Introdução à Álgebra Linear

Espaço Vetorial

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Espaços Vetoriais

- **Definição:** Um *espaço vetorial real* é um conjunto $\boldsymbol{V}$, não vazio, com duas operações: soma, $V \times V \to V$, e multiplicação por escalar, $\mathbb{R} \times V \to V$, tais que, para quaisquer **u**, **v**, **w** $\in V$ e a, b $\in \mathbb{R}$, as seguintes propriedades sejam satisfeitas:

Espaços Vetoriais

- **Propriedades:**
- Adição

i) (**u** + **v**) + **w** = **u** + (**v** + **w**) - associativa

ii) **u** + **v** = **v** + **u** - comutativa

iii) existe **0** $\in$ *V* tal que **u** + **0** = **u**

- **0** é o vetor nulo

iv) Existe –**u** $\in$ *V* tal que **u** + (-**u**) = **0**

- Multiplicação

v) *a*(**u** + **v**) = *a***u** + *a***v**, *a* escalar

vi) (*a* + *b*)**v** = *a***v** + *b***v**, *a*, *b* escalares

vii) (*ab*)**v** = *a*(*b***v**)

viii) 1.**u** = **u**

Espaços Vetoriais

- Designamos por *vetor* um elemento do espaço vetorial
- **Exemplo:** V = M(2, 2) é o conjunto de matrizes 2x2
  - V é um espaço vetorial
    - Todas as propriedades anteriores são satisfeitas se a adição é entendida como a adição de matrizes; e a multiplicação por um escalar for a forma padrão de matrizes

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 1: (u + v) + w = u + (v + w)**

$$(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w}=\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right)+\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11}) & (u_{12}+v_{12}) \\ (u_{21}+v_{21}) & (u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} (u_{11}+v_{11})+w_{11} & (u_{12}+v_{12})+w_{12} \\ (u_{21}+v_{21})+w_{21} & (u_{22}+v_{22})+w_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} u_{11}+(v_{11}+w_{11}) & u_{12}+(v_{12}+w_{12}) \\ u_{21}+(v_{21}+w_{21}) & u_{22}+(v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} (v_{11}+w_{11}) & (v_{12}+w_{12}) \\ (v_{21}+w_{21}) & (v_{22}+w_{22}) \end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\left(\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}\right)=\mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w})$$

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 2: u + v = v + u**

Operação vetorial genérica

$$\mathbf{u}+\mathbf{v}=\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}=\mathbf{v}+\mathbf{u}$$

Interpretação concreta

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 3:** Existe um elemento **0** em V, chamado um vetor nulo para V, tal que **u** + **0** = **u** para todo **u** em V.

$$\text{Seja } \mathbf{0} \equiv \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \text{ Então,}$$

$$\forall\, \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{u} + \mathbf{0} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 4:** Para todo **u** em V, há um objeto –**u** em V, chamado um oposto ou negativo ou simétrico de **u**, tal que **u** + (-**u**) = **0**

$$\text{Seja } -\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix}. \text{ Então,}$$

$$\forall\, \mathbf{u} \in V, \quad \mathbf{u} + (-\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \left(\begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \right) =$$

$$\begin{bmatrix} u_{11} + (-u_{11}) & u_{12} + (-u_{12}) \\ u_{21} + (-u_{21}) & u_{22} + (-u_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} - u_{11} & u_{12} - u_{12} \\ u_{21} - u_{21} & u_{22} - u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 5:** $k\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$

$$k\left(\mathbf{u}+\mathbf{v}\right)=k\left(\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}\right)=$$

$$=k\begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k\left(u_{11}+v_{11}\right) & k\left(u_{12}+v_{12}\right) \\ k\left(u_{21}+v_{21}\right) & k\left(u_{22}+v_{22}\right) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} k\,u_{11}+k\,v_{11} & k\,u_{12}+k\,v_{12} \\ k\,u_{21}+k\,v_{21} & k\,u_{22}+k\,v_{22} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} k\,u_{11} & k\,u_{12} \\ k\,u_{21} & k\,u_{22} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} k\,v_{11} & k\,v_{12} \\ k\,v_{21} & k\,v_{22} \end{bmatrix}=k\mathbf{u}+k\mathbf{v}$$

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 6:** $(k + l)\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$

$$(k+l)\mathbf{u} = (k+l)\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} (k+l)u_{11} & (k+l)u_{12} \\ (k+l)u_{21} & (k+l)u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k\,u_{11} + l\,u_{11} & k\,u_{12} + l\,u_{12} \\ k\,u_{21} + l\,u_{21} & k\,u_{22} + l\,u_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} k\,u_{11} & k\,u_{12} \\ k\,u_{21} & k\,u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l\,u_{11} & l\,u_{12} \\ l\,u_{21} & l\,u_{22} \end{bmatrix} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$$

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 7:** $k\,(l\,\mathbf{u}) = (k\,l)\,(\mathbf{u})$

$$k\left(l\,\mathbf{u}\right)=k\left(l\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}\right)=$$

$$=k\begin{bmatrix}l\,u_{11} & l\,u_{12}\\ l\,u_{21} & l\,u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}k\,l\,u_{11} & k\,l\,u_{12}\\ k\,l\,u_{21} & k\,l\,u_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(k\,l)u_{11} & (k\,l)u_{12}\\ (k\,l)u_{21} & (k\,l)u_{22}\end{bmatrix}$$

$$=\left(k\,l\right)\begin{bmatrix}u_{11} & u_{12}\\ u_{21} & u_{22}\end{bmatrix}=\left(k\,l\right)\mathbf{u}$$

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** V = M(2, 2) – Prova
- **Axioma 8:** $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$

$$1\mathbf{u} = 1\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{u}$$

Espaços Vetoriais

- **Contra-Exemplo:** Um conjunto que **não** é um espaço vetorial:
- Seja $\mathbf{u} = (u_1, v_1)$ e $\mathbf{v} = (u_2, v_2)$
- Seja $V = R^2$ e adição e multiplicação definidas como:
  - $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$
  - $k.\mathbf{u} = (ku_1, 0)$
- Nesse caso, o axioma 8 não vale, pois:
  - $1\mathbf{u} = 1(u_1, v_1) = (u_1, 0) \neq \mathbf{u}$
- Logo V não é um espaço vetorial

Espaços Vetoriais

- **Exemplo:** Seja $V=\{(1,x,2);\ x \in IR\}$ munido das operações
- $(1,x_1,2)+(1,x_2,2) = (1,x_1+x_2,2)\ \forall (1,x_1,2),(1,x_2,2) \in V$
- $a.(1,x,2)=(1,ax,2)\ \forall a \in IR,\ \forall (1,x,2) \in V$
- Mostre que V é um espaço vetorial sobre o IR.

Espaços Vetoriais

- **Axioma 1:** ($\mathbf{u}$ + $\mathbf{v}$) + $\mathbf{w}$ = $\mathbf{u}$ + ($\mathbf{v}$ + $\mathbf{w}$)

  ($\mathbf{u}$ + $\mathbf{v}$) + $\mathbf{w}$ = $((1,u_1,2)+(1,v_1,2)) + (1,w_1,2) = (1,u_1+v_1,2) + (1,w_1,2) = (1,u_1+v_1+w_1,2) = (1,u_1,2) + (1,v_1+w_1,2) = (1,u_1,2) + ((1,v_1,2)+(1,w_1,2))$ $\mathbf{u}$ + ($\mathbf{v}$ + $\mathbf{w}$)

- **Axioma 2: u** + **v** = **v** + **u**

  $\mathbf{u} + \mathbf{v} = (1,u_1,2)+(1,v_1,2) = (1,v_1+u_1,2) = (1,v_1,2)+(1,u_1,2) = \mathbf{v} + \mathbf{u}$

Espaços Vetoriais

- **Axioma 3:** Existe um elemento **0** em V, chamado um vetor nulo para V, tal que **u** + **0** = **u** para todo **u** em V.
  - **u** + **0** = $(1,u_1,2) + (1,0,2) = (1,u_1 + 0,2) = (1,u_1,2)$ = **u**

- **Axioma 4:** Para todo **u** em V, há um objeto –**u** em V, chamado um oposto ou negativo ou simétrico de **u**, tal que **u** + (-**u**) = **0**
  - **u** + (-**u**) = $(1,u_1,2) + (-1)(1,u_1,2) = (1,u_1,2) + (1,-u_1,2) = (1,u_1 - u_1,2) = (1,0,2)$ = **0**

Espaços Vetoriais

- **Axioma 5:** $k\,(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$
  - $k(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = k((1,u_1,2)+(1,v_1,2)) = k(1,u_1+v_1,2) = (1,k(u_1+v_1),2) = (1,ku_1+kv_1,2) = k(1,u_1,2)+k(1,v_1,2) = k\,\mathbf{u} + k\,\mathbf{v}$

- **Axioma 6:** $(k + l\,)\,\mathbf{u} = k\,\mathbf{u} + l\,\mathbf{u}$
  - $(k+l)u = (k+l)(1,u_1,2) = (1, (k+l)u_1,2) = (1,ku_1 + lu_1,2) = k(1,u_1,2) + l(1,u_1,2) = k\,\mathbf{u} + l\mathbf{u}$

Espaços Vetoriais

- **Axioma 7:** $k\,(l\,\mathbf{u}) = (k\,l)\,(\mathbf{u})$
  - $k\,(l\,\mathbf{u}) = k(l(1,u_1,2)) = k(1,lu_1,2) = (1,klu_1,2) = (kl)(1,u_1,2) = (kl)\,(\mathbf{u})$

- **Axioma 8:** $1\mathbf{u} = \mathbf{u}$
  - $1\mathbf{u} = 1(1,u_1,2) = (1,1u_1,2) = (1,u_1,2) = \mathbf{u}$

Subespaços Vetoriais

- **Definição:** Dado um espaço vetorial V, um subconjunto W, não vazio, será um subespaço vetorial de V se:

  i) Para quaisquer $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in W$, tivermos $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in W$

  ii) Para quaisquer $a \in \mathrm{R}$, $\mathbf{u} \in W$, tivermos $a\mathbf{u} \in W$

Subespaços Vetoriais

- **Observações:**
  - 1) Ao operarmos em *W* (soma e multiplicação por escalar) não obteremos um vetor fora de *W*
    - Isso é suficiente para afirmar que *W* é ele mesmo um espaço vetorial, pois assim as operações ficam bem definidas
    - Assim, não precisamos verificar novamente as propriedades (i) a (viii) de espaço vetorial porque elas são válidas em V, que contém *W*

Subespaços Vetoriais

- **Observações:**

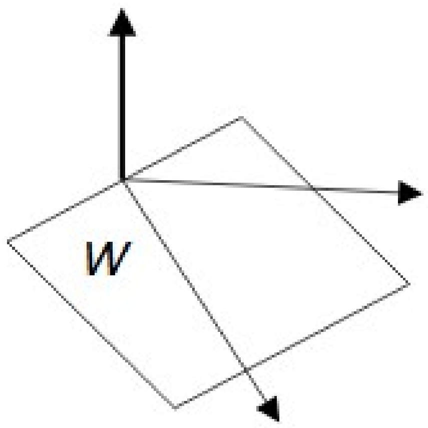
  2) Qualquer subespaço W de V precisa necessariamente conter o vetor nulo (por causa da condição (ii) da definição quando a = 0)

  3) Todo espaço vetorial admite, pelo menos, dois subespaços (que são chamados de subespaços triviais):

    - O conjunto formado apenas pelo vetor nulo
    - O próprio espaço vetorial

Subespaços Vetoriais

- **Exemplo 1:** $V = \mathrm{R}^3$ e $W \subset V$, um plano passando pela origem



Observe que, se *W* não passasse pela origem, não seria um subespaço

Os únicos subespaços de R^3 são a origem, as retas e planos que passam pela origem e o próprio R^3

Subespaços Vetoriais

- **Exemplo 2:** $V = \mathrm{R}^5$ e $W = \{(0,x_2,x_3,x_4,x_5);\ x_i \in \mathrm{R}\}$
  - Isso é, W é o conjunto de vetores de R^5 com a primeira coordenada nula
  - Vamos verificar as condições (i) e (ii):
  - (i) $\mathbf{u} = (0, x_2, x_3, x_4, x_5)$, $\mathbf{v} = (0, y_2, y_3, y_4, y_5) \in W$
  - Então: $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(0, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4, x_5+y_5) \in W$
  - (ii) $k\mathbf{u} = (0, kx_2, kx_3, kx_4, kx_5) \in W$
  - Portanto, W é subespaço vetorial de R^5.

Subespaços Vetoriais

- **Exemplo:** Seja V = R^2 e S = {(x, y) Є R^2 | y = 2x}
- Elementos: u = $(x_1, 2.x_1)$ e v = $(x_2, 2.x_2)$
- Prova: Verificar se u+v e k.u seguem as mesmas propriedades
- **Solução**

$u + v = (x_1, 2.x_1) + (x_2, 2.x_2)$

$u + v = (x_1 + x_2, 2.x_1 + 2.x_2)$

$u + v = (x_1 + x_2, 2(x_1 + x_2))$

$ku = k(x_1, 2.x_1)$

$ku = (kx_1, 2kx_1)$

$ku = (kx_1, 2(kx_1))$, logo S é subespaço

Subespaços Vetoriais

- **Exemplo:** Seja $V = R^2$ e $S = \{(x, y) \to R^2 \mid y = 4\text{-}2x\}$
- Elementos: $u = (x_1, 4-2x_1)$ e $v = (x_2, 4-2.x_2)$
- Prova: Verificar se u+v e k.u seguem as mesmas propriedades
- **Solução**

  $u + v = (x_1, 4-2.x1) + (x_2, 4-2.x_2)$

  $u + v = (x_1 + x_2, 4-2.x_1 + 4-2.x_2)$

  $u + v = (x_1 + x_2, 8-2(x_1 + x_2))$

  $ku = k(x_1, 4-2.x_1)$

  $ku = (kx_1, k(4-2x_1))$

  $ku = (kx_1, 4k-2kx_1))$,

  $ku = (kx_1, 4k-2kx_1))$, logo S não é um subespaço

Subespaços Vetoriais

- **Exemplo:** Considere o subespaço de R^4: $S = [(1, 1,-2, 4), (1, 1,-1, 2), (1, 4,-4, 8)]$

(a) o vetor (2/3, 1,-1, 2) pertence a S?

- o vetor $(2/3, 1,-1, 2) \in S$ se, e somente se, puder ser escrito como combinação linear dos vetores que geram S.

Subespaços Vetoriais

- (2/3, 1,-1, 2) = a(1, 1,-2, 4) + b(1, 1,-1, 2) + c(1, 4,-4, 8)
- Ficamos com o seguinte sistema linear

$$\begin{cases} a+b+c=2/3 \\ a+b+4c=1 \\ -2a-b-4c=-1 \\ 4a+2b+8c=2 \end{cases}$$

Subespaços Vetoriais

- Somando as equações (ii) e (iii), chega-se que a = 0
- Substituindo a=0 em (ii), b = 1 – 4c
- Substituindo a = 0 e b = 1 – 4c em (i), c = 1/9
- Substituindo c = 1/9 em b = 1 – 4c, b = 5/9
- Precisa verificar se as equações (iii) e (iv) são satisfeitas com essas soluções

Subespaços Vetoriais

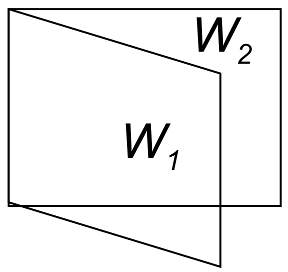
- Eq. (iii) → -2a-b-4c=-1 → -2.0 -5/9 -4/9=-1 → -9/9 = -1 → -1 = -1
- Eq. (iv) → 4ª + 2b + 8c = 2 → 4.0 + 2.5/9 + 8.1/9 → 10/9 + 8/9 = 2 → 18/9 = 2 → 2 = 2
- Satisfazem as equações, logo a solução ocorre para a= 0, b= 5/9 e c= 1/9
- E (2/3, 1,-1, 2) pode realmente ser escrito como combinação linear dos geradores de S de modo que pertence a S.

Subespaços Vetoriais

- **Teorema:** Interseção de subespaços
- Dados W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V, a interseção $W_1 \cap W_2$ ainda é um subespaço de V

  Observe que $W_1 \cap W_2$ nunca é vazio já que eles sempre contêm, pelo menos, o vetor nulo

- **Exemplo 1:** V = R^3, $W_1 \cap W_2$ é a reta de interseção dos planos W_1 e W_2



Subespaços Vetoriais

- Embora a interseção gere um subespaço vetorial, isso necessariamente não acontece com a união
- **Teorema:** Soma de subespaços
  - Sejam W_1 e W_2 subespaços de um espaço vetorial V. Então o conjunto
    - $W_1 + W_2 = \{\mathbf{v} \in V;\ \mathbf{v} = \mathbf{w_1} + \mathbf{w_2},\ \mathbf{w_1} \in W_1,\ \mathbf{w_2} \in W_2\}$
  - é subespaço de V
- **Exemplo 1:** Se W_1 e W_2 são duas retas, $W = W_1 + W_2$ é o plano que contém as retas

Subespaços Vetoriais

Exemplo: Sejam os subespaços $U = \{(x, y) \in R^2 \mid y = 0\}$ e $W = \{(x, y) \in R^2 \mid x = 0\}$. A união entre U e W será o conjunto:

$$U \cup W = \{(x, y) \in R^2 \mid x = 0 \; ou \; y = 0\}$$

O elemento neutro $(0, 0)$ está em U e em W e logo, está também na união. Mas, tome os elementos $u, w \in U \cup W$, não podemos garantir que a soma dos vetores u e w estará em $U \cup W$.

Por exemplo, considere $u = (1, 0)$ e $w = (0, 1)$. Temos que $u, w \in U \cup W$, mas $u + w = (1, 0) + (0, 1) = (1, 1)$, que é um vetor que não satisfaz nenhuma das condições do conjunto da união, logo $u + w \notin U \cup W$.

Subespaços Vetoriais

- Quando $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$, então $W_1 + W_2$ é chamado

  soma direta de W_1 com W_2, denotado por $W_1 \oplus W_2$

Combinação Linear

- Sejam V um espaço vetorial real, $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n} \in V$ e $a_1, a_2, \ldots, a_n$ números reais
- Então o vetor
  - $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v_1} + a_2\mathbf{v_2} + \ldots\, a_n\mathbf{v_n}$
- é um elemento de V ao qual chamamos de ***combinação linear*** de $\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, ..., $\mathbf{v_n}$

Combinação Linear

– Uma vez fixados vetores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ em V, o conjunto W de todos os vetores de V que são combinação linear desse é um subespaço vetorial

- W é chamado de subespaço gerado por $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$
- $W = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n]$

Combinação Linear

- **Exemplo 1:** $V = \mathbb{R}^2$, $v_1 = (1, 0)$, $v_2 = (0, 1)$
- Logo, $V = [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}]$, pois dados $v = (x, y) \in V$, temos $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1)$
  - Ou seja, $\mathbf{v} = x.\mathbf{v_1} + y.\mathbf{v_2}$

Combinação Linear

- **Exemplo 2:**

$$\mathbf{v_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v_2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Então, } [\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}] = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$$

Combinação Linear

- **Exemplo 3**: $v = (-4,-18,7)$ é uma combinação linear de $v_1 = (1, -3, 2)$ e $v_2 = (2, 4, -1)$? Escreva o vetor v como combinação linear dos vetores v_1 e v_2.
- **Solução**

$v = av_1 + bv_2$

$(-4,-18,7) = a(1,-3,2) + b(2,4,-1)$

$(-4,-18,7) = (a,-3a,2a) + (2b,4b,-b)$

$(-4,-18,7) = (a+2b,-3a+4b,2a-b)$

$a+2b = -4$

$-3a+4b = -18$

$2a-b = 7$

- Resposta: $a=2$ e $b = -3$

$v = 2v_1 – 3\ v_2$

Dependência e Independência Linear

- **Definição:** Sejam V um espaço vetorial e $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ $\in V$. Dizemos que o conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_n\}$ é ***linearmente independente*** (LI), ou que o vetores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ são LI se a equação:
  - $a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + ... + a_n\mathbf{v}_n = 0$
  - implica que $\mathbf{a_1 = a_2 = ... = a_n = 0}$

Dependência e Independência Linear

- $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \ldots,\mathbf{v}_n\}$ é LD se, e somente se, um destes vetores for combinação linear dos outros.
  - Se algum $a_i \neq 0$, dizemos que $\{\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \ldots,\mathbf{v}_n\}$ é ***linearmente dependente*** (LD) ou que os vetores $\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2, \ldots,\mathbf{v}_n$ são LD

Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 1:** $V = \mathrm{R}^2$, $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ e $\mathbf{e_2} = (0, 1)$
- $\mathbf{e_1}$ e $\mathbf{e_2}$ são LI, pois

$$a_1.\mathbf{e_1} + a_2.\mathbf{e_2} = \mathbf{0}$$

$$a_1.(1, 0) + a_2.(0, 1) = \mathbf{0}$$

$$(a_1, a_2) = (0, 0)$$

$$a_1 = 0 \text{ e } a_2 = 0$$

Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 2:** De modo análogo, para $V = \mathbb{R}^3$, $\mathbf{e_1} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e_2} = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e_3} = (0, 0, 1)$ são LI

  $a_1.\mathbf{e_1} + a_2.\mathbf{e_2} + a_3.\mathbf{e_3} = \mathbf{0}$

  $a_1.(1, 0, 0) + a_2.(0, 1, 0) + a_3.(0, 0, 1) = \mathbf{0}$

  $(a_1, a_2, a_3) = (0, 0, 0)$

  $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ e $a_3 = 0$

Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 3:** $V = \mathbb{R}^2$

  {(1, -1), (1, 0), (1, 1)} é LD pois:

  $a_1.(1,-1) + a_2.(1,0) + a_3.(1,1) = \mathbf{0}$

  $a_1 + a_2 + a_3 = 0 \qquad (1)$

  $-a_1 + a_3 = 0 \qquad (2)$

  $a_1 = a_3$

  Substituindo em (1): $a_2 = -2a_1$

  Considerando $a_1 = ½$, $a_2 = -2a_1 = -1$ e $a_3 = a_1 = ½$

  $½.(1, -1) - 1.(1, 0) + ½.(1, 1) = (0, 0)$

Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 4:** $v_1 = (2, 3)$ e $v_2 = (-4, -6)$ são LD?
- **Solução**

$av_1 + bv_2 = 0$

$a(2, 3) + b(-4, -6) = (0,0)$

$(2a, 3a) + (-4b, -6b) = (0, 0)$

$(2a-4b, 3a - 6b) = (0, 0)$

$2a - 4b = 0 \ .(3) \quad \Rightarrow \quad 6a - 12b = 0$

$3a - 6b = 0 \ .(-2) \quad \Rightarrow -6a + 12b = 0$

$0 = 0 \Rightarrow 2a - 4b = 0 \Rightarrow 2a = 4b$, LD ou LI?

Resposta: LD... Por que?

Dependência e Independência Linear

- **Exemplo 5:** $v_1 = (6, 2, 3)$ e $v_2 = (0, 5, 3)$ são LD ou LI?
- **Solução**

$av_1 + bv_2 = 0$

$a(6, 2, 3) + b(0, 5, 3) = (0, 0, 0)$

$(6a, 2a, 3a) + (0, 5b, 3b) = (0, 0, 0)$

$(6a, 2a + 5b, 3a + 3b) = (0, 0, 0)$

$6a = 0 \Rightarrow a = 0$

$2a + 5b = 0 \Rightarrow b = 0$

$3a + 3b = 0 \Rightarrow b = 0$

Como, $a = b = 0 \Rightarrow$ LD ou LI?

Resposta: LI

Exercícios

1- Verificar que o seguinte subconjunto R^3 não é subespaço vetorial deste:

$$\{(x, y, z) \in R^3 \mid x = 1\}$$

Exercícios

2- Considere o subespaço de R^4: $S = [(1, 1,-2, 4), (1, 1,-1, 2), (1, 4,-4, 8)]$, verificar se:

- O vetor (0, 0, 1, 1) pertence a S?

Exercícios

3- Seja $V = \{p_1(x), p_2(x), p_3(x)\}$, onde $p_1(x) = x^2 + x - 1$, $p_2(x) = 2x + 3$ e $p_3(x) = -x^2 + 1$.

- V é um conjunto LI ou LD?