4. Zufällige Messfehler

Inhaltsübersicht

4 Zufällige Messfehler

- Unterscheidung: systematische und zufällige Messfehler
  - **Systematisch**: gleiches Ergebnis bei wiederholten Versuchen
  - **Zufällig**: abweichende Ergebnisse (in Betrag und Vorzeichen)
- Einteilung hängt u. a. von den Versuchsbedingungen und von der Detaillierung der Versuchsdurchführung ab

- Beispiel:
  - Spannungsmesser wird an Spannungsnormal angeschlossen, mehrere Messungen über den Tag verteilt
  - Ergebnis: Fehler der Messungen unterscheiden sich in Betrag und Vorzeichen, d. h. sind zufällig
  - Vermutung nach näherer Untersuchung: Zusammenhang zur Temperatur
  - Wiederholung der Versuche im Temperaturschrank
  - Ergebnis: Fehler hängen von der Raumtemperatur ab, d. h. sind doch systematisch

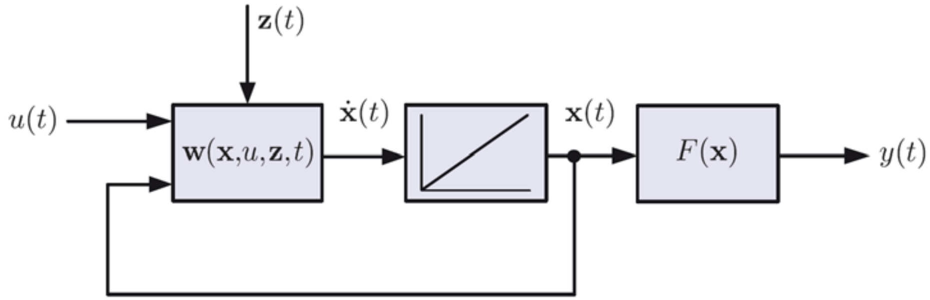
4 Zufällige Messfehler

- Beobachtung: Je feiner die Versuchsbedingungen festgelegt und gemessen werden und je besser das Systemverständnis ist, desto mehr Fehler lassen sich als systematische Fehler beschreiben
- Auch Zufallsexperimente lassen sich im Prinzip systematisch modellieren
- Beispiel: Würfelwurf
  - Bei Kenntnis von Richtung, Drehimpuls, Stoßzahl etc. ließe sich das Ergebnis prinzipiell nach den Gesetzen der Mechanik bestimmen
- Erkenntnis der Chaostheorie: Kleine Abweichungen der Anfangsbedingungen führen zu unterschiedlichen Ergebnissen, dies lässt sich dann als zufällig auffassen

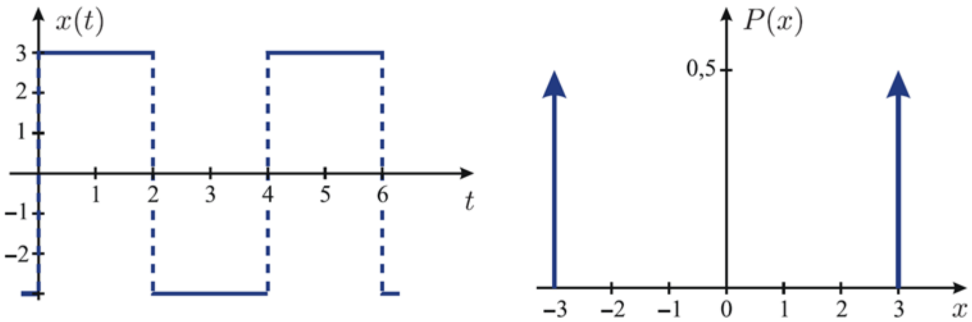
- Thema dieses Kapitels: Untersuchung und Beschreibung zufälliger Fehler mit Methoden der Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischen Statistik

4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

- Bisherige Beschreibung eines Messsystems: Zeitsignale für Ein- und Ausgänge



- Dabei deterministische Beschreibung der Eingangs- und Ausgangsgrößen: Funktionen der Signalamplitude über der Zeit bzw. Betrags- und Phasenspektrum
- Problem: Zeitverlauf der Störgrößen $\mathbf{z}(t)$ ist nicht genau bekannt, diese werden daher meist probabilistisch im „Amplitudenbereich" mit Wahrscheinlichkeiten beschrieben
- Beispiel: Rechtecksignal und Beschreibung im Amplitudenbereich: Amplitudenwerten $x(t)$ werden Wahrscheinlichkeiten $P(x)$ zugeordnet

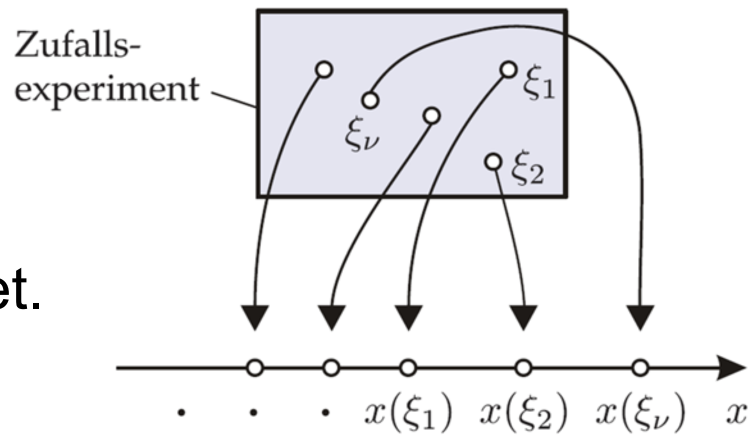


- Dabei Informationsverlust: zeitliche Abfolge der Werte $x(t)$

4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

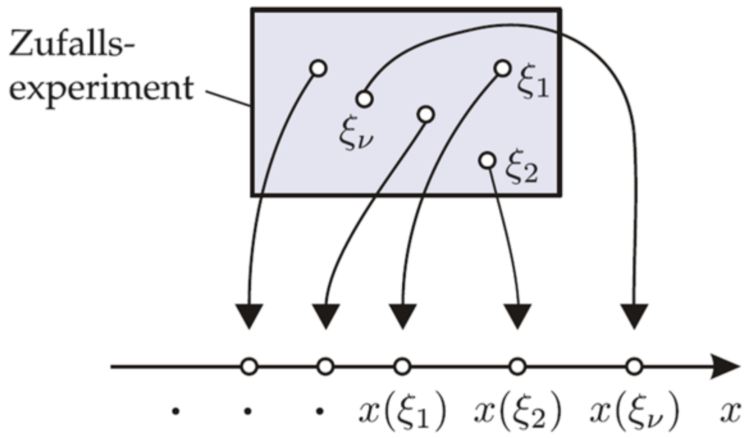
- Modellvorstellung: Amplitudenwerte werden als Ergebnis eines Zufallsexperiments interpretiert
- Kontinuierliche, diskrete oder auch nominale Ergebnisse je nach Art des Signals
- Dazu Abbildung der Ergebnismenge des Zufallsexperiments (d. h. der Menge der Elementarereignisse) auf eine geeignete Wertemenge (meist reelle Zahlen) mittels Zufallsvariablen x

- Definition: **Zufallsvariable**
  Jede auf der Ergebnismenge eines Zufallsexperiments definierte reelle Funktion wird als Zufallsvariable bezeichnet.
  Ist x das Symbol einer Zufallsvariablen, so bezeichnet man die reelle Zahl, die dem Elementarereignis ξ durch x zugeordnet wird, mit $\mathrm{x}(\xi)$.



4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

- Begriff Zufallsvariable ist irreführend:
  $x(\xi)$ ist keine Variable, sondern eine wohldefinierte Funktion (Abbildung);
  Zufall spielt nur bei der Auswahl der ξ_i eine Rolle
- Ergebnismenge des Zufallsexperiments kann auch selbst als Zufallsvariable verwendet werden
- Diskrete Zufallsvariablen:
  abzählbare Elementarereignisse
  (z. B. Würfeln, Wurf einer Münze)
- Kontinuierliche Zufallsvariablen:
  nicht abzählbare Elementarereignisse
  (z. B. Messung einer metrischen Größe):
  häufigster Fall in der Messtechnik, daher im Folgenden betrachtet



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

- Beispiel: Diskrete Zufallsvariable
  - Würfelexperiment: Würfel wird zweimal geworfen
  - Elementarereignisse ξ_1 und ξ_2
  - Zufallsvariable x: Summe der Augenzahlen:
    $\mathrm{x}(\xi) = \xi_2 + \xi_2$ für $\xi_1, \xi_2 \in \{1, \ldots, 6\}$
  - Zufallsvariable x ist also diskret mit Wertebereich $\mathrm{x} \in \{2, \ldots, 12\}$

- Beispiel: Kontinuierliche Zufallsvariable
  - Spannungsquelle mit Nennspannung $U_0 = 5\ \mathrm{V}$
  - Gemessene Werte schwanken im Bereich $4{,}9\ \mathrm{V} \leq \mathrm{u} \leq 5{,}1\ \mathrm{V}$
  - Zufallsvariable x: Abweichung von der Nennspannung:
    $\mathrm{x}(\xi) = \mathrm{u} - U_0$
  - Zufallsvariable x ist also kontinuierlich mit Wertebereich
    $-0{,}1\ \mathrm{V} \leq \mathrm{x} \leq 0{,}1\ \mathrm{V}$

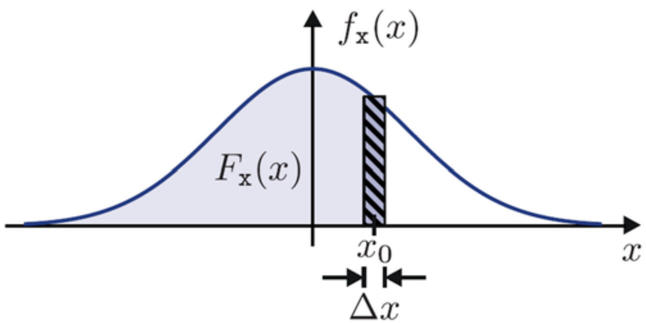
4.1 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie

- Definition: **Wahrscheinlichkeitsverteilung**
  Die Wahrscheinlichkeitsverteilung (kurz: Verteilung) $F_{\mathrm{x}}(x) = P(\mathrm{x} \leq x)$ einer Zufallsvariablen x gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit welcher der Funktionswert von x kleiner oder gleich x ist.
- $\lim_{x \to -\infty} F_{\mathrm{x}}(x) = 0, \ \lim_{x \to \infty} F_{\mathrm{x}}(x) = 1$
- $F_{\mathrm{x}}(x)$ ist monoton steigend

- Alternative Beschreibung einer Zufallsvariablen:
  Wahrscheinlichkeitsdichte

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definition: **Wahrscheinlichkeitsdichte**
  Die Wahrscheinlichkeitsdichte (kurz: Dichte) $f_{\mathrm{x}}(x)$ einer Zufallsvariablen x ist definiert durch
  $f_{\mathrm{x}}(x) = \frac{\mathrm{d}F_{\mathrm{x}}(x)}{\mathrm{d}x}$ mit $F_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{x} f_{\mathrm{x}}(u)\,\mathrm{d}u$
- $f_{\mathrm{x}}(x) \geq 0$ (da $F_{\mathrm{x}}(x)$ monoton steigend ist)
- $\int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{x}}(u)\,\mathrm{d}u = 1$
- $\int_{a}^{b} f_{\mathrm{x}}(u)\,\mathrm{d}u = P(a < \mathrm{x} \leq b)$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
- $f_{\mathrm{x}}(x)$ beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass x in einer schmalen Umgebung der Breite $\Delta\mathrm{x}$ liegt, bezogen auf die Umgebungsbreite $\Delta\mathrm{x}$

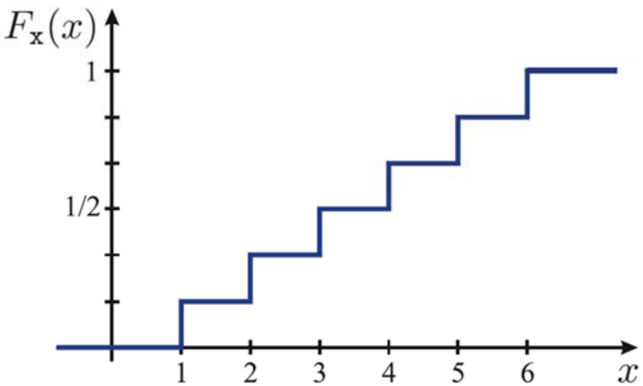


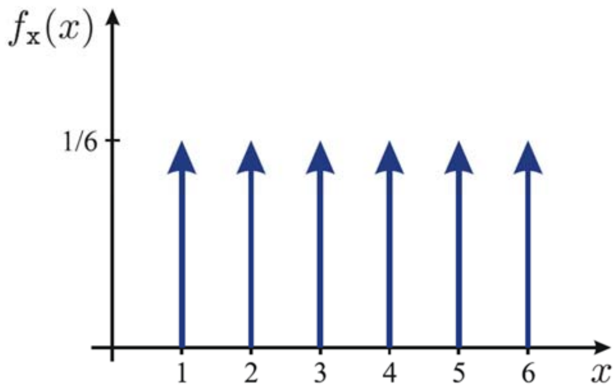
- Bei diskreten Wahrscheinlichkeiten: Dirac-Impulse in der Wahrscheinlichkeitsdichte

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Beispiel: Fairer Würfel
  - Diskrete Zufallsvariable x: Augenzahl beim einmaligen Würfeln
  - Fairer Würfel: Alle Elementarereignisse (d. h. Augenzahlen 1,…,6) treten mit gleicher (diskreter) Wahrscheinlichkeit auf
  - Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ enthält sechs Dirac-Impulse mit dem Gewicht $\frac{1}{6}$





Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Falls keine Verwechslungsgefahr besteht: Indizes weglassen:
  $f_{\mathrm{x}}(x) = f(x)$, $F_{\mathrm{x}}(x) = F(x)$

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Mehrere Zufallsvariablen über derselben Ergebnismenge: Beschreibung mittels Verteilungen und Dichten, die das gemeinsame Auftreten von Werten der Zufallsvariablen bewerten
- Im Folgenden: Betrachtung von zwei Zufallsvariablen x, y
- Definition: **Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung**
  Die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung oder gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{\mathrm{xy}}(x, y) = P(\mathrm{x} \leq x \cap \mathrm{y} \leq y)$ zweier Zufallsvariablen x, y gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit welcher der Funktionswert von x kleiner oder gleich x ist und der Funktionswert von y kleiner oder gleich y ist
- Alternativ: Verbundwahrscheinlichkeitsdichte

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definition: **Verbundwahrscheinlichkeitsdichte**
  Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte oder gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte zweier Zufallsvariablen x, y ist
  $f_{\mathrm{xy}}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{\mathrm{xy}}(x,y)}{\partial x \, \partial y}$
- $F_{\mathrm{xy}}(x, y) = \int_{-\infty}^{x} \int_{-\infty}^{y} f_{\mathrm{xy}}(u, v) \, \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v$
- Falls keine Verwechslungsgefahr besteht: Indices weglassen:
  $f_{\mathrm{xy}}(x, y) = f(x, y)$, $F_{\mathrm{xy}}(x, y) = F(x, y)$

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Marginalisierung: Bestimmung einer sog. Randdichte aus einer Verbundwahrscheinlichkeitsdichte durch Integration
- Definition: **Randdichte**
  Ist die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{xy}}(x,y)$ zweier Zufallsvariablen x, y gegeben, so werden die Randdichten der einzelnen Zufallsvariablen durch Marginalisierung erhalten:
  $$f_{\mathrm{x}}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{xy}}(x,y)\,\mathrm{d}y \quad \text{bzw.} \quad f_{\mathrm{y}}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{xy}}(x,y)\,\mathrm{d}x$$
- Umkehrung (d. h. Bestimmung der Verbundwahrscheinlichkeitsdichte aus den Randdichten) ist nur möglich, wenn x und y „stochastisch unabhängig“ sind

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definition: **Stochastische Unabhängigkeit**
  Zwei Zufallsvariablen x, y heißen stochastisch unabhängig, wenn
  $F_{\mathrm{xy}}(x, y) = F_{\mathrm{x}}(x) \cdot F_{\mathrm{y}}(y)$ bzw. $f_{\mathrm{xy}}(x, y) = f_{\mathrm{x}}(x) \cdot f_{\mathrm{y}}(y)$

- Stochastische Unabhängigkeit lässt sich empirisch höchstens näherungsweise nachweisen
- Bei Modellierung von Messsystemen meist (annähernde) Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der beteiligten Größen,
  Vorteil: vereinfachte Modellierung und Analyse

Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definition: **Bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte**
  Die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte
  $$f_{\mathrm{x}|\mathrm{y}}(x|y) = \frac{f_{\mathrm{x}y}(x,y)}{f_{\mathrm{y}}(y)}$$
  ist die Wahrscheinlichkeit der Zufallsvariablen x unter der Bedingung, dass das Ereignis $\mathrm{y} = y$ aufgetreten ist.

- Falls x und y stochastisch unabhängig sind, hängt das Auftreten von $\mathrm{x} = x$ nicht von der Bedingung $\mathrm{y} = y$ ab. Dann gilt:
  $$f_{\mathrm{x}|\mathrm{y}}(x|y) = \frac{f_{\mathrm{x}y}(x,y)}{f_{\mathrm{y}}(y)} = \frac{f_{\mathrm{x}}(x) \cdot f_{\mathrm{y}}(y)}{f_{\mathrm{y}}(y)} = f_{\mathrm{x}}(x)$$

Wahrscheinlichkeitsdichte

- **Bayes-Theorem**

  aus der bedingten Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x|y}}(x|y) = \frac{f_{\mathrm{x}y}(x,y)}{f_{\mathrm{y}}(y)}$:

  $f_{\mathrm{x}y}(x, y) = f_{\mathrm{x|y}}(x|y) \cdot f_{\mathrm{y}}(y) = f_{\mathrm{y|x}}(y|x) \cdot f_{\mathrm{x}}(x)$

  d. h. Zusammenhang zwischen den bedingten Wahrscheinlichkeiten $f_{\mathrm{x|y}}(x|y)$ und $f_{\mathrm{y|x}}(y|x)$, z. B.

  $f_{\mathrm{x|y}}(x|y) = \frac{f_{\mathrm{y|x}}(y|x) \cdot f_{\mathrm{x}}(x)}{f_{\mathrm{y}}(y)}$

  siehe z. B. Vorlesung Informationsfusion

Wahrscheinlichkeitsdichte

- **Summe stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen**
  Werden zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen x und y addiert mit $\mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}$, so erhält man die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_{\mathrm{z}}(z)$ der resultierenden Zufallsgröße z durch Faltung:
  $f_{\mathrm{z}}(z) = f_{\mathrm{x}}(z) * f_{\mathrm{y}}(z)$
  - Beweis:
    - X und y sind unabhängig: $f_{\mathrm{xy}}(x, y) = f_{\mathrm{x}}(x) \cdot f_{\mathrm{y}}(y)$
    - Dichte $f_z(z)$ erhält man durch Verschiebung der Dichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ um y, daher ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe bei gegebenem y: $f_{\mathrm{z|y}}(z|y) = f_{\mathrm{x}}(z - y)$
    - Daraus folgt:
      $f_{\mathrm{zy}}(z, y) = f_{\mathrm{z|y}}(z|y) \cdot f_{\mathrm{y}}(y) = f_{\mathrm{x}}(z - y) \cdot f_{\mathrm{y}}(y)$
    - Marginalisierung:
      $f_z(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{zy}}(z, y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{x}}(z - y) \cdot f_{\mathrm{y}}(y)\, \mathrm{d}y = f_{\mathrm{x}}(z) * f_{\mathrm{y}}(z)$

Wahrscheinlichkeitsdichten abgebildeter Größen

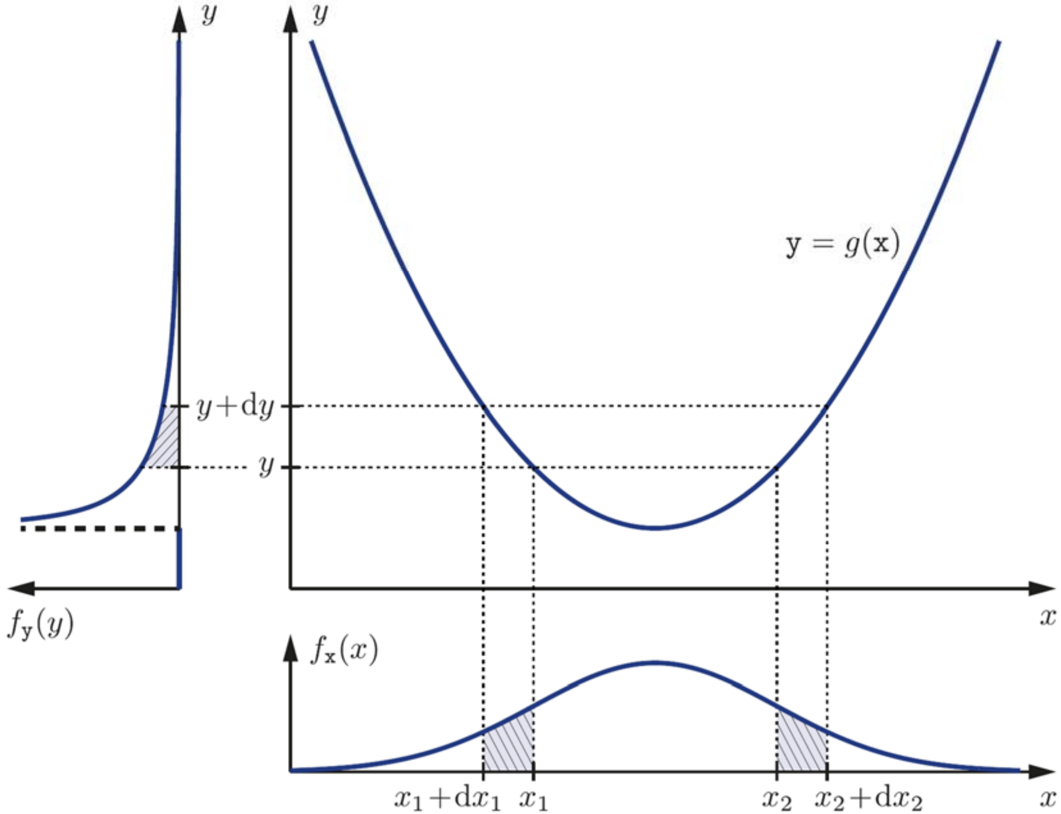
- Abbildung von Zufallsvariablen: $\mathrm{x} \rightarrow g(\mathrm{x})$

- **Wahrscheinlichkeitsdichten transformierter Variablen**
  Wird eine Zufallsvariable x mit der Dichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ durch eine Funktion $\mathrm{y} = g(\mathrm{x})$ in eine neue Zufallsvariable transformiert, und existiert eine Umkehrfunktion mit n Lösungen $\mathrm{x}_i = g^{-1}(\mathrm{y})$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, so gilt für die Wahrscheinlichkeitsdichte von y:

$$f_{\mathrm{y}}(y) = \sum_{i=1}^{n} f_{\mathrm{x}}(x_i) \left| \frac{\mathrm{d}g(\mathrm{x})}{\mathrm{d}x} \right|_{\mathrm{x}=x_i}^{-1}$$

Wahrscheinlichkeitsdichten abgebildeter Größen

- Veranschaulichung:
  - Wahrscheinlichkeit im Intervall $y \leq \mathrm{y} \leq y + \mathrm{d}y$:
    $$f_\mathrm{y}(y)\,\mathrm{d}y = f_\mathrm{x}(x_1)|\mathrm{d}x_1| + f_\mathrm{x}(x_2)|\mathrm{d}x_2| + \cdots$$
  - $g'(x_i) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x_i}$
    $$\Rightarrow \quad \mathrm{d}x_i = \frac{\mathrm{d}y}{g'(x_i)}$$
  - Daraus folgt:
    $$f_\mathrm{y}(y)\,\mathrm{d}y = f_\mathrm{x}(x_1)\left|\frac{\mathrm{d}y}{g'(x_1)}\right| + f_\mathrm{x}(x_2)\left|\frac{\mathrm{d}y}{g'(x_1)}\right| + \cdots$$
    $$\Rightarrow f_\mathrm{y}(y) = f_\mathrm{x}(x_1)\left|\frac{1}{g'(x_1)}\right| + f_\mathrm{x}(x_2)\left|\frac{1}{g'(x_1)}\right| + \cdots$$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Momente der Statistik 1. Ordnung

- Bisher: Beschreibung von Zufallsvariablen x mittels Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{\mathrm{x}}(x)$ bzw. Dichtefunktion $f_{\mathrm{x}}(x)$
- Kompaktere Beschreibung anhand von Kenngrößen (z. B. Mittelwert, Varianz)
- Definition über den Erwartungswert

- Dazu Definition: **Statistik $\boldsymbol{n}$-ter Ordnung**
  Werden bei einer statistischen Betrachtung n Zufallsvariablen $\mathrm{x}_1, \dots, \mathrm{x}_n$ berücksichtigt, so spricht man von einer Statistik n-ter Ordnung. Diese wird durch die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}_1,\dots,\mathrm{x}_n}(x_1, \dots, x_n)$ vollständig beschrieben.

Momente der Statistik 1. Ordnung

- Definition **Erwartungswert**
  Der Erwartungswert einer Funktion $g(\mathrm{x})$ einer Zufallsvariablen x mit der Dichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ ist definiert durch:
  $$\mathrm{E}\{g(\mathrm{x})\} = \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \cdot f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Erwartungswert ist linearer Operator:
  $\mathrm{E}\{a \cdot g(\mathrm{x})\} = a \cdot \mathrm{E}\{g(\mathrm{x})\}$
  $\mathrm{E}\{g(\mathrm{x}) + h(\mathrm{x})\} = \mathrm{E}\{g(\mathrm{x})\} + \mathrm{E}\{h(\mathrm{x})\}$

Momente der Statistik 1. Ordnung

- Erwartungswert, wenn für $g(\mathrm{x})$ Potenzen x^m eingesetzt werden: Momente

- Definition: **Moment**
  Das m-te Moment einer Zufallsvariablen x ist definiert zu:
  $$\mu_{\mathrm{x},m} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} x^m \cdot f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Erstes Moment $\mu_{\mathrm{x},1} = \mu_{\mathrm{x}} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}\} = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$ ist der Mittelwert oder Schwerpunkt von x
  Lageparameter: beschreibt, wo sich die Zufallsgröße im Mittel befindet

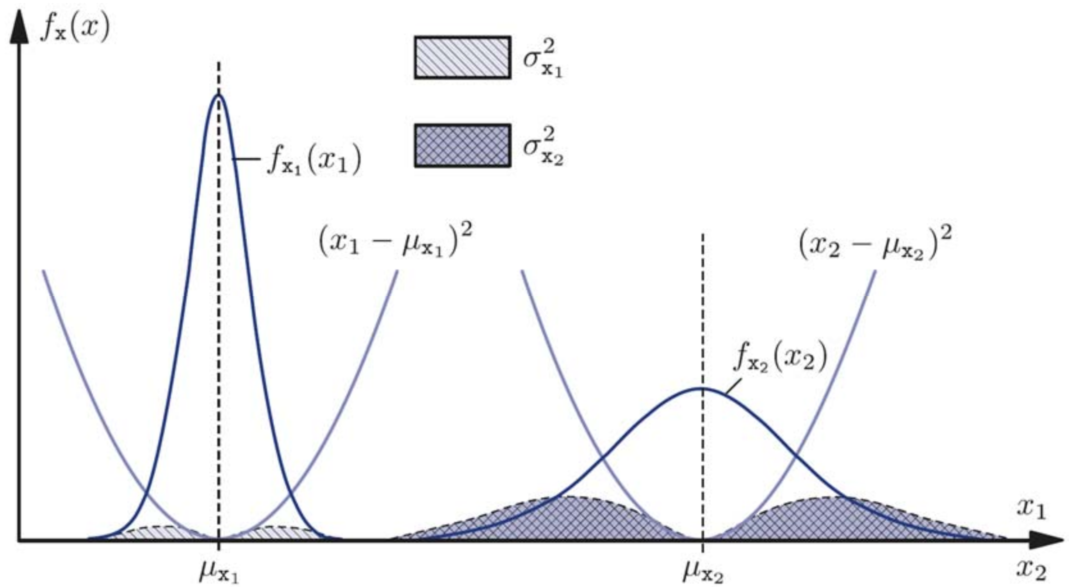
- Nicht verwechseln: Ordnung n einer Statistik und Ordnung m eines Moments

Momente der Statistik 1. Ordnung

- Definition: **Zentrales Moment**
  Das m-te zentrale Moment einer Zufallsvariablen x ist definiert zu:

$$\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^m \cdot f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Zweites zentrales Moment: Varianz σ_{x}^2
- Wurzel der Varianz σ_{x}: Standardabweichung
  Streuungsparameter: beschreibt die Breite der Dichtefunktion



$$\sigma_{\mathrm{x}_1}^2 < \sigma_{\mathrm{x}_2}^2$$

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Momente der Statistik 1. Ordnung

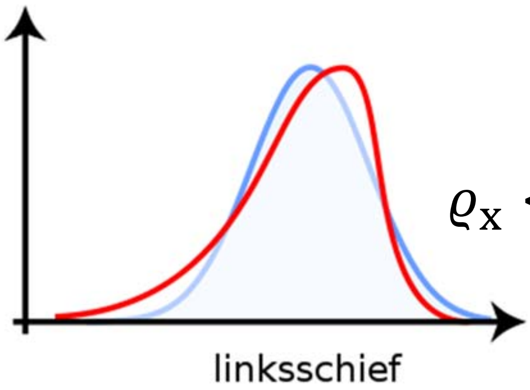
- Höhere Momente:
  - Schiefe:

$$\varrho_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x} - \mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^3\}}{\sigma_{\mathrm{x}}^3}$$

Maß für die Asymmetrie einer Verteilung

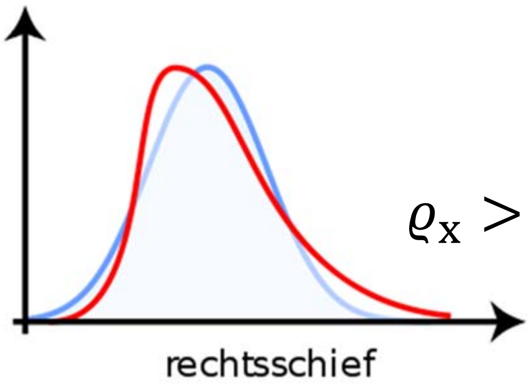
$\varrho_{\mathrm{x}} < 0$: linksschief (rechtssteil)
$\varrho_{\mathrm{x}} > 0$: rechtsschief (linkssteil)

Für symmetrische Verteilungen: $\varrho_{\mathrm{x}} = 0$, Verteilungen mit $\varrho_{\mathrm{x}} = 0$ müssen aber nicht symmetrisch sein



$\varrho_{\mathrm{x}} < 0$

Bildquelle: Von Chrischi - Eigenes Werk, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9020667



$\varrho_{\mathrm{x}} > 0$

Bildquelle: Von Chrischi - Eigenes Werk, Gemeinfrei, https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=9020751

Momente der Statistik 1. Ordnung

- Höhere Momente:
  - Exzess:

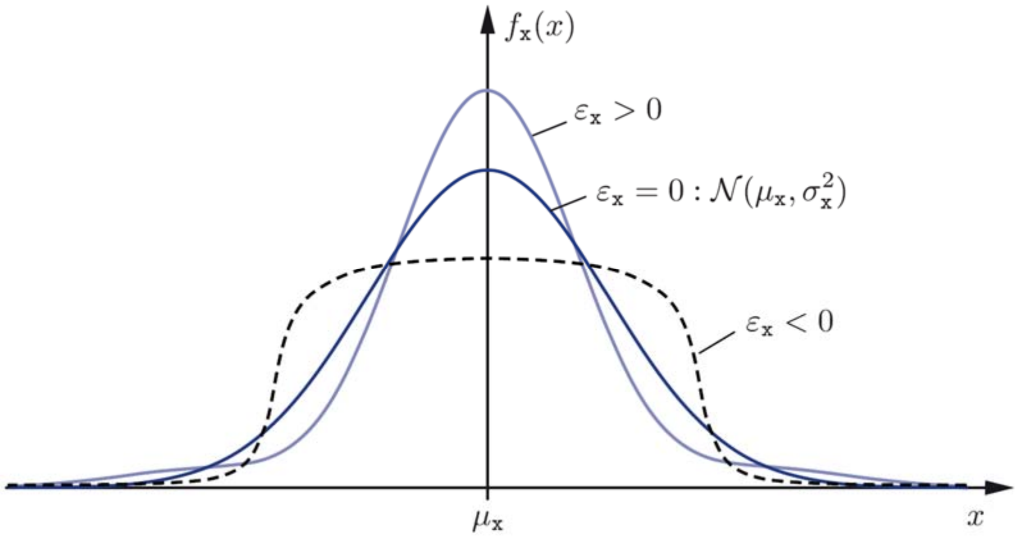
$$\varepsilon_\mathrm{x} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x} - \mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^4\}}{\sigma_\mathrm{x}^4} - 3$$

Maß für die Abweichung einer unimodalen (d. h. eingipfligen) Verteilung von der Normalverteilung

Für Normalverteilung: $\varepsilon_\mathrm{x} = 0$

$\varepsilon_\mathrm{x} < 0$: flachgipflig (platykurtisch)

$\varepsilon_\mathrm{x} > 0$: steilgipflig (leptokurtisch)



Momente der Statistik 2. Ordnung

- Statistik zweiter Ordnung: zwei Zufallsvariablen werden betrachtet

- Definition: **Gemeinsames Moment**
  Das gemeinsame Moment zweier Zufallsvariablen ist definiert zu
  $$\mu_{\mathrm{xy},km} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}^k \mathrm{y}^m\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x^k y^m f_{\mathrm{xy}}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,,$$
  wobei die Summe $k+m$ die Ordnung des Moments bezeichnet.

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Anwendung meist als einfaches Produkt $\mathrm{E}\{\mathrm{xy}\}$, d. h. $k = m = 1$ und als zentrales Moment, d. h. zentrales Moment zweiter Ordnung:

- Definition: **Kovarianz**
  Die Kovarianz zweier Zufallsvariablen ist definiert zu

$$C_{\mathrm{xy}} = \mathrm{E}\left\{(\mathrm{x} - \mu_{\mathrm{x}})\left(\mathrm{y} - \mu_{\mathrm{y}}\right)\right\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x - \mu_{\mathrm{x}})\left(y - \mu_{\mathrm{y}}\right) f_{\mathrm{xy}}(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

- Bedeutung der Kovarianz: Aussage über die lineare stochastische Abhängigkeit (die Korrelation)

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Definition: **Unkorrelierte Größen**
  Zwei Zufallsvariablen x und y sind unkorreliert, wenn für sie gilt:
  $\mathrm{E}\{\mathrm{xy}\} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}\} \cdot \mathrm{E}\{\mathrm{y}\}$ bzw. $C_{\mathrm{xy}} = 0$,
  beide Aussagen sind äquivalent

- Für unkorrelierte Zufallsvariablen x_i und x_j gilt also:
  $$C_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j} = \sigma_\mathrm{x}^2 \delta_i^j = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq j \\ \sigma_\mathrm{x}^2 & \text{für } i = j \end{cases}$$

- Aus stochastischer Unabhängigkeit folgt die Unkorreliertheit

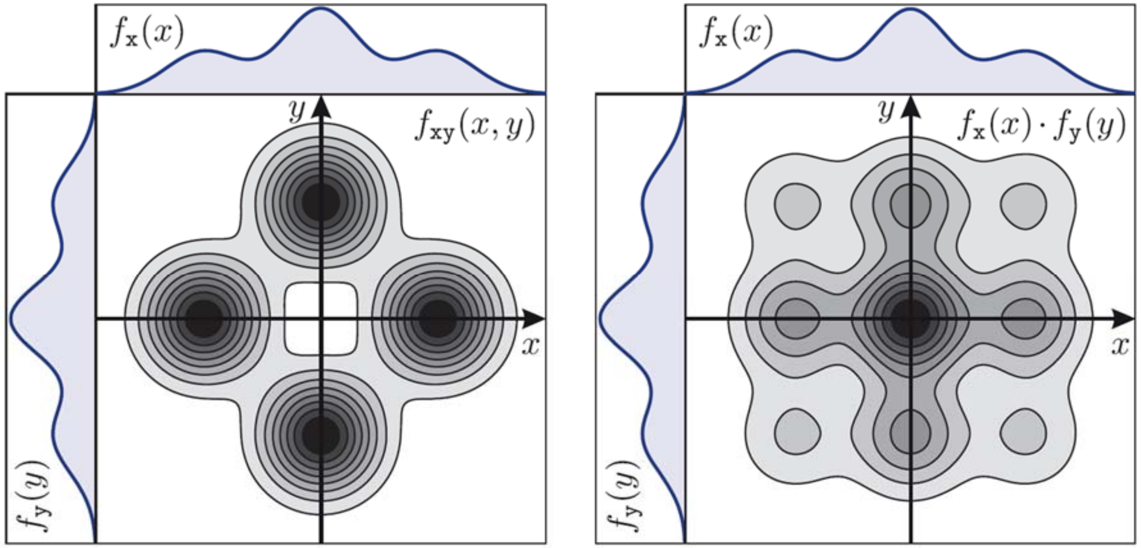
- Die Umkehrung gilt nur, falls beide Zufallsvariablen normalverteilt sind, da hier die höheren Momente der Statistik 1. Ordnung nur vom ersten und zweiten Moment abhängen (siehe Kap. 4.3);
  d. h. im allgemeinen können zwei Zufallsvariablen unkorreliert, aber trotzdem stochastisch abhängig sein

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Beispiel: Unkorreliertheit bei stochastischer Abhängigkeit
  - Zwei Zufallsvariablen x und y, deren Verbundwahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{xy}}(x, y)$ aus der Addition von vier gleichen unimodalen Verteilungen mit verschiedenen Mittelwerten zusammengesetzt ist
  - x und y sind stochastisch abhängig, da sich $f_{\mathrm{xy}}(x, y)$ nicht als Produkt der Randdichten $f_{\mathrm{x}}(x)$ und $f_{\mathrm{y}}(y)$ darstellen lässt: $f_{\mathrm{xy}}(x, y) \neq f_{\mathrm{x}}(x) \cdot f_{\mathrm{y}}(y)$
  - Es gilt aber: $C_{\mathrm{xy}} = \mathrm{E}\{(\mathrm{x} - \mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y} - \mu_{\mathrm{y}})\} = \mathrm{E}\{\mathrm{xy}\} = 0$

Links: Verbunddichte

Rechts: Produkt der Randdichten



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Korrelationskoeffizient

- Kovarianz C_{xy} sagt zwar etwas über die lineare Abhängigkeit stochastischer Größen aus, ist aber nicht invariant gegenüber (multiplikativen) Skalierungen der Größen
- Daher Einführung des Korrelationskoeffizienten als Maß für die stochastische Abhängigkeit von Zufallsgrößen

- Definition: **Korrelationskoeffizient**
  Der Korrelationskoeffizient ρ_{xy} zwischen den Größen x und y ist definiert zu
  $$\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{C_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})\}}{\sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}\mathrm{E}\left\{\left(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}}\right)^2\right\}}}$$
  Der Wertebereich ist $-1 \leq \rho_{\mathrm{xy}} \leq 1$
- Funktion zwischen x und y (z. B. $\mathrm{y} = 2\mathrm{x}$, starre Bindung): $\rho_{\mathrm{xy}} = \pm 1$
- Unkorrelierte Größen: $\rho_{\mathrm{xy}} = 0$

Korrelationskoeffizient

- Beweis für den Wertebereich $-1 \leq \rho_{\mathrm{xy}} \leq 1$:
  - Zufallsgrößen x und y werden jetzt als verallgemeinerte Vektoren in einem unitären Raum interpretiert
  - In unitären Räumen sind definiert:
    - Innenprodukt: $\langle x, y\rangle = \mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})\}$ (Kovarianz)
    - Norm: $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle} = \sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}}$ (Standardabweichung)
  - Schwarz'sche Ungleichung: $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$
  - Abschätzung der Kovarianzfunktion:

$$\left|\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}})\}\right| \leq \sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}}\sqrt{\mathrm{E}\left\{\left(\mathrm{y}-\mu_{\mathrm{y}}\right)^2\right\}}$$

$$\left|C_{\mathrm{xy}}\right| \leq \sigma_{\mathrm{x}} \cdot \sigma_{\mathrm{y}}$$

  - Daraus folgt für den Korrelationskoeffizienten:

$$\left|\rho_{\mathrm{xy}}\right| = \frac{\left|C_{\mathrm{xy}}\right|}{\sigma_{\mathrm{x}} \cdot \sigma_{\mathrm{y}}} \leq 1$$

Korrelationskoeffizient

- Beweis für den Wertebereich $-1 \leq \rho_{\mathrm{xy}} \leq 1$:
  - 1. Fall: starre lineare Bindung zwischen den Größen:

    $\mathrm{y} = k\mathrm{x} + a, \quad k, a \in \mathbb{R}$

    $$\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{C_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}) \cdot k \cdot (\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})\}}{\sqrt{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\} \cdot k^2 \cdot \mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}})^2\}}} = \pm 1$$

    Kovarianz: $C_{\mathrm{xy}} = \sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}$
  - 2. Fall: unkorrelierte oder stochastisch unabhängige Größen:

    $C_{\mathrm{xy}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \rho_{\mathrm{xy}} = 0$

Korrelationskoeffizient

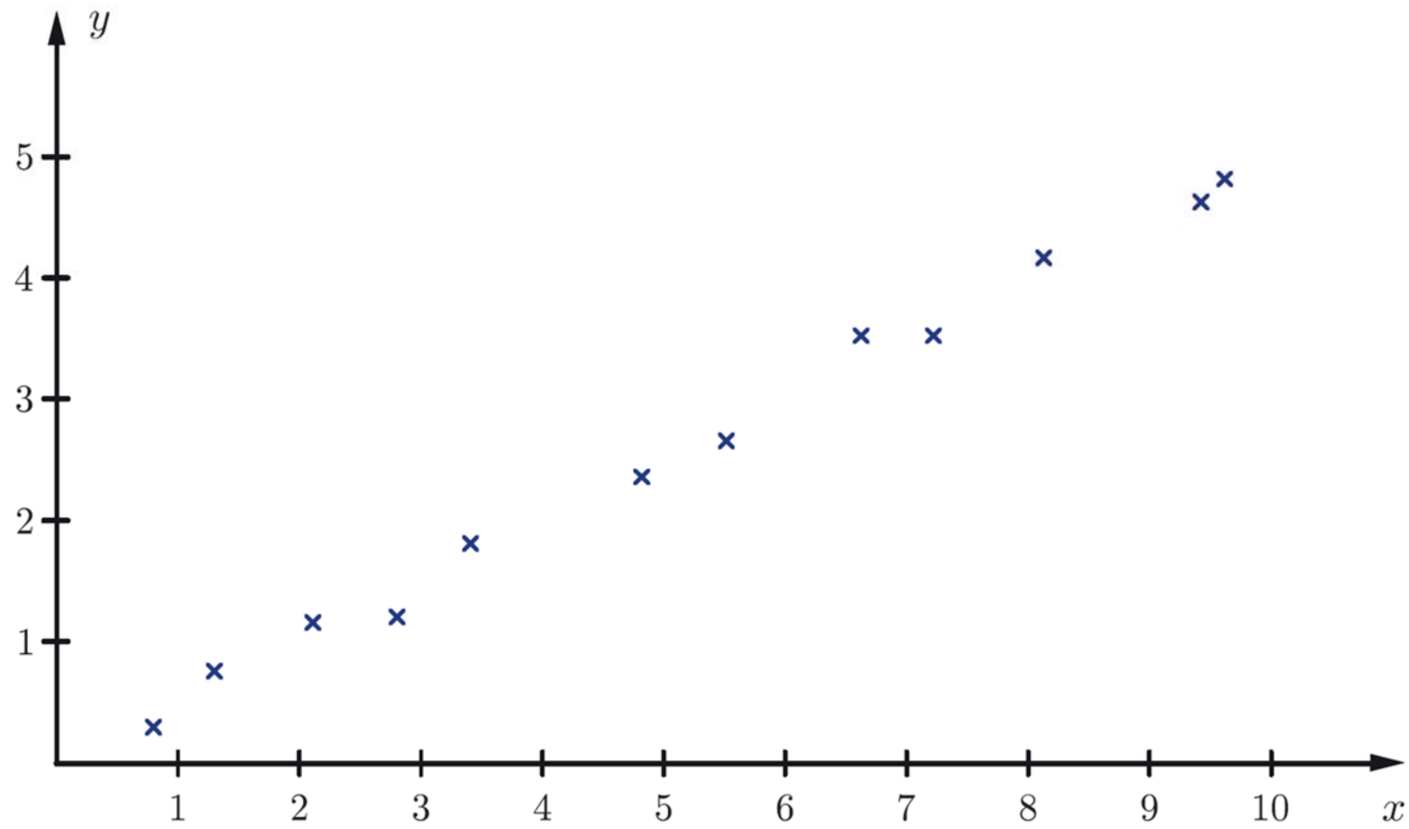
- Beispiel: Korrelation von Messwerten
  - Messwertreihe von $n = 12$ Wertepaaren x_i, y_i, die Realisierungen der Zufallsvariablen x und y sind:

x_i	0,8	1,3	2,1	2,8	3,4	4,9	5,5	6,6	7,2	8,1	9,4	9,6
y_i	0,3	0,75	1,15	1,2	1,8	2,35	2,65	3,5	3,5	4,15	4,6	4,9

  - $\hat{\mu}_{\mathrm{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 5{,}14, \qquad \hat{\mu}_{\mathrm{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 2{,}57$
  - Schätzung der Kovarianz durch Stichprobenkovarianz:
    $C_{\mathrm{xy}} \approx \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_{\mathrm{x}})(y_i - \hat{\mu}_{\mathrm{y}}) = 4{,}8$
  - Schätzung der Standardabweichungen (siehe Kap. 4.2):
    $\sigma_{\mathrm{x}} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_{\mathrm{x}})^2} = 3{,}08, \quad \sigma_{\mathrm{y}} \approx \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{\mu}_{\mathrm{y}})^2} = 1{,}56$
  - Schätzung des Korrelationskoeffizienten: $\rho_{\mathrm{xy}} = \frac{C_{\mathrm{xy}}}{\sigma_{\mathrm{x}}\sigma_{\mathrm{y}}} \approx 0{,}997$
  - D. h. starke Abhängigkeit der Wertepaare, siehe Diagramm

Korrelationskoeffizient

- Beispiel: Korrelation von Messwerten



Korrelationskoeffizient

- Korrelationskoeffizient ρ_{xy} sagt nur etwas über die lineare stochastische Abhängigkeit aus, d. h. über das gemeinsame Auftreten von Werten;
  daraus kann aber kein kausaler Zusammenhang abgeleitet werden

- Beispiel: Korrelation und kausaler Zusammenhang
  - Zwischen Anzahl x der Geburten pro Monat und der Zahl y der Störche im gleichen Monat bestehe über das ganze Jahr eine stochastische Abhängigkeit, z. B. $0{,}5 \leq \rho_{\mathrm{xy}} \leq 1$
  - Daraus darf aber nicht der kausale Zusammenhang geschlossen werden, das die Störche die Ursache für die Geburten seien

Charakteristische Funktion

- Definition: **Charakteristische Funktion**
  Die charakteristische Funktion $\Phi_{\mathrm{x}}(f)$ einer Zufallsvariablen x ist definiert durch den Erwartungswert

$$\Phi_{\mathrm{x}}(f) = \mathrm{E}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f \mathrm{x}}\right\} = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\mathrm{x}}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f x}\, \mathrm{d}x = \mathcal{F}^{-1}\{f_{\mathrm{x}}(x)\}$$

- Entspricht also der inversen Fourier-Transformierten der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$
- $f_{\mathrm{x}}(x)$ ist reell, daher kann diese Definition auch als komplex konjugierte Fourier-Transformierte von $f_{\mathrm{x}}(x)$ aufgefasst werden, d. h. f kann als die mit x korrespondierende Frequenz interpretiert werden
- Daher gilt auch $|\Phi_{\mathrm{x}}(f)| = |\mathcal{F}\{f_{\mathrm{x}}(x)\}|$
- Wegen Normierung und Nichtnegativität eines Wahrscheinlichkeitsmaßes: $\Phi_{\mathrm{x}}(0) = 1, \quad |\Phi_{\mathrm{x}}(f)| \leq 1$

Charakteristische Funktion

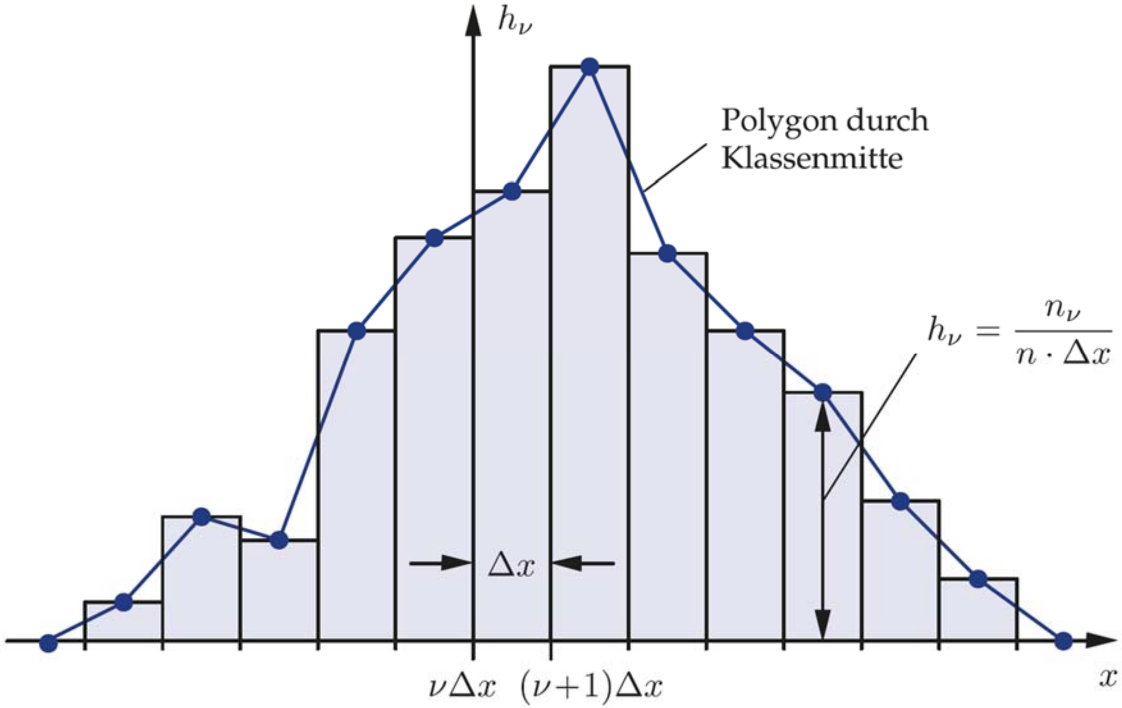
- Zwei wesentliche Anwendungen von charakteristischen Funktionen:
  - Berechnung von Momenten:
    - m-te Ableitung der charakteristischen Funktion:
      $$\frac{\mathrm{d}^m \Phi_\mathrm{x}(f)}{\mathrm{d}f^m} = \int_{-\infty}^{\infty} (\mathrm{j}2\pi\mathrm{x})^m \cdot f_\mathrm{x}(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f x}\, \mathrm{d}x$$
    - m-tes Moment der Zufallsvariablen x erhält man für $f = 0$:
      $$\mu_{\mathrm{x},m} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}^m \cdot f_\mathrm{x}(x)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{(\mathrm{j}2\pi)^m} \left.\frac{\mathrm{d}^m \Phi_\mathrm{x}(f)}{\mathrm{d}f^m}\right|_{f=0}$$
  - Addition von Zufallsvariablen:
    - Dichte $f_\mathrm{x}(x)$ der Summe $\mathrm{x} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i$ erhält man durch Faltung
      $f_\mathrm{x}(x) = f_{\mathrm{x}_1}(x) * \cdots * f_{\mathrm{x}_n}(x)$
    - Faltung entspricht Multiplikation im Frequenzbereich, daher charakteristische Funktion der Summe:
      $$\Phi_\mathrm{x}(f) = \mathrm{E}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i}\right\} = \mathrm{E}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f \mathrm{x}_1}\right\} \cdot \ldots \cdot \mathrm{E}\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{j}2\pi f \mathrm{x}_n}\right\} = \prod_{i=1}^{n} \Phi_{\mathrm{x}_i}(f)$$

4.2 Stichproben

- In der Praxis: Größen der Wahrscheinlichkeitstheorie sind meist nicht bekannt, z. B. Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$, Mittelwert μ_{x}, Varianz σ_{x}^2
- Größen müssen daher aus Stichproben geschätzt werden
- Stichprobe: Zufallsexperiment, bei dem n Messwerte x_i, $i = \{1, \dots, n\}$ aus einer Grundgesamtheit zur Analyse verwendet werden
- Aus den x_i wird versucht, Schätzwerte für die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsdichte, Mittelwert und Varianz zu ermitteln

Häufigkeitsverteilung und Histogramm

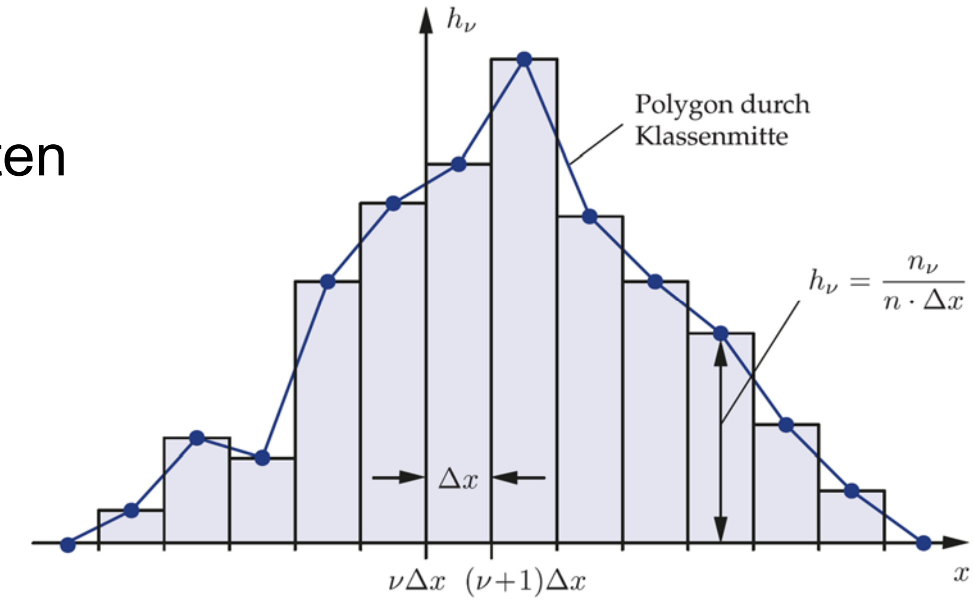
- Schätzung der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ einer Messgröße x aus einer repräsentativen Stichprobe
- Ergebnis der Schätzung: empirische Häufigkeitsverteilung, angegeben in Tabellen oder grafisch als Histogramm
- Dazu Sortierung der Elemente x_i der Stichprobe in Größenklassen ν der Breite Δx: $\nu \cdot \Delta x \leq \mathrm{x}_i \leq (\nu + 1) \cdot \Delta x$, d. h. von den n Stichprobenelementen werden diejenigen n_ν der Klasse ν zugeordnet, deren Werte in diesem Intervall liegen



- Relative Häufigkeit der Messwerte der Klasse: $\frac{n_\nu}{n}$
- Häufigkeitsverteilung: $h_\nu = \frac{n_\nu}{n \cdot \Delta x}$, unabhängig von der Klassenbreite

Häufigkeitsverteilung und Histogramm

- Gesamtzahl aller Messwerte: $n = \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu$
- Wahl des in Klassen eingeteilten Bereichs: Bereich sollte alle Messwerte umfassen
- Wahl der Klassenbreite Δx: Polygonzug durch die Klassenmitten sollte „glatt“ sein
- Für normalverteilte Zufallsgrößen: optimale Wahl der Klassenbreite im Sinne des mittleren quadratischen Fehlers:
  $$\Delta x = \frac{3{,}49\, s_\mathrm{x}}{\sqrt[3]{n}}$$
  mit s_x: Standardabweichung der Stichprobe

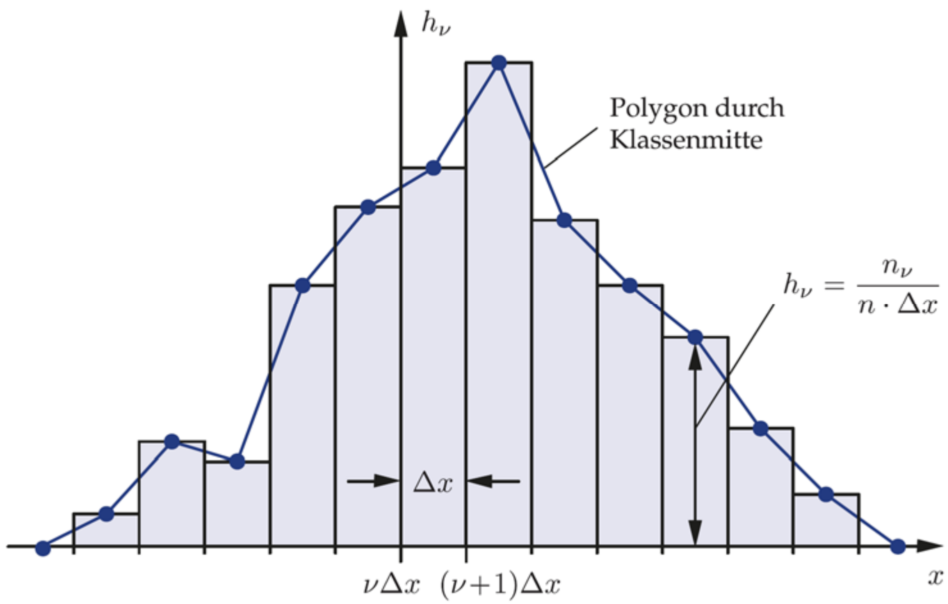


- Fläche A zwischen Kurve und Abszisse:

$$A = \sum_{\nu=1}^{m} h_\nu \Delta x = \sum_{\nu=1}^{m} \frac{n_\nu}{n \cdot \Delta x} \Delta x = \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{m} n_\nu = \frac{1}{n} \cdot n = 1$$

Häufigkeitsverteilung und Histogramm

- Bei konstantem Signal: alle Messwerte der Stichprobe fallen in eine Klasse
- Bei zunehmenden Schwankungen der Messwerte: Histogramm wird breiter und flacher,
  d. h. Breite des Histogramms ist Maß für die Streubreite



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Parameterschätzung

- Parameter einer Wahrscheinlichkeitsverteilung: Momente
- Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung nicht bekannt, müssen diese Parameter aus einer (begrenzten) Stichprobe geschätzt werden

- Beispiel: Schätzung des wahren Mittelwerts und der wahren Varianz der Verteilung mittels des Stichprobenmittelwerts bzw. der Stichprobenvarianz

- Bewertung von Schätzfunktionen (Schätzern): Wie gut ist die Schätzung?
- Bewertung anhand Kriterien: Erwartungstreue, Konsistenz, Effizienz
- Im Folgenden: zu schätzende Größe sei deterministisch und konstant
- Bezeichnung von Schätzern: meist mit „Dach“: $\hat{x}$

Parameterschätzung

- Definition: **Erwartungstreue**
  Ein Schätzer $\hat{\mathrm{x}}$ heißt erwartungstreu, wenn bei wiederholten Stichproben der wahre Wert x_w im Mittel richtig geschätzt wird:
  $\mathrm{E}\{\hat{\mathrm{x}}\} = x_\mathrm{w}$
- Die Differenz zwischen dem Erwartungswert $\mathrm{E}\{\hat{\mathrm{x}}\}$ des Schätzers und dem wahren Wert x_w ist der systematische Fehler (engl. *bias*)
- Erwartungstreue Schätzer haben daher keinen systematischen Fehler

Parameterschätzung

- Definition: **Konsistenz**
  Ein Schätzer $\hat{\mathrm{x}}$ heißt konsistent, wenn mit wachsendem Stichprobenumfang n die Schätzung genauer wird und im Grenzübergang der wahre Wert x_w mit Sicherheit ermittelt wird:
  $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{\mathrm{x}} = x_\mathrm{w}$
  Damit geht die Varianz des Schätzers gegen null:
  $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = 0$

- Definition: **Effizienz**
  Ein Schätzer $\hat{\mathrm{x}}$ heißt effizient (auch: wirksam), wenn er aus allen erwartungstreuen Schätzern die kleinste Varianz besitzt

Stichprobenmittelwert

- Zur Schätzung des wahren Mittelwerts μ_{x} bei unbekannter Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$
- Definition: **Stichprobenmittelwert**
  Der Stichprobenmittelwert aus n Werten x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ ist
  $$\hat{\mathrm{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i$$
- Der Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ ist ein Schätzwert des wahren Mittelwerts μ_{x} und somit selbst eine stochastische Größe.

Stichprobenmittelwert

- Prüfung des Stichprobenmittelwerts auf Erwartungstreue:
  - $\mathrm{E}\{\hat{\mathrm{x}}\} = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{x}_i\}}_{=\mu_\mathrm{x}} = \frac{1}{n} n\, \mu_\mathrm{x} = \mu_\mathrm{x},$

  d. h. die Schätzung $\hat{\mathrm{x}}$ von μ_x ist erwartungstreu
- Prüfung des Stichprobenmittelwerts auf Konsistenz:
  - $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \mathrm{E}\{(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})^2\}$

$$= \mathrm{E}\left\{\left[\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i\right) - \mu_\mathrm{x}\right]^2\right\} = \mathrm{E}\left\{\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})\right]^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}\{(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})(\mathrm{x}_j - \mu_\mathrm{x})\} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}$$

Stichprobenmittelwert

- Prüfung des Stichprobenmittelwerts auf Konsistenz:
  - $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}$
  - Unterscheidung:
    - Starre Bindung zwischen x_i und x_j:
      Für gleiche Varianzen von x_i und x_j gilt (s. o.):
      $C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}_i} \sigma_{\mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}}^2$
      Damit wird $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \frac{1}{n^2} n^2 \sigma_{\mathrm{x}}^2 = \sigma_{\mathrm{x}}^2$
      Hier ist die Varianz des Stichprobenmittelwerts gleich der Varianz der Messwerte, mehrere Messwerte erhalten folglich nicht mehr Information als ein einziger Messwert:
      Die Schätzung ist in diesem Fall nicht konsistent

Stichprobenmittelwert

- Prüfung des Stichprobenmittelwerts auf Konsistenz:
  - $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}$
  - Unterscheidung:
    - Stochastisch unabhängige Messwerte x_i und x_j für $i \neq j$:
      $C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}}^2 \delta_i^j$
      Damit wird
      $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \sigma_{\mathrm{x}}^2 \delta_i^j = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \sigma_{\mathrm{x}}^2 = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{n}$
      Hier nimmt die Varianz des Stichprobenmittelwerts mit wachsendem Stichprobenumfang n ab und geht gegen null, der Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ strebt dann gegen den wahren Mittelwert μ_{x}:
      Die Schätzung ist in diesem Fall konsistent
    - Die Abnahme der Standardabweichung eines Schätzers mit $\frac{1}{\sqrt{n}}$ ist typisch für viele praktisch relevante Aufgabenstellungen

Stichprobenvarianz

- Zur Schätzung der Varianz σ_x^2 aus den Messwerten x_i und dem Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ bei unbekannter Wahrscheinlichkeitsdichte $f_\mathrm{x}(x)$
- Definition: **Stichprobenvarianz**
  Die Stichprobenvarianz $s_\mathrm{x}^2 = \sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2$ aus n Werten x_i, $i \in \{1, \dots, n\}$ ist

$$\begin{aligned} s_\mathrm{x}^2 &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{x}_i^2 - 2\mathrm{x}_i\hat{\mathrm{x}} + \hat{\mathrm{x}}^2\right) \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^2 - 2\hat{\mathrm{x}}\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i + \frac{1}{n-1}n\hat{\mathrm{x}}^2 \\ &= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{x}_i^2 - \frac{n}{n-1}\hat{\mathrm{x}}^2 \end{aligned}$$

  Ihre Wurzel s_x ist die Standardabweichung der Stichprobe
  Die Stichprobenvarianz s_x^2 ist ein Schätzwert für die wahre Varianz σ_x^2 und somit selbst eine stochastische Größe.

Stichprobenvarianz

- Erwartungswert der Stichprobenvarianz:

$$\mathrm{E}\{s_\mathrm{x}^2\} = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left((\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x}) - (\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})\right)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{n-1}\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})^2 - 2\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x}) + n(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})^2\right\}$$

- Mit $\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x}) = n(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})$:

$$\mathrm{E}\{s_\mathrm{x}^2\} = \frac{1}{n-1}\left[\underbrace{\mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \mu_\mathrm{x})^2\right\}}_{=\sigma_\mathrm{x}^2} - 2n\,\underbrace{\mathrm{E}\{(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})^2\}}_{=\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2} + n\,\underbrace{\mathrm{E}\{(\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x})^2\}}_{=\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2}\right]$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sigma_\mathrm{x}^2 - \sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2\right)$$

Stichprobenvarianz

- Erwartungswert der Stichprobenvarianz:
  $$\mathrm{E}\{s_\mathrm{x}^2\} = \frac{1}{n-1}\left(\sigma_\mathrm{x}^2 - \sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2\right)$$
- Unterscheidung:
  - Starre Bindung zwischen x_i und x_j:
    $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \sigma_\mathrm{x}^2$ (s. o.), damit
    $\mathrm{E}\{s_\mathrm{x}^2\} = 0$
    Ursache: Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ besitzt die gleiche Varianz wie die Messwerte selbst
    Hier ist die Stichprobenvarianz als Schätzung für die wahre Varianz also unbrauchbar

Stichprobenvarianz

- Erwartungswert der Stichprobenvarianz:

$$\mathrm{E}\{s_{\mathrm{x}}^2\} = \frac{1}{n-1}\left(\sigma_{\mathrm{x}}^2 - \sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2\right)$$

- Unterscheidung:
  - Stochastisch unabhängige Messwerte x_i und x_j für $i \neq j$:

    $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2 = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{n}$ (s. o.), damit

    $$\mathrm{E}\{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2\} = \frac{1}{n-1}\sigma_{\mathrm{x}}^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \sigma_{\mathrm{x}}^2$$

    Hier ist die Stichprobenvarianz s_{x}^2 also eine erwartungstreue Schätzung für die Varianz σ_{x}^2 der Verteilung

Stichprobenvarianz

- Erwartungstreue Schätzung erhält man also mit den Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$ (anstelle von $\frac{1}{n}$ wie beim Stichprobenmittelwert)
- Bei Einzelmessungen ($n = 1$): Stichprobenvarianz ist daher nicht ermittelbar (aber auch nicht sinnvoll)
- Bei Messung abhängiger Werte (d. h. zwischen starrer Bindung und stochastischer Unabhängigkeit): Stichprobenvarianz s_{x}^2 ist kleiner oder gleich der Varianz σ_{x}^2 der Verteilung

Stichprobenvarianz

- Beispiel: Abweichung der Stichprobenvarianz
  - Im Prüffeld: Messgerät zeige sehr geringe Stichprobenvarianz
  - Im Einsatz: deutlich höhere Stichprobenvarianz
  - Dies ist ein Indiz für einen stochastischen Fehler, der nur im Einsatz und nicht im Prüffeld auftritt
  - Messwerte im Prüffeld sind dann weniger voneinander unabhängig als im Einsatz
  - Daher wird die Varianz der Messwerte σ_{x}^2 im Einsatz durch die Stichprobenvarianz s_{x}^2 im Prüffeld zu klein geschätzt

Schätzung höherer Momente

- Erwartungstreue Schätzung der Schiefe $\varrho_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^3\}}{\sigma_{\mathrm{x}}^3}$

  (Maß für die Asymmetrie der Messwerteverteilung, wird bei symmetrischen Verteilungen null, s. o.):

  $$\hat{\varrho}_{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^3} \cdot \frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^3$$

- Erwartungstreue Schätzung des Exzesses $\varepsilon_{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{E}\{(\mathrm{x}-\mathrm{E}\{\mathrm{x}\})^4\}}{\sigma_{\mathrm{x}}^4} - 3$

  (Maß für die Wölbung der Messwerteverteilung bzw. Abweichung von der Normalverteilung, wird für Normalverteilungen null, s. o.):

  $$\hat{\varepsilon}_{\mathrm{x}} = \frac{1}{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^4} \cdot \frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

Numerische Berechnung von Mittelwert und Varianz

- Bei numerischen Berechnungen oft vorteilhaft: Verwendung von Abweichungen $\Delta \mathrm{x}_i$ anstelle großer Zahlen x_i: $\Delta \mathrm{x}_i = \mathrm{x}_i - x_0$
- Damit Stichprobenmittelwert:

$$\hat{\mathrm{x}} = x_0 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta \mathrm{x}_i \quad \Rightarrow \quad \Delta\hat{\mathrm{x}} = \hat{\mathrm{x}} - x_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \Delta \mathrm{x}_i$$

Numerische Berechnung von Mittelwert und Varianz

- Stichprobenvarianz:

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^2 - 2x_i\hat{x} + \hat{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2 - n\,\hat{x}^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(x_0 + \Delta x_i)^2 - n\,(x_0 + \Delta\hat{x})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(n x_0^2 + 2x_0 \underbrace{\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i}_{= n\Delta\hat{x}} + \sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2 - n x_0^2 - 2n x_0 \Delta\hat{x} - n(\Delta\hat{x})^2\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}(\Delta x_i)^2 - n(\Delta\hat{x})^2\right)$$

D. h. Stichprobenvarianz wird auf Quadratsumme der Abweichungen Δx_i und Mittelwert der Abweichungen $\Delta\hat{x}$ zurückgeführt

4.2 Stichproben

Gesetz der großen Zahlen

- Wahrscheinlichkeitsdichten können nur selten aus Versuchen hergeleitet werden
- Ergebnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung gelten eigentlich nur für Wahrscheinlichkeitsdichten streng
- Verfügbar ist aber meist das Histogramm, daraus müssen der Typ der Verteilung und die für die Verteilung wichtigen Parameter bestimmt werden
- Verbindung zwischen Wahrscheinlichkeitsrechnung zu Messergebnissen aus Stichproben erfolgt über verschiedene Grenzwertsätze, darunter das
  Bernoulli'sche Gesetz der großen Zahlen

Gesetz der großen Zahlen

- Zufallsvariable x mit Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$
- Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon$:

$$P(|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon) = \int_{-\infty}^{\mu_{\mathrm{x}}-\varepsilon} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mu_{\mathrm{x}}+\varepsilon}^{\infty} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$$

- $|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon \quad \Rightarrow \quad \frac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{\varepsilon^2} \geq 1$, damit Abschätzung:

$$P(|\mathrm{x}-\mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon) \leq \int_{-\infty}^{\mu_{\mathrm{x}}-\varepsilon} \frac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{\varepsilon^2} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x + \int_{\mu_{\mathrm{x}}+\varepsilon}^{\infty} \frac{(x-\mu_{\mathrm{x}})^2}{\varepsilon^2} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_{\mathrm{x}})^2 f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{\varepsilon^2}$$

Dies ist die Tschebyscheff‘sche Ungleichung:
Für eine Zufallsvariable x mit endlicher Varianz σ_{x}^2 liegen die Realisierungen x mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit um den Erwartungswert μ_{x}

Gesetz der großen Zahlen

- Tschebyscheff'sche Ungleichung kann auch auf den Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ als Zufallsvariable angewendet werden:
  $$P(|\hat{\mathrm{x}} - \mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}^2}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{n \cdot \varepsilon^2}$$
  d. h. mit größer werdendem Stichprobenumfang n strebt die Wahrscheinlichkeit $P(|\hat{\mathrm{x}} - \mu_{\mathrm{x}}| \geq \varepsilon)$ gegen null, dass die Schätzung $\hat{\mathrm{x}}$ nicht mehr als ε von μ_{x} abweicht,
  d. h. Versuchsergebnisse aus großen Stichproben nähern sich den Ergebnissen der Wahrscheinlichkeitsrechnung an

Gesetz der großen Zahlen

- Entsprechender Zusammenhang zwischen der Häufigkeitsverteilung einer Stichprobe $h(x)$ und der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$
- Dazu Definition von Indikatorvariablen $\mathrm{J}_{\nu i}$ zur Beschreibung, ob ein Ereignis x_i zu einer bestimmten Klasse ν gehört:

$$\mathrm{J}_{\nu i} = \begin{cases} 1 & \text{für } \nu\Delta x \leq \mathrm{x}_i \leq (\nu+1)\Delta x \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

- Ereignisse seien stochastisch unabhängig
- Wahrscheinlichkeit, dass ein Ereignis der Klasse ν angehört, wird durch die relative Häufigkeit $\frac{n_\nu}{n}$ geschätzt und lässt sich als Stichprobenmittelwert der Indikatorvariablen $\mathrm{J}_{\nu i}$ darstellen:

$$\Delta x\, h_\nu = \frac{n_\nu}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{J}_{\nu i}$$

- Erwartungswertbildung:

$$\mathrm{E}\{\Delta x\, h_\nu\} = \mathrm{E}\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{J}_{\nu i}\right\} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathrm{E}\{\mathrm{J}_{\nu i}\}}_{= f_{\mathrm{x}}(x_\nu)\Delta x} = f_{\mathrm{x}}(x_\nu)\Delta x$$

Gesetz der großen Zahlen

- Erwartungswertbildung: $\mathrm{E}\{\Delta x\, h_\nu\} = f_\mathrm{x}(x_\nu)\Delta x$
- Mittelwertsatz der Integralrechnung: Es gibt im Intervall $[\nu\Delta x, (\nu+1)\Delta x]$ ein x_ν, das diese Gleichung erfüllt
- Varianz der Häufigkeitsverteilung:
  - Schätzer für Häufigkeitsverteilung $h(x)$ hat die gleiche Struktur wie Schätzer für Stichprobenmittelwert ($h_\nu = \frac{n_\nu}{n\Delta x} = \frac{1}{n\Delta x}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{J}_{\nu i}$)
  - Varianz von $h(x)$ erhält man daher analog zur Varianz des Stichprobenmittelwerts (bei unabhängigen Ereignissen):

    $$E\left\{\left(h(x) - f_\mathrm{x}(x)\right)^2\right\} = \frac{\sigma_\mathrm{J}^2}{n}$$

    mit σ_J^2: Varianz der Indikatorvariablen
- Eingesetzt in die Tschebyscheff'sche Ungleichung (s. o.) ergibt Bernoulli'sches Gesetz der großen Zahlen:

$$P(|h(x) - f_\mathrm{x}(x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2}\mathrm{E}\left\{\left(h(x) - f_\mathrm{x}(x)\right)^2\right\} = \frac{\sigma_\mathrm{J}^2}{n\varepsilon^2}$$

Gesetz der großen Zahlen

- Bernoulli‘sches Gesetz der großen Zahlen:

  $$P(|h(x) - f_{\mathrm{x}}(x)| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_{\mathrm{J}}^2}{n\varepsilon^2}$$

  d. h. mit wachsendem Stichprobenumfang n geht die Häufigkeitsverteilung $h(x)$ in die Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ über

Mittelung zur Störungsunterdrückung

- Oft ist einer deterministischen Messgröße u eine zufällige Störung e additiv überlagert
- Unterdrückung solcher Störungen durch Mittelung von n Messwerten y_i (Stichprobenmittel: $\hat{\mathrm{y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{y}_i$)

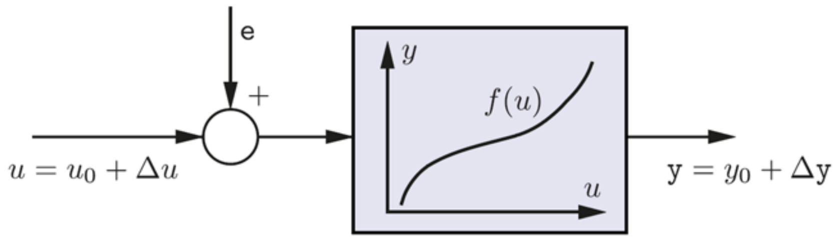
Mittelung zur Störungsunterdrückung

1. Bei linearer Kennlinie:
   - Mit Empfindlichkeit S_i: $\mathrm{y} = S_\mathrm{i}(u + \mathrm{e})$
   - Erwartungswert von y: $\mu_\mathrm{y} = \mathrm{E}\{\mathrm{y}\} = \mathrm{E}\{S_\mathrm{i}(u + \mathrm{e})\} = S_\mathrm{i}(u + \mu_\mathrm{e})$

   a. Mittelwertfreie Störung: $\mathrm{E}\{\mathrm{e}\} = \mu_\mathrm{e} = 0$: $\mu_\mathrm{y} = S_\mathrm{i}(u + \mu_\mathrm{e}) = S_\mathrm{i}\, u$,
   d. h. Mittelwert des Ausgangssignals μ_y entspricht dem idealen Anzeigewert $S_\mathrm{i}\, u$,
   Störsignal e wird also auf einfache Weise unterdrückt

   b. Störung mit endlichem (bekanntem) Mittelwert: $\mathrm{E}\{\mathrm{e}\} = \mu_\mathrm{e} \neq 0$:
   Mittelwert der Störung $S_\mathrm{i}\mu_\mathrm{e}$ kann am Ausgang des Messsystems als deterministische additive Störung (systematischer Fehler) subtrahiert werden:
   $\tilde{\mathrm{y}} = \mathrm{y} - S_\mathrm{i}\mu_\mathrm{e} = S_\mathrm{i}(u + \mathrm{e} - \mu_\mathrm{e})$
   In $\tilde{\mathrm{y}}$ verbleibende Störung $S_\mathrm{i}(\mathrm{e} - \mu_\mathrm{e})$ ist wieder mittelwertfrei,
   es kann wieder zur Störungsunterdrückung gemittelt werden

Mittelung zur Störungsunterdrückung



2. Bei nichtlinearer Kennlinie:
   - Annahme: mittelwertfreie Störung e
   - Nichtlineare Kennlinie $f(u)$ mit Empfindlichkeit $f' = S$
   - Taylor-Entwicklung der Kennlinie um den Arbeitspunkt u_0:

$$\Delta \mathrm{y} = S(u_0)(\Delta u + \mathrm{e}) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \frac{S'(u_0)}{S(u_0)} (\Delta u + \mathrm{e}) + \cdots \right]$$

   - Bei Unkorreliertheit von Δu und e: Näherung für Erwartungswert von $\Delta \mathrm{y}$:

$$\mu_{\Delta \mathrm{y}} = \mathrm{E}\{\Delta \mathrm{y}\} \approx S(u_0)(\Delta u + \mathrm{E}\{\mathrm{e}\}) + \frac{1}{2} S'(u_0)(\Delta u^2 + \mathrm{E}\{\mathrm{e}^2\})$$

$$= S(u_0) \cdot \Delta u + \frac{1}{2} S'(u_0)(\Delta u^2 + \sigma_\mathrm{e}^2)$$

   - D. h. obwohl die Störung e mittelwertfrei ist, weicht der Mittelwert der Ausgangsgröße $\mu_{\Delta \mathrm{y}}$ bei nichtlinearer Kennlinie vom idealen Anzeigewert ab, auch im Arbeitspunkt u_0 ($\Delta u = 0$) ist $\mu_{\Delta \mathrm{y}} \neq 0$

Mittelung zur Störungsunterdrückung

2. Bei nichtlinearer Kennlinie:
   - Abhilfe: vor Mittelwertbildung Messkennlinie linearisieren

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

- Große Rolle normalverteilter Zufallsvariablen in praktischen Anwendungen
- Bei unbekannter Wahrscheinlichkeitsdichte: oft Annahme einer Normalverteilung (Begründung: zentraler Grenzwertsatz, siehe unten)

- Definition: **Normalverteilung**
  Eine Zufallsvariable $x \sim \mathcal{N}(\mu_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{x}^2)$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte
  $$f_\mathrm{x}(x) = \mathcal{N}(\mu_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{x}^2) = \frac{1}{\sigma_\mathrm{x}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_\mathrm{x})^2}{2\sigma_\mathrm{x}^2}\right)$$
  heißt normalverteilt. Eine normalverteilte Zufallsgröße wird durch die zwei Momente Mittelwert μ_x und Varianz σ_x^2 vollständig charakterisiert.

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

- Charakteristische Funktion:

$$\Phi_{\mathrm{x}}(f) = \exp\left(\mathrm{j}2\pi f \mu_{\mathrm{x}} - \frac{1}{2}(2\pi f \sigma_{\mathrm{x}})^2\right)$$

- Daraus Berechnung der Momente (s. o.):

$$\mu_{\mathrm{x},m} = \mathrm{E}\{\mathrm{x}^m\} = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{x}^m \cdot f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{(\mathrm{j}2\pi)^m} \frac{\mathrm{d}^m \Phi_{\mathrm{x}}(f)}{\mathrm{d}f^m}\bigg|_{f=0}$$

- Mittelwert:

$$\mathrm{E}\{\mathrm{x}\} = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{x}}(f)}{\mathrm{d}f}\bigg|_{f=0}$$

$$= \frac{1}{\mathrm{j}2\pi} \exp\left(\mathrm{j}2\pi f \mu_{\mathrm{x}} - \frac{1}{2}(2\pi f \sigma_{\mathrm{x}})^2\right) \cdot \left(\mathrm{j}2\pi\mu_{\mathrm{x}} - (2\pi f \sigma_{\mathrm{x}})2\pi\sigma_{\mathrm{x}}\right)\bigg|_{f=0}$$

$$= \mu_{\mathrm{x}}$$

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

- Analog: Berechnung des zweiten Moments:

$$\mathrm{E}\{\mathrm{x}^2\} = \frac{1}{(\mathrm{j}2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}^2\Phi_\mathrm{x}(f)}{\mathrm{d}f^2}\bigg|_{f=0}$$

$$= \sigma_\mathrm{x}^2 + \mu_\mathrm{x}$$

- Alle höheren Momente lassen sich auf die beiden Parameter Mittelwert μ_x und Varianz σ_x^2 (oder Standardabweichung σ_x) zurückführen; die Normalverteilung ist daher vollständig durch diese beiden Parameter bestimmt

Lineare Transformation

- Jede lineare Transformation einer normalverteilten Zufallsvariablen x:
  $\mathrm{z} = a\,\mathrm{x} + b$ mit $a, b \in \mathbb{R}$
  ergibt wieder eine normalverteilte Zufallsvariable z
- Die linear transformierte Zufallsvariable z unterscheidet sich von x durch die Parameter Mittelwert μ_{z} und Varianz σ_{z}^2

Standardnormalverteilung

- Normalverteilung, die auf Mittelwert $\mu_{\mathrm{x}} = 0$ und Varianz $\sigma_{\mathrm{x}}^2 = 1$ normiert ist:
$$f_{\mathrm{x}}(x) = \mathcal{N}(0{,}1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$
- Wird aus einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu_{\mathrm{x}}, \sigma_{\mathrm{x}}^2)$ mit Mittelwert μ_{x} und Varianz σ_{x}^2 erhalten durch
$$\mathrm{z} = \frac{\mathrm{x} - \mu_{\mathrm{x}}}{\sigma_{\mathrm{x}}}$$
- Anwendung: Berechnung des Integrals von $\mathcal{N}(\mu_{\mathrm{x}}, \sigma_{\mathrm{x}}^2)$ ist nicht geschlossen möglich, daher Verwendung von Tabellen oder Software, welche die Werte des Integrals der Standardnormalverteilung enthalten (z. B. Excel: STANDNORMVERT(z))

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

- Definition: **Mehrdimensionale Normalverteilung**
  Eine mehrdimensionale Zufallsvariable $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_1, \ldots, \mathrm{x}_d)^{\mathrm{T}} \in \mathbb{R}^d$ mit der Wahrscheinlichkeitsdichte
  $$f_{\mathbf{x}}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}})$$
  $$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{d}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}^{-1} (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\mu}_{\mathbf{x}})\right)$$
  heißt multivariat normalverteilt. Eine multivariat normalverteilte Zufallsgröße wird durch den Mittelwertvektor $\boldsymbol{\mu}_{\boldsymbol{x}}$ und Kovarianzmatrix $\boldsymbol{\Sigma}_{\mathbf{x}}$ vollständig charakterisiert.
- Orte $\boldsymbol{x}$ gleicher Wahrscheinlichkeit werden durch Ellipsoide in $\mathbb{R}^d$ beschrieben

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

- Kovarianzmatrix $\mathbf{\Sigma_x}$:

$$\mathbf{\Sigma_x} = \begin{pmatrix} C_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_1} & \cdots & C_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{\mathrm{x}_d\mathrm{x}_1} & \cdots & C_{\mathrm{x}_d\mathrm{x}_d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{\mathrm{x}_1}^2 & \cdots & \rho_{\mathrm{x}_1\mathrm{x}_d}\sigma_{\mathrm{x}_1}\sigma_{\mathrm{x}_d} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{\mathrm{x}_d\mathrm{x}_1}\sigma_{\mathrm{x}_d}\sigma_{\mathrm{x}_1} & \cdots & \sigma_{\mathrm{x}_d}^2 \end{pmatrix}$$

  mit $\rho_{\mathrm{x}_i\mathrm{x}_j}$: Korrelationskoeffizient zwischen x_i und x_j

  - Die Kovarianzmatrix ist daher stets symmetrisch und positiv semidefinit
  - Hauptdiagonale: Varianzen $\sigma_{\mathrm{x}_i}^2$ der einzelnen Komponenten x_i
  - Determinante $|\mathbf{\Sigma_x}|$: proportional zur Größe der Ellipsoide, Maß für die Streuung von $\mathbf{x}$
  - Eigenvektoren von $\mathbf{\Sigma_x}$: Richtungen der Hauptachsen der Ellipsoide, zugehörige Eigenwerte: Varianzen in Hauptachsenrichtungen

Zentraler Grenzwertsatz

- Bei vielen Anwendungen: Zufälliger Fehler e resultiert aus einer additiven Überlagerung zahlreicher unabhängiger, zufälliger Ereignisse e_n mit unbekannten Wahrscheinlichkeitsdichten:
$$\mathrm{e} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{e}_n$$
- Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe wird über die Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten berechnet:
$$f_{\mathrm{e}}(e) = f_{\mathrm{e}_1}(e) * f_{\mathrm{e}_2}(e) * \cdots * f_{\mathrm{e}_N}(e)$$
- Charakteristische Funktion von $f_{\mathrm{e}}(e)$: Faltung geht in Multiplikation über:
$$\Phi_{\mathrm{e}}(f) = \prod_{n=1}^{N} \Phi_{\mathrm{e}_n}(f)$$
- Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{e}}(e)$ mittels des zentralen Grenzwertsatzes

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

Zentraler Grenzwertsatz

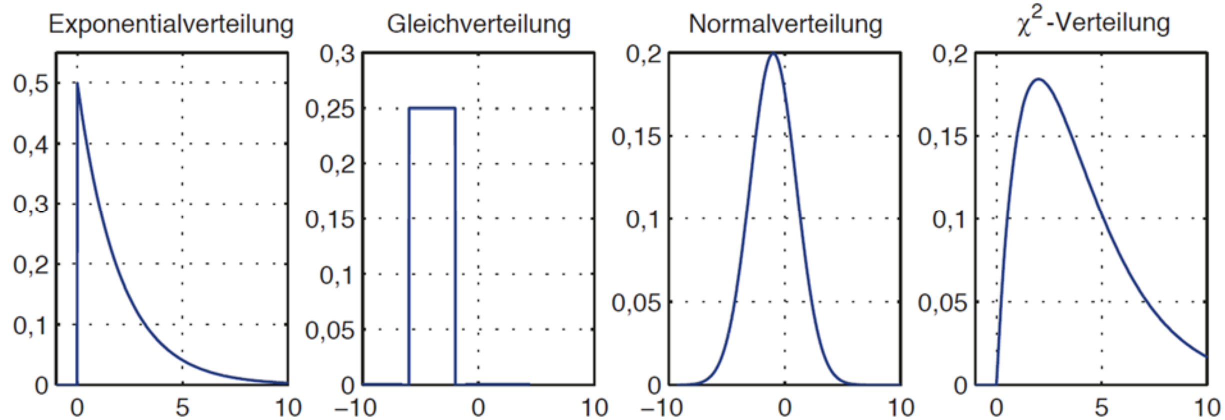
- Haben die Zufallsvariablen x_n Verteilungen mit beschränktem zweitem und drittem Moment und sind die Zufallsvariablen x_n voneinander unabhängig, dann nähert sich die Dichte $f_\mathrm{x}(x)$ der Summe
$$\mathrm{x} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{x}_n$$
mit wachsendem Umfang N asymptotisch einer Normalverteilung an:
$$f_\mathrm{x}(x) = \frac{1}{\sigma_\mathrm{x}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu_\mathrm{x})^2}{2\sigma_\mathrm{x}^2}\right)$$
Die Parameter der resultierenden Normalverteilung sind:
$$\mu_\mathrm{x} = \sum_{n=1}^{N} \mathrm{E}\{\mathrm{x}_n\}, \qquad \sigma_\mathrm{x}^2 = \sum_{n=1}^{N} \sigma_{\mathrm{x}_n}^2$$

Zentraler Grenzwertsatz

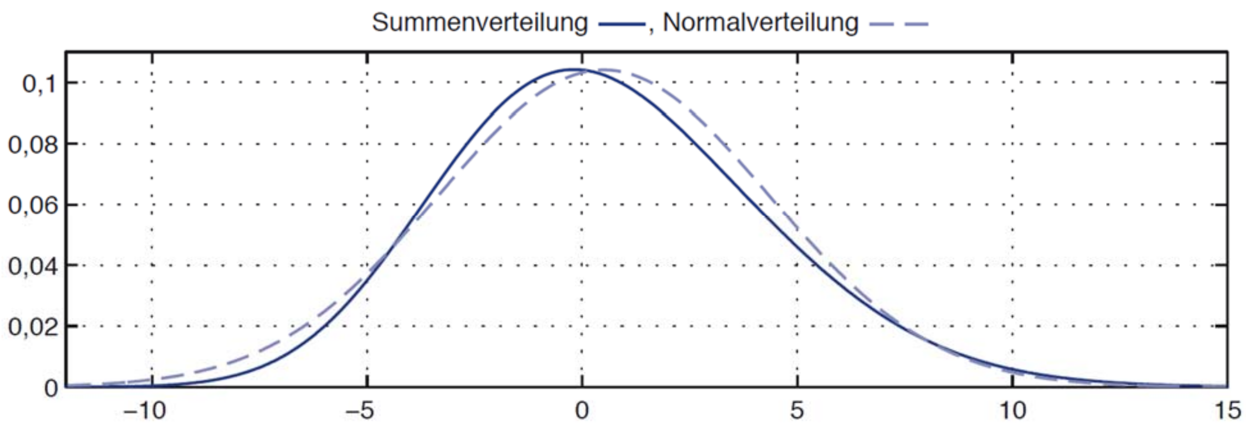
- Schlussfolgerungen für die Messtechnik und Qualitätskontrolle:
  - Wert eines Elements einer Stichprobe (d. h. ein Messwert): Zufallsvariable x_n mit überlagerter Störung. Falls Störungen der Zufallsvariablen x_n näherungsweise als voneinander unabhängig angenommen werden können, ist der Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ näherungsweise normalverteilt
  - Ein zufälliger Messfehler, der durch Überlagerung mehrerer unabhängiger Zufallsereignisse entsteht, kann als normalverteilt angenommen werden

Zentraler Grenzwertsatz

- Beispiel: Addition von Zufallsvariablen
  - $N = 4$ Zufallsvariablen x_n mit unterschiedlichen Wahrscheinlichkeitsdichten



  - Vergleich: Wahrscheinlichkeitsdichte der Summe, berechnet durch Faltung der einzelnen Wahrscheinlichkeitsdichten, und Normalverteilung nach dem zentralen Grenzwertsatz
  - Nur kleine Abweichungen



χ^2-Verteilung

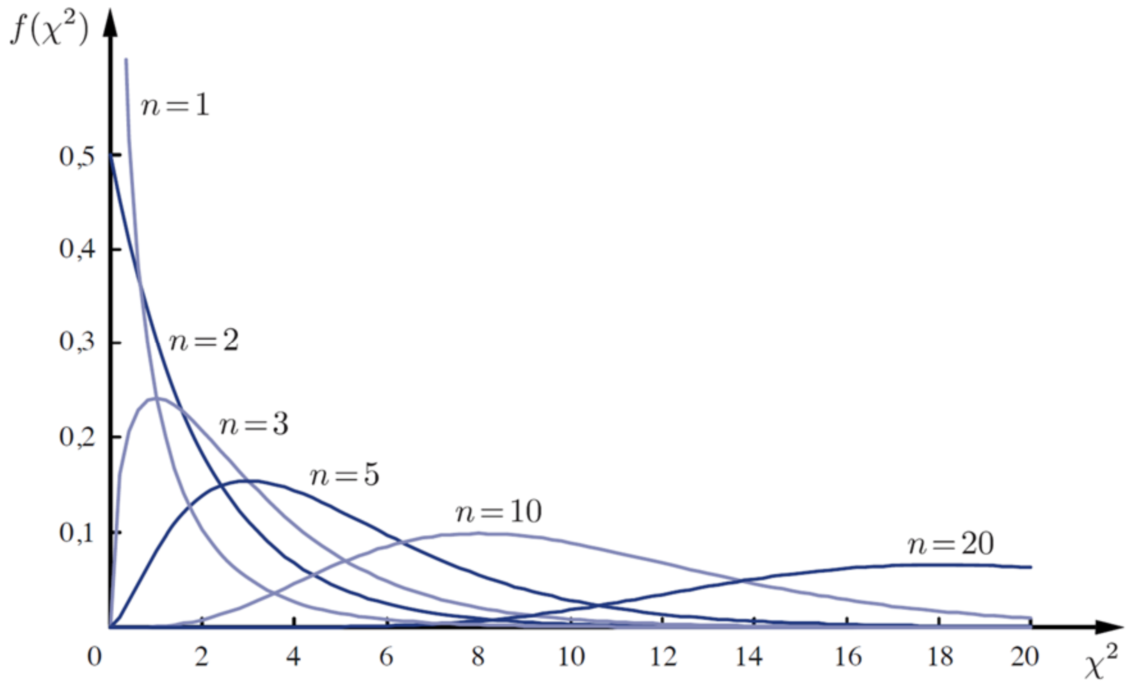
- Beim zentralen Grenzwertsatz: rein additive Überlagerung (wie z. B. für die Bildung des Stichprobenmittelwerts erforderlich)
- Jetzt: Quadrierung der Zufallsvariablen vor der Addition
- Relevanz solcher Quadratsummen: Beschreibung der Verteilung der Stichprobenvarianz $s_{\mathrm{x}}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2$
- Einführung der Zufallsvariablen $\mathrm{z}_i = \mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}}$ und $\mathrm{y}_n = \mathrm{z}_1^2 + \mathrm{z}_2^2 + \cdots + \mathrm{z}_n^2$
- y_n ist damit bis auf den Vorfaktor $\frac{1}{n-1}$ gleich der Stichprobenvarianz s_{x}^2

χ^2-Verteilung

- Sind n unabhängige Zufallsvariabel z_i mit einer Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$ gegeben, so ist die Quadratsumme $y_n = z_1^2 + z_2^2 + \cdots + z_n^2$ χ^2-verteilt mit der Wahrscheinlichkeitsdichte

$$f_{y_n}(y = \chi^2) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} y^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

- Einziger Parameter: n, beschreibt die Anzahl der Freiheitsgrade
- Praktische Bestimmung der χ^2-Verteilung: Tabellen oder Software (z. B. Excel: CHIVERT(y,n))



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

χ^2-Verteilung

- Gammafunktion $\Gamma(x)$, $x \in \mathbb{R}$: Verallgemeinerung der Fakultätsfunktion, Berechnung ebenfalls rekursiv:
  $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x),\ \ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi},\ \ \Gamma(1) = 1$
- Praktische Bestimmung der Gammafunktion: Tabellen oder Software (z. B. Excel: GAMMA(x))

χ^2-Verteilung

- Beweis der χ^2-Verteilung: vollständige Induktion
  - Zunächst Betrachtung einer einzigen Zufallsvariable: $\mathrm{y}_1 = \mathrm{z}_1^2$
  - Dichte von y_1 (transformierte Variable, siehe Kap. 4.1):
    - Dazu Lösung der Umkehrfunktion: $z_1 = -z_2 = \sqrt{y}$,

$$f_{\mathrm{y}_1}(y) = f_{\mathrm{z}_1}(z_1)\left|\frac{\mathrm{d}y(\mathrm{z})}{\mathrm{d}z}\right|_{\mathrm{z}=z_1}^{-1} + f_{\mathrm{z}_1}(z_2)\left|\frac{\mathrm{d}y(\mathrm{z})}{\mathrm{d}z}\right|_{\mathrm{z}=z_2}^{-1}$$

    - Mit $f_{\mathrm{z}_1}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)$:

$$f_{\mathrm{y}_1}(y) = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\left|2\sqrt{y}\right|^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi y}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)$$

    - Mit $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$:

$$f_{\mathrm{y}_1}(y) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

χ^2-Verteilung

- Beweis der χ^2-Verteilung: vollständige Induktion
  - Charakteristische Funktion von

$$f_{y_1}(y) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{\frac{1}{2}}} y^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}} & \text{für } y \geq 0 \\ 0 & \text{für } y < 0 \end{cases}$$

durch inverse Fourier-Transformation (ohne Beweis):

$$\Phi_{y_1}(f) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) 2^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{-\frac{1}{2}} \mathrm{e}^{-(1-\mathrm{j}4\pi f)\frac{y}{2}} \, \mathrm{d}y = (1 - \mathrm{j}4\pi f)^{-\frac{1}{2}}$$

  - Charakteristische Funktion für die als korrekt angenommene χ^2-Verteilung:

$$\Phi_{y_n}(f) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right) 2^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} y^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{y}{2}+\mathrm{j}2\pi f y} \, \mathrm{d}y = (1 - \mathrm{j}4\pi f)^{-\frac{n}{2}}$$

χ^2-Verteilung

- Beweis der χ^2-Verteilung: vollständige Induktion
  - Charakteristische Funktionen:
    $\Phi_{y_1}(f) = (1 - j4\pi f)^{-\frac{1}{2}}, \;\; \Phi_{y_n}(f) = (1 - j4\pi f)^{-\frac{n}{2}}$
  - Schluss von n auf $n+1$: Charakteristische Funktion einer Summe von unabhängigen Zufallsvariablen entspricht dem Produkt der jeweiligen charakteristischen Funktionen:
    Mit $y_{n+1} = y_n + y_1$:
    $$\Phi_{y_{n+1}}(f) = \Phi_{y_n}(f) \cdot \Phi_{y_1}(f) = (1 - j4\pi f)^{-\frac{n+1}{2}}$$
  - Dies ist genau die charakteristische Funktion einer χ^2-Verteilung von $n+1$ Zufallsvariablen

χ^2-Verteilung

- Mittelwert: aus charakteristischer Funktion $\Phi_{\mathrm{y}_n}(f) = (1 - \mathrm{j}4\pi f)^{-\frac{n}{2}}$:

  $$\mathrm{E}\{\mathrm{y}_n\} = \frac{1}{\mathrm{j}2\pi} \frac{\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{y}_n}(f)}{\mathrm{d}f} = n$$

- Zweites Moment: aus charakteristischer Funktion:

  $$\mathrm{E}\{\mathrm{y}_n^2\} = \frac{1}{(\mathrm{j}2\pi)^2} \frac{\mathrm{d}^2\Phi_{\mathrm{y}_n}(f)}{\mathrm{d}f^2} = n^2 + 2n$$

- Daraus Varianz: $\sigma_{\mathrm{y}_n}^2 = \mathrm{E}\{\mathrm{y}_n^2\} - (\mathrm{E}\{\mathrm{y}_n\})^2 = 2n$

- Für allgemein normalverteilte Zufallsvariablen $\mathrm{x}_i \sim \mathcal{N}(\mu_\mathrm{x}, \sigma_\mathrm{x}^2)$:
  χ^2-verteilte Größe erhält man durch Normierung (Variablentransformation):

  $$\chi_n^2 = \frac{(\mathrm{x}_1 - \mu_\mathrm{x})^2 + (\mathrm{x}_2 - \mu_\mathrm{x})^2 + \cdots + (\mathrm{x}_n - \mu_\mathrm{x})^2}{\sigma_\mathrm{x}^2}$$

χ^2-Verteilung

- Wie viele Freiheitsgrade hat die χ^2-verteilte Stichprobenvarianz $\mathrm{s}_\mathrm{x}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2$?
  - Mittelwert wird ebenfalls aus der Stichprobe geschätzt: $\hat{\mathrm{x}} = \frac{1}{n}(\mathrm{x}_1 + \mathrm{x}_2 + \cdots + \mathrm{x}_n)$
  - $\mathrm{x_n}$ lässt sich in Abhängigkeit der übrigen x_i und $\hat{\mathrm{x}}$ darstellen: $-(\mathrm{x}_n - \hat{\mathrm{x}}) = \sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})$
  - Normierung der Stichprobenvarianz:

$$\chi_n^2 = \frac{n-1}{\sigma_\mathrm{x}^2}\mathrm{s}_\mathrm{x}^2 = \frac{1}{\sigma_\mathrm{x}^2}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2 = \frac{1}{\sigma_\mathrm{x}^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2 + (\mathrm{x}_n - \hat{\mathrm{x}})^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_\mathrm{x}^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2 + \left(\sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{\sigma_\mathrm{x}^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})(\mathrm{x}_j - \hat{\mathrm{x}})\right]$$

χ^2-Verteilung

- Wie viele Freiheitsgrade hat die χ^2-verteilte Stichprobenvarianz $s_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{x})^2$?
  - $$\begin{aligned} \chi_n^2 &= \frac{1}{\sigma_x^2}\left[\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \hat{x})^2 + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}(x_i - \hat{x})(x_j - \hat{x})\right] \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2}\left[2\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \hat{x})^2 + \underbrace{\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=1, j\neq i}^{n-1}(x_i - \hat{x})(x_j - \hat{x})}_{\approx 0}\right] \\ &= \frac{2}{\sigma_x^2}\sum_{i=1}^{n-1}(x_i - \hat{x})^2 \end{aligned}$$
  - Bei n unabhängigen Messwerten erhält man also eine Summe von $n-1$ Summanden, d. h. die Stichprobenvarianz s_x^2 ist χ^2-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden

4.3 Normalverteilte Zufallsvariable

Student‘sche t-Verteilung

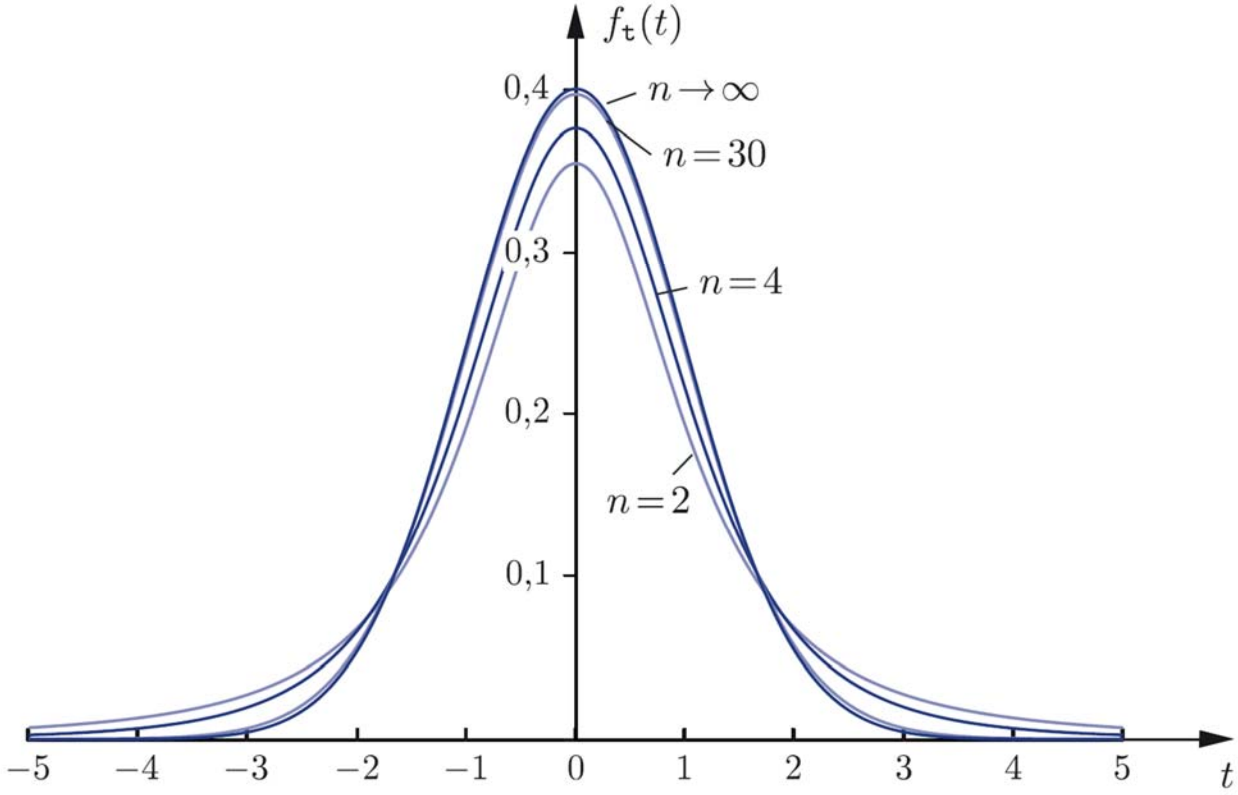
- Grundlage wichtiger statistischer Tests (siehe Kap. 4.4)
- Veröffentlicht 1908 von W. S. Gosset unter dem Pseudonym „Student“

- Gegeben sind zwei unabhängige Zufallsvariablen x und y.
  x besitze eine Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0{,}1)$, y besitze eine χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Dann hat die Zufallsvariable $\mathrm{t} = \frac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{y}/n}}$ die Wahrscheinlichkeitsdichte:
  $$f_{\mathrm{t}}(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}$$
  Die Zufallsvariable t wird t-verteilt mit n Freiheitsgraden genannt.

- Praktische Bestimmung der t-Verteilung: Tabellen oder Software (z. B. Excel: TVERT(t,n,1))

Student'sche t-Verteilung

- Mit wachsendem n: t-Verteilung strebt gegen die Standardnormalverteilung $\mathcal{N}(0,1)$
- Gute Approximation der t-Verteilung durch die Standardnormalverteilung für $n \geq 30$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Student'sche t-Verteilung

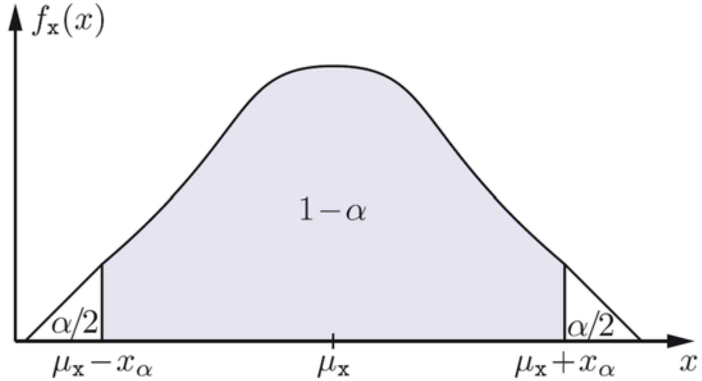
- Bedeutung der t-Verteilung:
  bei der Stichprobenuntersuchung:
  Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ ist normalverteilt,
  Stichprobenvarianz s_{x}^2 ist χ^2-verteilt
- Dann ist das Verhältnis $\mathrm{t} = \frac{\hat{\mathrm{x}}}{\sqrt{s_{\mathrm{x}}^2/n}}$ t-verteilt

4.4 Statistische Testverfahren

- Aussagen, die sich aus Stichproben über die zugrunde liegende Verteilung ableiten lassen:
  - Schätzung von Parametern der Verteilung (siehe Kap. 4.2)
  - Statistische Testverfahren, ob eine Hypothese zutrifft oder nicht (ja/nein-Entscheidung)
- Relevante Fragestellungen für statistische Testverfahren:
  - Ist der erhaltene Schätzwert für den Stichprobenmittelwert repräsentativ für eine angenommene Verteilung?
    → **Signifikanztest** für den Stichprobenmittelwert
  - Entspricht eine erhaltene Stichprobe einem bestimmten Verteilungsmodell?
    → χ^2**-Anpassungstest**
- Keine absolut sicheren Aussagen möglich;
  Testentscheidungen können nur mit einer bestimmten statistischen Sicherheit getroffen werden

Konfidenzintervall und statistische Sicherheit

- Erwünscht: Aussage über die Zuverlässigkeit einer Schätzung, z. B. Schätzung des Mittelwerts μ_{x} durch den Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$: Aussage ist bei kleiner Stichprobe offensichtlich weniger vertrauenswürdig als bei einer großen Stichprobe
- Messwert ist also nur aussagekräftig, wenn die mit der Schätzung verbundene Messunsicherheit bekannt ist
- Dazu Angabe eines (zweiseitigen) Konfidenzintervalls (Vertrauensintervalls) $[\mu_{\mathrm{x}} - x_\alpha, \mu_{\mathrm{x}} + x_\alpha]$, das den zu schätzenden Parameter mit der Irrtumswahrscheinlichkeit α enthält: $\alpha = P(|\mathrm{x} - \mu_{\mathrm{x}}| > x_\alpha)$
- Gleichbedeutend: Das (zweiseitige) Konfidenzintervall schließt den wahren Parameter mit einer statistischen Sicherheit von $1 - \alpha = P(|\mathrm{x} - \mu_{\mathrm{x}}| \leq x_\alpha)$ ein



- Bei sog. einseitigen Problemen: Parameter soll mit einer Irrtumswahrscheinlichkeit α nicht größer/kleiner als eine Grenze sein

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

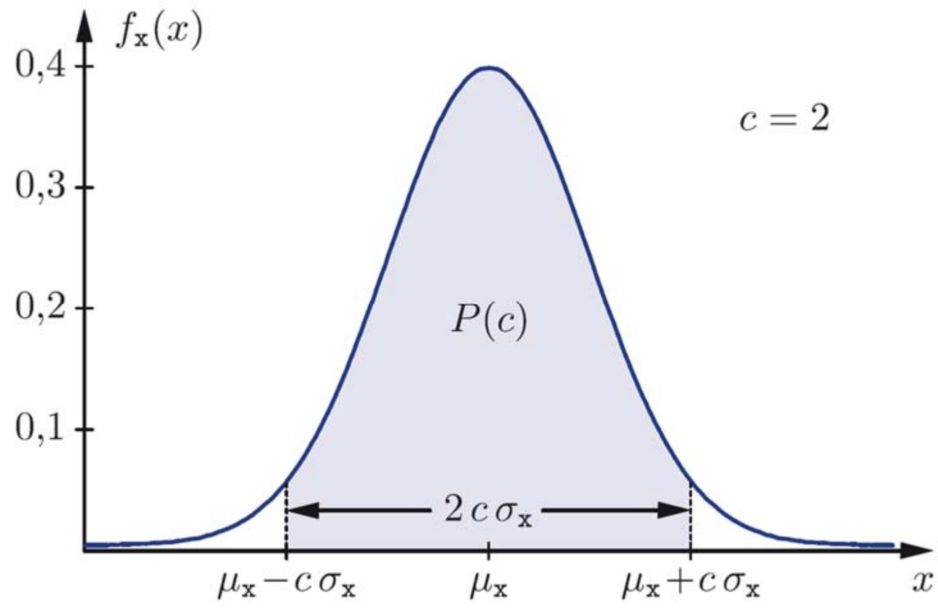
Konfidenzintervall bei bekannter Standardabweichung

- Annahme: Normalverteilung
- Konfidenzintervall als Vielfaches der Standardabweichung σ_x:
  $\mu_\mathrm{x} - c\sigma_\mathrm{x} \leq \mathrm{x} \leq \mu_\mathrm{x} + c\sigma_\mathrm{x}$
- Aussage zur statistischen Sicherheit durch Integration der Dichte $f_\mathrm{x}(x)$ der Normalverteilung:

$$P(c) = 1 - \alpha = P\left(\frac{x - \mu_\mathrm{x}}{\sigma_\mathrm{x}} \leq c\right)$$

$$= \int_{\mu_\mathrm{x} - c\sigma_\mathrm{x}}^{\mu_\mathrm{x} + c\sigma_\mathrm{x}} f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x$$

- Dieses Integral lässt sich nicht analytisch lösen, daher meist Verwendung der Gauß'schen Fehlerfunktion $\mathrm{erf}(c)$, die sich numerisch berechnen lässt oder in Tabellen/Software vorliegt
  (z. B. Excel: GAUSSFEHLER(Untere_Grenze;[Obere_Grenze]))



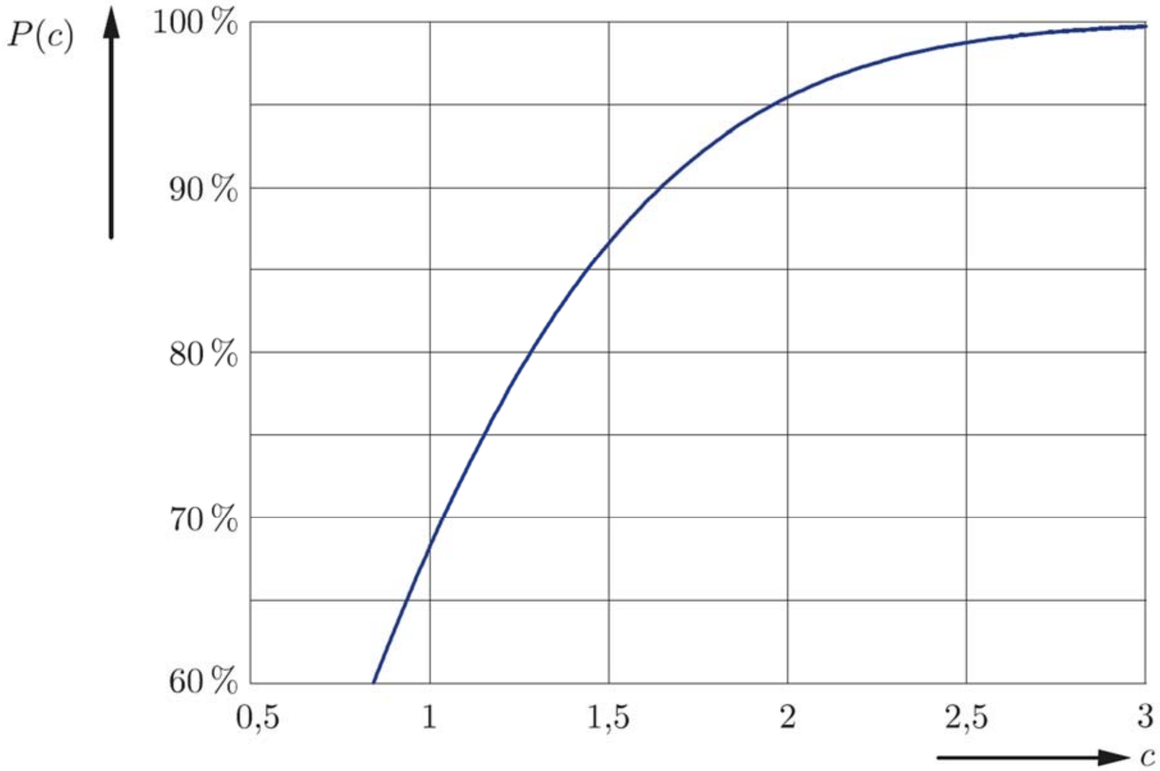
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Konfidenzintervall bei bekannter Standardabweichung

- Definition: **Gauß'sche Fehlerfunktion**
  Die Gauß'sche Fehlerfunktion (engl. *error function*) ist definiert durch das Integral
  $$\mathrm{erf}(c) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^c e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$$
  Sie ist eine ungerade Funktion.
- Zur Anwendung auf $P(c) = \int_{\mu_\mathrm{x}-c\sigma_\mathrm{x}}^{\mu_\mathrm{x}+c\sigma_\mathrm{x}} f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x$:
  Transformation der Normalverteilung für x in eine Standardnormalverteilung mittels $\mathrm{z} = \frac{\mathrm{x}-\mu_\mathrm{x}}{\sigma_\mathrm{x}}$
- Dann ist (Substitution: $z = \sqrt{2} \cdot x$)
  $$P(c) = \int_{\mu_\mathrm{x}-c\sigma_\mathrm{x}}^{\mu_\mathrm{x}+c\sigma_\mathrm{x}} f_\mathrm{x}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-c}^{c} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z$$
  $$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^c \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)\mathrm{d}z = \mathrm{erf}\left(\frac{c}{\sqrt{2}}\right)$$

Konfidenzintervall bei bekannter Standardabweichung

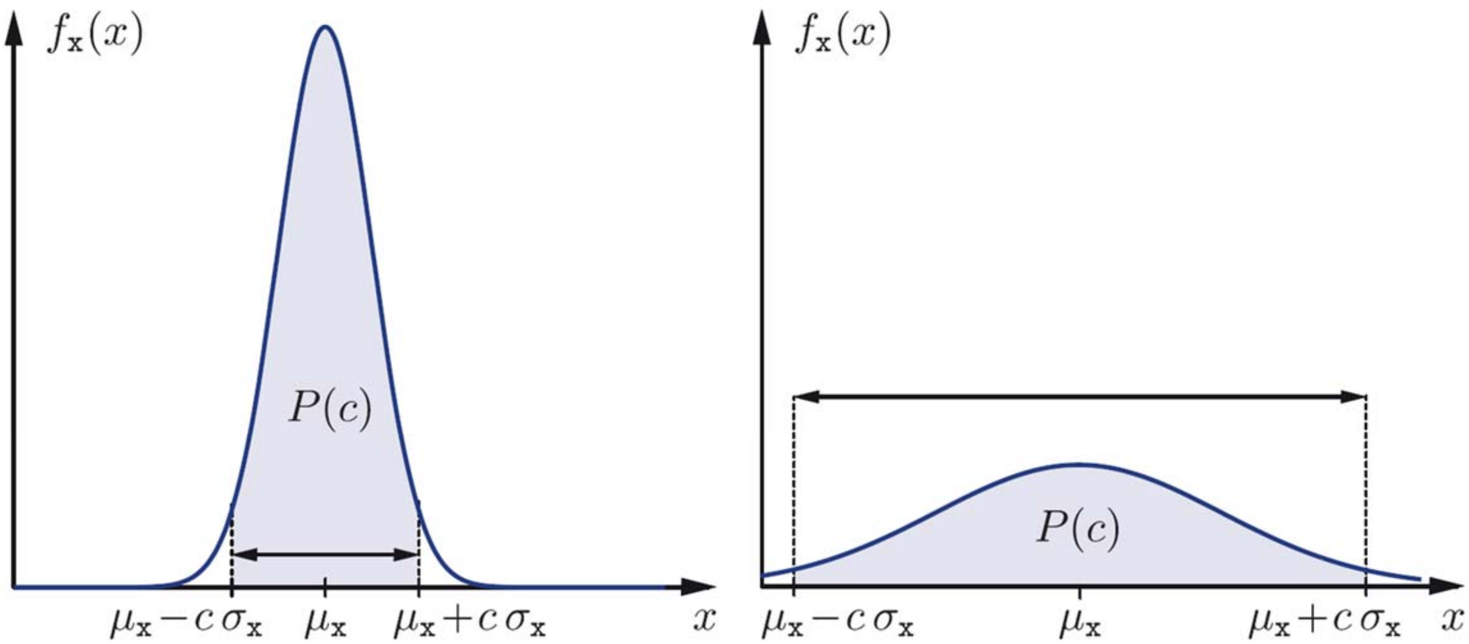
- Statistische Sicherheiten in Abhängigkeit vom Parameter c:
  $c = 1$: Konfidenzintervall: $\mu_\mathrm{x} \pm \sigma_\mathrm{x}$, $P(c) = 68{,}27\%$
  $c = 2$: Konfidenzintervall: $\mu_\mathrm{x} \pm 2\sigma_\mathrm{x}$, $P(c) = 95{,}45\%$
  $c = 3$: Konfidenzintervall: $\mu_\mathrm{x} \pm 3\sigma_\mathrm{x}$, $P(c) = 99{,}73\%$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Konfidenzintervall bei bekannter Standardabweichung

- Anwendung auf Fertigungsprozesse: Standardabweichung σ_x beschreibt, wie stark die Istmaße fertigungsbedingt streuen
- Beispiel: unterschiedlich breite Intervalle für verschiedene Standardabweichungen σ_x bei einer statistischen Sicherheit von $P(c) = 95{,}45\%$ $(c = 2)$



- Schmale Verteilung passt natürlich besser in vorgegebenes Toleranzfeld, siehe Kap. 4.5 und Vorlesung Fertigungsmesstechnik

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

- Bisher: Konfidenzintervall für die Zufallsgröße x als Vielfaches c der bekannten Standardabweichung σ_{x}
- Jetzt: Konfidenzintervall für den Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ einer Messreihe von n unabhängigen Messungen
- Konfidenzintervall hängt offenbar von der Anzahl der Messungen ab
- Dazu Standardabweichung des Stichprobenmittelwerts $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}} = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}$:

$$\mu_{\mathrm{x}} - c\,\frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}} \leq \hat{\mathrm{x}} \leq \mu_{\mathrm{x}} + c\,\frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}$$

- Damit Definition der Messunsicherheit $u_{\hat{\mathrm{x}}}$:

$$u_{\hat{\mathrm{x}}} = c \cdot \sigma_{\hat{\mathrm{x}}} = c\,\frac{\sigma_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}$$

d. h. bezogen auf den Stichprobenmittelwert, abhängig von c

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

- In der Praxis: σ_x ist unbekannt, daher empirische Standardabweichung s_x der Stichprobe als Schätzwert für die wahre Standardabweichung σ_x:

$$\mu_\mathrm{x} - c\,\frac{s_\mathrm{x}}{\sqrt{n}} \leq \hat{\mathrm{x}} \leq \mu_\mathrm{x} + c\,\frac{s_\mathrm{x}}{\sqrt{n}} \quad \Leftrightarrow \quad -c \leq \frac{\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x}}{\frac{s_\mathrm{x}}{\sqrt{n}}} \leq c$$

- $t = \frac{\hat{\mathrm{x}} - \mu_\mathrm{x}}{\frac{s_\mathrm{x}}{\sqrt{n}}}$ ist t-verteilt mit $n-1$ Freiheitsgraden (siehe Kap. 4.3)
- Berechnung der statistischen Sicherheit daher mit der t-Verteilung anstelle der Normalverteilung

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

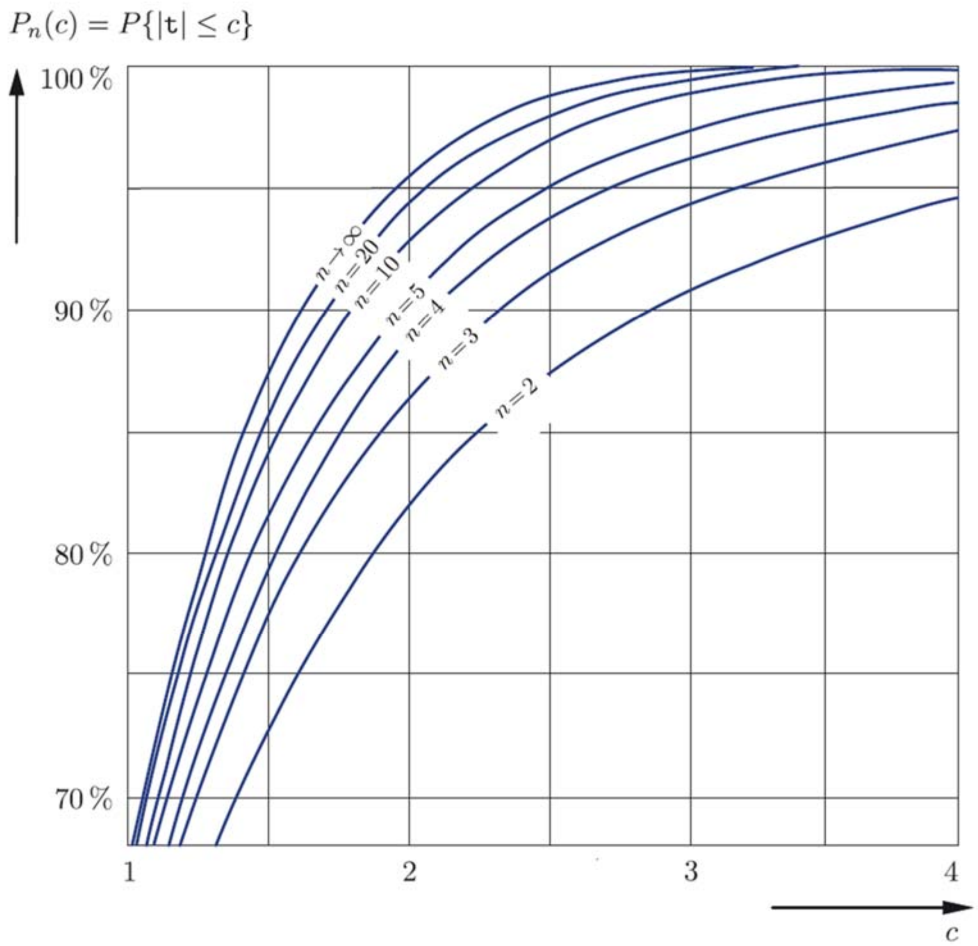
- Statistische Sicherheit:

$$P_n(c) = P\left(\frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu_{\mathrm{x}}|}{\frac{s_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}} = |t| \leq c\right) = \int_{-c}^{c} \underbrace{\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}}}_{\text{Wahrscheinlichkeitsdichte der t-Verteilung}} \,\mathrm{d}t$$

D. h. statistische Sicherheit ist abhängig von n

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

- Praktisches Vorgehen zur Bestimmung des Konfidenzintervalls:
  1. Wahl einer statistischen Sicherheit $P(|t| < c)$ für gewähltes c, daraus Bestimmung des erforderlichen Stichprobenumfangs n (grafisch oder aus Tabelle)



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

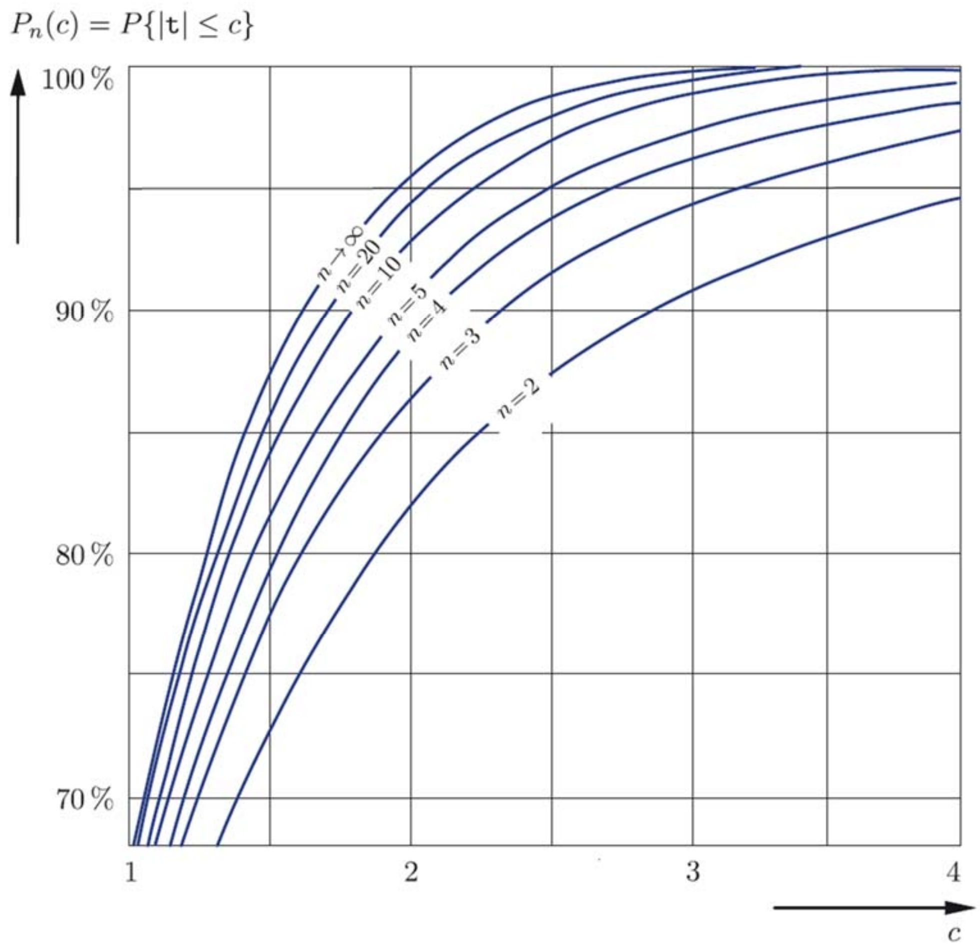
- Praktisches Vorgehen zur Bestimmung des Konfidenzintervalls:
  2. Berechnung der Standardabweichung der Stichprobe:
  $$\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2$$
  3. Daraus Messunsicherheit $u_{\hat{\mathrm{x}}}$ des Stichprobenmittelwerts:
  $$u_{\hat{\mathrm{x}}} = c\,\frac{s_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}$$
  Vertrauensintervall für den Stichprobenmittelwert:
  $$\mu_{\mathrm{x}} - c\,\frac{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}} \leq \hat{\mathrm{x}} \leq \mu_{\mathrm{x}} + c\,\frac{\mathrm{s}_{\mathrm{x}}}{\sqrt{n}}$$

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

- Messunsicherheit u_{x} einer Einzelmessung unabhängig von der Zahl der Messwerte:
  1. Berechnung der Standardabweichung der Stichprobe s_{x} aus
     $$\mathrm{s}_{\mathrm{x}}^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{x}_i - \hat{\mathrm{x}})^2$$
  2. Bestimmung des Wertes c zu der geforderten statistischen Sicherheit $P_c(n)$ (aus Grafik, s. o.)
  3. Daraus Messunsicherheit der Einzelmessung:
     $u_{\mathrm{x}} = c \cdot \mathrm{s}_{\mathrm{x}}$,
     d. h. $u_{\mathrm{x}} = \sqrt{n} \cdot u_{\hat{\mathrm{x}}} \quad \Rightarrow \quad u_{\mathrm{x}} > u_{\hat{\mathrm{x}}}$

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

- Für $n \rightarrow \infty$: Varianz $\sigma_{\hat{x}}^2$ des Stichprobenmittelwerts geht bei stochastisch unabhängigen Messwerten gegen null: $\sigma_{\hat{x}}^2 = \frac{\sigma_{\mathrm{x}}^2}{n}$
- Statistische Sicherheit $P_n(c)$ erreicht dann die statistische Sicherheit der Normalverteilung $P(c)$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Konfidenzintervall bei zu schätzender Standardabweichung

- Nicht verwechseln:
  - **Messunsicherheit**: Unsicherheit bei der Bestimmung des wahren Werts des Mittelwerts μ_x durch den Stichprobenmittelwert $\hat{x}$, hängt von der Statistik des Messverfahrens ab
  - **Fehlergrenzen**: vereinbarte oder garantierte, zugelassene größte Abweichungen von einem vorgeschriebenen Wert der Messgröße (entspricht dem Toleranzfeld), wird von der Qualitätssicherung vorgegeben
- Zur Einhaltung der Fehlergrenzen muss also die Messunsicherheit erheblich kleiner sein als das Toleranzfeld

Hypothesen und statistische Test

- Ziel: Überprüfung einer präzise formulierten Behauptung: Nullhypothese H_0
- Beispiel:
  H_0: Eine gegebene Stichprobe entstammt einer bestimmten Grundgesamtheit.

- Solche Hypothesen lassen sich aber nicht beweisen, sondern nur widerlegen
- Daher Gegenüberstellung einer komplementären Alternativhypothese H_1
- Falls die Alternativhypothese H_1 bestätigt wird, wird die Nullhypothese H_0 verworfen; ansonsten wird von der Gültigkeit der Nullhypothese H_0 ausgegangen

Hypothesen und statistische Test

- Festlegung eines Signifikanzniveaus α:
  - Irrtumswahrscheinlichkeit, die akzeptiert wird, falls das Testverfahren eine tatsächlich zutreffende Nullhypothese H_0 ablehnt (sog. **Fehler 1. Art**)
  - Entspricht einem Falschalarm: Nullhypothese H_0 wird fälschlicherweise ablehnt
- Signifikanzniveau wird daher konservativ gewählt, damit dieser Fehler klein bleibt, normalerweise $0{,}1\% \leq \alpha \leq 5\%$

Hypothesen und statistische Test

- Signifikanzniveau sollte aber nicht zu klein gewählt werden (z. B. $\alpha = 10^{-9}$), da es noch eine zweite Art von Fehlentscheidungen gibt:
  Fehler 2. Art (mit Wahrscheinlichkeit β): H_0 trifft tatsächlich nicht zu, wird aber durch den Test bestätigt („Schlupf", unterbliebener Alarm)

		Tatsächlicher Zustand	
		H_0 trifft zu	H_0 trifft nicht zu
Test-entscheidung	H_0 wird bestätigt	$1 - \alpha$	β (Fehler 2. Art)
	H_0 wird abgelehnt	α (Fehler 1. Art)	$1 - \beta$

- Verkleinerung von α führt zu Vergrößerung von β
- Der Wert von β kann bei gegebenem α i. a. nicht angegeben werden

Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert

- Beantwortung der Frage: Gehört eine Stichprobe zu einer vorgegebenen Grundgesamtheit mit vorgegebener, bekannter Verteilung?
- Dazu Annahme einer Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu_0, \sigma_{\mathrm{x}}^2)$
- Prüfung, ob der Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$ „nahe genug" am wahren Mittelwert μ_0 der Verteilung liegt
- Falls dies nicht so ist, ist die Abweichung nicht zufällig, sondern signifikant: Die Stichprobe ist nicht repräsentativ und wird abgelehnt
- Parametrisches Prüfverfahren oder Parametertest:
  Test erfolgt nicht für eine Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ selbst, sondern für den Parameter $\hat{\mathrm{x}}$ einer vorgegebenen Normalverteilung

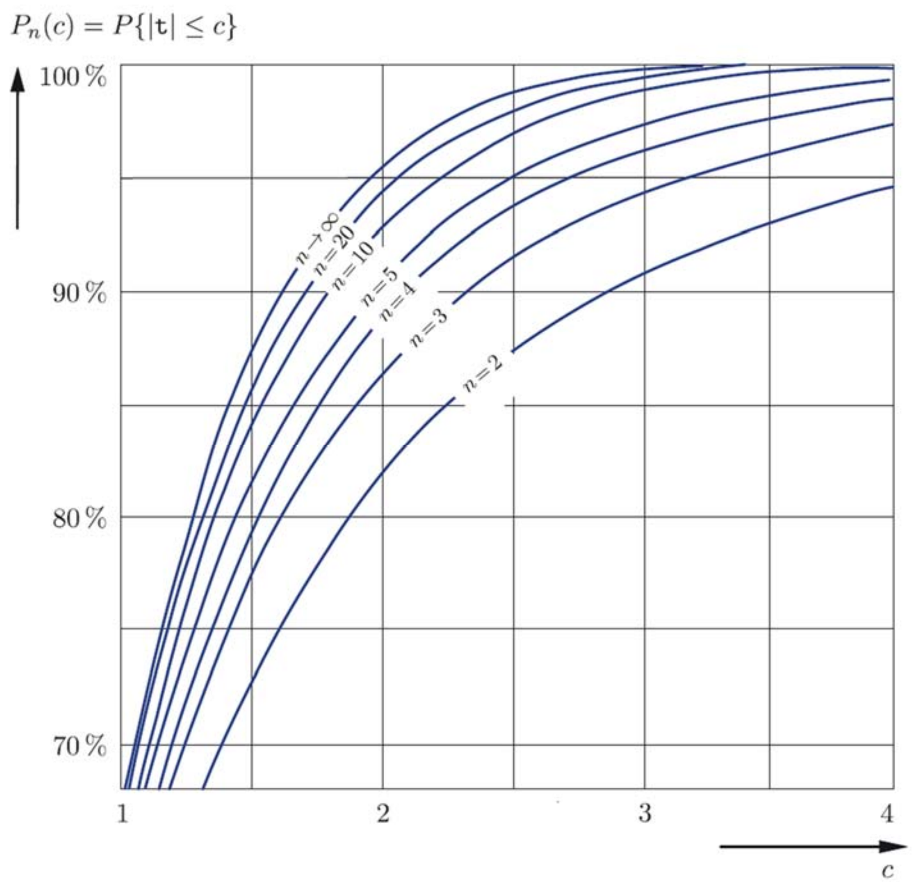
Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert

- Vorgehensweise:
  1. Prüfung der Voraussetzungen:
     Unabhängigkeit der Messwerte,
     Normalverteilung der Grundgesamtheit mit Erwartungswert μ_0
  2. Ermittlung des Stichprobenmittelwerts $\hat{\mathrm{x}}$ und (falls die Varianz σ_{x}^2 der Grundgesamtheit unbekannt ist) der Stichprobenvarianz s_{x}^2
  3. Aufstellen der Hypothesen: H_0: $\hat{\mathrm{x}} = \mu_0$, H_1: $\hat{\mathrm{x}} \neq \mu_0$
  4. Festlegen der Prüfgröße c:
     - Bei bekannter Varianz σ_{x}^2: Rechnung mit Normalverteilung:
       $$z = \frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu_0|}{\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}} = \frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu_0|}{\sigma_{\mathrm{x}}}\sqrt{n} = c$$
     - Bei unbekannter Varianz σ_{x}^2: Rechnung mit t-Verteilung:
       $$t = \frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu_0|}{s_{\mathrm{x}}}\sqrt{n} = c$$
       mit $n - 1$ Freiheitsgraden

Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert

- Vorgehensweise:

5. Festlegen des Signifikanzniveaus α,
   damit auch der statistischen Sicherheit $1-\alpha$, mit der eine tatsächlich zutreffende Nullhypothese bestätigt wird
6. Bestimmen der Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße $P(c)$ bzw. $P(c_n)$ (aus Diagramm oder Tabelle)
7. Testentscheidung:
   - Annahme der Nullhypothese, falls $P(c) \leq 1-\alpha$
   - Ablehnung der Nullhypothese, falls $P(c) > 1-\alpha$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Signifikanztest für den Stichprobenmittelwert

- Beispiel:
  - Werkstück mit Sollmaß $\mu_0 = 12{,}0\ \mathrm{mm}$
  - Messung einer Stichprobe aus $n = 90$ Werkstücken: Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}} = 12{,}075\ \mathrm{mm}$, Standardabweichung $s_\mathrm{x} = 0{,}229\ \mathrm{mm}$
  - Große Stichprobe ($n > 30$), daher Annahme einer Normalverteilung
  - Standardabweichung des Stichprobenmittelwerts: $\sigma_{\hat{\mathrm{x}}} \approx \frac{s_\mathrm{x}}{\sqrt{n}} = 0{,}0241\ \mathrm{mm}$
  - Festlegung des Signifikanzniveaus: $\pm 3\sigma_\mathrm{x}$-Spanne der Normalverteilung: $1 - \alpha = 99{,}73\%$, $\alpha = 0{,}27\%$
  - Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße: $P(c) = P\left(\frac{|\hat{\mathrm{x}} - \mu_0|}{\sigma_{\hat{\mathrm{x}}}}\right) = P(3{,}112) = 0{,}9981 > 1 - \alpha$
  - Abweichung der Prüfgröße ist also zu hoch, Stichprobe wird daher als nicht repräsentativ abgelehnt

χ^2-Anpassungstest

- Auch hier: Beantwortung der Frage: Gehört eine Stichprobe zu einer vorgegebenen Grundgesamtheit mit vorgegebener, bekannter Verteilung?
- Hier: nicht nur Prüfung eines Parameters (z. B. Stichprobenmittelwert $\hat{\mathrm{x}}$), sondern Prüfung der Verteilung der Stichprobe mit Umfang n
- Dazu Aufteilung des Wertebereichs der Zufallsgröße x in k disjunkte Klassen: Intervalle $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$, ähnlich wie beim Histogramm
- Theoretische Wahrscheinlichkeit dafür, dass x in Δ_i fällt:

$$p_i = \int_{\Delta_i} f_{\mathrm{x}}(x)\,\mathrm{d}x\,, \qquad \sum_{i=1}^{k} p_i = 1$$

- Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Stichprobe mit Umfang n gerade n_i Elemente in die Klasse Δ_i fallen: Binomialverteilung

$$f_{\mathrm{n}_i} = \binom{n}{\mathrm{n}_i} p_i^{\mathrm{n}_i} (1 - p_i)^{n-\mathrm{n}_i}$$

mit Erwartungswert $\mathrm{E}\{\mathrm{n}_i\} = n \cdot p_i$

χ^2-Anpassungstest

- Für $n \to \infty$: Binomialverteilung geht in Normalverteilung über (Moivre-Laplace-Theorem, Spezialfall des zentralen Grenzwertsatzes):
  $$f_{\mathrm{n}_i} = \binom{n}{\mathrm{n}_i} p_i^{\mathrm{n}_i} (1 - p_i)^{n-\mathrm{n}_i} \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi n p_i (1-p_i)}} \exp\left(-\frac{(\mathrm{n}_i - n p_i)^2}{2 n p_i (1-p_i)}\right)$$
- Für große Anzahl an Klassen: $p_i \ll 1 \;\Rightarrow\; \sigma_{\mathrm{n}_i}^2 \approx n\, p_i$,
  d. h. $\mathrm{E}\{\mathrm{n}_i\} = n\, p_i = \sigma_{\mathrm{n}_i}^2$
- Bewertung der Summe der Abweichungen der tatsächlichen Elementezahl n_i zum Erwartungswert np_i, bezogen auf die Varianz $\sigma_{\mathrm{n}_i}^2$:
  $$\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{n}_i - np_i)^2}{np_i}$$
  Summe von quadrierten Zufallsgrößen: χ^2-verteilt mit $k - 1$ Freiheitsgraden

4.4 Statistische Testverfahren

χ^2-Anpassungstest

- Klasseneinteilung ist weitgehend willkürlich:
  - Viele Klassen erwünscht, um Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{\mathrm{x}}(x)$ möglichst gut zu approximieren
  - Elementezahl n_i in den Klassen soll aber genügend groß sein
- Faustregel: $\mathrm{n}_{i,\mathrm{Rand}} \geq 1$ bei Randklassen, ansonsten $\mathrm{n}_i \geq 5$

χ^2-Anpassungstest

- Vorgehensweise:

1. Prüfung der Voraussetzungen:
   Unabhängigkeit der Messwerte,
   möglichst großer Stichprobenumfang
2. Erstellen eines Histogramms:
   Festlegen der k Klassen Δ_i,
   Ermitteln der absoluten Häufigkeiten n_i für die Klassen
   Falls Bedingungen $\mathrm{n}_i \geq 5$, $\mathrm{n}_{i,\mathrm{Rand}} \geq 1$ nicht erfüllt sind:
   Nachbarklassen zu einer gemeinsamen Klasse zusammenfassen
3. Aufstellen der Hypothesen: H_0: $f_\mathrm{x}(x) = f_0(x)$, H_1: $f_\mathrm{x}(x) \neq f_0(x)$
4. Festlegen des Signifikanzniveaus α bzw. der statistischen Sicherheit $1-\alpha$
   Oft Wahl von $\alpha = 5\%$, d. h. relativ große Irrtumswahrscheinlichkeit, da keine Voraussetzungen über die Wahrscheinlichkeitsdichte gemacht werden

χ^2-Anpassungstest

- Vorgehensweise:

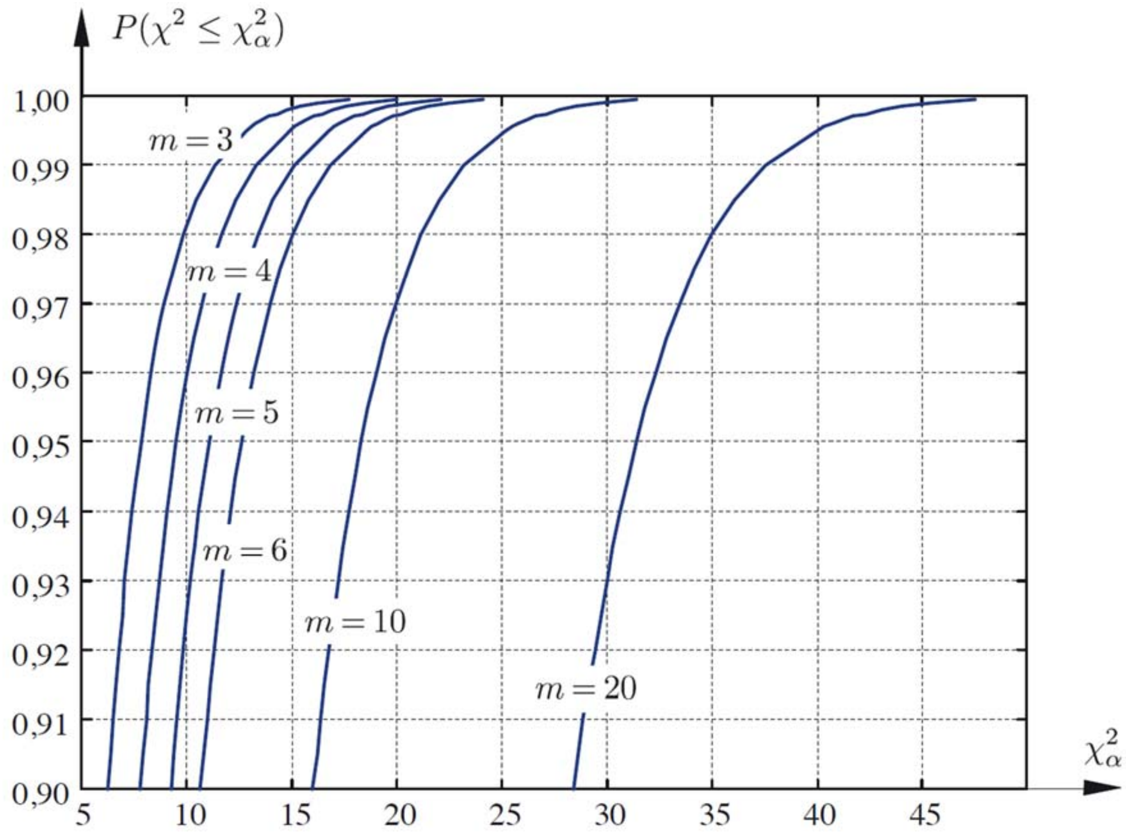
  5. Festlegen der Prüfgröße: $\chi^2 \approx \sum_{i=1}^{k} \frac{(\mathrm{n}_i - np_i)^2}{np_i}$

  6. Bestimmung der Freiheitsgrade:
     $m = k - 1 - \text{Anzahl der geschätzten Parameter}$
     Z. B. wenn bei einer Normalverteilungsannahme die beiden Parameter μ_x, σ_x^2 durch $\hat{\mathrm{x}}$, s_x^2 geschätzt werden: $m = k - 1 - 2$

χ^2-Anpassungstest

- Vorgehensweise:

  7. Bestimmen der Wahrscheinlichkeit der Prüfgröße $P(\chi^2 \leq \chi_\alpha^2) = 1 - \alpha$: Ablesen von χ_α^2 aus Diagramm bzw. Tabelle
  8. Testentscheidung:
     - Annahme der Nullhypothese, falls $\chi^2 \leq \chi_\alpha^2$
     - Ablehnung der Nullhypothese, falls $\chi^2 > \chi_\alpha^2$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

χ^2-Anpassungstest

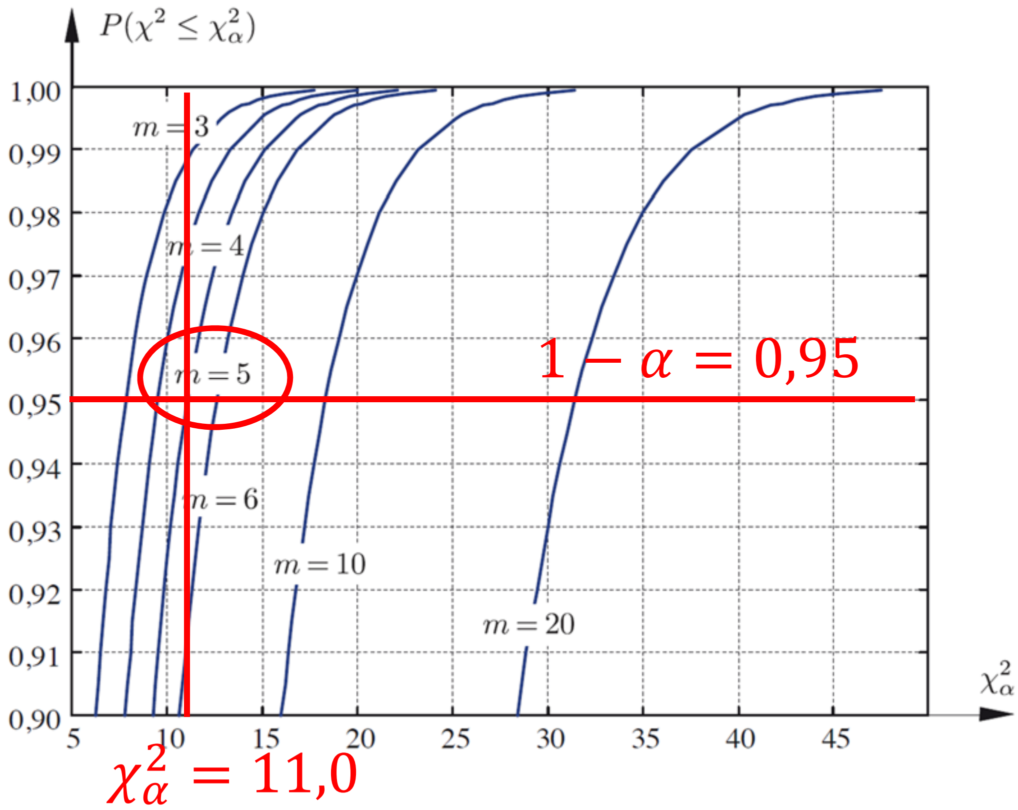
- Beispiel: χ^2-Test auf Gleichverteilung
  - Würfel mit $k = 6$ Augen
  - Prüfung auf Gleichverteilung: H_0: $f_{\mathrm{x}}(x) \mathrel{\widehat{=}} \text{Gleichverteilung}$
  - $n = 120$ Testwürfe:

Augenzahl	1	2	3	4	5	6	Summe
Anzahl n_i	14	27	15	24	13	27	120
$\mathrm{n}_i - np_i$	-6	7	-5	4	-7	7	0
$\frac{(\mathrm{n}_i - np_i)^2}{np_i}$	$1{,}8$	$2{,}45$	$1{,}25$	$0{,}8$	$2{,}45$	$2{,}45$	$11{,}2$

  - Erwartungswert der Elementezahl: $np_i = 20$, für alle Klassen gleich
  - Prüfgröße: $\chi^2 = 11{,}2$

χ^2-Anpassungstest

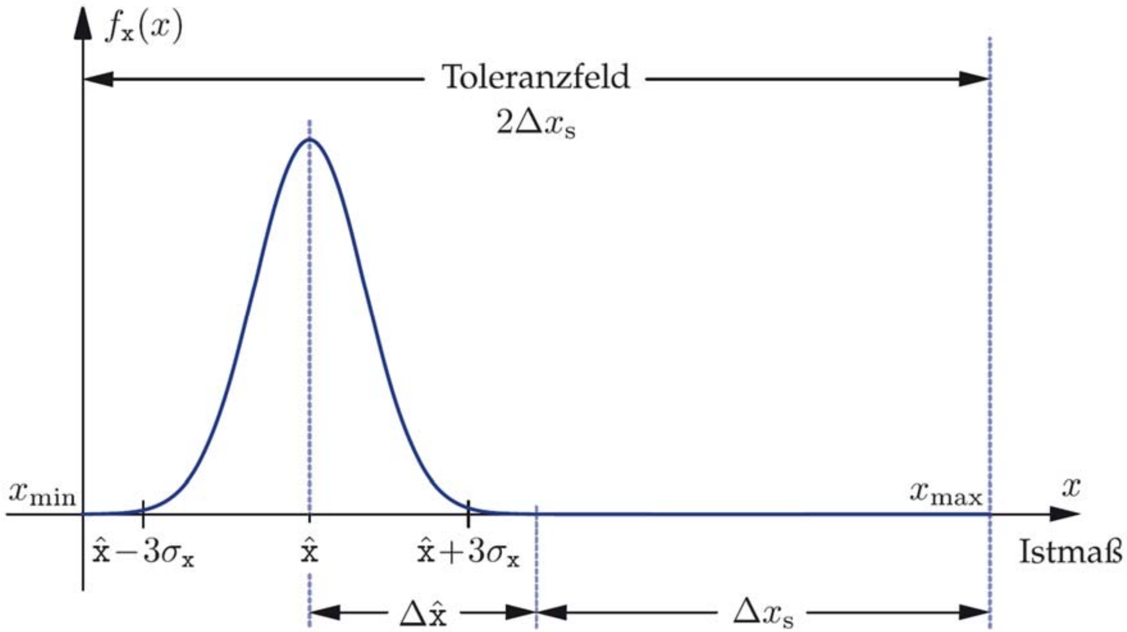
- Beispiel: χ^2-Test auf Gleichverteilung
  - Festlegung des Signifikanzniveaus: $\alpha = 5\%$
    $\Rightarrow P(\chi^2 \leq \chi^2_\alpha) \leq 1 - \alpha = 0{,}95$
  - Zahl der Freiheitsgrade:
    $m = k - 1 = 5$
  - Aus Diagramm abgelesen:
    $\chi^2_\alpha = 11{,}0$
  - Testentscheidung:
    $\chi^2 = 11{,}2 > \chi^2_\alpha = 11{,}0$,
    daher sind die Abweichungen signifikant und die Nullhypothese wird abgelehnt



  - Möglicher erneuter Test mit höherer Zahl an Testwürfen, um die Nullhypothese doch noch zu bestätigen

Beurteilung von Fertigungsprozessen

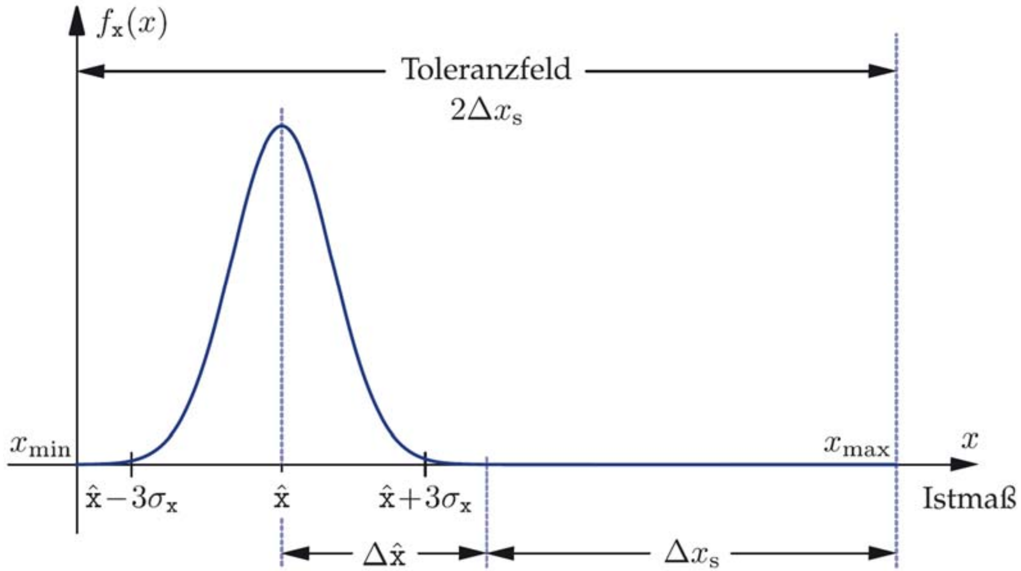
- Zur Bewertung der Qualität von Fertigungsprozessen:
  Prüfung, ob das Istmaß x eines bestimmten (hohen) Anteils gefertigter Werkstücke innerhalb eines spezifizierten Toleranzfelds $[x_{\min}, x_{\max}]$ liegt
- Annahme einer Normalverteilung für das Istmaß x
- Meist Betrachtung der $3\sigma_{\mathrm{x}}$-Umgebung ($\mu_{\mathrm{x}} \pm 3\sigma_{\mathrm{x}}$) mit $P(|x-\mu_{\mathrm{x}}| \leq 3\sigma_{\mathrm{x}}) = 99{,}73\%$, die im Toleranzbereich liegen soll
- Breite des Toleranzfelds:
  $2\Delta x_s = x_{\max} - x_{\min}$
- Abweichung des Stichprobenmittelwerts $\hat{\mathrm{x}}$ von der Toleranzfeldmitte:
  $\Delta\hat{\mathrm{x}} = \left|\frac{1}{2}(x_{\max} + x_{\min}) - \hat{\mathrm{x}}\right|$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Beurteilung von Fertigungsprozessen

- **Prozesspotenzialindex**:
  $$c_\mathrm{p} = \frac{x_\mathrm{max} - x_\mathrm{min}}{6\sigma_\mathrm{x}} = \frac{2\Delta x_s}{6\sigma_\mathrm{x}}$$
  Gibt an, ob ein Prozess im Prinzip (d. h. nur unter Beurteilung seiner Streuung) das Toleranzfeld einhalten könnte



- **Prozessfähigkeitsindex**:
  $$c_\mathrm{pk} = \frac{\Delta x_s - \Delta\hat{\mathrm{x}}}{3\sigma_\mathrm{x}} = c_\mathrm{p}\left(1 - \frac{\Delta\hat{\mathrm{x}}}{\Delta x_\mathrm{s}}\right)$$
  Gibt an, ob die Grenzen des $3\sigma_\mathrm{x}$-Bereichs innerhalb des Toleranzfelds liegen
- Für beide Indizes muss gelten: $c_\mathrm{p} \geq 1$, $c_\mathrm{pk} \geq 1$,
  dann weist der Fertigungsprozess einen Ausschuss $< 0{,}27\%$ auf

Beurteilung von Fertigungsprozessen

- Güte der Fertigung hängt offensichtlich direkt von der Breite der Normalverteilung der Istmaße x ab:
  schmale Normalverteilung ist robuster gegenüber Schwankungen des Mittelwerts $\hat{\mathrm{x}}$ (d. h. der Fertigungsprozess hat ein höheres Potenzial)
- Ausschussrate p: für Normalverteilung Berechnung über die Gauß'sche Fehlerfunktion:
  $$p \approx \frac{1}{2}\left(1 - \operatorname{erf}\left(\frac{3c_{\mathrm{pk}}}{\sqrt{2}}\right)\right)$$
- Angabe von p oft in dpm (defects per million)
- Bei qualitativ besonders hochwertiger Fertigung: Forderung nach Prozessfähigkeitsindex von $c_{\mathrm{pk}} > 1{,}67 \ldots 2$ mit resultierender Ausschussrate von $p < 0{,}3 \ldots 0{,}001\ \mathrm{dpm}$
- Aber Vorsicht: bei sehr kleinem p darf „praktisch nie" ein Defekt auftreten

Beurteilung von Fertigungsprozessen

- Beispiel: Länge eines Werkstücks
  - Längenmaß sei auf $x = 0{,}609\ \mathrm{mm}$ spezifiziert
  - Zulässige Fertigungstoleranzen:
    $x_{\mathrm{min}} = 0{,}591\ \mathrm{mm} \le \mathrm{x} \le x_{\mathrm{max}} = 0{,}627\ \mathrm{mm}$
  - Stichprobenmessung:
    Mittelwert $\hat{\mathrm{x}} = 0{,}600\ \mathrm{mm}$, Standardabweichung $\mathrm{s_x} = 0{,}003\ \mathrm{mm} \approx \sigma_{\mathrm{x}}$
  - Damit sind
    $\Delta x_{\mathrm{s}} = \frac{1}{2}(x_{\mathrm{max}} - x_{\mathrm{min}}) = 0{,}018\ \mathrm{mm}$,
    $\Delta\hat{\mathrm{x}} = \left|\frac{1}{2}(x_{\mathrm{max}} + x_{\mathrm{min}}) - \hat{\mathrm{x}}\right| = 0{,}009\ \mathrm{mm}$
  - Prozesspotenzialindex $c_{\mathrm{p}} = \frac{2\Delta x_s}{6\sigma_{\mathrm{x}}} = 2$,
    Prozessfähigkeitsindex $c_{\mathrm{pk}} = c_{\mathrm{p}}\left(1 - \frac{\Delta\hat{\mathrm{x}}}{\Delta x_{\mathrm{s}}}\right) = 1$,
    d. h. die Verteilung von x liegt unsymmetrisch im Toleranzfeld
  - Ausschussrate: $p \approx \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{erf}\left(\frac{3c_{\mathrm{pk}}}{\sqrt{2}}\right)\right) = 1350\ \mathrm{dpm}$

Bestimmung der Ausfallrate

- Aufgabe: Prüfung der vertraglich spezifizierten Ausfallrate für massenhaft gefertigte Produkte, z. B. elektronische Bauteile
- Prüfung kann wegen der großen Anzahl von Exemplaren nur stichprobenweise erfolgen
- n: Zahl der Exemplare,
  p: Ausfallwahrscheinlichkeit,
  k: Zahl der in der Stichprobe registrierten Ausfälle
- Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe zwischen k_1 und k_2 Exemplare ausgefallen sind (Binomialverteilung):

$$P_n(k_1 \le j \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}$$

- Für $n \to \infty$ und $p \to 0$ und $np = \text{const.}$ gilt das Poisson'sche Theorem, nach dem die Binomialverteilung in die Poissonverteilung übergeht:

$$P_n(k_1 \le j \le k_2) = \sum_{i=k_1}^{k_2} \frac{n^i}{i!} p^i \mathrm{e}^{-np}$$

Bestimmung der Ausfallrate

- Wahrscheinlichkeit, dass in der Stichprobe höchstens k defekte Exemplare enthalten sind ($k_1 = 0$, $k_2 = k$):

$$P_n(j \leq k) = \mathrm{e}^{-np} \sum_{i=0}^{k} \frac{(np)^i}{i!}$$

- Beispiel:
  - Stichprobengröße $n = 3000$, Ausfallwahrscheinlichkeit $p = 10^{-3}$
  - Wahrscheinlichkeit, dass höchstens z. B. $k = 5$ Exemplare defekt sind:

$$P_n(j \leq 5) = \mathrm{e}^{-np} \sum_{i=0}^{5} \frac{(np)^i}{i!} = \mathrm{e}^{-3\cdot 10^3 \cdot 10^{-3}} \sum_{i=0}^{5} \frac{\left(3\cdot 10^3 \cdot 10^{-3}\right)^i}{5!} = 0{,}916$$

Bestimmung der Ausfallrate

- In der Praxis (Prüffeld und Einsatz): Verwendung der Ausfallrate λ: Kehrwert der mittleren Lebensdauer (*mean time to failure*, MTTF)
- Zur Prüfung:
  - nt: „Bauelementestunden“: Produkt aus Anzahl n der Exemplare in der Stichprobe und der Prüfzeit t
  - λ: Ausfallwahrscheinlichkeit p bezogen auf die Prüfzeit t
- Mit $\lambda \cdot nt = np$:

$$P_n(j \leq k) = \mathrm{e}^{-np} \sum_{i=0}^{k} \frac{(np)^i}{i!} = \mathrm{e}^{-\lambda\, nt} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda\, nt)^i}{i!}$$

Bestimmung der Ausfallrate

- Bestimmung der Ausfallrate λ:
  - Messung der Zahl der Ausfälle k nach durchlaufenen Bauelementestunden
  - Konservativer Ansatz für die Wahrscheinlichkeit, das höchstens k Ausfälle auftreten: $P_n(j \leq k) = 0{,}1$, entspricht dem Signifikanzniveau α
    Wahrscheinlichkeit, dass mehr als die beobachteten k Ausfälle auftreten: $P_n(j > k) = 1 - P_n(j \leq k) = 0{,}9$, entspricht dem Konfidenzniveau $1 - \alpha$
  - Gleichung $P_n(j \leq k) = 0{,}1 = \mathrm{e}^{-\lambda\, nt} \sum_{i=0}^{k} \frac{(\lambda\, nt)^i}{i!}$ lässt sich als Zuordnung der im Test registrierten Zahl der Ausfälle k zu einem Wert $\lambda \cdot nt$ interpretieren: $\lambda \cdot nt = f(k)$

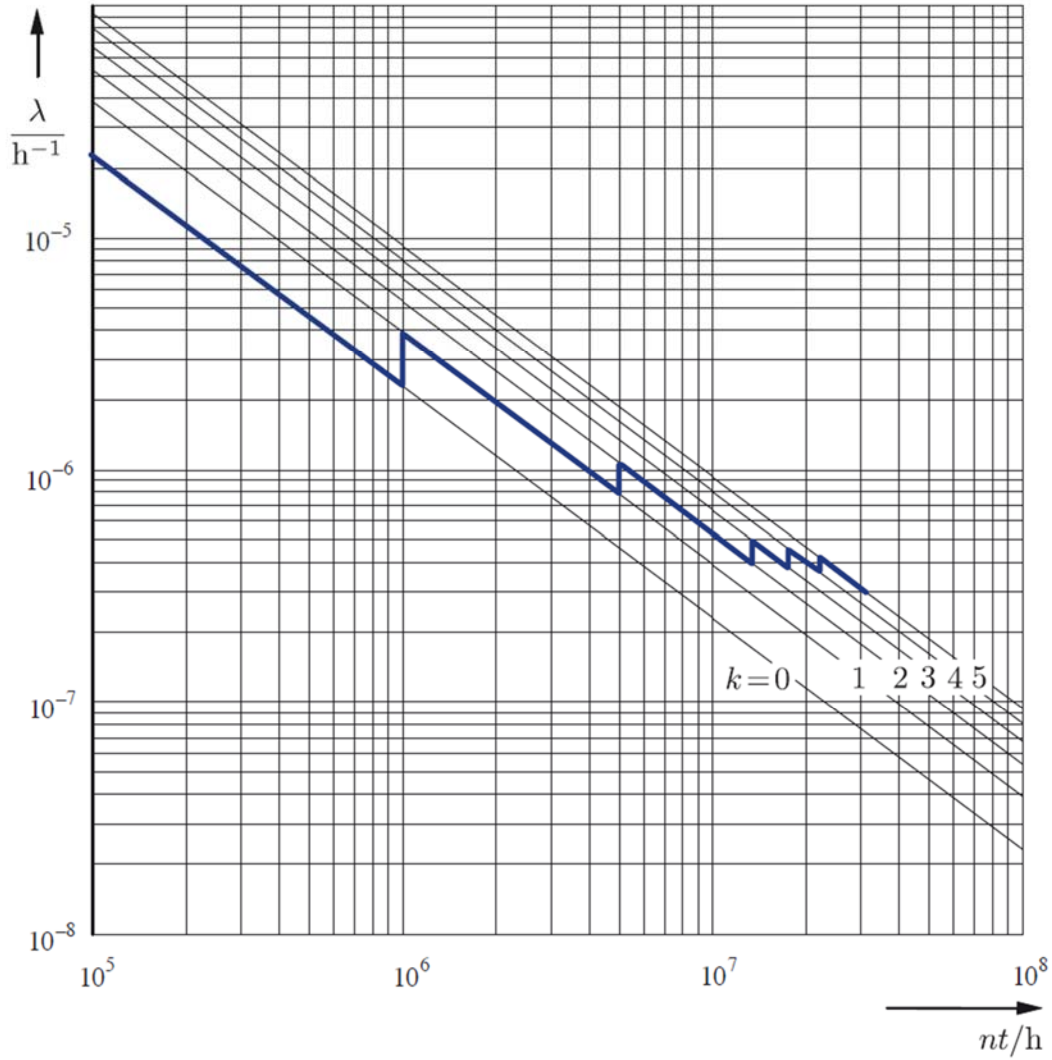
Bestimmung der Ausfallrate

- Numerische Berechnung der Werte von $f(k)$:

Konfidenzniveau $1-\alpha$	Zahl der Ausfälle k					
	0	1	2	3	4	5
0,70	1,39	2,69	3,92	5,06	6,27	7,42
0,80	1,61	2,99	4,28	5,52	6,72	7,91
0,90	2,30	3,89	5,32	6,68	7,99	9,27
0,95	3,00	4,74	6,30	7,75	9,15	10,60
0,99	4,60	6,64	8,41	10,04	11,60	13,11

Bestimmung der Ausfallrate

- Grafische Visualisierung der Gleichung $\lambda \cdot nt = f(k)$ mittels doppeltlogarithmischer Darstellung: $\log(\lambda) = \log f(k) - \log(nt)$
- Zu Beginn des Tests: $k = 0$, d. h. Bewegung auf der Linie für $\log f(k = 0)$
- Bei Beobachtung des ersten Ausfalls: $k = 1$, Sprung auf die Linie für $\log f(k = 1)$
- Nach ausreichend langer Zeit: Stabilisierung auf einem Wert für λ
- Bei Frühausfällen: Ausfallrate ist für kürzere Testzeiten höher als der asymptotische Wert



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Bestimmung der Ausfallrate

- Zur Reduktion der Testzeiten: Prüfung unter verschärften Bedingungen, z. B. erhöhte Temperatur, erhöhter Druck, Temperaturzyklen
- Berücksichtigung der verschärften Bedingungen mittels eines Raffungsfaktors r, um den die Testzeit gekürzt wird
- Raffungsfaktor r wird experimentell bestimmt

Bestimmung der Ausfallrate

- Beispiel:
  - Produktion von $3 \cdot 10^6$ Bauelementen pro Jahr
  - Davon werden $n = 3000$ über eine Testzeit von $t = 30\ \text{Tagen} = 720\ \text{h}$ getestet
  - Test bei erhöhter Umgebungstemperatur mit einem Raffungsfaktor $r = 10$
  - Aufgetretene Ausfälle:

k	1	2	3	4	5
t/h	33	167	433	567	720
$r \cdot nt/\text{h}$	10^6	$5 \cdot 10^6$	$1{,}3 \cdot 10^7$	$1{,}7 \cdot 10^7$	$2{,}16 \cdot 10^7$

  - Nach Testende ($k = 5$): Bestimmung der Ausfallrate λ (mit $1 - \alpha = 0{,}9$):
$$\lambda = \frac{f(k)}{r \cdot nt} = \frac{9{,}27}{2{,}16 \cdot 10^7\ \text{h}} = 4{,}3 \cdot 10^{-7}\ \text{h}^{-1}$$

Bestimmung der Ausfallrate

- Beispiel: Einfluss der Größe der Stichprobe
  - Messung der Ausfälle für drei Lieferanten:
    Lieferant A: $k = 0$ von $n = 500$, d. h. $0\,\mathrm{dpm}$
    Lieferant B: $k = 1$ von $n = 2000$, d. h. $500\,\mathrm{dpm}$
    Lieferant C: $k = 6$ von $n = 10000$, d. h. $600\,\mathrm{dpm}$
  - Naheliegende Einschätzung: Lieferant A ist der beste, da keine Ausfälle aufgetreten sind; Lieferant C ist der schlechteste
  - Größe der Stichprobe n muss aber richtig berücksichtigt werden, die Rechnung muss daher sein:
    Lieferant A: $k < 1$ von $n = 500$, d. h. $< 2000\,\mathrm{dpm}$
    Lieferant B: $k < 2$ von $n = 2000$, d. h. $< 1000\,\mathrm{dpm}$
    Lieferant C: $k < 7$ von $n = 10000$, d. h. $< 700\,\mathrm{dpm}$
  - Dadurch Umkehrung der Einschätzung: Lieferant C ist der beste
  - Bei Lieferant A müssten 1429 Bauteile i. O. geprüft werden, um die gleiche Bewertung wie Lieferant C zu erhalten

Bestimmung der Ausfallrate

- Beispiel: Einfluss der Größe der Stichprobe
  - Fazit: Je niedriger die nachzuweisende Ausfallrate, desto größer muss die Teststichprobe sein
  - Hohe Produktqualität (d. h. niedrige Ausfallrate) lässt sich nur bei hohen Fertigungsstückzahlen nachweisen, bei denen man große Stichproben prüfen kann

Statistische Prozessüberwachung

- Produktmerkmale in einem Fertigungsprozess variieren: systematische und zufällige Variationen
- Zufällige, mittelwertfreie Störungen lassen sich kaum verhindern (außer durch Änderungen im Fertigungsprozess)
- Durch Qualitätssicherung müssen aber systematische Fehler erkannt und korrigiert werden
- Systematischer Fehler muss daher aus den Messwerten extrahiert werden, zufällige Fehler sollen unterdrückt werden
- Einfachstes Verfahren zur Prozessüberwachung: Beobachtung des Stichprobenmittelwerts

$$\hat{\mathrm{x}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i$$

Statistische Prozessüberwachung

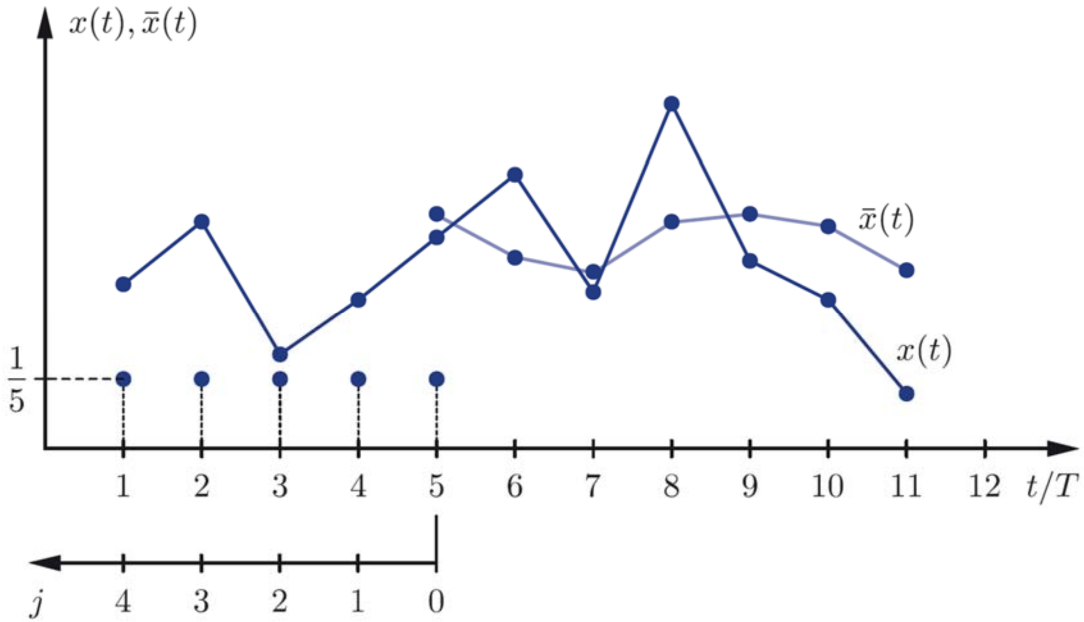
- Beispiel: Systematischer Fehler
  - Sollwert der Länge eines Bauteils: $x = 100\ \mathrm{mm}$
  - Messung von $n = 6$ Bauteilen:

1	2	3	4	5	6
$100{,}1\ \mathrm{mm}$	$100{,}5\ \mathrm{mm}$	$99{,}8\ \mathrm{mm}$	$100{,}0\ \mathrm{mm}$	$99{,}9\ \mathrm{mm}$	$100{,}3\ \mathrm{mm}$

  - Stichprobenmittelwert: $\hat{\mathrm{x}} = 100{,}1\ \mathrm{mm}$
  - Unter der Annahme, dass die statistische Sicherheit dieser Stichprobe hoch genug ist (bei dieser Stichprobe evtl. zu gering) besitzt die Fertigung einen systematischen Fehler von $0{,}1\ \mathrm{mm}$

Statistische Prozessüberwachung

- Systematische Fehler können auch zeitabhängig (instationär) sein, daher reicht die einfache Mittelwertbildung meist nicht aus
- Abhilfe: gleitender Mittelwert (*moving average*, MA) für eine Zeitreihe $x(t)$ von Messungen zu den Zeitpunkten $t = iT$, $i \in \mathbb{Z}_0^+$:
  $$\bar{x}(t) = \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{m-1} x(t - jT)$$
  d. h. gleitendes „Fenster" der Breite mT, innerhalb dessen der Mittelwert gebildet wird



Statistische Prozessüberwachung

- Gleitender Mittelwert mit symmetrischen Summationsgrenzen (mit $m = 2M + 1$, d. h. ungerade Anzahl von Werten $x(t)$ im Fenster):
  $$\bar{x}(t) = \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} x(t - jT)$$
- Gleitender Mittelwert ist allerdings so nicht kausal (in das Ergebnis gehen zukünftige Werte ein), daher zusätzliche Verzögerung der Länge MT erforderlich

Statistische Prozessüberwachung

- Beispiel: MA-Filterung
  - Zeitreihe: Differenz $\mathrm{x}(t)$ zwischen Messwerten und Sollwert
  - $\mathrm{x}(t)$ besteht aus einem systematischen Anteil $s(t)$ und einem zufälligen, mittelwertfreien Anteil $\mathrm{e}(t)$: $\mathrm{x}(t) = s(t) + \mathrm{e}(t)$
  - Bei genügend großem M:

$$
\begin{aligned}
\bar{x}(t) &= \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} \mathrm{x}(t - jT) \\
&= \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} s(t - jT) + \mathrm{e}(t - jT) \\
&= \frac{1}{2M+1} \left[\sum_{j=-M}^{M} s(t - jT) + \underbrace{\sum_{j=-M}^{M} \mathrm{e}(t - jT)}_{\approx\, 0} \right] \\
&= \frac{1}{2M+1} \sum_{j=-M}^{M} s(t - jT)
\end{aligned}
$$

d. h. nur der geglättete systematische Anteil bleibt übrig

Statistische Prozessüberwachung

- Im folgenden: Betrachtung der Eigenschaften des systematischen Anteils $s(t)$
- $s(t)$ muss nicht zeitlich konstant sein, z. B. aufgrund Wegdriften vom Sollwert
- Näherung für $s(t)$: Signalmodell $s(t) = a_0 + a_1 t + \cdots + a_k t^k$ mit a_1: Parameter für die (lineare) Drift
- Dadurch Analyse des systematischen Fehlers durch Bestimmung der Modellkoeffizienten a_i
- Prädiktion des weiteren zeitlichen Verlaufs von $s(t)$: frühzeitige Erkennung von unzulässigen Abweichungen
- Statistische Prozessüberwachung: Kontrolle, ob die Parameter a_i und $s(t)$ innerhalb eines vorgegebenen Toleranzintervalls liegen

Statistische Prozessüberwachung

- Dazu Einsatz des Least-Squares-Schätzers (siehe Kap. 2.1): inhärente Unterdrückung zufälliger Fehler und Berechnung der gesuchten Modellparameter a_i
- Signalmodell in zeitkontinuierlicher Form:
  $\mathrm{y}(t) = a_0\varphi_0(t) + a_1\varphi_1(t) + \cdots + a_k\varphi_k(t) + \mathrm{e}(t)$,
  nicht beschränkt auf Polynomansätze
- Mit $t = nT$ für $m + 1$ vergangene Messwerte:

$$\hat{\boldsymbol{y}}_n = \begin{bmatrix} \hat{y}(n) \\ \hat{y}(n-1) \\ \vdots \\ \hat{y}(n-m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_0(nT) & \cdots & \varphi_k(nT) \\ \varphi_0\big((n-1)T\big) & \cdots & \varphi_k\big((n-1)T\big) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_0\big((n-m)T\big) & \cdots & \varphi_k\big((n-m)T\big) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(n) \\ a_1(n) \\ \vdots \\ a_k(n) \end{bmatrix}$$

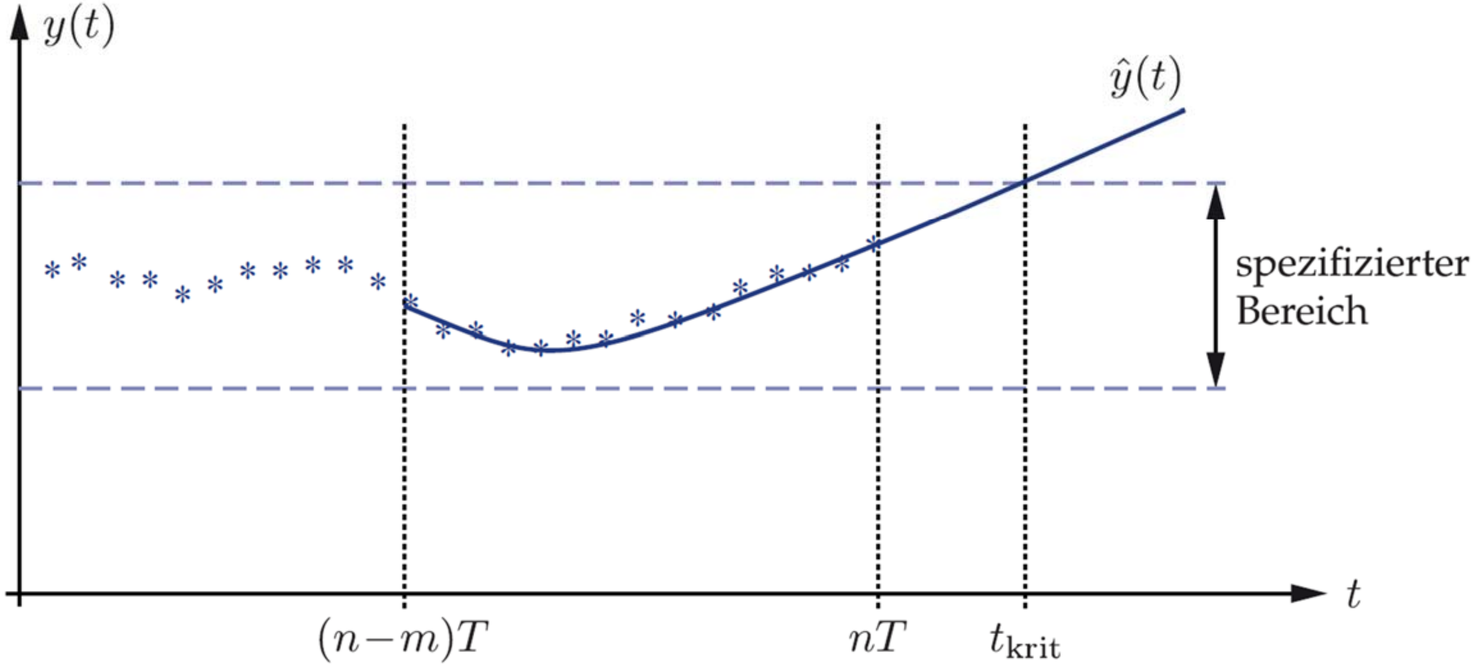
$$= \boldsymbol{\Phi}_n \boldsymbol{a}_n$$

- Bestimmung des Parametervektors $\boldsymbol{a}_n$ zu jedem Zeitpunkt nT als Pseudoinverse:

$$\boldsymbol{a}_n = \left(\boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_n\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_n$$

Statistische Prozessüberwachung

- Dadurch frühzeitige Erkennung von Veränderungen am Prozess durch Prädiktion künftiger Messwerte:



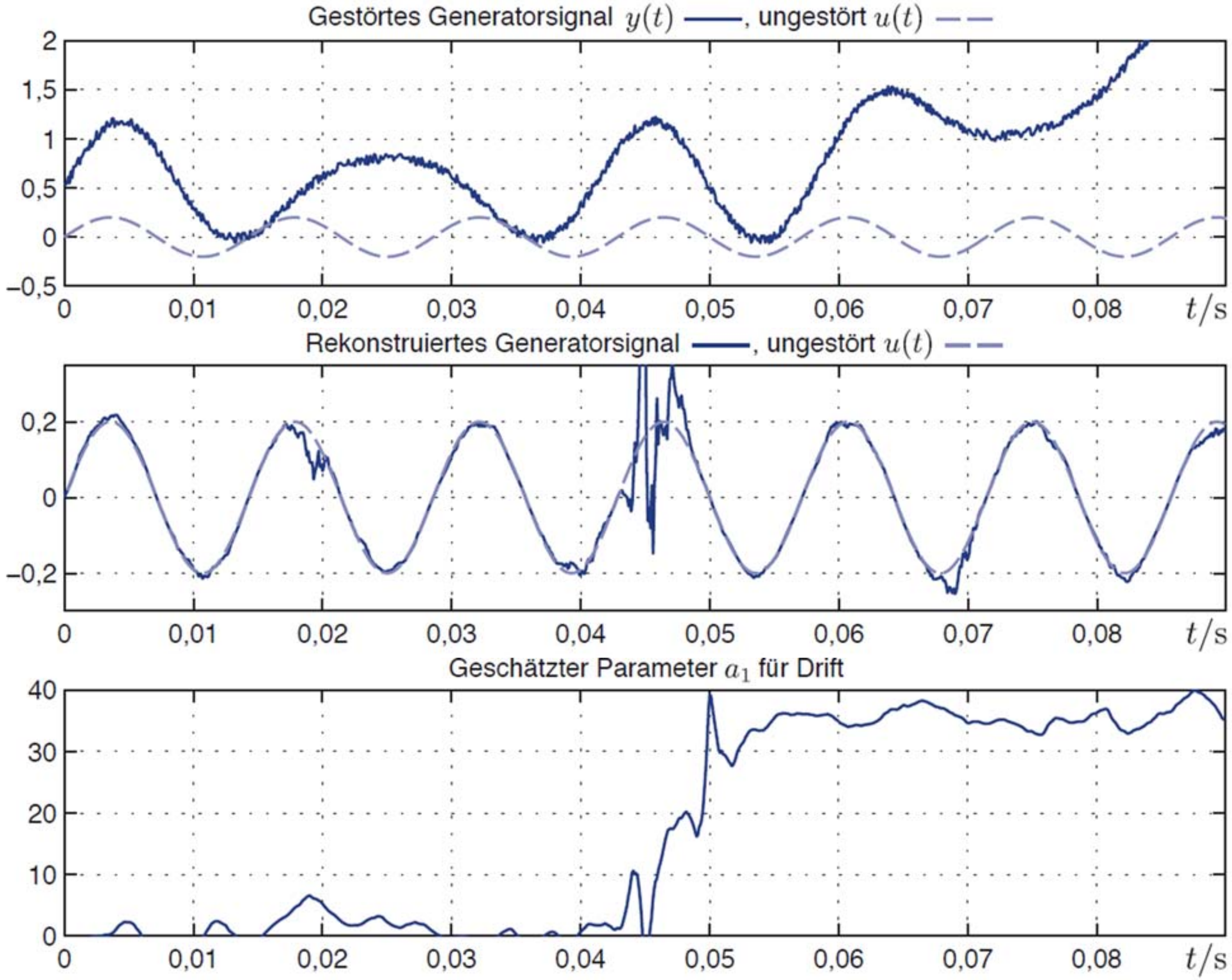
Statistische Prozessüberwachung

- Beispiel: Sinusgenerator
  - Gewünschte Ausgangsspannung: $u(t) = a_3 \cdot \sin\left(2\pi f_\mathrm{g} t\right)$
  - Vorüberlegungen: Ausgangsverstärker besitzt lineare Drift $a_1 t$ und Offset a_0, zusätzlich überlagerte harmonische Netzstörung mit $f_\mathrm{n} = 50\ \mathrm{Hz}$ und bekannter Phasenlage
  - Messbares Signal ist damit $\mathrm{y}(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \sin(2\pi f_\mathrm{n} t) + a_3 \sin\left(2\pi f_\mathrm{g} t\right) + \mathrm{e}(t)$
  - Systematische Störeinflüsse sind damit a_0, a_1, a_2
  - LS-Schätzer:

$$\widehat{\boldsymbol{y}}_n = \begin{bmatrix} 1 & nT & \sin(2\pi f_\mathrm{n} nT) & \sin\left(2\pi f_\mathrm{g} nT\right) \\ 1 & (n-1)T & \sin(2\pi f_\mathrm{n}(n-1)T) & \sin\left(2\pi f_\mathrm{g}(n-1)T\right) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \varphi_0\left((n-m)T\right) & \sin(2\pi f_\mathrm{n}(n-m)T) & \sin\left(2\pi f_\mathrm{g}(n-m)T\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$$

Statistische Prozessüberwachung

- Beispiel: Sinusgenerator
  - Pseudoinverse im Zeitpunkt nT zur Schätzung von $\boldsymbol{a}_n$:
    $\boldsymbol{a}_n = \left(\boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Phi}_n\right)^{-1} \boldsymbol{\Phi}_n^{\mathrm{T}} \boldsymbol{y}_n$
  - Drift ab $t = 0{,}045\ s$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Gesuchtes Messergebnis y ist oft nicht gleich dem Messwert x, sondern wird aus mehreren Messwerten x_i bestimmt:
  $\mathrm{y} = f(\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots, \mathrm{x}_n) = f(\mathbf{x})$
- Beispiele:
  - Stichprobenmittelwert $\mathrm{y} = \hat{\mathrm{x}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{x}_i$
  - Messung des Wirkungsgrades einer Maschine: dazu Messung der zugeführten Energie/Leistung (z. B. aus Messung von Volumenstrom und Heizwert) und der erhaltenen Energie/Leistung (z. B. aus Messung von Drehmoment und Winkelgeschwindigkeit)
- Einzelne Messwerte sind aber i. a. fehlerbehaftet und weichen um $\Delta\mathrm{x}_i = \mathrm{x}_i - x_{i0}$ vom richtigen Wert x_{i0} ab

- Fehlerfortpflanzungsgesetz: Ermittlung des Fehlers des Messergebnisses $\Delta\mathrm{y}$ aus den Einzelmessfehlern $\Delta\mathrm{x}_i$

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Taylor-Entwicklung (bei kleinen Messfehlern $|\Delta\mathrm{x}_i|$):

  $$\Delta\mathrm{y} = \mathrm{y} - y_0 = \sum_i \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_i}\right|_{\mathbf{x}_0} \Delta\mathrm{x}_i$$

  mit den Empfindlichkeiten $\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_i}$

- Falls nur Fehlergrenzen $\Delta\mathrm{x}_{\mathrm{g},i}$ (d. h. vereinbarte oder garantierte Höchstwerte für betragsmäßige Abweichungen) bekannt sind:
  Fehlergrenze des Messergebnisses:

  $$\Delta\mathrm{y}_\mathrm{g} = \sum_i \left|\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_i}\right|_{\mathbf{x}_0} \Delta\mathrm{x}_{\mathrm{g},i}$$

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Sonderfälle:
  - Linearkombination der Messwerte x_i:
    $\mathrm{y} = f(\mathbf{x}) = a_1\mathrm{x}_1 + a_2\mathrm{x}_2 + \cdots + a_n\mathrm{x}_n$
    Fehler des Messergebnisses:
    $$\Delta\mathrm{y} = \sum_i \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_i}\right|_{\mathbf{x}_0} \Delta\mathrm{x}_i = a_1\Delta\mathrm{x}_1 + a_2\Delta\mathrm{x}_2 + \cdots + a_n\Delta\mathrm{x}_n$$
    d. h. Gesamtfehler $\Delta\mathrm{y}$ ist Summe aller mit den Koeffizienten a_i gewichteten Einzelfehler $\Delta\mathrm{x}_i$

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Sonderfälle:
  - Multiplikative Verknüpfung der Messwerte x_i:

    $$\mathrm{y} = f(\mathbf{x}) = a_1 \mathrm{x}_1^{\alpha_1} \cdot a_2 \mathrm{x}_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_n \mathrm{x}_n^{\alpha_n}$$

    $$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_i} = a_1 \mathrm{x}_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot \alpha_i a_i \mathrm{x}_i^{\alpha_i - 1} \cdot \ldots \cdot a_n \mathrm{x}_n^{\alpha_n} = \mathrm{y} \cdot \frac{\alpha_i}{\mathrm{x}_i}$$

    Fehler des Messergebnisses:

    $$\Delta \mathrm{y} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{y} \cdot \frac{\alpha_i}{\mathrm{x}_i} \cdot \Delta \mathrm{x}_i = \mathrm{y} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta \mathrm{x}_i}{\mathrm{x}_i}$$

    Bevorzugte Rechnung mit dem relativen Fehler des Messergebnisses:

    $$\frac{\Delta \mathrm{y}}{\mathrm{y}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta \mathrm{x}_i}{\mathrm{x}_i}$$

    d. h. relativer Gesamtfehler $\frac{\Delta \mathrm{y}}{\mathrm{y}}$ ist Summe aller mit den Koeffizienten a_i gewichteten relativen Einzelfehler $\frac{\Delta \mathrm{x}_i}{\mathrm{x}_i}$

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Beschreibung zufälliger Fehler mittels Standardabweichung σ_x bzw. Varianz σ_x^2
- Annahme: betragsmäßig kleine, zufällige Messfehler $\Delta \mathrm{x}_i$:
  Erwartungswert des Messergebnisses wird nicht verändert: $\mu_\mathrm{y} \approx y_0$
- Dann lässt sich die Varianz σ_y^2 approximieren:

$$\begin{aligned}
\sigma_\mathrm{y}^2 &= \mathrm{E}\left\{\left(\mathrm{y}-\mu_\mathrm{y}\right)^2\right\} \\
&\approx \mathrm{E}\left\{\left(\sum_i \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_i}\right|_{\mathbf{x}_0} (\mathrm{x}_i - x_{i0})\right)\left(\sum_j \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_j}\right|_{\mathbf{x}_0} \left(\mathrm{x}_j - x_{j0}\right)\right)\right\} \\
&= \sum_i \sum_j \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_i}\right|_{\mathbf{x}_0} \cdot \left.\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathrm{x}_j}\right|_{\mathbf{x}_0} \mathrm{E}\left\{(\mathrm{x}_i - x_{i0})\left(\mathrm{x}_j - x_{j0}\right)\right\} \\
&\approx \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_i}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_j}(\mathbf{x}_0) \cdot C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}
\end{aligned}$$

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Varianz σ_y^2: $\sigma_\mathrm{y}^2 \approx \sum_i \sum_j \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_i}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_j}(\mathbf{x}_0) \cdot C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}$
- Für stochastisch unabhängige Messwerte x_i: $C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}_i}^2 \delta_i^j$:
  Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz:
  $$\sigma_\mathrm{y}^2 \approx \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_i}(\mathbf{x}_0)\right]^2 \sigma_{\mathrm{x}_i}^2$$
  d. h. die Varianz σ_y^2 des Messergebnisses ist eine gewichtete Addition der Varianzen der Einzelmesswerte $\sigma_{\mathrm{x}_i}^2$
- Für stochastisch abhängige Messwerte:
  $$\sigma_\mathrm{y}^2 \approx \sum_i \left[\frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_i}(\mathbf{x}_0)\right]^2 \sigma_{\mathrm{x}_i}^2 + \sum_i \sum_{j \neq i} \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_i}(\mathbf{x}_0) \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathrm{x}_j}(\mathbf{x}_0) \cdot \sigma_{\mathrm{x}_i} \sigma_{\mathrm{x}_j} \cdot \rho_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}$$
  mit Korrelationskoeffizient $\rho_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}$
- Siehe auch „Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement" (GUM), Vorlesung Fertigungsmesstechnik

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Falls Messergebnis y als Produkt oder Quotient gebildet wird:
  - Relativer Fehler (s. o.): $\frac{\Delta \mathrm{y}}{\mathrm{y}} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta \mathrm{x}_i}{\mathrm{x}_i}$
  - Relative Varianz:

$$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{y}}}{y_0}\right)^2 = \mathrm{E}\left\{\frac{\Delta \mathrm{y}^2}{y_0^2}\right\} = \mathrm{E}\left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{\Delta \mathrm{x}_i}{x_{i0}}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \, \mathrm{E}\left\{\frac{\Delta \mathrm{x}_i}{x_{i0}} \frac{\Delta \mathrm{x}_j}{x_{j0}}\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \alpha_i \alpha_j \frac{C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j}}{x_{i0} x_{j0}}$$

  - Für statistisch unabhängige Messwerte x_i: $C_{\mathrm{x}_i \mathrm{x}_j} = \sigma_{\mathrm{x}_i}^2 \delta_i^j$:
    Gauß'sches Fehlerfortpflanzungsgesetz für die relative Varianz:

$$\left(\frac{\sigma_{\mathrm{y}}}{y_0}\right)^2 \approx \sum_i \alpha_i^2 \left(\frac{\sigma_{\mathrm{x}_i}}{x_{i0}}\right)^2$$

4.6 Fehlerfortpflanzung

- Beispiel: Bestimmung der Masse aus Volumen
  - Masse einer in einem zylindrischen Tank (Durchmesser d, Füllhöhe h) gelagerten Flüssigkeit (Dichte ρ):
    $$\mathrm{m} = \pi \left(\frac{\mathrm{d}}{2}\right)^2 \mathrm{h}\,\rho$$
  - Messergebnis wird als Produkt erhalten mit Exponenten: $\alpha_\mathrm{d} = 2,\ \alpha_\mathrm{h} = 1,\ \alpha_\rho = 1$
  - Relative Varianz: $\left(\frac{\sigma_\mathrm{y}}{y_0}\right)^2 \approx \sum_i \alpha_i^2 \left(\frac{\sigma_{\mathrm{x}_i}}{x_{i0}}\right)^2$:
    $$\left(\frac{\sigma_\mathrm{m}}{\mathrm{m}}\right)^2 \approx 4\left(\frac{\sigma_\mathrm{d}}{\mathrm{d}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\mathrm{h}}{\mathrm{h}}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_\rho}{\rho}\right)^2$$
  - Lässt sich z. B. der Durchmesser auf $\frac{\sigma_\mathrm{d}}{\mathrm{d}} = 1\%$, die Höhe auf $\frac{\sigma_\mathrm{h}}{\mathrm{h}} = 0{,}5\%$, die Dichte auf $\frac{\sigma_\rho}{\rho} = 0{,}9\%$ genau bestimmen, folgt für die relative Standardabweichung der Masse:
    $$\frac{\sigma_\mathrm{m}}{\mathrm{m}} = \sqrt{4 + 0{,}25 + 0{,}81}\% = 2{,}2\%$$