Trabalho 3 - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal a resolução numérica do problema de difusão de calor em uma barra unidimensional. Será utilizada a equação diferencial parcial (EDP) parabólica que rege o fenômeno transiente, aplicando-se o Método de Diferenças Finitas em uma formulação totalmente implícita para obter a distribuição de temperatura na barra ao longo do tempo.

2. Formulação do Problema

A distribuição de temperatura $T(x,t)$ em uma barra de comprimento L é descrita pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

onde $T(x,t)$ é a temperatura no ponto x e no instante de tempo t, e α é o coeficiente de difusão térmica do material. Para resolver a equação, é necessária uma condição inicial e duas condições de contorno.

A condição inicial para a temperatura em toda a barra no instante $t = 0$ é dada por:

$$T(x,0) = T_0(x)$$

onde, para simplificação, a temperatura inicial será considerada constante em toda a barra, $T_0(x) = T_{inicial}$.

As condições de contorno são definidas da seguinte forma:

1. Em $x = 0$: A temperatura é mantida em um valor constante (condição de contorno de Dirichlet).
$$T(0,t) = T_A$$
2. Em $x = L$: A taxa de variação da temperatura em relação ao espaço (fluxo de calor) é prescrita (condição de contorno de Neumann).
$$\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = q_L$$

3. Metodologia: Método de Diferenças Finitas

Para a resolução numérica, a barra será discretizada em n nós no espaço, com espaçamento $\Delta x = L/(n-1)$, e o tempo será discretizado em passos de tamanho Δt.

A aproximação por diferenças finitas para o esquema totalmente implícito é dada por:

- Aproximação temporal (derivada de primeira ordem):

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

- Aproximação espacial (derivada de segunda ordem):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \approx \frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

Substituindo estas aproximações na EDP, obtemos a seguinte equação de diferenças finitas para cada nó interno ($i = 1, 2, ..., n-2$):

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} = \alpha \frac{T_{i-1}^{k+1} - 2T_i^{k+1} + T_{i+1}^{k+1}}{(\Delta x)^2}$$

Ao reorganizar esta equação para agrupar os termos desconhecidos no passo de tempo $k+1$ no lado esquerdo, chegamos à expressão que forma o sistema linear:

$$-\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i-1}^{k+1} + \left(1 + 2\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}\right) T_i^{k+1} - \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} T_{i+1}^{k+1} = T_i^k$$

Este conjunto de equações, juntamente com as condições de contorno, formará um sistema de equações lineares na forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{T}^{k+1} = \mathbf{b}^k$, que será resolvido em cada passo de tempo para determinar o vetor de temperaturas $\mathbf{T}^{k+1}$ a partir do vetor conhecido $\mathbf{T}^k$.

4. Implementação e Resultados Esperados

Realize a implementação utilizando uma linguagem de programação de sua escolha (e.g., Python, MATLAB, C ou C++). O procedimento será o seguinte:

1. Definir os parâmetros do problema: comprimento L, coeficiente α, número de nós n, tamanho do passo de tempo Δt, e as condições de contorno T_A e q_L.

2. Definir o perfil de temperatura inicial $T(x, 0)$.

3. Construir a matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ e o vetor do lado direito $\mathbf{b}$ do sistema de equações para cada passo de tempo.

4. Aplicar as condições de contorno de Dirichlet em $x = 0$ e de Neumann em $x = L$.

5. Implementar um laço de tempo para resolver o sistema linear em cada passo e atualizar o vetor de temperatura.

6. Apresentar gráficos da solução, mostrando a evolução da distribuição de temperatura em diferentes instantes de tempo. Realizar estudos de convergência de malha espacial (Δx) e de passo de tempo (Δt).

5. Relatório

O relatório deve ser entregue em formato PDF e conter os seguintes tópicos:

- Introdução (contextualizando o problema e os objetivos).
- Metodologia (método de diferenças finitas aplicado ao problema).
- Comentários sobre a implementação computacional e execução (código e linguagem utilizada e máquina utilizada, por exemplo).
- Resultados e Discussão (apresentação dos resultados em tabelas e/ou gráficos, com análise).
- Conclusão e bibliografia.
- O código fonte do programa deve ser anexado ao relatório.
- **Imprescindível: o título do arquivo .pdf deve conter a identificação como trabalho 3 e com os nomes dos estudantes que compõe a equipe. Para envios fora deste formato será solicitada correção e reenvio.**
- O trabalho deve ser entregue até o final do dia 14/11/2025, com envio para o email gsouza@iprj.uerj.br, com assunto **Trabalho 3 – MNED – 2025/2**.

Outras orientações relevantes serão informadas no decorrer das aulas do curso.

6. Dados para um exemplo

- **Comprimento da barra (L):** 1.0 m
- **Coeficiente de difusão térmica (α):** 1.0×10^{-4} m²/s
- **Número de nós no espaço (n):** 51
- **Tamanho do passo de tempo (Δt):** 10.0 s
- **Tempo total de simulação (t_{total}):** 500.0 s
- **Condição Inicial:** A barra está uniformemente a uma temperatura de 20.0°C.

$$T(x, 0) = 20.0°\text{C}$$

- **Condição de Contorno em $x = 0$:** A extremidade esquerda é mantida a 100.0°C.

$$T(0, t) = 100.0°\text{C}$$

- **Condição de Contorno em $x = L$:** A extremidade direita é isolada (fluxo de calor nulo).

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = 0$$