Introdução à Álgebra Linear

Matrizes

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Matrizes

- Uma matriz é uma estrutura bi-dimensional onde todos os elementos são do mesmo tipo
- Os elementos são dispostos em linhas e colunas e cada célula dela é completamente identificada pela sua posição e seu valor

Matrizes

- Uma matriz de **m** linhas e **n** colunas é representada por:

$$A_{mxn} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ . & . & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = [a_{ij}]_{mxn}$$

Matrizes

- Exemplos
- 2 x 3 $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$
- 1 x 2 $\begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$
- 1 x 1 $\begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$

Matrizes

- **Definição:** Duas matrizes $\mathbf{A_{mxn} = [a_{ij}]_{mxn}}$ e $\mathbf{B_{rxs} = [b_{ij}]_{rxs}}$ são iguais $\mathbf{A = B}$, se elas têm:
  - o mesmo número de linhas **(m = r)**
  - o mesmo número de colunas **(n = s)**, e
  - todos os seus elementos correspondentes são iguais $\mathbf{(a_{ij} = b_{ij})}$

Matrizes

- **Matrizes iguais - exemplo**

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Quadrada:** É aquela cujo número de linhas é igual ao número de colunas. **Ex:** A_{2x2}**,** B_{5x5} e D_{mxm}

- **Matriz Nula:** É aquela em que $\mathbf{a_{ij} = 0}$, para todo i e todo j.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Coluna:** É aquela que possui apenas uma única coluna **($n = 1$)**. **Ex:** A_{2x1}, B_{5x1} e C_{mx1}

- **Matriz Linha:** É aquela que possui apenas uma única linha **($m = 1$)**. Ex: A_{1x2}, B_{1x5} e C_{1xn}

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Diagonal:** É uma matriz quadrada **(m=n)** onde $\mathbf{a_{ij} = 0}$, para todo $\mathbf{i \neq j}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Os elementos que **não** estão na **diagonal principal** são iguais a zero.
  - Os elementos da diagonal principal podem ser, ou não, iguais a zero.

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Identidade Quadrada:** É aquela em que $\mathbf{a_{ii} = 1}$ e $\mathbf{a_{ij} = 0}$, para todo $\mathbf{i \neq j}$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Triangular Superior:** É uma matriz quadrada **(m = n)** onde todos os elementos abaixo da diagonal são nulos (**a_{ij} = 0** para todo **i > j**)

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes
Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Triangular Inferior:** É uma matriz quadrada **(m = n)** onde todos os elementos acima da diagonal são nulos ($\mathbf{a_{ij} = 0}$ para todo $\mathbf{i < j}$)

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Tipos Especiais de Matrizes

- **Matriz Simétrica:** É aquela onde **m = n** e $\mathbf{a_{ij} = a_{ji}}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Adição:** A soma de duas matrizes de mesma ordem $\mathbf{A_{mxn}} = [\mathbf{a_{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$ e $\mathbf{B_{mxn}} = [\mathbf{b_{ij}}]_{\mathbf{mxn}}$, que denotamos por **A + B**, é a matriz $\mathbf{S_{mxn}}$ cujos elementos, $[\mathbf{s_{ij}}]$, são dados pela soma dos correspondentes elementos de A e B, isto é:

- $\mathbf{s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}}$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Adição - exemplo**

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 0 \\ 2 & 5 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Adição:** Propriedades (A_{mxn}, B_{mxn} e C_{mxn})
- $A + B = B + A$ (comutatividade)
- $A + (B + C) = (A + B) + C$ (associatividade)
- $A + \mathbf{0} = A$, onde $\mathbf{0}$ denota a matriz nula mxn

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação por um Escalar:** Seja **A =** $[\mathbf{a}_{ij}]_{mxn}$ e **k** um número, então definimos uma nova matriz
- $k.A = [k.a_{ij}]_{mxn}$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação por um Escalar - exemplo**

$$7.\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -2 & 5 \\ 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 28 \\ -14 & 35 \\ 7 & 0 \\ 28 & 7 \end{pmatrix}$$

Matrizes
Operações com Matrizes

- **Multiplicação por um Escalar: Propriedades**
  - k.(A + B) = k.A + k.B, sendo B uma matriz de mesma ordem que A
  - (k1 + k2).A = k1.A + k2.A, k1 e k2 números
  - 0.A = **0**, onde 0 é o número zero e **0** é a matriz nula
  - k1.(k2.A) = (k1.k2).A, k1 e k2 números

Matrizes
Operações com Matrizes

- **Transposição:** Dada uma matriz $\mathbf{A=[a_{ij}]_{mxn}}$, podemos obter outra matriz $\mathbf{A^t = [b_{ij}]_{nxm}}$, cujas linhas são as colunas de **A**, isto é, $\mathbf{b_{ij} = a_{ji}}$
- $\mathbf{A^t}$ é chamada de transposta de **A**

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Transposição - exemplo**

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \qquad A^{t} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Matrizes
Operações com Matrizes

- **Transposição - exemplo**

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix} \qquad B^{t} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Transposta:** Propriedades
  - Se A é simétrica: $A = A^t$
  - $(A^t)^t = A$
  - $(A + B)^t = A^t + B^t$
  - $(k.A)^t = k.A^t$, onde k é um número

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:** Sejam $\mathbf{A = [a_{ij}]_{mxn}}$ e $\mathbf{B = [b_{ij}]_{nxp}}$, definimos $\mathbf{A.B = [c_{uv}]_{mxp}}$, onde:

$$c_{uv} = \sum_{k=1}^{n} a_{uk} \cdot b_{kv} = a_{u1} \cdot b_{1v} + a_{u2} \cdot b_{2v} + \ldots + a_{un} \cdot b_{nv}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes - OBS:**

  i) Só podemos efetuar o produto de duas matrizes $\mathbf{A_{mxn}}$ e $\mathbf{B_{sxp}}$, se o número de colunas da primeira for igual ao número de linhas da segunda, i.e., $\mathbf{n = s}$. Além disso, a matriz resultado **C=A.B** terá ordem **mxp**.

  ii) O elemento $\mathbf{c_{ij}}$ é obtido multiplicando os elementos da **linha i** da primeira matriz pelos elementos da **coluna j** da segunda matriz, e somando esses produtos

Matrizes
Operações com Matrizes

- Multiplicação de uma matriz algébrica A_{2x3} pela matriz B_{3x2}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- A matriz **A** possui 3 colunas, e a matriz **B**, 3 linhas.
- **C** → resultado da multiplicação **A·B**
- **C** é uma matriz $\mathbf{C_{2x2}}$, pois a matriz **A** tem **2 linhas**, e a matriz **B**, **2 colunas**

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Para encontrar os termos, vamos relacionar sempre as linhas da matriz A com as colunas da matriz B:
- $c_{11} \rightarrow$ 1ª linha de A e 1ª coluna de B
- $c_{12} \rightarrow$ 1ª linha de A e 2ª coluna de B
- $c_{21} \rightarrow$ 2ª linha de A e 1ª coluna de B
- $c_{22} \rightarrow$ 2ª linha de A e 2ª coluna de B

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calcula-se cada um dos termos fazendo a multiplicação entre os termos da linha de A e os termos da coluna de B.

- Começando por $\mathbf{c_{11}}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 1ª linha de A
- 1ª coluna de B

$$c_{11} = a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calculando c_{12}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 1ª linha de A
- 2ª coluna de B

$$c_{12} = a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calculando c_{21}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 2ª linha de A
- 1ª coluna de B

$$c_{21} = a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Calculando o termo c_{22}:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}$$

- 2ª linha de A
- 2ª coluna de B

$$c_{22} = a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Matriz C resultante

$$C = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes – exemplo**
- Vamos calcular a multiplicação entre as matrizes A e B

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- Sabemos que, em A_{2x2} e B_{2x3}, o número de colunas da primeira é igual ao número de linhas da segunda, então o produto existe.

- $C = A \cdot B$ e sabemos que C_{2x3}

Matrizes
Operações com Matrizes

- Multiplicando

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \\ 0 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 \cdot 6 + 2 \cdot 0 & 3 \cdot 4 + 2 \cdot 7 & 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \\ 5 \cdot 6 + (-1) \cdot 0 & 5 \cdot 4 + (-1) \cdot 7 & 5 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 + 0 & 12 + 14 & -6 + 2 \\ 30 + 0 & 20 - 7 & -10 - 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 18 & 26 & -4 \\ 30 & 13 & -11 \end{bmatrix}$$

Matrizes
Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes: Propriedades**

  i) Em geral, $A.B \neq B.A$, observe que $A.B$ pode ser igual a $0mxn$, sem que A ou B sejam $0mxn$ (exemplo próximo slide)

  ii) $AI = IA = A$, onde I é a matriz identidade (Mostre!)

  iii) $A.(B + C) = A.B + A.C$ (Distributividade à esquerda)

  iv) $(A + B).C = A.C + B.C$ (Distributividade à direita)

  v) $(A.B).C = A.(B.C)$ (Associatividade)

  vi) $(AB)^t = B^tA^t$, observe a mudança na ordem do produto

  vii) $0.A = 0$ e $A.0 = 0$, 0 é uma matriz nula

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:** Mostrar propriedade i) para A e B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $C_{3x3} = A.B$
- $c_{11} = 1.1 + (-1).2 + 1.1 = 0$
- $c_{12} = 1.2 + (-1).4 + 1.2 = 0$
- $c_{13} = 1.3 + (-1).6 + 1.3 = 0$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $C_{3x3} = A.B$
- $c_{21} = (-3).1 + 2.2 + (-1).1 = 0$
- $c_{22} = (-3).2 + 2.4 + (-1).2 = 0$
- $c_{23} = (-3).3 + 2.6 + (-1).3 = 0$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- $C_{3x3} = A.B$
- $c_{31} = (-2).1 + 1.2 + 0.1 = 0$
- $c_{32} = (-2).2 + 1.4 + 0.2 = 0$
- $c_{33} = (-2).3 + 1.6 + 0.3 = 0$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
-

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- D = B.A
- $d_{11} = 1.1 + 2.(-3) + 3.(-2) = -5$
- $d_{12} = 1.(-1) + 2.2 + 3.1 = 6$
- $d_{13} = 1.1 + 2.(-1) + 3.0 = -1$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- D = B.A
- $d_{21} = 2.1 + 4.(-3) + 6.(-2) = -22$
- $d_{22} = 2.(-1) + 4.2 + 6.1 = 12$
- $d_{23} = 2.1 + 4.(-1) + 6.0 = -2$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**
- D = B.A
- $d_{31} = 1.1 + 2.(-3) + 3.(-2) = -11$
- $d_{32} = 1.(-1) + 2.2 + 3.1 = 6$
- $d_{33} = 1.1 + 2.(-1) + 3.0 = -1$

Matrizes

Operações com Matrizes

- **Multiplicação de Matrizes:**

$$D = \begin{pmatrix} -5 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix}$$

- **C ≠ D**

Exercícios

1) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 4 & 6 \\ 2 & 3 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 4 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & -3 \end{bmatrix}$, calcule:

a) A + B

b) 3B

c) A^t

Exercícios

2) Calcule a multiplicação das matrizes

$$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & 2\end{bmatrix}$$