Lista 6 - EDO - Página 1

1

1º passo: Aplicar a 1ª Lei de Kirchhoff no nó superior: tudo que entra, é igual a tudo que sai.

$$-i_C = i_R \Rightarrow i_R + i_C = 0$$

2º passo: $i_C = C \cdot \frac{dV}{dt}$; $i_R = \frac{V}{R}$

$$\Rightarrow C\frac{dV}{dt} + \frac{V}{R} = 0 \overset{\div(C)}{\Rightarrow} \frac{dV}{dt} + \frac{1}{RC} \cdot V = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = -\frac{1}{RC} \cdot V$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{V} = -\frac{1}{RC}\,dt \overset{\int dt}{\Rightarrow} \int \frac{1}{V}\,dV = \int -\frac{1}{RC}\,dt \Rightarrow \ln V = -\frac{1}{RC}\int dt$$

$\Rightarrow \ln V = -\frac{1}{RC} \cdot t + k \Rightarrow$ Considerando a constante V_0, para facilitar o cálculo, suponha que $k = \ln A$.

$\Rightarrow \ln V = -\frac{t}{RC} + \ln A \Rightarrow \ln V - \ln A = -\frac{t}{RC} \Rightarrow \ln \frac{V}{A} = -\frac{t}{RC} \Rightarrow$ Exponencial

$$\Rightarrow e^{\ln\left(\frac{V}{A}\right)} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \frac{V}{A} = e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow V(t) = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$\Rightarrow$ Considerando $V(0) = V_0 \Rightarrow V_0 = A\cancel{e^{-\frac{0}{RC}}}\,1 \Rightarrow V_0 = A \Rightarrow \boxed{V(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$

Lista 6 - EDO - Página 2

(2)

1º passo: Aplicar a 2º Lei de Kirchhoff: Lei das Malhas: A soma das tensões de uma malha deve ser zero.

$$U_C + U_R = 0 \Rightarrow U_C = \frac{Q}{C} \; ; \; U_R = Ri \Rightarrow \frac{Q}{C} + Ri = 0$$

$$\Rightarrow i = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow R.\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0 \xRightarrow{\div(R)} \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{RC}.Q = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC}Q \Rightarrow \frac{dQ}{Q} = -\frac{1}{RC}dt \xRightarrow{\int dt} \int \frac{1}{Q}dQ = -\frac{1}{RC}\cdot\int dt$$

$$\Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + K \Rightarrow \text{Exponencial} \Rightarrow e^{\ln Q} = e^{-\frac{t}{RC}+K} \Rightarrow Q = Ae^{-\frac{t}{RC}}$$

$$\Rightarrow \text{mas } i = \frac{dQ}{dt}, \text{ então} \Rightarrow \frac{d}{dt}(Q) = \frac{d}{dt}\left(Ae^{-\frac{t}{RC}}\right) \Rightarrow I(t) = A.\frac{d}{dt}\left(\frac{e^{RC}}{e^{t}}\right)$$

$$\Rightarrow I(t) = Ae^{RC}.\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^t}\right) \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{e^t}\right) = \frac{d}{dt}(e^{-t}) \Rightarrow \cancel{u = -t} \quad \cancel{du = -dt \Rightarrow \frac{d}{dt}} \quad \cancel{dt = -du}$$

$\Rightarrow$ Regra da Cadeia

$$\frac{dF(t)}{dt} = \frac{df}{du}\cdot\frac{du}{dt} \Rightarrow f = e^u, \; u = -t \Rightarrow \frac{d}{du}(e^u).\frac{d}{dt}(-t) = -e^{-t}$$

$$\Rightarrow I(t) = Ae^{RC}.(e^{-t}) \Rightarrow \boxed{I(t) = -Ae^{RC-t}}$$

Lista 6 - EDO - Página 3

(3)

1º passo: Aplicação da segunda Lei de Kirchhoff:

$$V_L + V_R = 0$$

2º passo: $V_L = L\dfrac{dI}{dt}$; $V_R = RI$

$$\Rightarrow L\frac{dI}{dt} + RI = 0 \xrightarrow{\div(L)} \frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}\cdot I = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}\cdot I$$

$$\Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt \xrightarrow{\int dt} \int \frac{1}{I}\,dI = -\frac{R}{L}\int dt \Rightarrow \ln I = -\frac{R}{L}\cdot t + K$$

$\Rightarrow$ Exponencial $\Rightarrow e^{\ln I} = e^{-\frac{R}{L}t + K} \Rightarrow I(t) = Ae^{-\frac{R}{L}\cdot t}$

$\Rightarrow$ Aplicando $I(0) = I_0 \Rightarrow I_0 = A\cancel{e^{-\frac{R}{L}\cdot 0}}^{1} \Rightarrow A = I_0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}}$$

(4)

1º passo: Segunda Lei de Kirchoff

$$V_f - V_R - V_C = 0$$

$V_f = V_R + V_C$, sendo $V_R = RI$, e $V_C = \frac{Q}{C}$

$V_f = RI + \frac{Q}{C}$, sendo $I = \frac{dQ}{dt}$

$$V_f = R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \overset{\div(R)}{\Rightarrow} \frac{V_f}{R} = \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{RC} \Rightarrow p(t) = \frac{1}{RC}$$

$$\mu = e^{\int p(t)dt} = e^{\int \frac{1}{RC}dt} = e^{\frac{t}{RC}+K} \Rightarrow \mu = Ae^{\frac{t}{RC}}$$

$$\underbrace{Ae^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{dQ}{dt} + Ae^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{Q}{RC}}_{\text{Eng. Reversa da Regra da Cadeia}} = Ae^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{V}{R}$$

$$\frac{d}{dt}\left(Ae^{\frac{t}{RC}} \cdot Q\right) = Ae^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{V}{R} \Rightarrow \cancel{A} \cdot \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{RC}} \cdot Q\right) = \cancel{A}e^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{V}{R}$$

$$d\left(e^{\frac{t}{RC}} \cdot Q\right) = e^{\frac{t}{RC}} \cdot \frac{V}{R} \cdot dt \overset{\int dt}{\Rightarrow} e^{\frac{t}{RC}} \cdot Q = \frac{V}{R}\int e^{\frac{t}{RC}} dt$$

Por subs. $\Rightarrow u = \frac{t}{RC}$, $du = \frac{1}{RC}dt$, $dt = RC\,du \Rightarrow \int e^u \cdot RC\,du$

$$\Rightarrow e^{\frac{t}{RC}} \cdot Q = \frac{V}{\cancel{R}} \cdot \cancel{R} \cdot C \cdot \int e^u du = VCe^{\frac{t}{RC}} + K \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{e^{\frac{t}{RC}}} \cdot Q}{\cancel{e^{\frac{t}{RC}}}} = \frac{VC\,\cancel{e^{\frac{t}{RC}}}}{\cancel{e^{\frac{t}{RC}}}} + \frac{K}{e^{\frac{t}{RC}}}$$ $\Rightarrow$ continua na próxima pág.

Lista 6 - EDO - Página 5

Continuação da 4

$$Q = VC + \frac{k}{e^{\frac{t}{RC}}} \Rightarrow Q = VC + ke^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow VC = Q - ke^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V = \frac{Q - ke^{-\frac{t}{RC}}}{C}$$

$$\Rightarrow \text{Aplicando } V(t) = V_0 \Rightarrow V_0 = \frac{Q - k\cancel{e^{-\frac{0}{RC}}}^{1}}{C} \Rightarrow V_0 = \frac{Q - k}{C}$$

$$\Rightarrow Q = V_0 C + k \Rightarrow \boxed{V(t) = \frac{V_0 C + k - ke^{-\frac{t}{RC}}}{C}}$$

~~Resol.~~ Lista 06 - EDO - Página 6

5) $I(t) = ?$

$$R_{eq} = R_1 + R_2 = \frac{V_1}{I_1} + \frac{V_2}{I_2} = \frac{V_{Req}}{I_{Req}} = R_{eq}$$

$$V_f - V_{Req} - V_C = 0 \Rightarrow V_f - (R_{eq} \cdot I_{Req}) + \frac{Q}{C} = 0 \Rightarrow V = R_{eq} \cdot I_{eq} + \frac{\int I_C dt}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}(V) = \frac{d}{dt}\left(R_{eq} \cdot I_{eq} + \frac{\int I_C \, dt}{C}\right) \Rightarrow 0 = R_{eq} \cdot \frac{d}{dt}(I_{eq}) + \frac{I_C}{C}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} R_{eq} = R \\ I_C = I \end{matrix} \Rightarrow \frac{dI}{dt} + \frac{I}{RC} = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{I}{RC} \Rightarrow \frac{1}{I} dI = -\frac{1}{RC} dt$$

$$\xRightarrow{\int dt} \ln I = -\frac{t}{RC} - \frac{A}{RC} \Rightarrow \ln I = -\frac{t}{RC} + B \xRightarrow{e^t} e^{\ln I} = e^{-\frac{t}{RC} + B}$$

$$\Rightarrow I = C \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \Rightarrow \text{Para } I(0) = I_0 \Rightarrow I_0 = C \cdot e^{-\frac{0}{RC}} \Rightarrow I_0 = C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I(t) = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

⑥ $\uparrow f_{AR} = KV$ $\Rightarrow f_R = ma \Rightarrow mg - kV = ma \Rightarrow mg - kV = m\frac{dV}{dt}$

$\downarrow P = mg$ $\Rightarrow m\frac{dV}{dt} + kV - mg = 0 \overset{\div(m)}{\Rightarrow} \frac{dV}{dt} + \frac{k}{m}\cdot V - g = 0$

$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = g - \frac{k}{m}V \Rightarrow \frac{dV}{g - \frac{k}{m}V} = dt^{\,(1)} \Rightarrow \frac{dV}{dt} = g - \frac{k}{m}V \Rightarrow \theta = \frac{dV}{dt}$

$\Rightarrow \theta = g - \frac{k}{m}V \Rightarrow d\theta = -\frac{k}{m}dV \Rightarrow dV = -\frac{m}{k}d\theta^{\,(2)}$ $\Rightarrow$ Substituindo 2 em 1:

$\Rightarrow \frac{-\frac{m}{k}.d\theta}{\theta} = dt \Rightarrow -\frac{m}{k}\circ\frac{d\theta}{\theta} = dt \overset{\int dt}{\Rightarrow} -\frac{m}{k}\int\frac{1}{\theta}d\theta = \int dt \Rightarrow$

$\Rightarrow -\frac{m}{k}\ln\theta = t + \underset{\to cte.}{A} \Rightarrow \ln\theta = -\frac{k}{m}t - \frac{k}{m}A \overset{e^t}{\Rightarrow} e^{\ln\theta} = e^{-\frac{k}{m}t - \frac{k}{m}A}$

$\Rightarrow \theta = e^{-\frac{k}{m}t}\cdot e^{-\frac{k}{m}A} \to B \Rightarrow \theta = Be^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow g - \frac{k}{m}V = Be^{-\frac{kt}{m}} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{k}{m}V = -Be^{-\frac{kt}{m}} + g \Rightarrow \boxed{V(t) = -\frac{m}{k}\left(Be^{-\frac{kt}{m}} - g\right)}$

⑦ S/ Resistência do Ar

$\downarrow P = mg$ $\Rightarrow f_R = ma \Rightarrow \cancel{m}g = \cancel{m}a \Rightarrow g = \frac{dV}{dt} \Rightarrow dV = gdt \overset{\int dt}{\Rightarrow} \boxed{V(t) = gt + A}$

Lista 06 - EDO - Página 8

$$\frac{dY}{dt} = YK \Rightarrow \frac{1}{Y}dy = k\,dt \overset{\int dt}{\Rightarrow} \ln|Y| = kt \Rightarrow k = \frac{\ln|Y|}{14}$$

$$\Rightarrow e^{\ln Y} = e^{kt+A} \Rightarrow Y = Be^{kt} \Rightarrow \begin{cases} Y(0) = Be^{k.0} = B \\ Y(14) = Be^{14k} \end{cases}$$

$$\Rightarrow Y(14) = 3.Y(0) \Rightarrow \cancel{B}e^{14k} = 3\cancel{B}$$

$\Rightarrow$ Usando limites de integração

$$\int_{Y_0}^{Y} \ln Y = \int_0^t k\,dt \Rightarrow \ln Y - \ln Y_0 = kt+A \Rightarrow \ln\left(\frac{Y}{Y_0}\right) = kt+A \quad e^t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{\ln(\frac{Y}{Y_0})} = e^{kt+A} \Rightarrow \frac{Y}{Y_0} = Be^{kt} \Rightarrow \boxed{Y = Y_0 B e^{kt}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Y(0) = BY_0 \\ Y(14) = BY_0 e^{14k} \end{cases} 3Y(0) = Y(14) \Rightarrow 3\cancel{BY_0} = \cancel{BY_0}e^{14k} \Rightarrow \ln(3) = 14k \Rightarrow k = \frac{\ln(3)}{14}$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dt} = Yk \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\ln(3)}{14} y \rightsquigarrow (Y+15) - (16+7) \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{\ln(3)}{14}(Y+15) - 23$$

$$\Rightarrow \frac{dY}{dt} = Y\frac{\ln(3)}{14} + 15\frac{\ln(3)}{14} - \frac{23}{1} = \frac{Y\ln(3) + 15\ln(3) - 322}{14} = \frac{Y\ln(3)}{14} + \underbrace{\frac{15\ln(3) - 322}{14}}_{L}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} - \frac{\ln(3)}{14}y = L \Rightarrow \mu = e^{\int -\frac{\ln(3)}{14}} = e^{-\frac{\ln(3)}{14}t} \Rightarrow \text{Aplicando} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{e^{-\frac{\ln(3)}{14}t} \cdot \frac{dy}{dt} - e^{-\frac{\ln(3)}{14}t} \cdot \frac{\ln(3)}{14} \cdot y}_{} = e^{-\frac{\ln(3)}{14}t} \cdot L \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(e^{-\frac{\ln(3)}{14}t} \cdot y\right) = e^{-\frac{\ln(3)}{14}t} \cdot L$$

$\Rightarrow$ continua na próxima página

Página 9 - EDO

=> continuação da 8

$$d\left(e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}.y\right) = L.e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}.dt \xRightarrow{\int dt} e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}.y\Big|_{y_0}^{y} = -Le^{-\frac{\ln(3)}{14}t}\Big|_{0}^{t}$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}(y-y_0) = -L.\frac{14}{\ln(3)}\left(e^{-\frac{\ln(3)}{14}.t} - e^{-\frac{\ln(3)}{14}.0}\right)$$

$$\Rightarrow e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}(y-y_0) = -L.\frac{14}{\ln(3)}.\left(e^{-\frac{\ln(3)}{14}t} - 1\right)$$

$$\Rightarrow y-y_0 = \frac{-L.\frac{14}{\ln(3)}.\left(e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}-1\right)}{e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}} \Rightarrow -L.\frac{14}{\ln(3)}.\left(e^{-\frac{\ln(3)}{14}t}-1\right)\left(e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right)$$

$$\Rightarrow y-y_0 = -L.\frac{14}{\ln(3)}.\left(e^{0}-1.e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right) = -L.\frac{14}{\ln(3)}.\left(1-e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right)$$

$$\Rightarrow y(t) = y_0 - \left(\frac{-15\ln(3)+322}{\cancel{14}}\right).\frac{\cancel{14}}{\ln(3)}.\left(1-e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = y_0 - \left(\frac{322-15\ln(3)}{\ln(3)}\right).\left(1-e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right)}$$

=> continuação na próx. pág.

Lista 06 - EDO - Página 10

=> continuação da 8

Para $Y_0 = 100$, e considerando que o fator $\left(1 - e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right)$ tende a ficar negativo em função do crescimento de $-e^{\frac{\ln(3)}{14}t}$ com o tempo, iguala-se esta equação a 0 para descobrir quando esta população morrerá.

$$0 = 100 - \left(\frac{322 - 15\ln(3)}{\ln(3)}\right)\left(1 - e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right) \Rightarrow -100 = -\left(\frac{322-15\ln(3)}{\ln(3)}\right)(1-e\ldots)$$

$$\cdot(-1) \Rightarrow 100 = \frac{322-15\ln(3)}{\ln(3)} \cdot \left(1 - e^{\frac{\ln(3)}{14}t}\right) \Rightarrow \frac{100}{\cancel{}} = \left(\frac{322}{\ln(3)} - \frac{15\cancel{\ln(3)}}{\cancel{\ln(3)}}\right)\cdot(\ldots)$$

$$\Rightarrow 0{,}330 = 1 - e^{\frac{\ln(3)}{14}t} \Rightarrow -0{,}67 = -e^{\frac{\ln(3)}{14}t} \overset{\div(-1)}{\Rightarrow} 0{,}67 = e^{\left(\frac{\ln(3)}{14}\right)\cdot t}$$

$$\Rightarrow 0{,}67 = e^{\frac{\ln(3)}{14}t} \Rightarrow 0{,}67 = e^{0{,}08t} \Rightarrow \ln(0{,}67) = 0{,}08t$$

$$\Rightarrow 0{,}400 = 0{,}08t$$

↳ Elas serão extintas quando $t = 5$.