



# **Introdução à Álgebra Linear**

## **Inversão de Matrizes e Determinantes**

Camila Martins Saporetti  
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

# Matriz Inversa

- **Definição:** Dada uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , chamamos de inversa de  $A$  uma matriz  $B$  tal que  $A.B = B.A = I_n$ , onde  $I_n$  é a matriz identidade de ordem  $n$ 
  - Escrevemos  $A^{-1}$  para indicar a inversa de  $A$

# Matriz Inversa

- **Exemplo:** Se  $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix}$ , encontre a inversa de A
- Ou seja, queremos encontrar

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

- tal que  $A.A^{-1} = A^{-1}.A = I_2$

# Matriz Inversa

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Temos assim:

$$6a + 2c = 1$$

$$6b + 2d = 0$$

$$11a + 4c = 0$$

$$11b + 4d = 1$$

Resolvendo o sistema encontramos:

$$a = 2$$

$$b = -1$$

$$c = -11/2$$

$$d = 3$$

# Matriz Inversa

- **Observações:**
- Se A e B são matrizes quadradas de mesma ordem e inversíveis, então AB é inversível e  $(AB)^{-1} = B^{-1}.A^{-1}$ 
  - $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$
  - E para  $(B^{-1}A^{-1})(AB) = I$ ?
  - $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}IB = B^{-1}B = I$

# Matriz Inversa

- Observações
- Se  $A$  é uma matriz quadrada e existe uma matriz  $B$  tal que  $BA = I$ , então  $A$  é inversível e  $B = A^{-1}$
- Nem toda matriz tem inversa, mas quando tem?

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

# Matriz Inversa

- **Teorema:** Uma matriz quadrada A tem inversa se, e somente se,  $\det A \neq 0$
- Exemplos

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 11 & 4 \end{pmatrix} \quad \det = 2$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 12 & 4 \end{pmatrix} \quad \det = 0$$

# Procedimento para Inversão de Matrizes

$$(A : I) \rightarrow (I : A^{-1})$$

- Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$




# Procedimento para Inversão de Matrizes

- Exemplo

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# Procedimento para Inversão de Matrizes


$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_2 = -2.L_1 + L_2 \\ L_4 = L_1 + L_4 \end{array}$$
$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# Procedimento para Inversão de Matrizes

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \quad L_3 = -1.L_2 + L_3$$
$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

# Procedimento para Inversão de Matrizes

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$L_3 = -1.L_3$$

$$L_1 = L_3 + L_1$$

$$L_2 = -2.L_3 + L_2$$

$$L_4 = L_3 + L_4$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

# Procedimento para Inversão de Matrizes

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right) \quad \begin{array}{l} L_1 = 2.L_4 + L_1 \\ L_2 = -4.L_4 + L_2 \\ L_3 = 3.L_4 + L_3 \end{array}$$

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & -3 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 & 6 & 6 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -5 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)$$

# Procedimento para Inversão de Matrizes

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -3 & 2 \\ -5 & 6 & 6 & -4 \\ 4 & -5 & -4 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

# Determinante de uma matriz

- A toda matriz quadrada associa-se um número, denominado **determinante da matriz**
  - obtido por meio de operações entre os elementos da matriz.
- Para representar o determinante de uma matriz  $A$  (indicado por  **$\det A$** ), substituímos os parênteses ou colchetes da matriz por barras simples.

# Determinante de uma matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{pmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 3 \\ 6 & 1 & 7 \end{vmatrix}$$

$$A = [4] \text{ e } \det A = |4|$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \text{ e } \det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 7 & -5 \end{vmatrix}$$



# Determinante de uma matriz de ordem 1

- O determinante de uma matriz quadrada de ordem 1,  $A = (a_{11})$ , é o próprio elemento de  $A$ .

$$\det A = |a_{11}| = a_{11}$$

- **Exemplos**

**a)**  $A = (4) \Rightarrow \det A = |4| = 4$

**b)**  $B = (-\sqrt{2}) \Rightarrow \det B = |-\sqrt{2}| = -\sqrt{2}$

# Determinante de uma matriz de ordem 2

- O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

- é a diferença entre o produto dos elementos da **diagonal principal** e o produto dos elementos da **diagonal secundária**.

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

# Determinante de uma matriz de ordem 2

- Exemplos

$$\text{a) } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = (2 \cdot 4) - [(-3) \cdot (-1)] = 8 - 3 = 5$$

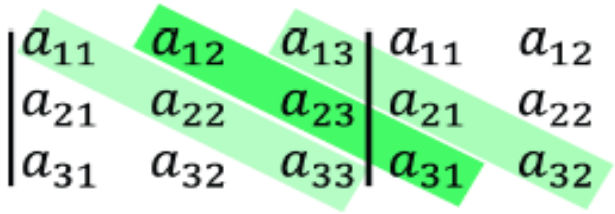
$$\text{b) } B = \begin{pmatrix} 3 & 10 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \det B = \begin{vmatrix} 3 & 10 \\ 7 & -5 \end{vmatrix} = [3 \cdot (-5)] - (10 \cdot 7) = -15 - 70 = -85$$

# Determinante de uma matriz de ordem 3

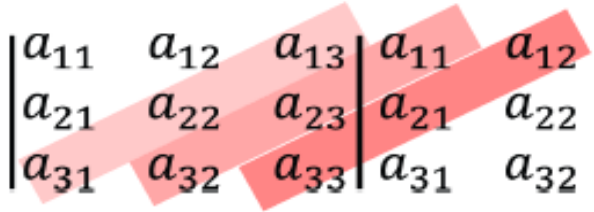
- Dada uma matriz  $A$ , quadrada de ordem 3, o determinante de  $A$  pode ser calculado pela regra de Sarrus.
- Considere a matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

# Determinante de uma matriz de ordem 3

Descrição do procedimento	Aplicação do procedimento
<b>1º)</b> Ao lado da matriz, copiam-se suas duas primeiras colunas.	$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$
<b>2º)</b> Multiplicam-se os elementos da diagonal principal e, na mesma direção dessa diagonal, multiplicam-se os elementos de cada uma das duas paralelas à sua direita.	 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$

# Determinante de uma matriz de ordem 3

Descrição do procedimento	Aplicação do procedimento
<p><b>3º)</b> Multiplicam-se os elementos da diagonal secundária e, na mesma direção dessa diagonal, os elementos de cada uma das duas paralelas à sua direita.</p>	 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$
<p><b>4º)</b> O determinante da matriz é obtido pela diferença entre as somas dos produtos do 2º e do 3º passo, nessa ordem.</p>	$\det A = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33})$

# Determinante de uma matriz de ordem 3

- Exemplo

a) Considerando a matriz,  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ , temos:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 5 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

-6   12   0   10   -8   0

Assim:

$$\det A = (10 - 8 + 0) - (-6 + 12 + 0) = -4$$

# Determinante de uma matriz de ordem 3

- Exemplo

b) Considerando a matriz  $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ -1 & 8 & 27 \end{pmatrix}$ , temos:

$$\begin{array}{ccc|cc} -1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & 9 & 1 & 4 \\ -1 & 8 & 27 & -1 & 8 \end{array}$$

-12   -72   54   -108   -18   24

- Assim

$$\det B = (-108 - 18 + 24) - (-12 - 72 + 54) = -72$$



# Determinante de uma matriz de ordem 3

- Exemplo

c) Determinar  $x$  para que a igualdade a seguir seja verdadeira

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

# Determinante de uma matriz de ordem 3

- **Exemplo c)**

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -x \\ 3 & 2 & 1 \\ x & -1 & -2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ x & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot 1 \cdot x + (-x) \cdot (3) \cdot (-1) - ((-x) \cdot 2 \cdot x + 2 \cdot 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 3 \cdot (-2))$$
$$-8 - x + 3x - (-2x^2 - 2 + 6) = -8 + 2x + 2x^2 - 4 = 2x^2 + 2x - 12 = 0$$

- $\Delta = 4 + 96 = 100$
- $X^1 = (-2 + 10)/4 = 2$
- $X^2 = (-2 - 10)/4 = -3$

# Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

## Cofator de uma matriz

Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem  $n \geq 2$ .

Chama-se **cofator** de um elemento  $a_{ij}$  de  $A$  o número real  $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ , em que  $D_{ij}$  é o determinante obtido da matriz  $A$  quando se **eliminam** a linha e a coluna que contêm o elemento  $a_{ij}$ .

# Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- Cofator de uma matriz
- Exemplos

a) Seja

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Eliminando a 1ª linha e a 2ª coluna de A, obtemos

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}$$

Logo,  $A_{12} = -7$  é cofator do elemento  $a_{12}$ .

# Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- Cofator de uma matriz

- Exemplos

- b) Seja

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 3 & 6 \\ 5 & 7 & 9 & 4 \\ -4 & 8 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- Eliminando a 3ª linha e a 4ª coluna de B, obtemos

$$B_{34} = (-1)^{3+4} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 3 \\ -4 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

- Logo,  $B_{34} = 108$  é cofator do elemento  $b_{34}$ .

# **Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2**

- **Teorema de Laplace**

O determinante de uma matriz  $A$ , de ordem  $n \geq 2$ , é a soma dos produtos dos elementos de uma fila qualquer (linha ou coluna) pelos respectivos cofatores.

# Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Escolhendo a 1ª linha, temos

$$\det A = 1 \cdot A_{11} + 2 \cdot A_{12} + (-3) \cdot A_{13} + 0 \cdot A_{14}$$

$$\begin{aligned} \det A = & 1 \cdot (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + \\ & + (-3) \cdot (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

# Determinante de uma matriz de ordem maior ou igual a 2

- **Exemplo**

Não é necessário calcular  $A_{14}$ , pois:  $0 \cdot A_{14} = 0$

Portanto:  $\det A = 1 \cdot 37 - 2 \cdot 48 - 3 \cdot 30 = -147$

## **Observação**

Ao aplicar o teorema, podemos optar por qualquer linha ou coluna que o resultado será o mesmo, mas convém optar pela linha ou coluna que tiver mais zeros.



# Exemplo

- Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

# Exemplo

- Considerando a 1ª coluna para o cálculo dos cofatores

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\det A = 0.A_{11} + 1.A_{21} + 0.A_{31} - 1.A_{41}$

# Exemplo

- $$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot 1 \cdot 0 + 3 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 2 \cdot 2 - (1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot 2 \cdot 0)) = (-1) \cdot (0 + 60 + 4 - 4 - 20 - 0) = (-1) \cdot 40 = -40$$
$$A_{41} = (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (2 \cdot 3 \cdot 5 + 3 \cdot 0 \cdot 2 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 - (1 \cdot 3 \cdot 2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 + 3 \cdot (-2) \cdot 5)) = (-1) \cdot (30 + 0 - 2 - 6 - 0 + 30) = (-1) \cdot 52 = -52$$

$$\det A = 0 \cdot A_{11} + 1 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} - 1 \cdot A_{41}$$

$$\det A = 1 \cdot (-40) - 1 \cdot (-52) = -40 + 52 = 12$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

## 1ª propriedade: Fila nula

Se todos os elementos de uma fila (linha ou coluna) de uma matriz quadrada  $A$  forem nulos, então  $\det A=0$ .

# Simplificação do cálculo de determinantes

- 1ª propriedade: Fila nula
- Exemplo

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 9 \\ 7 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 0 \cdot (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 1 & 0 & 9 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 5 & 8 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \\ 7 & 4 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3}$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 9 \\ 7 & 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 & 8 \\ 2 & 1 & 0 \\ 7 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\det A = 0 + 0 + 0 + 0 = 0$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

**2ª propriedade: Filas paralelas iguais ou proporcionais**

Se duas filas paralelas (duas linhas ou duas colunas) de uma matriz quadrada  $A$  forem iguais ou proporcionais, então  $\det A = 0$ .

# Simplificação do cálculo de determinantes

- 2ª propriedade: Filas paralelas iguais ou proporcionais
- Exemplo

a) Seja  $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 4 & 7 & 12 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

$$\det A = -28 + 252 + 240 - (252 + 240 - 28) = 0$$

b) Considerando a matriz  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ , temos:

$$\det B = 18 + 24 + 16 - (18 + 16 + 24) = 0$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

## 3ª propriedade: Combinação linear

Se uma fila de uma matriz quadrada  $A$  for uma combinação linear de outras filas paralelas, então  $\det A=0$ .



# Simplificação do cálculo de determinantes

- 3ª propriedade: Combinação linear

- Exemplo

Seja a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Temos:  $\det A = 1 \cdot 0 \cdot 2 - 2 \cdot (0 \cdot 2 - 0 \cdot 1) + 0 \cdot (2 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = 0$ .

Observe que nessa matriz a 3ª coluna é uma **combinação linear** das outras duas colunas (os elementos dessa coluna são iguais a 2 vezes os elementos da 1ª coluna somados aos opostos dos elementos da 2ª coluna).

# Simplificação do cálculo de determinantes

**4ª propriedade: Determinante da matriz transposta**

O determinante de uma matriz quadrada  $A$  é igual ao determinante de sua transposta.

# Simplificação do cálculo de determinantes

- 4ª propriedade: Determinante da matriz transposta
- Exemplo

$$\text{Seja } A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & -0 \\ 3 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\text{Então: } \det A = 16 + 0 - 20 - (-3 + 0 + 0) = -1$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\det A^t = 16 - 20 + 0 - (-3 + 0 + 0) = -1$$

# **Simplificação do cálculo de determinantes**

**5ª propriedade: Produto de uma fila por uma constante**

Em uma matriz quadrada, multiplicando todos os elementos de uma fila por um mesmo número real  $k$ , o determinante da matriz obtida fica multiplicado por  $k$ .

# Simplificação do cálculo de determinantes

- 5ª propriedade: Produto de uma fila por uma constante
- Exemplo

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}, \text{ então: } \det A = 10 - 20 + 0 + 3 - 0 + 0 = -7$$

Multiplicando a 2ª coluna de  $A$  por  $-3$ , temos:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -15 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Assim: } \det B = -30 + 60 + 0 - 9 + 0 + 0 = 21$$

$$\text{Logo: } \det B = (-3) \cdot \det A$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

- Consequência:
- Seja uma matriz  $A$ , de ordem  $n$ , e  $k$  um número real, temos:
- **$\det(k \cdot A) = k^n \cdot \det A$**
- **Exemplo**

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 9 \end{vmatrix} = 6$$

$$\begin{vmatrix} 5.2 & 5.4 \\ 5.3 & 5.9 \end{vmatrix} = 5^2 \cdot 6 = 150$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

## 6ª propriedade: Troca de filas paralelas

Trocando de posição duas filas paralelas de uma matriz quadrada  $A$ , o determinante da matriz obtida é o oposto do determinante de  $A$ .

# Simplificação do cálculo de determinantes

- 6ª propriedade: Troca de filas paralelas

- Exemplo

$$\text{Se } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}, \text{ então: } \det A = 21 + 40 - 0 - (12 - 5 + 0) = 54$$

Trocando a 1ª e a 3ª linhas de posição, temos:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ 0 & 3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Assim: } \det B = 12 - 5 + 0 - (21 + 40 - 0) = -54$$

$$\text{Logo: } \det B = -\det A$$



# Simplificação do cálculo de determinantes

## 7ª propriedade

Se todos os elementos situados de um mesmo lado da diagonal principal de uma matriz quadrada  $A$  são nulos, o determinante de  $A$  é igual ao produto dos elementos dessa diagonal.

# Simplificação do cálculo de determinantes

- 7ª propriedade
- Exemplo
- Considerando a matriz  $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 10 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ , temos

$$\det A = 1 \cdot 2 \cdot 4 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

- **Teorema de Jacobi**

Em uma matriz quadrada  $A$  de ordem  $n$ , se multiplicarmos os elementos de uma fila por uma constante qualquer e adicionarmos os resultados aos elementos correspondentes de uma fila paralela, obteremos uma matriz  $B$  tal que  $\det B = \det A$ .

# Simplificação do cálculo de determinantes

- Teorema de Jacobi - Exemplo

Dada a matriz  $M = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ , temos:

$$\det M = 0 + 10 + 6 - (-10 - 2 + 0) = 28$$

- Triplicando os elementos da 3ª coluna de  $M$  e somando aos da 1ª coluna de  $M$ , obtemos:

$$N = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det N = 0 + 10 + 12 - (-10 + 4 + 0) = 28$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

- Teorema de Jacobi – Exemplo
- Calculando o oposto do dobro dos elementos da 1ª coluna de  $M$  e somando aos da 3ª coluna de  $M$ , obtemos:

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -6 \\ 3 & 1 & -5 \\ 5 & -1 & -10 \end{pmatrix}$$

$$\det P = -20 - 50 + 18 - (-30 + 10 - 60) = 28$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

- Teorema de Binet
- Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas de mesma ordem  $n$ , então  $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
- Exemplo

Sendo  $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$  e  $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ , temos:

$$\det A = 10, \det B = 6 \text{ e } \det A \cdot \det B = 10 \cdot 6 = 60$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix}, \text{ logo } \det(A \cdot B) = 13 \cdot 6 - 2 \cdot 9 = 60$$

$$\text{Assim: } \det A \cdot \det B = \det(A \cdot B)$$

# Simplificação do cálculo de determinantes

- **Determinante da Matriz Inversa**
- Seja  $A$  uma matriz e  $A^{-1}$  sua inversa, então:

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

- **Exemplo**

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 - 2 = -5 \quad \det A^{-1} = \begin{vmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{3}{5} \end{vmatrix} = -\frac{3}{25} - \frac{2}{25} = -\frac{5}{25} = -\frac{1}{5}$$

# Exemplo

- Seja  $A$  uma matriz quadrada de ordem 4 tal que  $\det A = 3$ . Sabendo que a matriz  $B$  é da forma  $B = 2 \cdot A$ , calcular seu determinante.
- **$\det (k \cdot A) = k^n \cdot \det A$**
- $\det B = \det(2 \cdot A) = 2^4 \det A = 16 \cdot 3 = 48$



# Exercícios

1. Calcule a inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

# Exercícios

2. Calcular o determinante da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$