Lista 07 - EDO - Página 1

(1) $\frac{dy}{dt} = ky \Rightarrow \frac{1}{y}dy = kdt \overset{\int}{\Rightarrow} \int \frac{1}{y}dy = k\int dt \Rightarrow \ln y = kt + A \overset{e}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow e^{\ln y} = e^{kt+A} \Rightarrow y = e^{kt}e^{A} \Rightarrow y = Be^{kt} \Rightarrow$ Para $y(0) \Rightarrow y(0) = B = y_0$

$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 e^{kt}}$

(2) $\frac{dy}{dt} = ky\left(1 - \frac{y}{L}\right) \Rightarrow \frac{1}{y\left(\frac{1}{L} - \frac{y}{L}\right)} dy = kdt \Rightarrow \frac{1}{y\left(\frac{L-y}{L}\right)} dy = kdt$

$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{L}{(L-y)} dy = kdt \Rightarrow \frac{L}{y(L-y)} dy = kdt \Rightarrow$ Frações Parciais $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{A}{y} + \frac{B}{(L-y)} = \frac{A(L-y)+By}{y(L-y)} \Rightarrow \frac{A(L-y)+By}{y(L-y)} = \frac{L}{y(L-y)} \Rightarrow AL - Ay + By = L$

$(L-y) \quad (y)$

$\Rightarrow AL = L \rightarrow A = 1$

$By - Ay = 0y \rightarrow B - 1 = 0 \rightarrow B = 1$

$\Rightarrow \frac{L}{y(L-y)} = \frac{1}{y} + \frac{1}{(L-y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{(L-y)}\right) dy = kdt \overset{\int}{\Rightarrow} \int \frac{1}{y} dy + \int \frac{1}{(L-y)} dy = k\int dt$

$\Rightarrow \ln y - \ln(L-y) = kt + C \Rightarrow \ln\left(\frac{y}{L-y}\right) = kt + C \overset{e}{\Rightarrow} e^{\ln\left(\frac{y}{L-y}\right)} = e^{kt+C}$

Lista 07 - EDO - Página 2

Continuação da 2

$$\frac{Y}{L-Y} = e^{kt+c} \quad \times(-1) \Rightarrow \frac{L-Y}{Y} = \frac{A}{\cancel{A}e^{kt}} \Rightarrow L-Y = YAe^{kt} \Rightarrow L = YAe^{kt}+Y$$

$$\Rightarrow L = Y(Ae^{kt}+1) \Rightarrow \boxed{Y(t)\ \frac{L}{Ae^{-kt}+1}}$$

③ Lei do Resfriamento de Newton

$$\frac{dt}{dt} = -k(t-t_A)$$ ⇒ Por ser um resfriamento, seu sinal é negativo.

$$\Rightarrow \frac{dt}{(t-t_A)} = -k\,dt \overset{\int}{\Rightarrow} \int \frac{1}{t-t_A}\,dt = -k\int dt \Rightarrow \ln(t-t_A) = -kt+A$$

$$\overset{e}{\Rightarrow} e^{\ln(t-t_A)} = Be^{-kt} \Rightarrow t-t_A = Be^{-kt} \Rightarrow \boxed{t(t) = t_A + Be^{-kt}}$$

④ Na próxima página

(4) Equação de Tsiolkovsky

Dado a equação de momento

$$P = mv$$

E a equação de conservação de momento

$$P_1 = P_2 \Rightarrow m_1 v_1 = m_2 v_2$$

Então:

$$\underbrace{mv}_{\text{momento do foguete no chão}} = \underbrace{(m+\Delta m)(v+\Delta v)}_{\text{momento do foguete (somente), no ar}} - \underbrace{[\Delta m (V - V_c)]}_{\text{momento da combustão que impulsiona o foguete}}$$

$\Rightarrow \cancel{mv} = \cancel{mv} + m\Delta v + \cancel{\Delta m v} + \Delta m \Delta v - \cancel{\Delta m v} + \Delta m v_c$

$\Rightarrow 0 = m\Delta v + \Delta m \Delta v + \Delta m\, v_c \Rightarrow \Delta m \Delta v$, por serem um produto entre dois números muito pequenos, são desprezados. $\Rightarrow m\Delta v = -\Delta m\, v_c \Rightarrow$

$\Rightarrow m\dfrac{dv}{\cancel{dt}} = -\dfrac{dm}{\cancel{dt}} v_c \Rightarrow m\, dv = -v_c\, dm \Rightarrow dv = (-1)\dfrac{v_c}{m} dm \Rightarrow$

$\int \Rightarrow \displaystyle\int_{v_0}^{v} dv = (-1) v_c \int_{m_0}^{m} \frac{1}{m} dm \Rightarrow v \Big|_{v_0}^{v} = -v_c \ln(m) \Big|_{m_0}^{m} \Rightarrow V - V_0 = -v_c \ln\left(\frac{m}{m_0}\right)$

$\Rightarrow$ continua na próxima página

Lista 07 - EDO - Página 4

continuação da 4

$$\Rightarrow V - V_0 = V_c \ln\left[\left(\frac{m}{m_0}\right)^{(-1)}\right] \Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 + V_c \ln\left(\frac{m_0}{m}\right)}$$

5) Não soube explicar

6)

Dado

$$P = mg$$

E

$$f_{ag} = G\frac{Mm}{(x+r)^2}$$

Então:

I - Quando o corpo está no solo $(x=0)$

$$f_{ag} = P \Rightarrow G\frac{M\cancel{m}}{r^2} = \cancel{m}g \Rightarrow \boxed{GM = gr^2}$$

II - Quando o corpo se desloca

$$ma = -f_{ag} \Rightarrow \cancel{m}\frac{d^2x}{dt^2} = -G\frac{M\cancel{m}}{(x+r)^2} \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GM}{(x+r)^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} \Rightarrow V\cdot\frac{dV}{dx} \Rightarrow V\frac{dV}{dx} = -G\frac{M}{(x+r)^2}$$

Lista 07 - EDO - Página 5

$\Rightarrow V\frac{dV}{d\cancel{x}} = -G\frac{M}{(x+r)^2} \Rightarrow$ Sabendo que: $GM = gr^2 \Rightarrow V\frac{dV}{d\cancel{x}} = -\frac{gr^2}{(x+r)^2}$

$\Rightarrow V\,dV = -g\frac{r^2}{(x+r)^2}dx \xRightarrow{\int} \int_{V_0}^{V} V\,dV = -gr^2\int_0^x \frac{1}{(x+r)^2}dx \Rightarrow \frac{V^2}{2}\Big|_{V_0}^{V} = -gr^2 \ldots$

$\Rightarrow \frac{V^2}{2}\Big|_{V_0}^{V} \Rightarrow$ $u = x+r$ $\Rightarrow \int \frac{1}{u^2}du \Rightarrow \int u^{-2}du = \frac{u^{-1}}{-1} = -1 \cdot \frac{1}{u} = (-1)\frac{1}{x+r}$

$\Rightarrow \frac{V^2}{2}\Big|_{V_0}^{V} \Rightarrow -gr^2(-1)\frac{1}{x+r}\Big|_0^x \Rightarrow \frac{V^2}{2} - \frac{V_0^2}{2} = gr^2\left(\frac{1}{x+r} - \frac{1}{r}\right)$

$\Rightarrow \frac{V^2 - V_0^2}{2} = \frac{gr^2}{(x+r)} - \frac{gr^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} \Rightarrow \frac{V^2 - V_0^2}{2} = \frac{gr^2}{(x+r)} - gr \xRightarrow{x(2)} V^2 - V_0^2 = \frac{2gr^2}{(x+r)} - 2gr$

$\Rightarrow V^2 = V_0^2 + \frac{2gr^2}{(x+r)} - 2gr \Rightarrow V = \sqrt{V_0^2 + \frac{2gr^2}{(x+r)} - 2gr} \Rightarrow$ Sabendo que $V(\infty) = 0$

$\Rightarrow 0 = \sqrt{V_0^2 + \frac{2gr^2}{\infty + r} - 2gr} \Rightarrow 0 = \sqrt{V_0^2 + 0 - 2gr} \Rightarrow$ Elevando ao quadrado

$\Rightarrow 0 = V_0^2 - 2gr \Rightarrow V_0^2 = 2gr \Rightarrow \boxed{V_0 = \sqrt{2gr}}$