



Introdução à Álgebra Linear

Produto Interno

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Produto Interno

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial. Um produto interno sobre V é uma função que a cada par de vetores \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 associa-se um número, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, satisfazendo:
 - i) $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$, para todo \mathbf{v}
e $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$, se, e somente se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$
 - ii) $\langle \alpha \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \alpha \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, α real
 - iii) $\langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle + \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle$
 - iv) $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \rangle$

Produto Interno

- **Ex:** $\mathbf{v}_1 = (x_1, x_2, x_3)$ e $\mathbf{v}_2 = (y_1, y_2, y_3)$
 - $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = x_1 \cdot y_1 + x_2 \cdot y_2 + x_3 \cdot y_3$
 - produto usual de vetores no \mathbb{R}^3
 - Como seria para o \mathbb{R}^n ?

Exemplo

- Sejam $u=(u_1,u_2)$ e $v=(v_1,v_2)$. Mostre que temos um produto interno em \mathbb{R}^2 :
- $\langle u,v \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2$
- i) $\langle u,u \rangle = 3u_1u_1 + 5u_2u_2 = 3u_1^2 + 5u_2^2 \geq 0$
 $3u_1^2 + 5u_2^2 = 0$ sse $u_1 = u_2 = 0$
- ii) $\langle \alpha u, v \rangle = 3\alpha u_1v_1 + 5\alpha u_2v_2 = \alpha(3u_1v_1 + 5u_2v_2) = \alpha \langle u, v \rangle$
- iii) $\langle u+v, w \rangle = 3(u_1+v_1)w_1 + 5(u_2+v_2)w_2 = 3u_1w_1 + 3v_1w_1 + 5u_2w_2 + 5v_2w_2 = 3u_1w_1 + 5u_2w_2 + 3v_1w_1 + 5v_2w_2 = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- iv) $\langle u, v \rangle = 3u_1v_1 + 5u_2v_2 = 3v_1u_1 + 5v_2u_2 = \langle v, u \rangle$

Produto Interno

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Diz-se que dois vetores \mathbf{v} e \mathbf{w} de V são ortogonais (em relação a esse produto interno) se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0$
 - No caso, escrevemos $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

Produto Interno

- **Propriedades:**

i) $\mathbf{0} \perp \mathbf{v}$, para todo $\mathbf{v} \in V$

ii) $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ implica que $\mathbf{w} \perp \mathbf{v}$

iii) Se $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, para todo $\mathbf{w} \in V$, então $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

iv) Se $\mathbf{v}_1 \perp \mathbf{w}$ e $\mathbf{v}_2 \perp \mathbf{w}$, então $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \perp \mathbf{w}$

v) Se $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$ e λ é um escalar, então $\lambda \mathbf{v} \perp \mathbf{w}$

Produto Interno

- **Teorema:** Seja $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ um conjunto de vetores não nulos dois a dois ortogonais, isto é:
 - $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, para todo $i \neq j$
- então $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ é LI
- **Definição:** Diz-se que uma base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de V é base ortogonal se $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0$, para todo $i \neq j$. Isto é, os vetores da base são dois a dois ortogonais

Norma

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Definimos a **norma** (ou comprimento) de um vetor \mathbf{v} em relação a esse produto interno como
 - $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ no caso do \mathbb{R}^3
- Se $\|\mathbf{v}\| = 1$, isto é, $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 1$, \mathbf{v} é chamado de **vetor unitário** (diz-se que \mathbf{v} está normalizado)

Norma

- **Propriedades:**

i) $\|\mathbf{v}\| \geq 0$ e $\|\mathbf{v}\| = 0$, sse, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

ii) $\|\alpha \mathbf{v}\| = |\alpha| \cdot \|\mathbf{v}\|$, α real

iii) $|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \leq \|\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{w}\|$ (Desigualdade de Schwarz)

iv) $\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\| \leq \|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|$ (Desigualdade Triangular)

Ângulo entre Dois Vetores

- Existe um ângulo θ entre 0 e π radianos tal que:

$$\cos \theta = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle / (||\mathbf{v}|| \cdot ||\mathbf{w}||)$$

Base Ortonormal

- **Definição:** Seja V um espaço vetorial com produto interno. Diz-se que uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de V é **ortonormal** se for **ortogonal** e cada vetor for unitário, isto é:
- $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle =$
 - 0, se $i \neq j$
 - 1, se $i = j$

Base Ortonormal

- Observe que, se tivermos uma base ortonormal $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, os coeficientes x_i de um vetor $\mathbf{w} = x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n$ são dados por:
 - $\langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle x_1 \mathbf{v}_1 + \dots + x_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle \rightarrow \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle x_i \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle$
 - $x_i = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle / \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}, \mathbf{v}_i \rangle$

Base Ortonormal

- **Exemplo:**
- Seja $V = \mathbb{R}^2$ e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ o produto interno usual e $\beta = \{(1, 0), (0, 1)\}$ uma base ortonormal, temos $x_1 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_1 \rangle$ e $x_2 = \langle \mathbf{v}, \mathbf{e}_2 \rangle$
- Isso para qualquer vetor \mathbf{v}

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- A partir de uma **base qualquer** de um espaço vetorial existe um processo para se obter uma **base ortonormal**
- Vamos entender o processo para uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ e depois generalizaremos o processo...

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Seja $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1$
- Precisamos encontrar, a partir de \mathbf{v}_2 um novo vetor \mathbf{v}_2' ortogonal a \mathbf{v}_1' , isto é:
- $\langle \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_1' \rangle = 0$
- Para isso, tomamos $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - c \cdot \mathbf{v}_1'$, onde c é um número escolhido de modo que $\langle \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_1' \rangle = 0$, isto é, $\langle \mathbf{v}_2 - c \cdot \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle = 0$
- Então: $\langle \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_1' \rangle = \langle \mathbf{v}_2 - c \cdot \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle - \langle c \cdot \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle$
- Isso significa que $c = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Ficamos então com
 - $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1$
 - $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- Observe que \mathbf{v}_2' foi obtido de \mathbf{v}_2 , subtraindo deste a projeção do vetor \mathbf{v}_2 na direção de \mathbf{v}_1'
 - $(\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- e que \mathbf{v}_1' e \mathbf{v}_2' são vetores ortogonais não nulos
- Podemos então normalizá-los:
 - $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1' / \|\mathbf{v}_1'\|$ e $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2' / \|\mathbf{v}_2'\|$
- $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é ortonormal

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo:** Seja $\beta = \{(2,1), (1,1)\}$ uma base do \mathbb{R}^2
- Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno usual
- Sejam $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 1)$
- $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 = (2, 1)$
- $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- $\mathbf{v}_2' = (1,1) - (\langle (1,1), (2,1) \rangle / \langle (2,1), (2,1) \rangle) \cdot (2,1) = (-1/5, 2/5)$
- Normalizando os vetores temos:
- $\mathbf{u}_1 = \mathbf{v}_1' / \|\mathbf{v}_1'\| = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ e $\mathbf{u}_2 = \mathbf{v}_2' / \|\mathbf{v}_2'\| = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$
- $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é uma base ortonormal

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- De maneira geral, a partir de uma base $\beta = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ de um espaço vetorial V , construímos a base ortonormal $\{\mathbf{v}_1', \dots, \mathbf{v}_n'\}$ dada por:
- $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1$
- $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- $\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2' \rangle / \langle \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_2' \rangle) \cdot \mathbf{v}_2' - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
-
- $\mathbf{v}_n' = \mathbf{v}_n - (\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}' \rangle / \langle \mathbf{v}_{n-1}', \mathbf{v}_{n-1}' \rangle) \cdot \mathbf{v}_{n-1}' - \dots - (\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- Esse procedimento é conhecido como **processo de ortogonalização de Gram-Schmidt**

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- Se quisermos obter uma base ortonormal basta normalizarmos os vetores \mathbf{v}_i'
- Isto é, tomando $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i' / \|\mathbf{v}_i'\|$, obtemos a base de vetores ortonormais $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 1:** Seja $\beta = \{(1,1,1), (0,2,1), (0,0,1)\}$ uma base de \mathbb{R}^3
- Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno usual
- Sejam:
 - $\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$
 - $\mathbf{v}_2 = (0, 2, 1)$
 - $\mathbf{v}_3 = (0, 0, 1)$
- Temos:
 - $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_1 = (1, 1, 1)$

Cont.

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 1:**
- $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- $\mathbf{v}_2' = (0, 2, 1) - (\langle (0, 2, 1), (1, 1, 1) \rangle / \langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle) \cdot (1, 1, 1)$
- $\mathbf{v}_2' = (-1, 1, 0)$
- $\mathbf{v}_3' = \mathbf{v}_3 - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_2' \rangle / \langle \mathbf{v}_2', \mathbf{v}_2' \rangle) \cdot \mathbf{v}_2' - (\langle \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1'$
- $\mathbf{v}_3' = (0, 0, 1) - (\langle (0, 0, 1), (-1, 1, 0) \rangle / \langle (-1, 1, 0), (-1, 1, 0) \rangle) \cdot (-1, 1, 0) - (\langle (0, 0, 1), (1, 1, 1) \rangle / \langle (1, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle) \cdot (1, 1, 1)$
- $\mathbf{v}_3' = (-1/3, -1/3, 2/3)$

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 1:**
- Normalizando:
 - $\mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$
 - $\mathbf{u}_2 = (-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
 - $\mathbf{u}_3 = (-1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$
- e $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base ortonormal
- Poderíamos gerar um outra base ortonormal a partir de \mathbf{v}_2 ou \mathbf{v}_3 (por exemplo, fazendo $\mathbf{v}_1' = \mathbf{v}_3$)

Processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt

- **Exemplo 2:**
- Seja $\beta = \{(1,0), (0,1)\}$ a base canônica de \mathbb{R}^2
- Vamos obter a partir de β uma base ortonormal em relação ao produto interno de \mathbb{R}^2 , definido por
 - $\langle (\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1), (\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_2) \rangle = 2\mathbf{x}_1\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_2\mathbf{y}_1 + \mathbf{y}_1\mathbf{y}_2$
- Sejam $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$ e $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$
 - $\mathbf{v}_1' = (1,0) \Rightarrow \mathbf{u}_1 = (1/\sqrt{2}, 0)$ (normalizando)
 - $\mathbf{v}_2' = \mathbf{v}_2 - (\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1' \rangle / \langle \mathbf{v}_1', \mathbf{v}_1' \rangle) \cdot \mathbf{v}_1' = (1/2, 1)$
 $\Rightarrow \mathbf{u}_2 = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2})$ (normalizando)
- $\beta = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ é uma base ortonormal

Complemento Ortogonal

- Consideremos um espaço vetorial V munido de um produto interno $\langle \cdot, \cdot \rangle$ e um subconjunto não-vazio S de V (S não é necessariamente um subespaço)
- Consideremos então o subconjunto de V :
- $S^\perp = \{\mathbf{v} \in V: \mathbf{v} \text{ é ortogonal a todos os vetores de } S\}$
- S^\perp é chamado de complemento ortogonal de S

Produto Interno

- **Exemplo:** Seja $\beta = \{(1,1,0), (1,0,1), (0,2,0)\}$. Ache uma base ortonormal β' de \mathbb{R}^3 , em relação ao produto interno usual.
- **Solução:**
- $v_1' = (1, 1, 0)$
- $v_2' = v_2 - (\langle v_2, v_1' \rangle / \langle v_1', v_1' \rangle) \cdot v_1' = (1/2, -1/2, 1)$
- $v_3' = v_3 - (\langle v_3, v_2' \rangle / \langle v_2', v_2' \rangle) \cdot v_2' - (\langle v_3, v_1' \rangle / \langle v_1', v_1' \rangle) \cdot v_1'$
- $v_3' = (-4/5, 4/5, 2/5)$

Produto Interno

- Normalizando
- $u_1 = (1, 1, 0)/\sqrt{2} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$
- $u_2 = (1/2, -1/2, 1)/\sqrt{(1/4+1/4+1)} = (1/2, -1/2, 1)/\sqrt{(6/4)} = 2 (1/2, -1/2, 1)/\sqrt{6} = (1, -1, 2)/\sqrt{6}$
- $u_3 = (-4/5, 4/5, 2/5)/\sqrt{(16/25+16/25+4/25)} = (-4/5, 4/5, 2/5)/\sqrt{(36/25)} = 5(-4/5, 4/5, 2/5)/6 = (-4/6, 4/6, 2/6) = (-2/3, 2/3, 1/3)$
- $\beta' = \{u_1, u_2, u_3\} = \{(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), (1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6}), (-2/3, 2/3, 1/3)\}$

Produto Interno

- **Exemplo:** Seja $W \subset \mathbb{R}^3$ o subespaço gerado por $(1, 0, 1)$ e $(1, 1, 0)$.
 - Considere W^\perp em relação ao produto interno usual. Encontre uma base para W^\perp .
- **Solução:**
 - W^\perp = conjunto de vetores ortogonais a todos os vetores de W :
 - $\{(x, y, z) \mid \langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = 0 \text{ e } \langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0\}$
 - $\langle (x, y, z), (1, 0, 1) \rangle = 0 \Rightarrow x + z = 0 \Rightarrow z = -x$
 - $\langle (x, y, z), (1, 1, 0) \rangle = 0 \Rightarrow x + y = 0 \Rightarrow y = -x$
 - $W^\perp = (x, -x, -x) \Rightarrow [(1, -1, -1)]$

Exercícios

- 1. Sejam $u=(u_1,u_2)$ e $v=(v_1,v_2)$. Mostre que temos um produto interno em \mathbb{R}^2
- $\langle u,v \rangle = 4u_1v_1 + u_2v_1 + u_1v_2 + 4u_2v_2$

Exercícios

- 2. Ortonormalizar a base $u_1=(1,1,1)$, $u_2=(1,-1,1)$, $u_3=(-1,0,1)$ do \mathbb{R}^3 pelo processo de Gram-Schmidt.

Exercícios

- 3. Sendo $u=(1,2)$ e $v=(-1,1)$ em \mathbb{R}^2 determine um vetor w desse espaço tal que $\langle u, w \rangle = -1$ e $\langle v, w \rangle = -1$.