Introdução à Álgebra Linear

Revisão – Prova 3

Camila Martins Saporetti
(camila.saporetti@iprj.uerj.br)

Lista 7

2. Encontre os autovalores e autovetores correspondentes dos operadores $\in (R^2)$ abaixo.

(a)$T(x, y)=(x+y, x-y)$

(c)$T(1, 0)=(0,1)$ e $T(0, 1)=(1,0)$

Lista 7

- (a)$T(x, y)=(x+y, x-y)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$x+y = \lambda x \rightarrow y = \lambda x - x$

$x-y = \lambda y$

$x-\lambda x+x = \lambda(\lambda x - x)$

$x(1-\lambda+1) = x\lambda(\lambda - 1)$

$\lambda^2 - \lambda - 1 + \lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 - 2 = 0$

$\lambda^2 = 2$

$\lambda = \pm\sqrt{2}$

Lista 7

Para $\lambda_1 = \sqrt{2}$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sqrt{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
- $x+y = \sqrt{2}x$

$x-y = \sqrt{2}y \rightarrow x = \sqrt{2}y + y = y(\sqrt{2}+1)$

O autovetor associado a $\lambda_1 = \sqrt{2}$ é $((\sqrt{2}+1)y,y) \rightarrow [(\sqrt{2}+1,1)]$

Lista 7

Para $\lambda_2 = -\sqrt{2}$

- $$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -\sqrt{2}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$
- $x+y = -\sqrt{2}x$

$x-y = -\sqrt{2}y \rightarrow x = -\sqrt{2}y + y = y(-\sqrt{2}+1)$

O autovetor associado a $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ é $((-\sqrt{2}+1)y,y) \rightarrow [(-\sqrt{2}+1,1)]$

Lista 7

- (c)T(1, 0)=(0,1) e T(0, 1)=(1,0)
- (x,y)=x(1,0) + y(0,1)
- T(x,y)=x(0,1) + y(1,0)=(y,x)
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- $y = \lambda x \rightarrow y=\lambda(\lambda y) \rightarrow \lambda^2 = \pm 1$
- $x = \lambda y$

Lista 7

- Para λ_1=1
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- y=x
- O autovetor associado a λ_1=1 é (x,x) → [(1,1)]

Lista 7

- Para λ_2=-1
- $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- y=-x
- O autovetor associado a λ_2=-1 é (x,-x) → [(1,-1)]

Lista 7

3.Considere $A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

(a)Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de A e A^2.

(b)O que você pode dizer ao comparar os autovetores de A e A^2?

(c)E quanto aos autovalores?

Lista 7

- (a)Calcule os autovalores e autovetores correspondentes de A e A^2.
- De A $\begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$
- $(-1-\lambda)(-\lambda) - 6 = 0$
- $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$
- $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -3$

Lista 7

- Para λ_1=2
- $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- -x+3y = 2x
- 2x=2y $\rightarrow$ x=y
- O autovetor associado a λ_1=2 é (x,x) $\rightarrow$ [(1,1)]

Lista 7

- Para λ_2=-3
- $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = -3 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- -x+3y = -3x
- 2x=-3y → x=-3y/2
- O autovetor associado a λ_2=-3 é (-3y/2,y) → [(-3/2,1)]

Lista 7

- De $A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$
- $\begin{vmatrix} 7-\lambda & -3 \\ -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = 0$
- $(7-\lambda)(6-\lambda) - 6 = 0$
- $\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$
- $\lambda_1 = 9$ e $\lambda_2 = 4$

Lista 7

- Para $\lambda_1=9$
- $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=9\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- 7x-3y = 9x
- -2x+6y=9y → x=-3y/2
- O autovetor associado a $\lambda_1=9$ é (-3y/2,y) → [(-3/2,1)]

Lista 7

- Para λ_2=4
- $\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 4\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
- 7x-3y = 4x $\rightarrow$ x=y
- -2x+6y=4y
- O autovetor associado a λ_2=4 é (x,x) $\rightarrow$ [(1,1)]

Lista 7

- b) os autovetores são iguais
- c) Os autovalores de A^2 é o quadrado dos autovalores de A

Lista 8

1. Determine a matriz associada, na base canônica, a transformação linear T. Depois determine uma base β de autovetores, se possível, e a matriz $[T]^{\beta}_{\beta}$.

(a) $T(x, y)=(x, 2x+y)$

Exercícios

- $T(x,y) = (x,2x+y)$
- $[T]_{\alpha}^{\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad det\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$
- $(1-\lambda)^2=0 \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 1$
- Para $\lambda = 1 \rightarrow v = (0,y) = [(0,1)]$
- Como só possui um vetor e trata-se do R^2, T não é diagonalizável

Lista 8

2. Encontre o polinômio minimal das transformações abaixo e verifique se são diagonalizáveis. Considere a base canônica.

(c) $L: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dado por $L(x, y, z)=(x+y, x-y+2z, 2x+y-z)$.

Lista 8

- L(x, y, z)=(x+y, x−y+2z, 2x+y−z).
- $[L]_{\alpha}^{\alpha}=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}$ $\quad det\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 0\\ 1 & -1-\lambda & 2\\ 2 & 1 & -1-\lambda\end{vmatrix}=0$
- $-\lambda^3-\lambda^2+4\lambda+4=0$
- $\lambda_1=-1, \lambda_2=-2$ e $\lambda_3=2$
- p(x) =(x+1)(x+2)(x-2)

Lista 8

- $$p\left(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 1 & -1\end{bmatrix}\right)=\left(\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2\\ 2 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}\right)$$
-
- $$\begin{bmatrix}7 & 3 & 2\\ 7 & 3 & 2\\ 7 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 1 & -3 & 2\\ 2 & 1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$
- p(x) é o polinômio minimal, L é diagonalizável
- $$[L]_{\beta}^{\beta}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

Lista 9

1. Considerando o produto interno usual, calcule em cada caso, $\langle u, v \rangle$, $\langle u, u \rangle$ e $\langle v, v \rangle$.

a) $u=(1,1,-1)$ e $v=(2,1,5)$.

$\langle u, v \rangle = 1.2 + 1.1 - 1.5 = -2$

$\langle u, u \rangle = 1.1 + 1.1 + (-1)(-1) = 3$

$\langle v, v \rangle = 2.2 + 1.1 + 5.5 = 30$

Lista 9

4. Sejam $u=(u_1,u_2,u_3)$ e $v=(v_1,v_2,v_3)$. Identifique os casos em que temos um produto interno definido em R^3. Nos casos que falham, indique as propriedades que não se verificam.

a) $\langle u, v\rangle = u_1v_1+u_3v_3$

Lista 9

- a)$\langle u, v\rangle = u_1v_1 + u_3v_3$
- i) $<u,u> = u_1u_1 + u_3u_3 = u_1^2 + u_3^2 \geq 0$ e $u_1^2 + u_3^2 = 0 \leftrightarrow u_1 = u_3 = 0$
- ii) $<\alpha u,v> = \alpha u_1v_1 + \alpha u_3v_3 = \alpha(u_1v_1 + u_3v_3) = \alpha<u,v>$
- iii) $<u+v,w> = (u_1+v_1)w_1 + (u_3+v_3)w_3 = u_1w_1 + v_1w_1 + u_3w_3 + v_3w_3$ $= u_1w_1 + u_3w_3 + v_1w_1 + v_3w_3 = <u,w> + <v,w>$
- iv) $<u,v> = u_1v_1 + u_3v_3 = v_1u_1 + v_3u_3 = <v,u>$
- É um produto interno no R^3

Lista 9

6. Seja $\beta=\{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$. Use o processo de Gram-Schmidt para obter uma base ortonormal de R^3, em relação ao produto interno usual.

$v_1 = (1,1,1)$

$v_2 = (1,1,0)$

$v_3 = (1,0,0)$

Lista 9

- $\mathbf{v}_1' = (1,1,1)$
- $\mathbf{v_2' = v_2} - (\langle \mathbf{v_2}, \mathbf{v_1'}\rangle / \langle \mathbf{v_1'}, \mathbf{v_1'}\rangle).\mathbf{v_1'}$
- $\mathbf{v_2'} = (1,1,0) - ((1+1+0)/(1+1+1)).(1,1,1) =$

  $= (1,1,0) - 2/3.(1,1,1) = (1/3,1/3,-2/3)$
- $\mathbf{v_3'} = \mathbf{v_3} - (\langle \mathbf{v_3},\mathbf{v_2'}\rangle / \langle \mathbf{v_2'},\mathbf{v_2'}\rangle).\mathbf{v_2'} - (\langle \mathbf{v_3},\mathbf{v_1'}\rangle / \langle \mathbf{v_1'}, \mathbf{v_1'}\rangle).\mathbf{v_1'}$

  $\mathbf{V_3'} = (1,0,0) -((1/3+0+0)/(1/9+1/9+4/9))(1/3,1/3,-2/3) - 1/3(1,1,1)=$

  $= (1,0,0) - (1/3/6/9)(1/3,1/3,-2/3) - (1/3,1/3,1/3) =$

  $= (1,0,0) - (1/3*9/6)(1/3,1/3,-2/3) - (1/3,1/3,1/3) =$

  $=(1,0,0) - (1/6,1/6,-2/6) - (1/3,1/3,1/3) = (1,0,0) - (3/6,3/6,0) = (3/6,-3/6,0)$

Lista 9

- Normalização
- $v_1 = (1,1,1)/\sqrt{3} = (\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3,\sqrt{3}/3)$
- $v_2 = (1/3,1/3,-2/3)/\sqrt{((1/3)^2 + (1/3)^2 + (-2/3)^2)}=(1/3,1/3,-2/3)/\sqrt{(6/9)} = 3(1/3,1/3,-2/3)/\sqrt{6} = (\sqrt{6}/6,\sqrt{6}/6,-\sqrt{6}/3)$
- $v_3 = (3/6,-3/6,0)/\sqrt{((3/6)^2 + (-3/6)^2 + (0)^2)} = (3/6,-3/6,0)/\sqrt{(18/36)} = 6(3/6,-3/6,0)/(3\sqrt{2}) = (3,-3,0)/(3\sqrt{2}) = (1,-1,0)/\sqrt{2} = (\sqrt{2}/2,-\sqrt{2}/2,0)$

Lista 9

8. Seja $W \in R^3$ o subespaço gerado pelos vetores (0,1,1) e (1,0,0). Determine uma base para $W^\perp$ (usando o produto interno usual).

$\{(x,y,z)/<(x,y,z),(0,1,1)>=0$ e $(x,y,z)/<(x,y,z),(1,0,0)>=0\}$

$<(x,y,z),(0,1,1)> =0 \rightarrow y+z=0 \rightarrow z=-y$

$<(x,y,z),(1,0,0)> =0 \rightarrow x=0$

$W^\perp = (0,y,-y) \rightarrow [(0,1,-1)]$