19CS10039
Kaushal Banthia
1

1. $\|A\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$

Now, $\frac{\|A\hat{x}\|_2}{\|\hat{x}\|_2} \leq \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2}$ ($\hat{x} \neq 0$ and $\in \mathbb{R}^n$)

Thus, $\frac{\|A\hat{x}\|_2}{\|\hat{x}\|_2} \leq \|A\|_2$ (")

$\Rightarrow \|A\hat{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\hat{x}\|_2$ (")

This is true for $\hat{x} = 0$ true.

Thus, $\|Ax\|_2 \leq \|A\|_2 \|x\|_2$ (for $x \in \mathbb{R}^n$)

Let B be a matrix. and $\hat{x} = Bx$

$\therefore$ From previous results

$\|A\hat{x}\|_2 \leq \|A\|_2 \|\hat{x}\|_2$

$\leq \|A\|_2 \|Bx\|_2$

$\leq \|A\|_2 \|B\|_2 \|x\|_2$ (Cauchy Schwartz Inequality)

$\therefore \frac{\|A\hat{x}\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2 \|B\|_2$

$\Rightarrow \frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2 \|B\|_2$ ($\because \hat{x} = Bx$)

$\Rightarrow \|AB\|_2 = \max_{x \neq 0} \frac{\|ABx\|_2}{\|x\|_2} \leq \|A\|_2 \|B\|_2$.

$\therefore \|AB\|_2 \leq \|A\|_2 \|B\|_2$

For Frobenius norm,

Let $C = AB$ $\therefore c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$

$\Rightarrow |c_{ij}|^2 = |\Sigma a_{ik} b_{kj}|^2$

$\leq \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2$ — (1)

Now, $\|AB\|_F^2 = \|C\|_F^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |c_{ij}|^2$

$\leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right)$

$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|^2 \right) \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |b_{kj}|^2 \right)$ (Cauchy Schwartz Inequality)

$\leq \|A\|_F^2 \|B\|_F^2 \Rightarrow \|AB\|_F \leq \|A\|_F \|B\|_F$