



Introdução à Álgebra Linear

Revisão – Prova 2

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Lista 4

- 6. Mostre que cada um dos subconjuntos de \mathbb{R}^4 a seguir são subespaços vetoriais.
(a) $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$

Lista 4

$$6.a) W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4; x+y=0 \text{ e } z-t=0\}$$

- $y=-x \text{ e } z=t$

$$1^o) u+v \in W$$

- $(u_1, -u_1, u_2, u_2) + (v_1, -v_1, v_2, v_2) = (u_1+v_1, -u_1+(-v_1), u_2+v_2, u_2+v_2) = (u_1+v_1, -(u_1+v_1), u_2+v_2, u_2+v_2) \in W$

Lista 4

6.a) cont.

- $2^0) ku \in W$
- $k(u_1, -u_1, u_2, u_2) = (ku_1, k(-u_1), ku_2, ku_2) = (ku_1, -ku_1, ku_2, ku_2) \in W$

Lista 4

- 8. Considere os subconjuntos de \mathbb{R}^3 : $U = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$.
 - (a) Mostre que U é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 ;
 - (b) Mostre que W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 ;
 - (c) Calcule $U \cap W$.
 - (d) $\mathbb{R}^3 = U + W$? Justifique.

Lista 4

- $U = \{(x, x, x); x \in \mathbb{R}\}$
(a) Mostre que U é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 ;
1º) $u+v \in U$
- $(u_1, u_1, u_1) + (v_1, v_1, v_1) = (u_1+v_1, u_1+v_1, u_1+v_1) \in U$
2º) $ku \in U$
- $k(u_1, u_1, u_1) = (ku_1, ku_1, ku_1) \in U$

Lista 4

- $W = \{(x, y, 0); x, y \in \mathbb{R}\}$
(b) Mostre que W é um subespaço vetorial de \mathbb{R}^3 ;
1º) $u+v \in W$
- $(u_1, u_2, 0) + (v_1, v_2, 0) = (u_1+v_1, u_2+v_2, 0) \in W$
2º) $ku \in W$
- $k(u_1, u_2, 0) = (ku_1, ku_2, k0) = (ku_1, ku_2, 0) \in W$
Logo W é um subespaço de \mathbb{R}^3

Lista 4

6.(c) Calcule $U \cap W$.

- $(x, x, x) = (x, y, 0)$
- $x = 0$

$$U \cap W = (0, 0, 0)$$

Lista 4

6.(d) $R^3 = U + W$? Justifique.

- $(x, x, x) + (x, y, 0) = (x + x, x + y, x + 0) = (2x, x + y, x)$

Não representa todo o R^3 , pois o primeiro elemento precisa ser o dobro do terceiro. Dessa forma o R^3 não pode ser todo formado pela união.

Lista 4

- 11. Verifique se cada um dos vetores a seguir são LD ou LI.
- (a) $v_1=(1,2)$, $v_2=(0,1)$, $v_3=(-1,1)$ em $V = \mathbb{R}^2$.
- $av_1+bv_2+cv_3=0 \rightarrow a(1,2)+b(0,1)+c(-1,1)=0$
 $(a-c, 2a+b+c)=(0,0)$
- $a-c = 0 \rightarrow a=c$
 $2a+b+c = 0 \rightarrow b=-2a -c = -2a-a = -3a$
- Logo para $\text{coef}=\{a,3a,a\}$ para todo $a \in \mathbb{R}$
- Assim $\{v_1,v_2,v_3\}$ são LD

Lista 5

- 1. Determine uma base para cada um dos seguintes espaços vetoriais:
 - (d) $S = \{(x, y, z, w); x - 3y + z = 0\}$
 - (e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y \text{ e } z = -y\}$

Lista 5

1. (d) $S = \{(x, y, z, w); x - 3y + z = 0\}$

- $z = 3y - x$
- $(x, y, 3y - x, w) = x(1, 0, -1, 0) + y(0, 1, 3, 0) + w(0, 0, 0, 1)$
- Todo vetor de S é uma combinação linear de $(1, 0, -1, 0)$, $(0, 1, 3, 0)$ e $(0, 0, 0, 1)$
- $a(1, 0, -1, 0) + b(0, 1, 3, 0) + c(0, 0, 0, 1) = (0, 0, 0, 0)$
- $a = 0, b = 0$ e $c = 0$
- Logo são LI, então o conjunto $\{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 3, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ é uma base de S

Lista 5

1.(e) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x = 3y \text{ e } z = -y\}$

- $(3y, y, -y) = y(3, 1, -1)$
- Todo vetor de S é uma combinação linear do vetor $(3, 1, -1)$
- $a(3, 1, -1) = (0, 0, 0)$
- $a = 0$
- É LI, então o conjunto $\{(3, 1, -1)\}$ é uma base de S

Lista 5

2. Considere o conjunto $B=\{v_1, v_2, v_3\}$, onde $v_1=(1,2,3)$, $v_2=(-5,1,1)$ e $v_3=(0,0,1)$

(a) Verifique se o conjunto B é uma base do \mathbb{R}^3 .

(b) Seja B' o conjunto formado pelos vetores v_1 e v_2 de B substituindo-se o vetor v_3 pelo vetor $v_3'=(7,3,5)$. Verifique se o conjunto é LI ou LD.

(c) Mostre que $v_3'=(7,3,5)$ é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 de B .

Lista 5

- 2.(a) Verifique se o conjunto B é uma base do \mathbb{R}^3 .
- $a(1,2,3)+b(-5,1,1)+c(0,0,1)=(0,0,0)$
- $a-5b=0 \rightarrow a=5b$
- $2a+b=0 \rightarrow a=-b/2$
- $3a+b+c=0$
- $5b=-b/2 \rightarrow b=-10b$, logo $b=0$
- E $a=0$ e $c=0$
- São LI

Lista 5

- $(x,y,z) = a(1,2,3)+b(-5,1,1)+c(0,0,1)$
- $a-5b=x \rightarrow a=x+5b$ (I)
- $2a+b=y \rightarrow b=y-2a$ (II)
- $3a+b+c=z$ (III)
- Substituindo (II) em (I)
- $a=x+5(y-2a)$
- $a=x+5y-10a$
- $11a = x+5y$
- $a=(x+5y)/11$ (IV)

Lista 5

- Substituindo (IV) em (II)
- $b = y - 2((x+5y)/11)$
- $b = (11y - 2x - 10y)/11 = (y - 2x)/11$ (V)
- Substituindo (IV) e (V) em (III)
- $3a + b + c = z$
- $3((x+5y)/11) + (y-2x)/11 + c = z$
- $c = z - 3x/11 - 15y/11 - y/11 + 2x/11 = (11z - x - 16y)/11$

Lista 5

- $(x,y,z) = (x+5y)/11(1,2,3) + (y-2x)/11(-5,1,1) + (11z-x-16y)/11(0,0,1)$
- Todo vetor de \mathbb{R}^3 é uma combinação linear dos vetores $(1,2,3)$, $(-5,1,1)$ e $(0,0,1)$.
- Logo, o conjunto B é uma base do \mathbb{R}^3

Lista 5

- 2.(b) Seja B' o conjunto formado pelos vetores v_1 e v_2 de B substituindo-se o vetor v_3 pelo vetor $v_3'=(7,3,5)$. Verifique se o conjunto é LI ou LD.
- $B' = \{(1,2,3), (-5,1,1), (7,3,5)\}$
- $a(1,2,3)+b(-5,1,1)+c(7,3,5)=(0,0,0)$
- $a-5b+7c=0$ (I)
- $2a+b+3c=0 \rightarrow b=-2a-3c$ (II)
- $3a+b+5c=0 \rightarrow b=-3a-5c$ (III)

Lista 5

- Igualando (III) e (II)
- $-2a-3c=-3a-5c$
- $a=-2c$ (IV)
- Substituindo (IV) em (II)
- $b=-2(-2c)-3c$
- $b=c$ (V)
- Substituindo (IV) e (V) em (I)
- $-2c-5c+7c=0$
- $0=0$
- Sistema com infinitas soluções, então é LD

Lista 5

- (c) Mostre que $v_3'=(7,3,5)$ é uma combinação linear dos vetores v_1 e v_2 de B.

$$(7,3,5)=a(1,2,3)+b(-5,1,1)$$

- $a-5b=7$ (I)
- $2a+b=3$ (II)
- $3a+b=5 \rightarrow b=5-3a$ (III)

Lista 5

- Substituindo (III) em (II)

$$2a+5-3a=3$$

$$-a=3-5 \rightarrow a=2$$

- Substituindo em (II)

$$2.2+b=3 \rightarrow b=-1$$

- Verificando (I)

$$2-5(-1)=7$$

$$2+5=7$$

$$7=7$$

- Satisfaz as equações, então v_3' é uma combinação linear de v_1 e v_2 .

Lista 5

3. Sejam $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$, $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$, $\beta_2 = \{(\sqrt{3},1), (\sqrt{3},-1)\}$ e $\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$ bases ordenadas de \mathbb{R}^2 .

b) Quais são as coordenadas do vetor $v = (-5,1)$ em relação as bases:

i) β ii) β_1 iii) β_2 iv) β_3

Lista 5

- 3.i) $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$
 $(-5,1)=x(1,0)+y(0,1)$
- $x=-5$
- $y=1$
- $[(-5,1)]_{\beta} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \end{bmatrix}$

Lista 5

- 3.ii) $\beta_1 = \{(-1,1), (1,1)\}$
- $(-5,1)=x(-1,1)+y(1,1)$
- $-x+y=-5$ (I)
- $x+y=1 \rightarrow x=1-y$ (II)
- Substituindo (II) em (I): $-1+y+y=-5$
- $2y=-4 \rightarrow y=-2$
- $x=1-y=1-(-2)=3$
- $[(-5,1)]_{\beta_1} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

Lista 5

- 3.iii) $\beta_2 = \{(\sqrt{3}, 1), (\sqrt{3}, -1)\}$
- $(-5, 1) = x(\sqrt{3}, 1) + y(\sqrt{3}, -1)$
- $\sqrt{3}x + \sqrt{3}y = -5$ (I)
- $x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y$ (II)
- Substituindo (II) em (I):
- $\sqrt{3}(1 + y) + \sqrt{3}y = -5 \rightarrow 2\sqrt{3}y = -5 - \sqrt{3}$
- $y = (-5 - \sqrt{3}) / 2\sqrt{3} = (-5\sqrt{3} - 3) / 6$

Lista 5

- 3.iii) cont.
- $x=1+y = (6-5\sqrt{3}-3)/6 = (-5\sqrt{3}+3)/6$
- $[(-5,1)]_{\beta^2} = \begin{bmatrix} (-5\sqrt{3}+3)/6 \\ (-5\sqrt{3}-3)/6 \end{bmatrix}$

Lista 5

- 3.iv) $\beta_3 = \{(2,0), (0,2)\}$
- $(-5,1) = x(2,0) + y(0,2)$
- $2x = -5 \rightarrow x = -5/2$
- $2y = 1 \rightarrow y = 1/2$
- $[(-5,1)]_{\beta_3} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$

Lista 6

1. Verifique quais transformações são lineares:

b. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = |x|$

c. $T: P_2 \rightarrow P_2, T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x + 1 + a_2(x + 1)^2$

f. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (y - x, 0)$

Lista 6

- 1.b. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, T(x, y) = |x|$
- $u=(x_1, y_1)$ e $v=(x_2, y_2)$
- $T(u+v) = |x_1+x_2|$
- $T(u) + T(v) = |x_1|+|x_2|$
- $T(u+v) \neq T(u) + T(v)$
- Não é transformação linear

Lista 6

- 1.c. $T: P_2 \rightarrow P_2$, $T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x + 1 + a_2(x + 1)^2$
- $p_1(x_1) = a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2$
- $p_2(x_2) = a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2$
- $T(u+v) = a_0 + a_1(x_1+x_2) + 1 + a_2((x_1+x_2) + 1)^2 = a_0 + a_1x_1 + a_1x_2 + 1 + a_2((x_1+x_2)^2 + 2(x_1+x_2) + 1) = a_0 + a_1x_1 + a_1x_2 + 1 + a_2(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2(x_1+x_2) + 1)$
- $T(u)+T(v) = a_0 + a_1x_1 + 1 + a_2(x_1 + 1)^2 + a_0 + a_1x_2 + 1 + a_2(x_2 + 1)^2 = a_0 + a_1x_1 + 1 + a_2x_1^2 + 2x_1 + 1 + a_0 + a_1x_2 + 1 + a_2(x_2^2 + 2x_2 + 1)$
- $T(u+v) \neq T(u)+T(v)$
- Não é transformação linear

Lista 6

- 1.f. $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (y - x, 0)$
- $u=(x_1, y_1)$ e $v=(x_2, y_2)$
- $T(u+v) = (y_1-x_1+y_2-x_2, 0) = (y_1-x_1, 0) + (y_2-x_2, 0) = T(u) + T(v)$
- $T(\alpha u) = (\alpha y_1 - \alpha x_1, \alpha 0) = \alpha(y_1 - x_1, 0) = \alpha T(u)$
- É transformação Linear

Lista 6

4. Considere a base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ de \mathbb{R}^3 , em que $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (1, 1, 0)$ e $v_3 = (1, 0, 0)$ e seja $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o operador linear tal que:

$$\begin{aligned} T(v_1) &= (2, -1, 4), \quad T(v_2) = (3, 0, 1) \text{ e} \\ T(v_3) &= (-1, 5, 1) \end{aligned}$$

Determine uma fórmula para $T(x, y, z)$ e use a fórmula para obter $T(2, 4, -1)$

Lista 6

- 4. $T(1,1,1)=(2,-1,4)$, $T(1,1,0)=(3,0,1)$, $T(1,0,0)=(-1,5,1)$
- $T(1,0,0) + T(0,1,0) + T(0,0,1) = (2,-1,4)$ (I)
- $T(1,0,0) + T(0,1,0) = (3,0,1)$ (II)
- $T(1,0,0) = (-1,5,1)$ (III)
- Substituindo (III) em (II):
- $T(0,1,0) = (3,0,1) - (-1,5,1) = (4,-5,0)$ (IV)
- Substituindo (IV) e (III) em (I)
- $T(0,0,1) = (2,-1,4) - (4,-5,0) - (-1,5,1) = (-1,-1,3)$

Lista 6

- $(x,y,z)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)$, $a=x$, $b=y$ e $c=z$
- $T(x,y,z)=xT(1,0,0)+yT(0,1,0)+zT(0,0,1)$
- $T(x,y,z)=x(-1,5,1)+y(4,-5,0)+z(-1,-1,3)$
- $T(x,y,z)=(-x+4y-z, 5x-5y-z, x+3z)$
- $T(2, 4, -1) = (-2+16+1, 10-20+1, 2-3)=(15,-9,-1)$

Lista 6

5. Considere a transformação linear:

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \rightarrow T(x,y)=3x+2y$$

Determine o núcleo da transformação linear T.

$$T(x,y)=0 \rightarrow 3x+2y=0 \rightarrow 3x=-2y \rightarrow y=-3x/2$$

$$\text{Ker } T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 3x+2y=0\}$$

$$\text{Ker } T = \{(x,-3x/2); x \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-3/2); x \in \mathbb{R}\} = [(1,-3/2)]$$

Lista 6

6. Considere a transformação linear:

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x,y,z) \rightarrow T(x,y,z)=(x-y-z, 2z-x)$$

Determine a imagem da transformação linear T.

$$\text{Im}(T) = \{(x-y-z, 2z-x); x,y,z \in \mathbb{R}\} = \{x(1,-1)+y(-1,0)+z(-1,2); x,y,z \in \mathbb{R}\} = \langle (1,-1), (-1,0), (-1,2) \rangle$$