Universidade Estadual do Rio Grande do Sul

Prof. Dr. Éder Julio Kinast

Métodos Numéricos

09 Resolução de Sistemas Lineares. Método de Gauss-Seidel

Sistemas Lineares

Método de Gauss-Seidel

Sistemas Lineares

Tal como no Método de Gauss-Jacobi, para Gauss-Seidel também só serão tratados os sistemas possíveis e que possuem solução única, com o número de equações igual ao número de variáveis.

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ddots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Além disso, os métodos utilizados aqui necessitam que $a_{ii} \neq 0$ (os coeficientes da diagonal principal não sejam nulos. Caso isto ocorra, deve-se promover mudanças entre as linhas.

Método de Gauss-Seidel

Este método é similar Método de Gauss-Jacobi, pois resolve os mesmos tipos de sistemas lineares, utiliza o mesmo Critério das Linhas, além de utilizar os mesmos valores iniciais.

A diferença básica é que em casa iteração para cálculo das variáveis, o método utiliza os valores atualizados das variáveis já calculadas. Em geral, isto faz com que seja necessário um número menor de ciclos (do que Gauss-Jacobi) para resolver um dado sistema linear com dada precisão.

Valores Iniciais

Para sistemas que *convergem* com o Método de Gauss-Seidel, pode-se utilizar quaisquer conjunto de valores iniciais para as variáveis $\vec{x}$.

Contudo, utiliza-se o conjunto específico abaixo (caso 3×3), que em geral gera o menor número de iterações.

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}}$$

$$x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}}$$

$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}}$$

Método de Gauss-Seidel

Com os valores, recalcula-se cada valor x_i da linha i, em função dos outros valores de $\vec{x}$ já calculados. Os passos são iniciados por $k = 0$ (valores iniciais) e incrementados de 1 em 1. No caso 3×3 tem-se:

Gauss-Jacobi

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)}}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(0)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)}}{a_{22}} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(0)} - a_{32} \cdot x_2^{(0)}}{a_{33}} \end{cases}$$

Gauss-Seidel

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)}}{a_{11}} \\ x_2^{(1)} = \dfrac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(1)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)}}{a_{22}} \\ x_3^{(1)} = \dfrac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(1)} - a_{32} \cdot x_2^{(1)}}{a_{33}} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 3×3

Exemplo (**MetNum09.xlsx!3x3**): Determine os valores de x, y e z no sistema abaixo com precisão de $\varepsilon_3 = 5 \times 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 10 \cdot x + 2 \cdot y + z = 7 \\ x + 5 \cdot y + z = -8 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y + 10 \cdot z = 6 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x \to x_1 \\ y \to x_2 \\ z \to x_3 \end{matrix}$$

Isolando as variáveis em cada linha:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{b_1 - a_{12} \cdot x_2^{(0)} - a_{13} \cdot x_3^{(0)}}{a_{11}} = \dfrac{7 - 2 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{10} \\[2ex] x_2^{(1)} = \dfrac{b_2 - a_{21} \cdot x_1^{(1)} - a_{23} \cdot x_3^{(0)}}{a_{22}} = \dfrac{-8 - x_1^{(1)} - x_3^{(0)}}{5} \\[2ex] x_3^{(1)} = \dfrac{b_3 - a_{31} \cdot x_1^{(1)} - a_{32} \cdot x_2^{(1)}}{a_{33}} = \dfrac{6 - 2 \cdot x_1^{(1)} - 3 \cdot x_2^{(1)}}{10} \end{cases}$$

Gauss-Seidel 3×3

Exemplo (**MetNum09.xlsx!3x3**): Determine os valores de x, y e z no sistema abaixo com precisão de $\varepsilon_3 = 5 \times 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 10 \cdot x + 2 \cdot y + z = 7 \\ x + 5 \cdot y + z = -8 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y + 10 \cdot z = 6 \end{cases}$$

Os valores iniciais das variáveis ficam:

$$x_1^{(0)} = \frac{b_1}{a_{11}} = \frac{7}{10} = 0{,}7$$

$$x_2^{(0)} = \frac{b_2}{a_{22}} = -\frac{8}{5} = -1{,}6$$

$$x_3^{(0)} = \frac{b_3}{a_{33}} = \frac{6}{10} = 0{,}6$$

Gauss-Seidel 3×3

Substituindo os valores iniciais nas equações das variáveis isoladas:

$$\begin{cases} x_1^{(1)} = \dfrac{7 - 2 \cdot x_2^{(0)} - x_3^{(0)}}{10} = \dfrac{7 - 2 \cdot (-1{,}6) - (0{,}6)}{10} = 0{,}96 \\[2ex] x_2^{(1)} = \dfrac{-8 - x_1^{(1)} - x_3^{(0)}}{5} = \dfrac{-8 - (0{,}96) - (0{,}6)}{5} = -1{,}912 \\[2ex] x_3^{(1)} = \dfrac{6 - 2 \cdot x_1^{(1)} - 3 \cdot x_2^{(1)}}{10} = \dfrac{6 - 2 \cdot (0{,}96) - 3 \cdot (-1{,}912)}{10} = 0{,}9816 \end{cases}$$

O processo é repetido até que os valores satisfaçam o *critério de parada*.

Critério de Parada

O *critério de parada* é utilizado para indicar o passo em que as iterações podem cessar.

$$d^{(k+1)} = \max_{1 \le i \le n} \left| x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)} \right|$$

onde

$$d^{(k+1)} < \varepsilon_3$$

No exemplo:

$$d^{(1)} = \max_{1 \le i \le 3} \begin{Bmatrix} \left| x_1^{(1)} - x_1^{(0)} \right| = |0{,}96 - 0{,}7| = 0{,}26 \\ \left| x_2^{(1)} - x_2^{(0)} \right| = |-1{,}912 - (-1{,}6)| = 0{,}312 \\ \left| x_3^{(1)} - x_3^{(0)} \right| = |0{,}9816 - 0{,}6| = 0{,}3816 \end{Bmatrix} = 0{,}3816$$

Como $d^{(1)} = 0{,}3816 \ge 5 \times 10^{-2} = \varepsilon_3$ então deve-se continuar o processo.

Gauss-Seidel 3×3

Exemplo (**MetNum09.xlsx!3x3**): Determine os valores de x, y e z no sistema abaixo com precisão de $\varepsilon_3 = 5 \times 10^{-2}$.

$$\begin{cases} 10 \cdot x + 2 \cdot y + z = 7 \\ x + 5 \cdot y + z = -8 \\ 2 \cdot x + 3 \cdot y + 10 \cdot z = 6 \end{cases}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	10	2	1	7		ε_3		
2	1	5	1	-8		0,05		
3	2	3	10	6				
4								
5	Valores Iniciais			Critério das Linhas		Tem garantia de convergência.		
6	x_1	0,7		α_1	0,3			
7	x_2	-1,6		α_2	0,4			
8	x_3	0,6		α_3	0,5			
9								
10	Passo	1		Conclusão	Continuar			
11	x_1	0,96		d_1	0,26			
12	x_2	-1,912		d_2	0,312			
13	x_3	0,9816		d_3	0,3816			
14								
15	Passo	2		Conclusão	Continuar			
16	x_1	0,98424		d_1	0,02424			
17	x_2	-1,99317		d_2	0,081168			
18	x_3	1,001102		d_3	0,0195024			

Observação:
Caso as soluções convirjam para valores notoriamente inteiros, pode-se testar estas soluções.

Passo	3
x_1	0,99852336
x_2	-1,999925152
x_3	1,000272874

Critério das Linhas

O Critério das Linhas é do tipo "suficiente, mas não necessário". Quer dizer, caso ele seja verdadeiro, o sistema certamente gera uma série convergente para a solução com o Método de Gauss-Seidel. Contudo, caso este critério não seja verdadeiro, ainda assim o Método de Gauss-Seidel pode gerar uma sequência convergente para a solução. Ele é expresso como "há garantia de convergência se":

$$\max_{1 \le k \le n} \alpha_k < 1$$

onde

$$\alpha_k = \frac{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{kj}|}{|a_{kk}|}$$

Critério das Linhas

No exemplo:

$$\max_{1\leq i\leq 3}\left\{\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{|2|+|1|}{|10|} = 0{,}3 \\ \alpha_2 &= \frac{|1|+|1|}{|5|} = 0{,}4 \\ \alpha_3 &= \frac{|2|+|3|}{|10|} = 0{,}5 \end{aligned}\right\} = 0{,}5$$

Como $\max\limits_{1\leq k\leq 3} \alpha_k = 0{,}5 < 1$ então há garantia de convergência deste sistema com o Método de Gauss-Seidel.

Caso não houvesse garantia, pode-se tentar promover troca entre as linhas e recalcular o critério. Além disso, mesmo que o critério não seja satisfeito, ainda há chance do método funcionar.

Gauss-Seidel 4×4

Exemplo (**MetNum08.xlsx!4x4**): Determine os valores de x, y, z e w no sistema abaixo com precisão de $\varepsilon_3 = 10^{-3}$

$$\begin{cases} 4 \cdot x + 2 \cdot y + 8 \cdot z + 15 \cdot w = 120 \\ 2 \cdot x + 14 \cdot y + 4 \cdot w = 6 \\ -9 \cdot x + 2 \cdot y - 2 \cdot z - 2 \cdot w = -6 \\ x + 2 \cdot y + 4 \cdot z = 16 \end{cases}$$

Passo	6
x_1	-2,000037164
x_2	-0,999989917
x_3	5,000004249
x_4	6,0000063