Trabalho 2 - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal a resolução numérica do problema de deflexão de uma viga simplesmente apoiada submetida a uma carga uniformemente distribuída. Será utilizada a equação diferencial ordinária (EDO) de segunda ordem que relaciona a deflexão com o momento fletor, aplicando-se o Método de Diferenças Finitas para obter uma solução numérica para o comportamento da viga.

2. Formulação do Problema

A deflexão $y(x)$ de uma viga sob flexão é descrita pela seguinte equação diferencial ordinária de segunda ordem:

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = M(x)$$

onde $y(x)$ é a deflexão vertical da viga no ponto x, E é o módulo de elasticidade do material da viga, I é o momento de inércia da seção transversal, $M(x)$ é o momento fletor, cuja função para uma viga simplesmente apoiada de comprimento L com uma carga concentrada P no ponto central $(x = L/2)$ é uma função linear por partes.

A fórmula é definida da seguinte forma:

$$M(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{2}x, & \text{para } 0 \leq x < \dfrac{L}{2} \\ \\ \dfrac{P}{2}(L-x), & \text{para } \dfrac{L}{2} \leq x \leq L. \end{cases}$$

Na primeira metade da viga $(0 \leq x < L/2)$, o momento cresce linearmente a partir de zero. Na segunda metade $(L/2 \leq x \leq L)$, o momento decresce linearmente, retornando a zero na extremidade. Para uma viga simplesmente apoiada, as condições de contorno são que a deflexão nas extremidades é nula, ou seja, $y(0) = 0$ e $y(L) = 0$.

3. Metodologia: Método de Diferenças Finitas

Para a resolução numérica, a viga será discretizada em n nós, com espaçamento $\Delta x = L/(n-1)$. A derivada de segunda ordem será aproximada pela fórmula de diferenças finitas centradas:

$$\frac{d^2y}{dx^2} \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2}.$$

Substituindo esta aproximação na equação diferencial, obtemos uma equação de diferenças finitas para cada nó interno ($i = 1, 2, ..., n-1$):

$$EI\left(\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{(\Delta x)^2}\right) = M_i$$

$$y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} = \frac{M_i(\Delta x)^2}{EI}$$

Este conjunto de equações, juntamente com as condições de contorno, formará um sistema de equações lineares na forma matricial $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, que será resolvido para determinar o vetor de deflexões $\mathbf{y}$. Um exemplo de conjunto de dados é: $L=$ 10 m, $w =$10 kN/m (10×10^3 N/m), E=200×10^9 Pa) e $I= 5 \times 10^{-5}$ m^4.

4. Implementação e Resultados Esperados

Realize a implementação utilizando uma linguagem de programação de sua escolha (e.g., Python, MATLAB, C ou C++). O procedimento será o seguinte:

1. Definir os parâmetros do problema: comprimento L, carga w, rigidez à flexão EI, e o número de nós n.
2. Construir a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ e o vetor do lado direito $\mathbf{b}$ do sistema de equações.
3. Aplicar as condições de contorno para fixar a deflexão nos apoios ($y_0 = 0$ e $y_n = 0$).
4. Resolver o sistema linear para encontrar os valores de deflexão nos nós internos.
5. Apresentar gráficos da solução, realizando estudos de refinamento de malha e de variação dos coeficientes presentes na EDO e na função $M(x)$.

5. Relatório

O relatório deve ser entregue em formato PDF e conter os seguintes tópicos:

- Introdução (contextualizando o problema e os objetivos).
- Metodologia (método de diferenças finitas aplicado ao problema).
- Comentários sobre a implementação computacional e execução (código e linguagem utilizada e máquina utilizada, por exemplo).
- Resultados e Discussão (apresentação dos resultados em tabelas e/ou gráficos, com análise).
- Conclusão e bibliografia.
- O código fonte do programa deve ser anexado ao relatório.
- **Imprescindível: o título do arquivo .pdf deve conter a identificação como trabalho 2 e com os nomes dos estudantes que compõe a equipe. Para envios fora deste formato será solicitada correção e reenvio.**
- O trabalho deve ser entregue até o final do dia 20/10/2025, com envio para o email gsouza@iprj.uerj.br, com assunto **Trabalho 2 – MNED – 2025/2**.

Outras orientações relevantes serão informadas no decorrer das aulas do curso.