Disciplina: Introdução à Álgebra Linear

Nome: **Valor:** 2,5 pontos

Matrícula: **Data:**

1. Faça o que se pede.

(a) (0,4 pontos) Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcule $D = A.B^t + C$.

2. (a) (0,5 pontos) Encontre a inversa da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) (0,2 pontos) Encontre o valor de X na equação matricial $A^{-1}X = B$, onde

$$B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

3. Considere a matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) (0,5 pontos) Encontre o determinante da matriz A.

(b) (0,2 pontos) Responda, justificando, o sistema linear homogêneo AX = 0, onde A é a matriz dada acima, possui uma solução não nula? Obs: 0 é o vetor dos termos independentes, que nesse caso é o vetor nulo.

4. Considere o sistema linear:

$$\begin{cases} x + 2y + 2z = 2 \\ 5x + 6y - 6z = -14 \\ y + 4z = a^2 \end{cases}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

(a) (0,4 pontos) Para quais valores de **a** o sistema acima **não possui solução**? Justifique sua resposta.

(b) (0,3 pontos) Resolva o sistema acima para a = $-\sqrt{6}$.

Prova 1

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$D = A . B^t + C$

$B^t = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

$A . B^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 0 & 4 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 1.0+2.2 & 1.(-1)+2.1 & 1.2+2.0 \\ (-1).0+3.2 & (-1).(-1)+3.1 & (-1).2+3.0 \\ 0.0+4.2 & 0.(-1)+4.1 & 0.2+4.0 \\ (-2).0+1.2 & (-2).(-1)+1.1 & (-2).2+1.0 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 6 & 4 & -2 \\ 8 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \\ 8 & 5 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$

2-a)
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_1 = L_1 - L_2$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$L_2 = L_2 - L_3$
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$z = 3$

$y - z = 2 \Rightarrow y = 2 + 3 = 5$

$x - y = 1 \Rightarrow x = 1 + 5 = 6$

3-a) $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & -1 \\ 3 & 5 & 8 & 0 \end{bmatrix}$

$\det A = 2 . A_{14} + 0 . A_{24} - 1 . A_{34} + 0 . A_{44}$

$$A_{14} = (-1)^{1+4} . \left|\begin{array}{ccc|cc} 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 5 & 4 & 2 \\ 3 & 5 & 8 & 3 & 5 \end{array}\right| = (-1) . ((3 \cdot 2 \cdot 8 + 1 \, 5 \cdot 3 + 4 \cdot 4 \cdot 5) - (4 \cdot 2 \cdot 3 + 3 . 5 . 5 + 1 . 4 \cdot 8)) =$$

$$= (-1)((48 + 15 + 80) - (24 + 75 + 32))$$

$$= (-1)(143 - 131) = (-1) . 12 = -12$$

$$A_{34} = (-1)^{3+4} \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -2 & 0 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & 3 & 5 \end{array}\right| = (-1)\cdot((2\cdot1\cdot8 + (-2)\cdot4\cdot3 + 0\cdot3\cdot5) - (0\cdot1\cdot3 + 2\cdot4\cdot5 + (-2)\cdot3\cdot8)) =$$

$$= (-1)((16-24+0)-(0+40-48)) =$$

$$= (-1)(-8+8) = 0$$

$\det A = 2\cdot(-12) = -24$

b)
$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_1 = L_1/2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_2 = L_2 - 3L_1$ $\quad L_3 = L_3 - 4L_1$ $\quad L_4 = L_4 - 3L_1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_2 = L_2/4$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 6 & 5 & -5 & 0 \\ 0 & 8 & 8 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

18|4 9/2 -10

$L_3 = L_3 - 6L_2$ $\quad L_4 = L_4 - 8L_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3/4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

$w = 0$
$z = 0$
$y = 0$
$x = 0$

Não, ao resolver o sistema chega-se a uma única solução e é a nula.

4-a) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 5 & 6 & -6 & -14 \\ 0 & 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$

$L_2 = L_2 - 5L_1$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -16 & -24 \\ 0 & 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$

$L_2 = L_2/(-4)$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & a^2 \end{bmatrix}$

$L_3 = L_3 - L_2$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & a^2-6 \end{bmatrix}$

$a^2 - 6 \neq 0$

$a^2 \neq 6$

$a \neq \pm\sqrt{6}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Considerando $z = t$

$y + 4t = 6 \Rightarrow y = 6 - 4t$

$x + 2y + 2z = 2 \Rightarrow x = 2 - 2(6-4t) - 2t$

$x = 2 - 12 + 8t - 2t$

$x = 6t - 10$