Trabalho 4 - Métodos Numéricos para Equações Diferenciais

1. Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal a resolução numérica da equação de advecção (ou transporte) unidimensional, que descreve como uma quantidade (e.g., temperatura, concentração) é transportada por um fluxo constante. Será utilizada a equação diferencial parcial (EDP) de primeira ordem, aplicando-se o Método de Diferenças Finitas em uma formulação totalmente explícita para simular a propagação de um perfil de temperatura na barra ao longo do tempo.

2. Formulação do Problema

A distribuição de temperatura $T(x,t)$ em uma barra de comprimento L é descrita pela seguinte equação diferencial parcial:

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

onde $T(x,t)$ é a temperatura no ponto x e no instante de tempo t, e u é a velocidade de advecção, considerada constante. Para resolver a equação, é necessária uma condição inicial e duas condições de contorno.

A condição inicial para a temperatura em toda a barra no instante $t = 0$ é dada por:

$$T(x,0) = T_0(x)$$

onde, para simplificação, pode-se considerar uma função de perfil de temperatura inicial (e.g., um pulso retangular ou gaussiano) que será transportado.

As condições de contorno são definidas da seguinte forma:

1. Em $x = 0$: A temperatura é mantida em um valor constante (condição de contorno de Dirichlet).
$$T(0,t) = T_A$$
2. Em $x = L$: A taxa de variação da temperatura em relação ao espaço (fluxo de calor) é nula (condição de contorno de Neumann).
$$\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0$$

3. Metodologia: Método de Diferenças Finitas

Para a resolução numérica, a barra será discretizada em n nós no espaço, com espaçamento $\Delta x = L/(n-1)$, e o tempo será discretizado em passos de tamanho Δt.

A formulação totalmente explícita utiliza a aproximação de diferenças finitas para as derivadas no passo de tempo atual k para calcular os valores no próximo passo de tempo $k+1$.

- Aproximação temporal (derivada de primeira ordem):

$$\frac{\partial T}{\partial t} \approx \frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t}$$

- Aproximação espacial (derivada de primeira ordem): Para garantir a estabilidade para $u > 0$, utilizaremos a aproximação de diferenças finitas progressivas:

$$\frac{\partial T}{\partial x} \approx \frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x}$$

Substituindo estas aproximações na EDP, obtemos a seguinte equação de diferenças finitas:

$$\frac{T_i^{k+1} - T_i^k}{\Delta t} + u\frac{T_i^k - T_{i-1}^k}{\Delta x} = 0$$

Ao reorganizar esta equação, obtemos a fórmula explícita para o cálculo da temperatura no próximo passo de tempo:

$$T_i^{k+1} = T_i^k - u\frac{\Delta t}{\Delta x}(T_i^k - T_{i-1}^k)$$

Um aspecto crítico da formulação explícita é a sua estabilidade, que é regida pela condição de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL):

$$|u|\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq 1$$

As condições de contorno são aplicadas da seguinte forma: o valor em $x = 0$ é fixado em T_A. O valor no nó da extremidade $x = L$ é calculado usando uma aproximação da condição de derivada nula, como por exemplo, a igualdade de temperatura entre os dois últimos nós: $T_n^{k+1} = T_{n-1}^{k+1}$.

4. Implementação e Resultados Esperados

Realize a implementação utilizando uma linguagem de programação de sua escolha. O procedimento será o seguinte:

1. Definir os parâmetros do problema: comprimento L, velocidade de advecção u, número de nós n, tamanho do passo de tempo Δt, e as condições de contorno T_A e a condição de derivada nula em $x = L$.

2. Definir o perfil de temperatura inicial $T(x, 0)$ (e.g., um pulso).

3. Implementar um laço de tempo. Dentro do laço, aplicar a fórmula explícita para calcular o novo perfil de temperatura em todos os nós internos.

4. Aplicar as condições de contorno após cada passo de tempo.

5. Apresentar gráficos da solução, mostrando a evolução do pulso de temperatura na barra em diferentes instantes de tempo.
6. Investigar a estabilidade do método, demonstrando a necessidade da condição de CFL para obter resultados fisicamente consistentes.

5. Relatório

O relatório deve ser entregue em formato PDF e conter os seguintes tópicos:

- Introdução (contextualizando o problema e os objetivos).
- Metodologia (método de diferenças finitas aplicado ao problema).
- Comentários sobre a implementação computacional e execução (código e linguagem utilizada e máquina utilizada, por exemplo).
- Resultados e Discussão (apresentação dos resultados em tabelas e/ou gráficos, com análise).
- Conclusão e bibliografia.
- O código fonte do programa deve ser anexado ao relatório.
- **Imprescindível: o título do arquivo .pdf deve conter a identificação como trabalho 4 e com os nomes dos estudantes que compõe a equipe. Para envios fora deste formato será solicitada correção e reenvio.**
- O trabalho deve ser entregue até o final do dia 04/12/2025, com envio para o email gsouza@iprj.uerj.br, com assunto **Trabalho 4 – MNED – 2025/2**.

Outras orientações relevantes serão informadas no decorrer das aulas do curso.

6. Dados para um exemplo

- **Comprimento da barra (L):** 1.0 m
- **Velocidade de advecção (u):** 0.1 m/s
- **Número de nós no espaço (n):** 101
- **Tamanho do passo de tempo (Δt):** 0.05 s (satisfaz a condição de CFL)
- **Tempo total de simulação (t_{total}):** 5.0 s
- **Condição Inicial:** A barra está uniformemente a uma temperatura de 20.0°C.

$$T(x,0) = 20.0°\text{C}$$

- **Condição de Contorno em $x = 0$:** A extremidade esquerda é mantida a 100.0°C.

$$T(0,t) = 100.0°\text{C}$$

- **Condição de Contorno em $x = L$:** A extremidade direita é isolada (fluxo de calor nulo).

$$\frac{\partial T}{\partial x}(L,t) = 0$$