANDO:

Se $x = -1$ a sequência fica

$-4, 2, 8$ é uma PA de razão 6.

EXEMPLO

Na PA $A = (2, 5, 8, 11, \ldots)$

$a_5 = 11 + 3 = 14$

$a_{10} = 14 + 3 + 3 + 3 + 3 + 3 = 29$

$a_{743} =$ é meio complexo de fazer um por um.

TERMO GERAL

Vamos pensar de outra maneira

Partindo do primeiro (a1) e tendo a razão r, podemos dizer que

$a_2 = a_1 + r$

$a_3 = a_2 + r = a_1 + r + r = a_1 + 2r$

$a_4 = a_3 + r = a_1 + 2r + r = a_1 + 3r$

$a_5 = a_1 + 4r$

$a_6 = a_1 + 5r$

$a_{10} = a_1 + 9r$

$a_{23} = a_1 + 22r$

$a_{743} = a_1 + 742r$

TERMO GERAL

Partindo desse raciocínio

$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$

Por exemplo:

$$a_{743} = a_1 + 742r = 2 + 742.3 = 2 + 2226 = 2228$$

EXEMPLOS

1. Determinar o termo geral da PA (4, 7, ...)

2. Calcular o vigésimo termo da PA (3, 8, ...)

3. Calcular o número de termos da PA (– 3, 1, 5,9, ..., 113)

4. Calcular o número de múltiplos de 5 compreendidos entre 21 e 63.

5. Numa PA o décimo termo é 8 e o décimo nono termo é 512. Calcular o quinto termo da PA.

6. Em uma PA a soma do segundo termo com o sexto é 20 e a soma do quarto com o nono é 35. Escrever a PA.

7. Três números estão em PA, de tal forma que a soma entre eles é 18 e o produto é 66. Calcular os três números.

8. Escrever cinco números que estão em PA, sabendo-se que o produto dos dois extremos é 220 e a soma dos outros três é 48.

INTERPOLAÇÃO ARITMÉTICA

Para interpolar ou inserir meios aritméticos em PA intercala-se números reais entre dois números dados, de modo que todos formem uma progressão aritmética – PA.

1. Inserir cinco meios aritméticos entre 6 e 30.

2. Quantos meios aritméticos deve-se interpolar entre 100 e 124 para que a razão seja 4?