

6. Stochastische Signale

6. Stochastische Signale

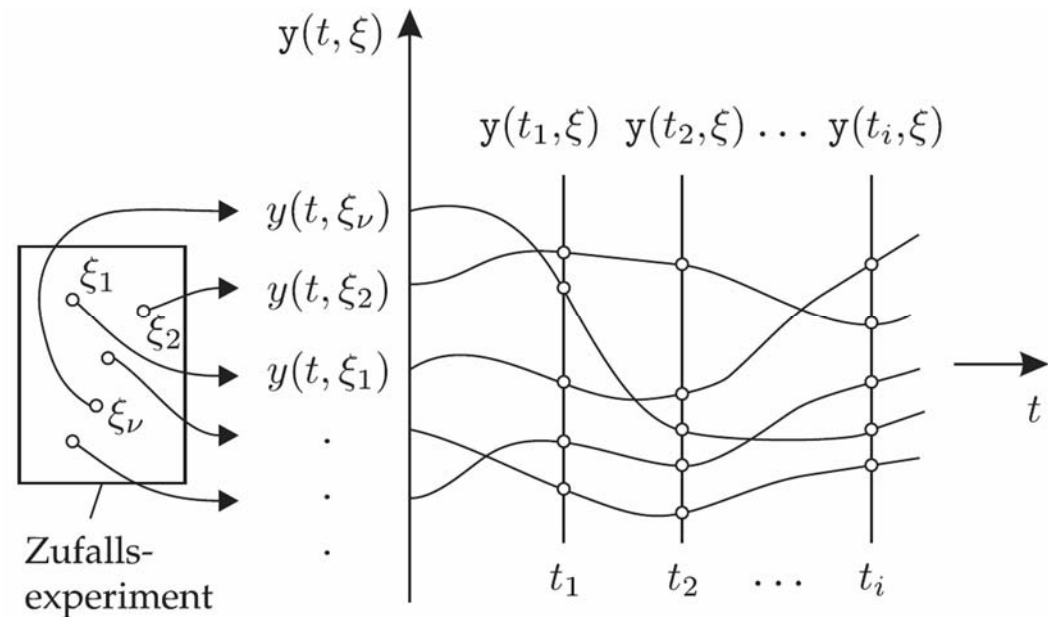
- 6.1 Stochastische Prozesse
- 6.2 Korrelationsfunktionen
- 6.3 Korrelationsmesstechnik
- 6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale
- 6.5 Systemidentifikation
- 6.6 Signaldetektion
- 6.7 Wiener-Filter

6 Stochastische Signale

- Bisher (Kap. 4): Betrachtung von einzelnen Messwerten stationärer Messgrößen u
- Jetzt: Betrachtung von Funktionsverläufen $u(t)$
- Für jeden Zeitpunkt t wird also ein zufälliger Messfehler erwartet: Rauschen
- Zufällige Signale $u(t)$: Angabe eines Funktionsverlaufs nicht möglich, damit lassen sich auch herkömmliche Rechen- und Analysemethoden (z. B. Interpolation, Addition, Verzögerung, Ableitung, Integration, Fourier-, Laplace-, Faltungsintegrale) nicht anwenden
- Benötigt wird daher eine geeignete Beschreibung solcher Zufallssignale: Konzept der **stochastischen Prozesse**, Beschreibung mittels Erwartungswerten, Korrelationsfunktionen, Leistungsdichtespektren

6.1 Stochastische Prozesse

- Ziel: Beschreibung einer Vielzahl von möglichen Signalen mit bestimmten gemeinsamen Eigenschaften (und zufälligen Signalanteilen)
- Definition: **Stochastischer Prozess**
Ein stochastischer Prozess $y(t, \xi)$ besteht aus einem Zufallsexperiment und einer Zuordnung von deterministischen Funktionen $y(t, \xi_\nu)$ (den sog. Musterfunktionen oder Realisierungen) zu den Elementarereignissen ξ_ν des Zufallsexperiments. Für jeden festen Zeitpunkt $t = t_i$ geht der stochastische Prozess $y(t, \xi)$ in eine Zufallsvariable $y(t_i, \xi)$ über, die sich mit Hilfe einer Wahrscheinlichkeitsverteilung beschreiben lässt.



6.1 Stochastische Prozesse

- Ein stochastischer Prozess $y(t, \xi)$ hat zwei Parameter, die jeweils als fest oder variable betrachtet werden können:
 - $\xi = \xi_v$ fest, t variabel: $y(t, \xi_v)$ ist Realisierung des stochastischen Prozesses und damit deterministische Musterfunktion
 - ξ variabel, $t = t_i$ fest: $y(t_i, \xi)$ ist Zufallsvariable, die jedem Ereignis ξ_v den Funktionswert der Musterfunktion $y(t, \xi_v)$ zuordnet
 - $\xi = \xi_v$ fest, $t = t_i$ fest: $y(t_i, \xi_v)$ ist ein Zahlenwert
 - ξ variabel, t variabel: $y(t, \xi)$ ist ein stochastischer Prozess, d. h. eine Schar von Musterfunktionen

Elementarereignis ξ	Zeit t	
	fest	variabel
fest	Zahlenwert $y(t_i, \xi_v)$	Musterfunktion $y(t, \xi_v)$
variabel	Zufallsvariable $y(t_i, \xi)$	Zufallsprozess $y(t, \xi)$

6.1 Stochastische Prozesse

- Zufallsprozess $y(t, \xi)$ kann also als Familie von Zufallsvariable (für unterschiedliche Zeiten t) interpretiert werden, daher können alle Gesetze für Zufallsvariablen der Wahrscheinlichkeitstheorie angewendet werden
- Im Folgenden Kurzschreibweise: $y(t)$

6.1 Stochastische Prozesse

- Beispiel: Rauschspannung
 - Thermisches Rauschen an einem Widerstand R , daher ist die Spannung $u(t)$ am Widerstand verrauscht
 - Auch aus Kenntnis von $i(t)$ kann $u(t)$ nicht exakt bestimmt werden
 - $u(t)$ ist somit ein stochastischer Prozess mit unendlich vielen unterschiedlichen Musterfunktionen
- Beispiel: Harmonische Schwingung mit zufälliger Phase
 - Zufallsprozess $y(t)$ mit den Musterfunktionen: $y_i(t) = \sin(\omega t + \varphi_i)$, d. h. Kreisfrequenz ω ist fest, aber Phase φ_i ist zufällig
 - Für feste Zeiten t_0 : $y(t_0)$ ist Zufallsvariable, die alle möglichen Amplitudenwerte der Sinusschwingung annehmen kann
 - Jede einzelne Musterfunktion $y_i(t)$: deterministische Funktion

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

- Analoge Definition wie für Zufallsvariablen (siehe Kap. 4.1), jetzt aber mit Zeitbezug
- Definition: **Wahrscheinlichkeitsverteilung**
Die Wahrscheinlichkeitsverteilung (kurz: Verteilung)
$$F_{y(t)}(y) = P(y(t) \leq y)$$
eines stochastischen Prozesses $y(t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit welcher der Funktionswert von $y(t)$ zum Zeitpunkt t kleiner oder gleich y ist.
- Definition: **Wahrscheinlichkeitsdichte**
Die Wahrscheinlichkeitsdichte (kurz: Dichte) $f_{y(t)}(y)$ eines stochastischen Prozesses $y(t)$ ist definiert durch
$$f_{y(t)}(y) = \frac{dF_{y(t)}(y)}{dy} \text{ mit } \int_{-\infty}^{\infty} f_{y(t)}(y) dy = 1$$
- Sowohl Wahrscheinlichkeitsverteilung $F_{y(t)}(y)$ als auch Wahrscheinlichkeitsdichte $f_{y(t)}(y)$ hängen i. a. von der Zeit ab

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definitionen lassen sich auf mehrdimensionale stochastische Prozesse erweitern
- Hier Beschränkung auf zweidimensionale stochastische Prozesse für zwei verschiedene Zufallsprozesse $x(t)$ und $y(t)$
- Bei Betrachtung von zwei festen Zeitpunkten t_1 und t_2 : Verbundverteilung wie für Zufallsvariablen

- Definition: **Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung zweier Zufallsprozesse**

Die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung oder gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = P(x(t_1) \leq x \cap y(t_2) \leq y)$$

zweier stochastischer Prozesse gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit welcher der Funktionswert von $x(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1 kleiner oder gleich x ist und der Funktionswert von $y(t_2)$ zum Zeitpunkt t_2 kleiner oder gleich y ist

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definition: **Verbundwahrscheinlichkeitsdichte zweier Zufallsprozesse**

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte oder gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte zweier stochastischer Prozesse $x(t), y(t)$ ist

$$f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{x(t_1)y(t_2)}(x, y)}{\partial x \partial y}$$

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

- Andere Möglichkeit der Definition einer Verbundwahrscheinlichkeitsdichte: Betrachtung von zwei festen Zeitpunkten t_1 und t_2 für einen einzigen stochastischen Prozess $x(t)$:

- Definition: **Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung eines Zufallsprozesses**

Die Verbundwahrscheinlichkeitsverteilung oder gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung

$$F_{x(t_1)x(t_2)}(x_1, x_2) = P(x(t_1) \leq x_1 \cap x(t_2) \leq x_2)$$

eines stochastischen Prozesses $x(t)$ gibt die Wahrscheinlichkeit P an, mit welcher der Funktionswert von $x(t_1)$ zum Zeitpunkt t_1 kleiner oder gleich x_1 ist und der Funktionswert von $x(t_2)$ zum Zeitpunkt t_2 kleiner oder gleich x_2 ist

Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

- Definition: **Verbundwahrscheinlichkeitsdichte eines Zufallsprozesses**

Die Verbundwahrscheinlichkeitsdichte oder gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichte eines stochastischen Prozesses $x(t)$ ist

$$f_{x(t_1)x(t_2)}(x_1, x_2) = \frac{\partial^2 F_{x(t_1)x(t_2)}(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

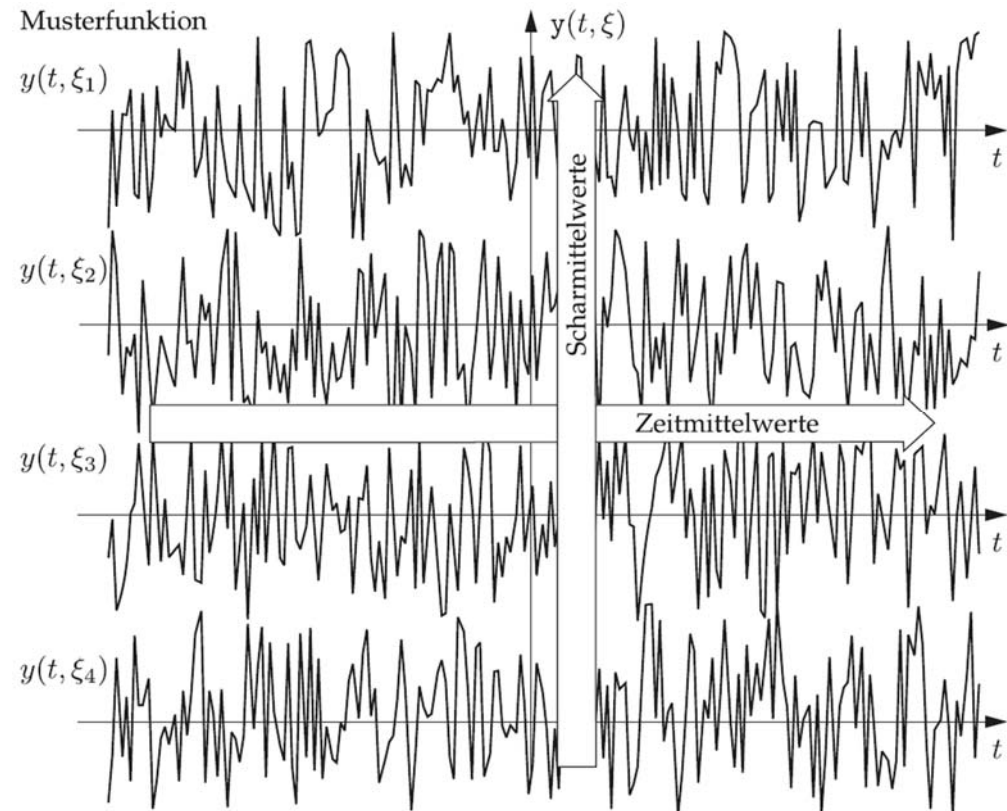
Wahrscheinlichkeitsverteilung und Wahrscheinlichkeitsdichte

- Anpassung des Begriffs der stochastischen Unabhängigkeit für stochastische Prozesse:
- Definition: **Stochastische Unabhängigkeit**
Zwei stochastische Prozesse $x(t)$, $y(t)$ werden als unabhängig bezeichnet, wenn für alle Zeiten t_1 , t_2 gilt:
$$F_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = F_{x(t_1)}(x) \cdot F_{y(t_2)}(y) \text{ bzw.}$$
$$f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = f_{x(t_1)}(x) \cdot f_{y(t_2)}(y)$$
- Stochastische Unabhängigkeit lässt sich (wie bei Zufallsvariablen) empirisch höchstens näherungsweise nachweisen
- Bei Modellierung von Messsystemen meist (annähernde) Annahme der stochastischen Unabhängigkeit der beteiligten Größen,
Begründung: Unterschiedliche Ursachen der stochastischen Signale
- Vorteil der Unabhängigkeitsannahme: vereinfachte Modellierung und Analyse

6.1 Stochastische Prozesse

Schar- und Zeitmittelwerte

- Stochastische Prozesse $y(t, \xi)$ sind Funktionen von zwei Parametern t und ξ
- Daher zwei mögliche Vorgehensweisen zur Bildung von Mittelwerten:
 - Erwartungswert oder Scharmittelwert:
Mittelwertbildung über alle Musterfunktionen $y(t, \xi_1)$, $y(t, \xi_2)$, ... bei festem t , hängt i. a. von der Zeit t ab
 - Zeitmittelwert:
Mittelwertbildung über den Parameter t einer einzigen Musterfunktion $y(t, \xi_v)$, ist i. a. für unterschiedliche Musterfunktion verschieden
- I. a. unterschiedliche Ergebnisse der beiden Vorgehensweisen



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.

Momente der Statistik 1. Ordnung

- Erwartungswerte stochastischer Prozesse: immer Erwartungswertbildung über alle Musterfunktionen $y(t, \xi_1), y(t, \xi_2), \dots$ bei festem $t = t_i$

- Definition: **Moment eines stochastischen Prozesses**

Das m -te Moment eines stochastischen Prozesses $x(t)$ ist definiert zu:

$$\mu_{y,m}(t) = E\{y^m(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} y^m \cdot f_{y(t)}(y) dy$$

- Erstes Moment $\mu_{y,1}(t) = \mu_y(t)$ ist der zeitabhängige Mittelwert oder Scharmittelwert

Momente der Statistik 1. Ordnung

- Definition: **Zentrales Moment eines stochastischen Prozesses**

Das m -te zentrale Moment eines stochastischen Prozesses $y(t)$ ist definiert zu:

$$E \left\{ \left(y(t) - \mu_y(t) \right)^m \right\} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(y - \mu_y(t) \right)^m \cdot f_{y(t)}(y) \, dy$$

- Zweites zentrales Moment: zeitabhängige Varianz $\sigma_y^2(t)$
- Praktisches Problem: Erwartungswertbildung über alle Musterfunktionen ist nicht durchführbar (man würde viele Musterfunktionen und mehrere gleichartige Systeme zur Signalauswertung benötigen)
- Unter bestimmten Voraussetzungen (sog. ergodische Prozesse, siehe unten) kann der Scharmittelwert durch den Zeitmittelwert ersetzt werden, dadurch Vereinfachung der Verarbeitung

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Statistik 2. Ordnung: Betrachtung von Zufallsprozessen zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2
- Bei Beschränkung auf einen einzigen stochastischen Prozess $y(t)$: wichtigste Momente der Statistik 2. Ordnung: Autokorrelationsfunktion (2. Moment der Statistik 2. Ordnung) und Autokovarianzfunktion (2. zentrales Moment der Statistik 2. Ordnung)

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Definition: **Autokorrelationsfunktion**

Die Autokorrelationsfunktion (AKF) eines stochastischen Prozesses $y(t)$ ist definiert zu:

$$r_{yy}(t_1, t_2) = E\{y(t_1) y^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} y_1 y_2^* \cdot f_{y(t_1)y(t_2)}(y_1, y_2) dy_1 dy_2$$

- Definition: **Autokovarianzfunktion**

Die Autokovarianzfunktion (AKV) eines stochastischen Prozesses $y(t)$ ist definiert zu:

$$\begin{aligned} C_{yy}(t_1, t_2) &= E\left\{\left(y(t_1) - \mu_y(t_1)\right)\left(y(t_2) - \mu_y(t_2)\right)^*\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left(y_1 - \mu_y(t_1)\right)\left(y_2 - \mu_y(t_2)\right)^* \cdot f_{y(t_1)y(t_2)}(y_1, y_2) dy_1 dy_2 \end{aligned}$$

mit $\mu_y(t) = E\{y(t)\}$

- Es gilt: $C_{yy}(t_1, t_2) = r_{yy}(t_1, t_2) - \mu_y(t_1) \mu_y^*(t_2)$

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Bei Betrachtung von zwei unterschiedlichen Zufallsprozessen zu zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 :
wichtigste gemeinsame Momente der Statistik 2. Ordnung:
Kreuzkorrelationsfunktion und Kreuzkovarianzfunktion

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Definition: **Kreuzkorrelationsfunktion**

Die Kreuzkorrelationsfunktion (KKF) zweier stochastischer Prozesse $x(t)$ und $y(t)$ ist definiert zu:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) y^*(t_2)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x y^* \cdot f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) dx dy$$

- Definition: **Kreuzkovarianzfunktion**

Die Kreuzkovarianzfunktion (KKV) zweier stochastischer Prozesse $x(t)$ und $y(t)$ ist definiert zu:

$$\begin{aligned} C_{xy}(t_1, t_2) &= E\left\{\left(x(t_1) - \mu_x(t_1)\right) \left(y(t_2) - \mu_y(t_2)\right)^*\right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x(t_1)) (y - \mu_y(t_2))^* \cdot f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) dx dy \end{aligned}$$

mit $\mu_x(t_1) = E\{x(t_1)\}$, $\mu_y(t_2) = E\{y(t_2)\}$

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Bedeutung von KKF und KKV: Durch Betrachtung der Prozesse zu unterschiedlichen Zeitpunkten können Aussagen über die Zufälligkeit der Prozesse und zur Ähnlichkeit zweier Prozesse gemacht werden, siehe Kap. 6.2, 6.3
- Definition: **Unkorreliertheit**
Zwei Zufallsprozesse $x(t)$ und $y(t)$ heißen unkorreliert, wenn für alle Zeiten t_1 und t_2 gilt:
 $E\{x(t_1) y^*(t_2)\} = E\{x(t_1)\} \cdot E\{y^*(t_2)\}$ bzw. $C_{xy}(t_1, t_2) = 0$,
beide Aussagen sind äquivalent
- Sind zwei stochastische Prozesse unabhängig, dann sind sie auch unkorreliert
- Die Umkehrung gilt nur, falls beide Zufallsprozesse normalverteilt sind

Momente der Statistik 2. Ordnung

- Definition: **Orthogonalität**

Zwei Zufallsprozesse $x(t)$ und $y(t)$ heißen zueinander orthogonal, wenn für alle Zeiten t_1 und t_2 gilt:

$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) y^*(t_2)\} = 0$$

Stationäre Prozesse

- Im Allgemeinen sind die Wahrscheinlichkeitsverteilungen und -dichten eines stochastischen Prozesses zeitabhängig, damit sind auch die Momente Funktionen der Zeit t , Korrelationsfunktionen und Kovarianzfunktionen sind zweidimensionale Funktionen der Zeiten t_1 und t_2
- Wesentliche Vereinfachung, falls sich die statistischen Eigenschaften der Prozesse mit der Zeit t nicht ändern
- Definition: **Stationarität**
Ein stochastischer Prozess heißt (streng) stationär, wenn seine statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind
- Definition: **Verbundene Stationarität zweier Zufallsprozesse**
Zwei stochastische Prozesse heißen verbunden stationär, wenn beide stationär sind und zusätzlich ihre gemeinsamen statistischen Eigenschaften invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind

Stationäre Prozesse

- Dann verschwinden Zeitabhängigkeiten der Wahrscheinlichkeitsdichten und Momente:
$$F_{y(t)}(y) = F_{y(t-t_0)}(y) = F_y(y) \quad \text{bzw.} \quad f_{y(t)}(y) = f_{y(t-t_0)}(y) = f_y(y)$$
- Abhängigkeiten von zwei Zeitpunkten t_1 und t_2 vereinfachen sich zu Abhängigkeiten von der Differenz $\tau = t_1 - t_2$, z. B.
$$f_{y(t_1)y(t_2)}(y_1, y_2) = f_{y(t_1+t_0)y(t_2+t_0)}(y_1, y_2) = f_{y(t+\tau)y(t)}(y_1, y_2)$$
- Bei zwei verbunden stationären Prozessen zusätzlich:
$$f_{x(t_1)y(t_2)}(x, y) = f_{x(t_1+t_0)y(t_2+t_0)}(x, y) = f_{x(t+\tau)y(t)}(x, y)$$
- Momente der Statistik 1. Ordnung werden unabhängig von der Zeit:
$$\mu_{y,m}(t) = E\{y^m(t)\} = \mu_{y,m}$$
- Momente der Statistik 2. Ordnung sind nur noch von der Zeitdifferenz τ abhängig:
$$r_{yy}(t_1, t_2) = E\{y(t_1) y^*(t_2)\} = r_{yy}(\tau)$$
$$r_{xy}(t_1, t_2) = E\{x(t_1) y^*(t_2)\} = r_{xy}(\tau)$$

Stationäre Prozesse

- Definition: **Schwache Stationarität**

Ein stochastischer Prozess $y(t)$ heißt schwach stationär, wenn sein Erwartungswert $\mu_y(t)$ und seine Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(t_1, t_2)$ invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit sind:

$$\mu_y(t) = \mu_y = \text{const.},$$

$$r_{yy}(t_1, t_2) = r_{yy}(t_1 - t_2) = r_{yy}(\tau)$$

- Wahrscheinlichkeitsverteilung und -dichte müssen hier also nicht notwendigerweise invariant sein
- Autokovarianzfunktion $C_{yy}(t_1, t_2) = r_{yy}(\tau) - |\mu_y|^2$ und Varianz $\sigma_y^2 = C_{yy}(0)$ sind dann ebenfalls invariant gegenüber Verschiebungen der Zeit

Stationäre Prozesse

- Streng stationäre Prozesse sind stets auch schwach stationär
- Umkehrung gilt nur für normalverteilte Prozesse, da diese durch Erwartungswert und Autokovarianzfunktion vollständig charakterisiert sind

Ergodische Prozesse

- Bisher: Bestimmung von (Schar-)Mittelwert $\mu_y(t)$ und Momenten $\mu_{y,m}(t)$ für einen festen Zeitpunkt t durch Integration über alle möglichen Musterfunktionen $y(t, \xi_\nu)$, also i. a. zeitabhängige Größen
- Integration einer Musterfunktion $y(t, \xi_0)$ ergibt Zeitmittelwert, der i. a. für alle Musterfunktionen verschieden ist
- Definition: **Ergodizität**
Ein Zufallsprozess $y(t)$ heißt (streng) ergodisch, wenn die Zeitmittelwerte einer beliebigen Musterfunktion $y(t, \xi_\nu)$ mit den Scharmittelwerten μ_y des Prozesses übereinstimmt
- Ergodische Prozesse sind stets stationär (da z. B. Mittelwerte $\mu_y(t) = \mu_y$ für alle Zeiten t mit den Zeitmittelwerten übereinstimmen müssen)

Ergodische Prozesse

- Definition: **Schwache Ergodizität**

Ein Zufallsprozess $y(t)$ heißt schwach ergodisch, wenn die anhand einer beliebigen Musterfunktion $y(t, \xi_v)$ berechneten Zeitmittelwerte für das erste Moment und für die Autokorrelationsfunktion mit den entsprechenden Scharmittelwerten μ_y und r_{yy} des Prozesses übereinstimmen:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t, \xi_v) dt = E\{y(t)\} = \mu_y$$
$$\underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t + \tau, \xi_v) y^*(t, \xi_v) dt}_{\text{Zeitmittelung}} = \underbrace{E\{y(t + \tau) y^*(t)\}}_{\text{Mittelung über die Schar}} = r_{yy}(\tau)$$

- Das bedeutet, dass bei einem schwach stationären Prozess jede Musterfunktion den ganzen Prozess bezüglich der ersten beiden Momente der Statistik 1. und 2. Ordnung vertreten kann

Ergodische Prozesse

- Praktische Bedeutung der Ergodizität: Untersuchung des Prozesses kann auf den zeitlichen Verlauf einer einzigen Musterfunktion $y(t, \xi_v)$ beschränkt werden
- Mathematisch strenger Nachweis der Ergodizität ist allerdings meist nicht möglich, meist wird die Ergodizität nur angenommen

Ergodische Prozesse

- Berechnungsregeln für ergodische Prozesse:

- **Moment eines ergodischen Zufallsprozesses:**

Das m -te Moment eines ergodischen Zufallsprozesses $y(t)$ lässt sich als Zeitmittelwert einer beliebigen Musterfunktion $y(t, \xi_v)$ berechnen:

$$\mu_{y,m} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y^m(t, \xi_v) dt$$

- **Kreuzkorrelationsfunktion zweier ergodischer Zufallsprozesse:**

Die Kreuzkorrelationsfunktion zweier ergodischer Zufallsprozesse $x(t)$ und $y(t)$ mit den (beliebigen) Musterfunktionen $x(t, \xi_k)$ und $y(t, \xi_v)$ lässt sich als Zeitmittelwert berechnen:

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau, \xi_k) y^*(t, \xi_v) dt$$

- Für $x(t, \xi_k) = y(t, \xi_v)$ resultiert die Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$

Ergodische Prozesse

- **Kreuzkovarianzfunktion zweier ergodischer Zufallsprozesse:**

Die Kreuzkovarianzfunktion zweier ergodischer Zufallsprozesse $x(t)$ und $y(t)$ mit den (beliebigen) Musterfunktionen $x(t, \xi_\kappa)$ und $y(t, \xi_\nu)$ lässt sich als Zeitmittelwert berechnen:

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t + \tau, \xi_\kappa) - \mu_x) (y(t, \xi_\nu) - \mu_y)^* dt$$

- Für $x(t, \xi_\kappa) = y(t, \xi_\nu)$ resultiert die Autokovarianzfunktion $C_{xx}(\tau)$
- In der Praxis: Grenzübergang $T \rightarrow \infty$ lässt sich nicht durchführen, daher Auswertung der Integrale über ein endliches Zeitintervall $[-T, T]$
- Man erhält damit nur (i. a. zeitabhängige) Schätzwerte für die Momente des Prozesses, z. B. für den Mittelwert:
Gleitender Mittelwert (*moving average*):

$$\hat{\mu}_y(t) = \overline{y(t)} = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} y(\tau) d\tau$$

Ergodische Prozesse

- Beispiel: Schwach stationärer, ergodischer Prozess
 - Zufallsprozess $y(t)$ mit den Musterfunktionen: $y_i(t) = \sin(\omega t + \varphi_i)$, d. h. Kreisfrequenz ω ist fest, aber Phase φ_i ist zufällig
 - Phasenwinkel φ_i seien gleichverteilt
 - Prüfung auf schwache Stationarität: Erwartungswert und Autokorrelationsfunktion müssen unabhängig von der Zeit t sein:

- Erwartungswert: $\mu_y(t) = 0$, da Phase gleichverteilt ist

- Autokorrelationsfunktion $r_{yy}(t_1, t_2)$:

$$\begin{aligned} r_{yy}(t_1, t_2) &= E\{\sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\omega t_2 + \varphi)\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\omega t_2 + \varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (\cos(\omega t_1 - \omega t_2) - \underbrace{\cos(\omega t_1 + \omega t_2 + 2\varphi)}_{\int d\varphi = 0}) \, d\varphi \\ &= \frac{1}{2} (\cos(\omega t_1 - \omega t_2)) = \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) \end{aligned}$$

ok!

Ergodische Prozesse

- Beispiel: Schwach stationärer, ergodischer Prozess
 - Prüfung auf schwache Ergodizität: Scharmittelwerte und Zeitmittelwerte für Erwartungswert und Autokorrelationsfunktion müssen übereinstimmen:
 - Erwartungswert:
Scharmittelwert: $\mu_y(t) = \mu_y = 0$,
Zeitmittelwert: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(\omega t + \varphi_i) dt = 0$

Ergodische Prozesse

- Beispiel: Schwach stationärer, ergodischer Prozess
- Prüfung auf schwache Ergodizität:

- Autokorrelationsfunktion: Zeitmittelwert:

$$\begin{aligned}\overline{y_i(t + \tau)y_i^*(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t + \tau, \xi_k) y^*(t, \xi_k) dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(\omega t + \omega \tau + \varphi_i) \sin(\omega t + \varphi_i) dt \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \left[\int_{-T}^T \cos(\omega \tau) dt - \int_{-T}^T \cos(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi_i) dt \right] \\&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T} \left[2T \cos(\omega \tau) - \frac{1}{2\omega} \sin(2\omega t + \omega \tau + 2\varphi_i) \Big|_{-T}^T \right] \\&= \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) - \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{4T\omega} [\sin(2\omega T + \omega \tau + 2\varphi_i)]}_{= 0} \\&= \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) = r_{yy}(\tau)\end{aligned}$$

Ergodische Prozesse

- Beispiel: Schwach stationärer, nicht ergodischer Prozess
 - Zufallsprozess $y(t)$ mit den Musterfunktionen:
 $y_i(t) = a_i \sin(\omega t + \varphi_i)$,
d. h. Kreisfrequenz ω ist fest, aber Amplitude a_i und Phase φ_i sind zufällig und voneinander statistisch unabhängig
 - Amplitude a_i und Phasenwinkel φ_i seien gleichverteilt
 - Prüfung auf schwache Stationarität:
 - Erwartungswert: $\mu_y(t) = \mu_y = 0$, da Phase gleichverteilt ist
 - Autokorrelationsfunktion (Berechnung siehe letztes Beispiel):
$$\begin{aligned} r_{yy}(t_1, t_2) &= E\{a \sin(\omega t_1 + \varphi) a \sin(\omega t_2 + \varphi)\} \\ &= E\{a^2\} E\{\sin(\omega t_1 + \varphi) \sin(\omega t_2 + \varphi)\} \\ &= E\{a^2\} \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) \end{aligned}$$
- d. h. Prozess ist schwach stationär

Ergodische Prozesse

- Beispiel: Schwach stationärer, nicht ergodischer Prozess
- Prüfung auf schwache Ergodizität:
 - Autokorrelationsfunktion: Zeitmittelwert (siehe letztes Beispiel):

$$\begin{aligned}\overline{y_i(t + \tau)y_i^*(t)} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t + \tau, \xi_k) y^*(t, \xi_k) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T a_i^2 \sin(\omega t + \omega \tau + \varphi_i) \sin(\omega t + \varphi_i) dt \\ &= a_i^2 \frac{1}{2} \cos(\omega \tau) \neq r_{yy}(\tau) = E\{a^2\} \frac{1}{2} \cos(\omega \tau)\end{aligned}$$

d. h. der Prozess ist nicht ergodisch, da sich die Schar- und Zeitmittelwerte unterscheiden

Signalklassen

- Im Folgenden: Berechnung von Korrelationsfunktionen aus konkret gegebenen Funktionen
- Berechnung der Korrelationsfunktionen erfordert im Prinzip Integration über $(-\infty, \infty)$ (siehe 6.1)
- Zur Berechnung im Folgenden Unterscheidung von drei Signalklassen

Signalklassen

- Definition: **Energiesignal**

Ein beschränktes, stückweise stetiges Signal $x(t)$ nennt man Energiesignal, wenn gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

- Bezeichnung Energiesignal: Integral lässt sich als physikalische Energie interpretieren
- Voraussetzung für Energiesignale: $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0$
- Typische Vertreter von Energiesignalen:
Impulsantworten stabiler LTI-Systeme, Fensterfunktionen

Signalklassen

- Definition: **Leistungssignal**

Ein beschränktes, stückweise stetiges Signal $x(t)$, für welches das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt$$

divergiert (d. h. das Signal besitzt unendliche Energie), nennt man Leistungssignal, wenn der Grenzwert

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |x(t)|^2 dt < \infty$$

existiert

- Bezeichnung Leistungssignal: Integral lässt sich als mittlere physikalische Leistung interpretieren (ist bei Energiesignalen null)
- Typische Vertreter von Leistungssignalen: amplitudenbeschränkte periodische Signale

Signalklassen

- Definition: **Sonstige Signale**

Zeitfunktionen $x(t)$, für welche die Integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt \text{ und } \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t) dt$$

nicht existieren, welche nicht stückweise stetig oder nicht beschränkt sind, werden als sonstige Signale bezeichnet

- Beispiele eines sonstigen Signals:
Exponentialfunktionen
- Sonstige Signale besitzen in der Praxis geringe Relevanz, daher im Folgenden Beschränkung auf Energie- und Leistungssignale

Signalklassen

- Welcher Signalklasse gehören die Musterfunktionen ergodischer Prozesse an?
 - Siehe Beispiel oben: Harmonische Schwingung mit zufälliger Phase $y_i(t) = a_i \sin(\omega t + \varphi_i)$ ist ergodischer Prozess, d. h. Leistungssignale können Musterfunktionen ergodischer Prozesse sein
 - Energiesignale können keine Musterfunktionen ergodischer Prozesse sein, da sie nicht stationär sind:
$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} x(t) = 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \mu_{x,m}(t) = 0$$
d. h. Energiesignale verschwinden für $t \rightarrow \infty$, daher verschwinden auch ihre Momente der Statistik 1. Ordnung für $t \rightarrow \infty$
Zeitunabhängigkeit der Momente ist daher i. a. verletzt

Signalklassen

- Funktionenräume für Energie- und Leistungssignale:
Gesucht sind unitäre Funktionenräume, d. h. Räume mit Norm $\|x(t)\|$ und Innenprodukt $\langle x(t), y(t) \rangle$, für die gilt: $\|x(t)\| = \sqrt{\langle x(t), x(t) \rangle}$

- Definition: **Norm und Innenprodukt von Energiesignalen**

Die Norm eines Energiesignals $x(t)$ ist

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt} < \infty,$$

das Innenprodukt zweier Energiesignale $x(t)$ und $y(t)$ ist

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) y^*(t) dt$$

Signalklassen

- Definition: **Norm und Innenprodukt von Leistungssignalen**

Die Norm eines Leistungssignals $x(t)$ ist

$$\|x(t)\| = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) x^*(t) dt} < \infty,$$

das Innenprodukt zweier Leistungssignale $x(t)$ und $y(t)$ ist

$$\langle x(t), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y^*(t) dt$$

Signalklassen

- In beiden Funktionenräumen gilt die **Schwarz'sche Ungleichung**:
$$|\langle x(t), y(t) \rangle|^2 \leq \|x(t)\|^2 \cdot \|y(t)\|^2$$

(Beweis siehe Literatur oder Vorlesung „Signale und Systeme“)
- Das Gleichheitszeichen gilt, wenn die Signale $x(t)$ und $y(t)$ linear abhängig sind

Signalklassen

- In der Praxis: Zeitintervall $(-\infty, \infty)$ kann nicht ausgewertet werden, nur zeitbegrenzte Signale auf $[t_1, t_2]$ können verwendet werden
- Das Integral $\int_{t_1}^{t_2} x(t) x^*(t) dt$ konvergiert für beschränkte, stückweise stetige Funktionen (zum Glück) immer
- Bei der Signalanalyse geht man aber oft davon aus, dass sich das Signal periodisch fortsetzen lässt (siehe z. B. Fourier-Reihe, DFT), was Leistungssignalen entspricht

6.2 Korrelationsfunktionen

Signalklassen

- Mögliche Verfahren zur Signalanalyse für die Signalklassen:

	Energiesignale	Leistungssignale	Sonstige Signale
Stochastik	Zulässig	Zulässig	Zulässig
Ergodizität		Zulässig	
Korrelation mit Zeitfunktion	Zulässig ¹	Zulässig	
Fourier-Reihe		Zulässig	
Fourier-Transformation	Zulässig	Zulässig ²	
Zeitdiskrete Fourier-Transformation	Zulässig	Zulässig ²	
Diskrete Fourier-Transformation	Zulässig	Zulässig	

¹: Korrelation nicht im statistischen Sinn

²: eingeschränkt zulässig unter Verwendung der Distributionentheorie

Korrelation von Leistungssignalen

- Kreuzkorrelationsfunktion für Leistungssignale:

$$r_{xy}(\tau) = \langle x(t + \tau), y(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt$$

- Identisch zur Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion für ergodische Prozesse
(offensichtlich, da Leistungssignale Musterfunktionen ergodischer Prozesse sein können)
- Signale $x(t)$ und $y(t)$ müssen hier aber keine Musterfunktionen stochastischer Prozesse sein

Korrelation von Leistungssignalen

- Einsetzen der Kreuzkorrelationsfunktion in die Schwarz'sche Ungleichung:

$$|r_{xy}(\tau)|^2 = |\langle x(t + \tau), y(t) \rangle|^2 \leq \|x(t + \tau)\|^2 \cdot \|y(t)\|^2:$$

$$\left| \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt \right|^2 \leq \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) x^*(t + \tau) dt \cdot \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y(t) y^*(t) dt$$

$$|r_{xy}(\tau)|^2 \leq P_x \cdot P_y < \infty$$

d. h. das Betragsquadrat des Innenprodukts der Leistungssignale $x(t)$ und $y(t)$ ist kleiner oder gleich dem Produkt der Signalleistungen P_x und P_y

- Daraus Leistung eines Signals (für $y(t) = x(t)$ und $\tau = 0$):
 $r_{xx}(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = \|x(t)\|^2 = P_x$

Korrelation von Leistungssignalen

- Beispiel: Korrelationsfunktion zweier Leistungssignale
 - Zwei Signale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$
 - Kreuzkorrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \sin(2\pi f_0(t + \tau)) \cos(2\pi f_0 t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[\cos(2\pi f_0 \tau) \left[\frac{1}{8\pi f_0 T} \sin^2(2\pi f_0 t) \right]_{-T}^T \right. \\ &\quad \left. + \sin(2\pi f_0 \tau) \left[\frac{t}{4T} + \frac{1}{16\pi f_0 T} \sin(4\pi f_0 t) \right]_{-T}^T \right] \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 \tau) \end{aligned}$$

(mit $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$, $\int \sin kt \cos kt \, dt = \frac{1}{2k} \sin^2 kt$, $\int \cos^2 kt \, dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4k} \sin 2kt$)

Korrelation von Leistungssignalen

- Beispiel: Korrelationsfunktion zweier Leistungssignale

- Zwei Signale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$, $y(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

- Kreuzkorrelationsfunktion:

$$r_{xy}(\tau) = \frac{1}{2} \sin(2\pi f_0 \tau)$$

d. h. KKF ist zweier harmonischer Signale ist ebenfalls ein harmonisches Signal mit gleicher Frequenz

Korrelation von Energiesignalen

- Energiesignale stammen nicht von ergodischen Prozessen, daher ist die Anwendung der Formel für Leistungssignale (= Formel für ergodische Prozesse) nicht möglich ($\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt \rightarrow 0$)
- Aber auch hier Definition einer Korrelationsfunktion für Energiesignale über das Innenprodukt möglich:

$$r_{xy}^E(\tau) = \langle x(t + \tau), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) y^*(t) dt < \infty$$

- Diese Funktion entspricht aber nicht mehr einer Korrelationsfunktion im stochastischen Sinne
- Wird auch als Impulskorrelation bezeichnet (da Energiesignale Impulsantworten stabiler LTI-Systeme sein können)

Korrelation von Energiesignalen

- Korrelation lässt sich auch als Faltung interpretieren:

$$r_{xy}^E(\tau) = \langle x(t + \tau), y(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) y^*(t) dt = x(\tau) * y^*(-\tau)$$

- Autokorrelationsfunktion:

$$r_{xx}^E(\tau) = \langle x(t + \tau), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) x^*(t) dt$$

- Autokorrelationsfunktion ist für $\tau = 0$ gerade die Signalenergie:

$$r_{xx}^E(0) = \langle x(t), x(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = \|x(t)\|^2 = E_x$$

Korrelation von Energiesignalen

- Wann konvergiert das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) y^*(t) dt$?

- Schwarz'sche Ungleichung:

$$|\langle x(t + \tau), y(t) \rangle|^2 \leq \|x(t + \tau)\|^2 \cdot \|y(t)\|^2$$

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) y^*(t) dt \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt \cdot \int_{-\infty}^{\infty} y(t) y^*(t) dt$$

$$|r_{xy}^E(\tau)|^2 \leq E_x \cdot E_y < \infty$$

d. h. die Signale müssen endliche Energie besitzen

Korrelation von Energiesignalen

- Integrand der Signalenergie $r_{xx}^E(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) x^*(t) dt = E_x$:
Energiedichte (im Zeitbereich): $s_{xx}(t) = x(t) x^*(t) = |x(t)|^2$
- Energiedichte im Zeitbereich muss für große Zeiten gegen null gehen, damit das Integral konvergiert: $\lim_{t \rightarrow \infty} s_{xx}(t) = 0$
- Parseval'sche Beziehung:
$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} s_{xx}(t) dt = \|x(t)\|^2 = \|X(f)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$
- Energiedichte muss daher auch im Frequenzbereich für große Frequenzen gegen null gehen: $\lim_{f \rightarrow \infty} S_{xx}(f) = 0$
- Korrelationsintegral für Energiesignale konvergiert auch dann, wenn nur eines der beiden Signale $x(t)$ oder $y(t)$ Energiesignal und das andere Leistungssignal ist, denn auch dann geht der Integrand $x(t + \tau) y^*(t)$ für große Zeiten gegen null, Energiesignal wirkt dann als Fensterfunktion

Korrelation von Energiesignalen

- Beispiel: Korrelation von Energie- und Leistungssignal

- Zwei Signale $x(t) = r_T(t) = \begin{cases} T^{-1} & \text{für } |t| \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$, $y(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

- Signalenergien:

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} r_T^2(t) dt = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \frac{1}{T^2} dt = \frac{1}{T}$$

$$E_y = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2(2\pi f_0 t) dt = \left[\frac{1}{2} t - \frac{1}{8\pi f_0} \sin(4\pi f_0 t) \right]_{-\infty}^{\infty} = \infty$$

Korrelation von Energiesignalen

- Beispiel: Korrelation von Energie- und Leistungssignal
 - Kreuzkorrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} r_{xy}^E(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) y^*(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} r_T(t + \tau) \sin(2\pi f_0 t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{\tau - \frac{T}{2}}^{\tau + \frac{T}{2}} \sin(2\pi f_0 t) dt \\ &= \frac{1}{2\pi f_0 T} [-\cos(2\pi f_0 t)]_{\tau - \frac{T}{2}}^{\tau + \frac{T}{2}} \\ &= \sin(2\pi f_0 \tau) \frac{\sin(\pi f_0 T)}{\pi f_0 T} < \infty \end{aligned}$$

ist also aufgrund der Fensterwirkung des Energiesignals endlich

(mit $\cos(x - y) - \cos(x + y) = 2 \sin x \sin y$)

Eigenschaften von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen für stationäre Prozesse

- Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$:

- Maximalwert:

$$\operatorname{Re}\{r_{xx}(\tau)\} \leq r_{xx}(0) = \sigma_x^2 + \mu_x^2$$

- Symmetrie:

$$r_{xx}(\tau) = r_{xx}^*(-\tau)$$

- Unkorreliertheit für $|\tau| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{xx}(\tau) = \mu_x^2$$

- Periodische Funktionen (Periode T): $r_{xx}(\tau) = r_{xx}(\tau + T)$

- Kreuzkorrelationsfunktion $r_{xy}(\tau)$:

- Maximalwert:

$$\operatorname{Re}\{r_{xy}(\tau)\} \leq \frac{1}{2} (r_{xx}(0) + r_{yy}(0))$$

- Symmetrie:

$$r_{xy}(\tau) = r_{yx}^*(-\tau) \neq r_{xy}^*(-\tau)$$

- Unkorreliertheit für $|\tau| \rightarrow \infty$:

$$\lim_{|\tau| \rightarrow \infty} r_{xy}(\tau) = \mu_x \cdot \mu_y^*$$

Eigenschaften von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen

- Beweis Maximalwert:

$$E\{|x(t + \tau) - y(t)|^2\} \geq 0$$

$$\Rightarrow E\{|x(t + \tau)|^2\} - E\{x(t + \tau) y^*(t)\} - \underbrace{E\{x^*(t + \tau) y(t)\}}_{= [x(t + \tau) y^*(t)]^*} + E\{|y(t)|^2\} \geq 0$$

$$\Rightarrow E\{|x(t + \tau)|^2\} + E\{|y(t)|^2\} \geq \operatorname{Re}\{2E\{x(t + \tau) y^*(t)\}\}$$

$$\Rightarrow r_{xx}(0) + r_{yy}(0) \geq 2 \cdot \operatorname{Re}\{r_{xy}(\tau)\}$$

- Für Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$:

$$r_{xx}(0) \geq \operatorname{Re}\{r_{xx}(\tau)\}$$

Eigenschaften von Auto- und Kreuzkorrelationsfunktionen

- Beweis Symmetrie der Autokorrelationsfunktion:

Substitution $t' = t + \tau$:

$$\begin{aligned} r_{xx}(\tau) &= E\{x(t + \tau) x^*(t)\} = E\{x(t') x^*(t' - \tau)\} \\ &= E\{[x(t' - \tau) x^*(t')]^*\} = r_{xx}^*(-\tau) \end{aligned}$$

- Beweis Unkorreliertheit für $|\tau| \rightarrow \infty$:

Für unkorrelierte Prozesse $x(t)$, $y(t)$ gilt:

$$E\{x(t) y^*(t)\} = E\{x(t)\} \cdot E\{y^*(t)\}, \text{ daher auch}$$

$$r_{xy}(\tau) = E\{x(t + \tau) y^*(t)\} = E\{x(t + \tau)\} \cdot E\{y^*(t)\} = \mu_x \cdot \mu_y^*$$

- Unkorreliertheit gilt meist nur für $|\tau| \rightarrow \infty$, da weit auseinanderliegend Signalwerte meist keine Ähnlichkeit mehr besitzen
Ausnahme: periodische Signale sind auch für $\tau \rightarrow \infty$ nicht unkorreliert

Messung von Korrelationsfunktionen

- Korrelationsfunktionen sind durch eine mathematisch idealisierte Vorgehensweise charakterisiert, z. B. für Leistungssignale:

$$r_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt$$

- Reale Messungen können nur eine Schätzung erzielen, denn:
 1. Aus der Schar aller Musterfunktionen eines Zufallsprozesses sind meist nur wenige Musterfunktionen $x(t)$, $y(t)$ verfügbar
 - Korrekte Auswertung setzt also ergodische und damit stationäre Prozesse voraus (Ausnahme: Korrelation für Energiesignale geht auch für nicht stationäre Signale)
 - Falls nicht-ergodischer Prozess vorliegt: Auswertung einzelner Musterfunktionen ist zwar möglich, aber nicht repräsentativ für die Prozesse
 2. Anstelle des Scharmittelwerts muss dann der Zeitmittelwert verwendet werden
 - Siehe Punkt 1

Messung von Korrelationsfunktionen

- Reale Messungen können nur eine Schätzung erzielen, denn:
 3. Für kausale Systeme sind nur Verschiebungen $\tau < 0$ realisierbar, ansonsten muss Aufzeichnung und zeitverzögerte Auswertung erfolgen

- Bei Korrelationsfunktionen kein Problem, z. B.:

$$\begin{aligned} r_{xy}(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y^*(t) dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) y^*(t - \tau) dt \end{aligned}$$

4. Messungen und Auswertungen sind auf ein endliches Zeitintervall beschränkt

- Gravierendstes Problem!
- Gemessen werden kann nur die Kurzzeitkorrelationsfunktion, z. B.

$$\hat{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) x^*(t) dt$$

Messung von Korrelationsfunktionen

- Kurzzeitkorrelationsfunktion:

$$\hat{r}_{xx}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) x^*(t) dt$$

Schätzwert für die Korrelationsfunktion, ist selbst wieder Zufallsgröße

- Bei rechnergestützter Ermittlung:

Approximation durch Summe:

$$\hat{r}_{xx}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} x_{n+k} x_n^*$$

mit zulässigen Verschiebungen $|k| = 0, 1, 2, \dots, M \ll N$

Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Kreuzkorrelation: Maß für die (lineare) Ähnlichkeit zweier um τ zeitverschobener, reeller Signale $x(t)$ und $y(t)$
- Bewertung der Ähnlichkeit durch Bestimmung der Distanz der Signale: quadratische Norm

$$\begin{aligned}\|x(t + \tau) - y(t)\|^2 &= \langle x(t + \tau) - y(t), x(t + \tau) - y(t) \rangle \\ &= \langle x(t + \tau), x(t + \tau) \rangle + \langle y(t), y(t) \rangle \\ &\quad - \underbrace{\langle x(t + \tau), y(t) \rangle - \langle y(t), x(t + \tau) \rangle}_{= 2 \operatorname{Re}\{\langle x(t + \tau), y(t) \rangle\}} = 2 \operatorname{Re}\{r_{xy}(\tau)\} \\ &= \|x(t)\|^2 + \|y(t)\|^2 - 2 \operatorname{Re}\{r_{xy}(\tau)\}\end{aligned}$$

- Bei minimaler Distanz: maximale Ähnlichkeit
- Minimale Distanz wird erreicht an der Position des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{xy}(\tau)$ mit der entsprechenden Verschiebung τ

Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Daraus Abschätzung der Kreuzkorrelationsfunktion für reelle Signale:

$$\|x(t + \tau) - y(t)\|^2 = \underbrace{\|x(t)\|^2}_{= r_{xx}(0)} + \underbrace{\|y(t)\|^2}_{= r_{yy}(0)} - 2 \operatorname{Re}\{r_{xy}(\tau)\} \geq 0$$

$$\Rightarrow r_{xy}(\tau) \leq \frac{1}{2} (r_{xx}(0) + r_{yy}(0))$$

- Für $x(t) = y(t)$ folgt: $r_{xx}(\tau) \leq r_{xx}(0)$,
d. h. die Autokorrelationsfunktion hat ihr Maximum bei der Verschiebung $\tau = 0$
- Zur Bewertung der Ähnlichkeit zweier zeitlich gegeneinander verschobener Signale: oft Verwendung des **Kreuzkorrelationskoeffizienten**:

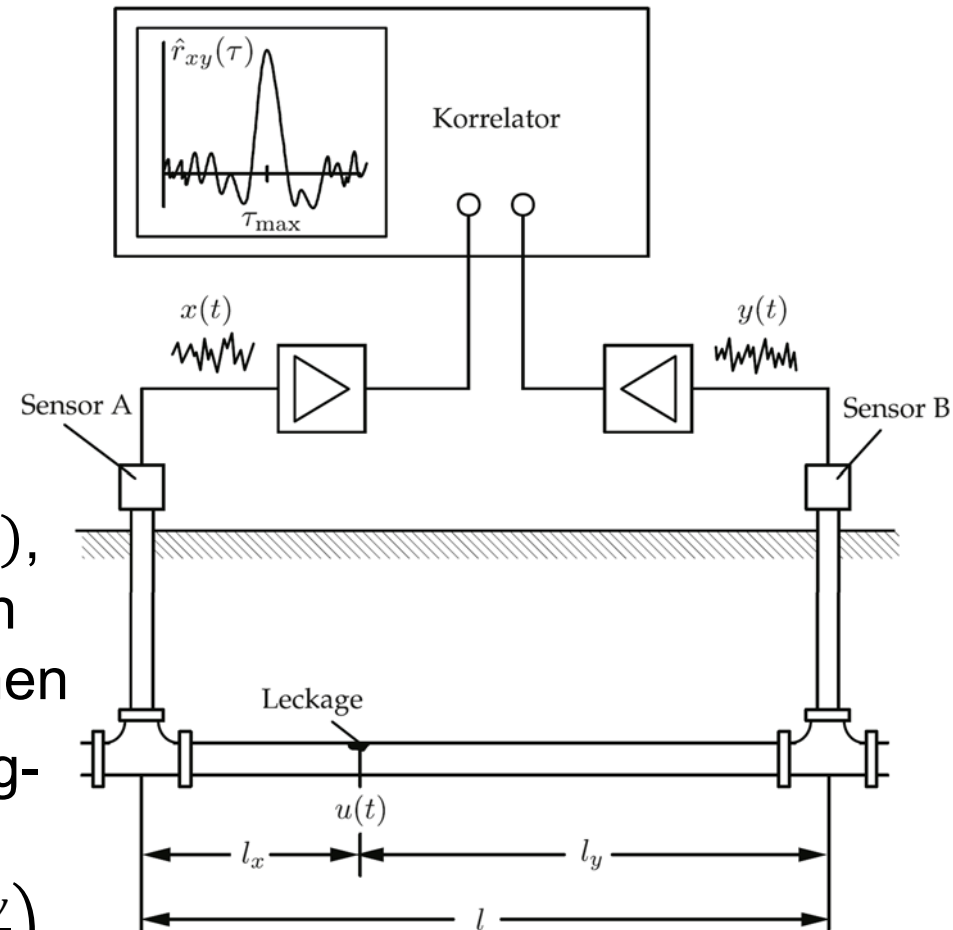
$$r_{xy,\text{norm}}(\tau) = \frac{r_{xy}(\tau)}{\sqrt{r_{xx}(0) \cdot r_{yy}(0)}}$$

Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Beispiel: Ortung von Leckagen mit Körperschallmikrofonen

- Leckortung z. B. an Wasser- oder Gasleitungen, die in der Erde vergraben sind
- Zwei Körperschallmikrofone im Abstand l mit möglichst guter Kopplung zur Leitung (z. B. an Absperrschiebern)
- Leckage erzeugt Geräusche $u(t)$, die mit zeitlicher Verzögerung an den beiden Mikrofonen ankommen
- Mit bekannter Schallgeschwindigkeit im Rohr:

$$x(t) = u\left(t - \frac{l_x}{c}\right), y(t) = u\left(t - \frac{l_y}{c}\right)$$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns

Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Beispiel: Ortung von Leckagen mit Körperschallmikrofonen

- Kreuzkorrelationsfunktion:

$$\begin{aligned}\hat{r}_{xy}(\tau) &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y(t) dt \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T u\left(t + \tau - \frac{l_x}{c}\right) u\left(t - \frac{l_y}{c}\right) dt\end{aligned}$$

- Schätzwert, da Integration auf ein endliches Zeitintervall $[-T, T]$ beschränkt sein muss

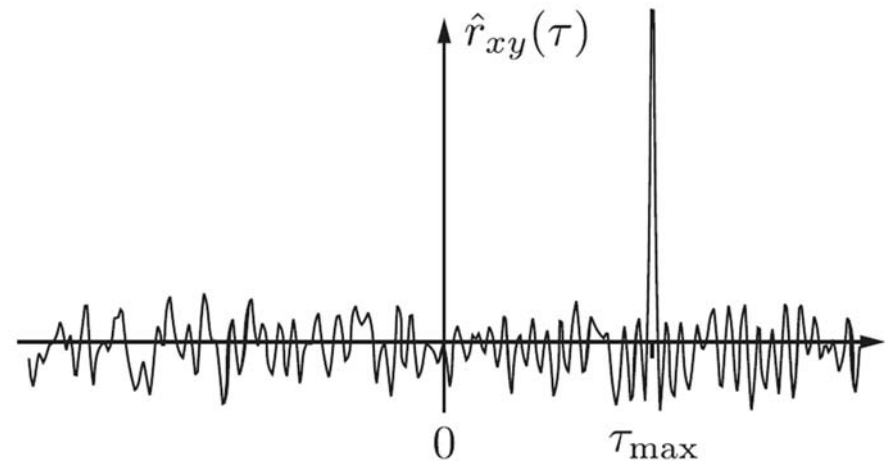
- Maximum wird erreicht bei

$$\tau - \frac{l_x}{c} = -\frac{l_y}{c}, \text{ d. h.}$$

$$\tau_{\max} = \frac{l_x - l_y}{c} = \frac{l - 2l_y}{c}$$

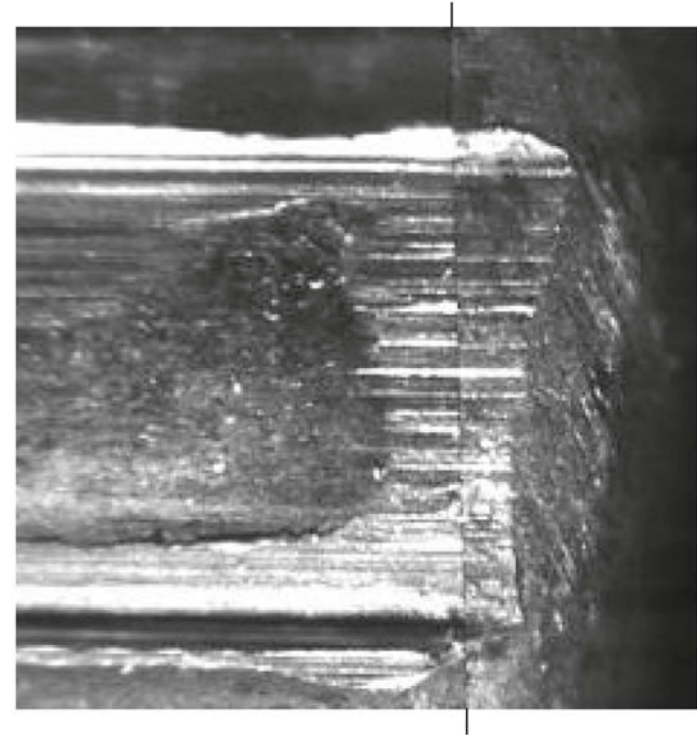
- Mit gemessener Laufzeitdifferenz τ_{\max} :

$$\text{Leckage ist bei } l_y = \frac{1}{2}(l - \tau_{\max}c)$$



Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Beispiel: Vergleich von Schusswaffenspuren
 - Kriminaltechnik: Auswertung von Aufnahmen von Geschossen zur Aufdeckung von Tatzusammenhängen
 - Charakteristische Signale für Waffenexemplare: Riefen auf den Geschossen, verursacht durch die Züge im Lauf der Waffe
 - Vergleich dieser Riefen, um Geschosse aus derselben Waffe zu identifizieren



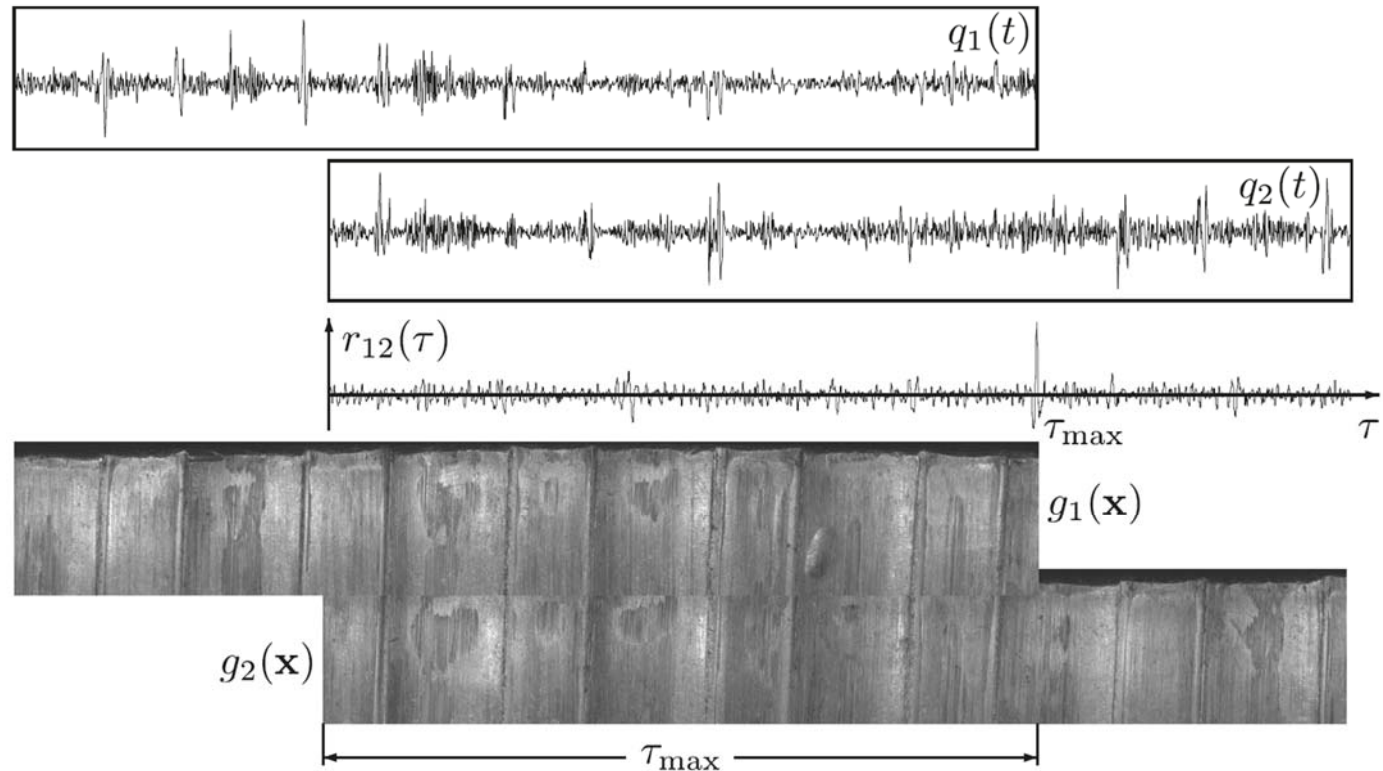
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.

Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Beispiel: Vergleich von Schusswaffenspuren

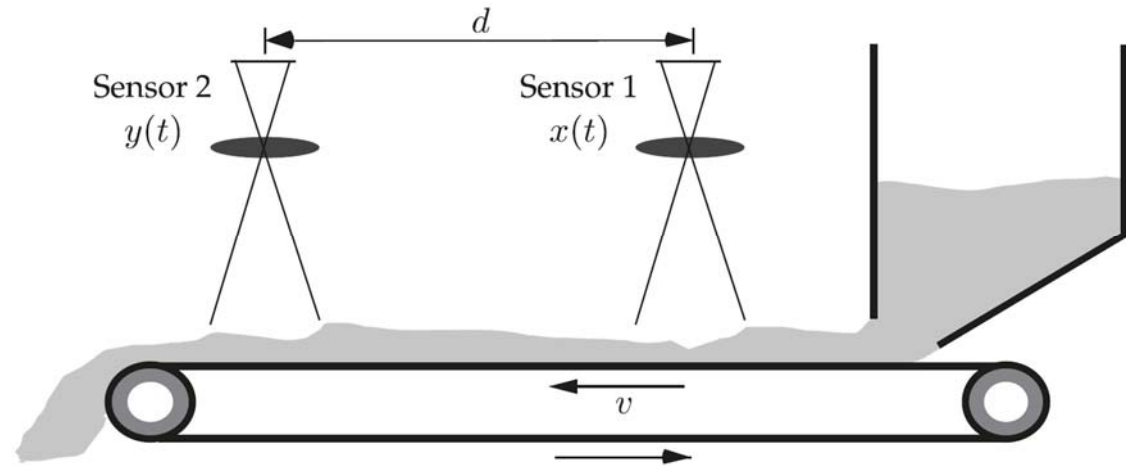
- Auswertung:
Rundum-
aufnahme,
Summation der
Helligkeitswerte
in Richtung der
Riefen,
Störungsunter-
drückung (i. W.
Hochpass),
daraus Signale
 $q_i(t)$



- Ergebnisse: Maß für die Ähnlichkeit der Spuren $r_{12}(\tau_{\max})$,
bestmögliche Verschiebung der Signale τ_{\max}

Ähnlichkeit von Signalen, Laufzeitmessung

- Beispiel: Laufzeitkorrelation zur berührungslosen Geschwindigkeitsmessung
- Zwei Lichtquellen und optische Sensoren (oder andere Sensoren, die vom Fördergut charakteristische Signale erzeugen) im festen Abstand d
- Sensorsignale: Reflexionen am Schüttgut
- Zweites Signal $y(t)$ ist gegenüber $x(t)$ im Idealfall nur um die Laufzeit $\tau = \frac{d}{v}$ verschoben und sonst gleich: $y(t) = x(t - \tau)$
- Aus dem Maximum der KKF bei τ_{\max} : $v = \frac{d}{\tau_{\max}}$
- Anwendbar z. B. für Walzgut, Papier, Textilien, Schüttgut, bei geeigneten Sensoren auch für Flüssigkeiten und Gase



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

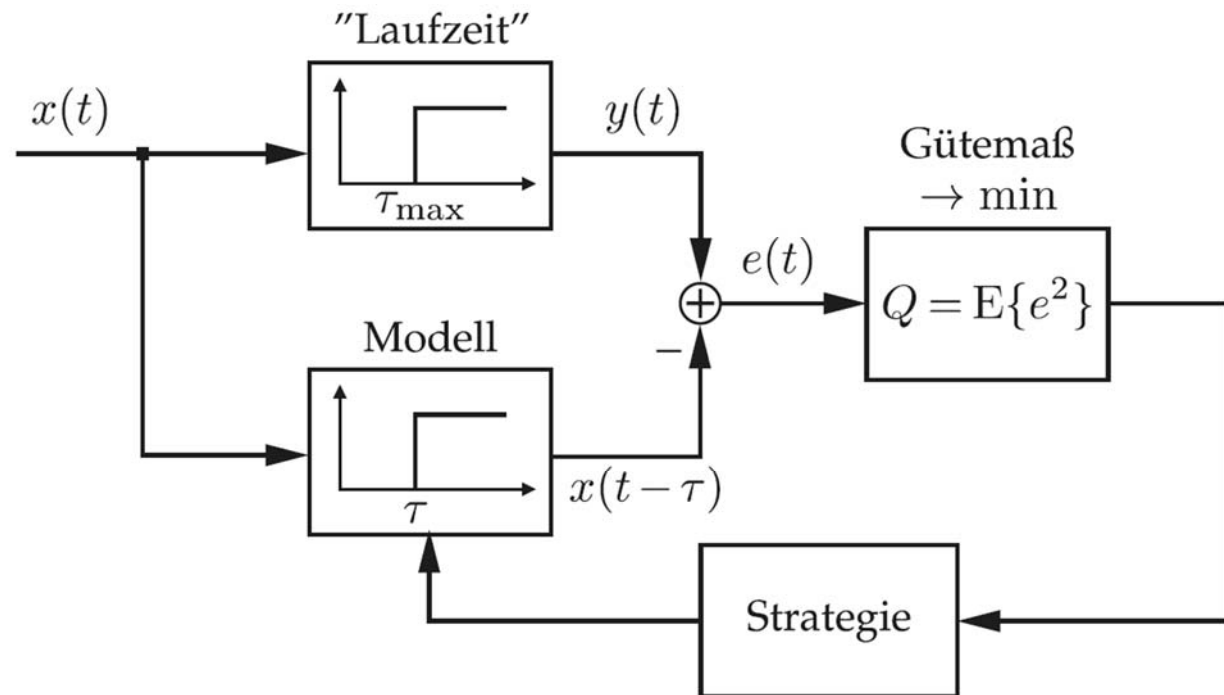
© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.

Closed-loop-Korrelation

- Nachteile des bisherigen Verfahrens zur Laufzeitkorrelation in der Praxis:
 - Ergebnis der Kreuzkorrelation $\hat{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t + \tau) y(t) dt$ steht erst am Ende des Integrationsintervalls zur Verfügung, daher für dynamische Messungen nur schlecht geeignet
 - Hoher numerischer Aufwand: Zeitverzögerung der Signale, Multiplikation, Integration, Maximumsuche

Closed-loop-Korrelation

- Mögliche Verbesserung: Interpretation der Laufzeitkorrelation als Identifikationsproblem für die unbekannte Laufzeit τ_{\max}
- Wahre Laufzeit τ_{\max} wird mit Modelltotzeit τ verglichen
- Verstellung der Modelltotzeit τ so lange, bis optimale Anpassung durch Minimierung eines Gütemaßes Q erreicht ist
- Gütemaß Q : Erwartungswert des quadratischen Fehlers:
 $Q = E\{e^2(t, \tau)\} \rightarrow \min$ mit $e(t) = y(t) - x(t - \tau)$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

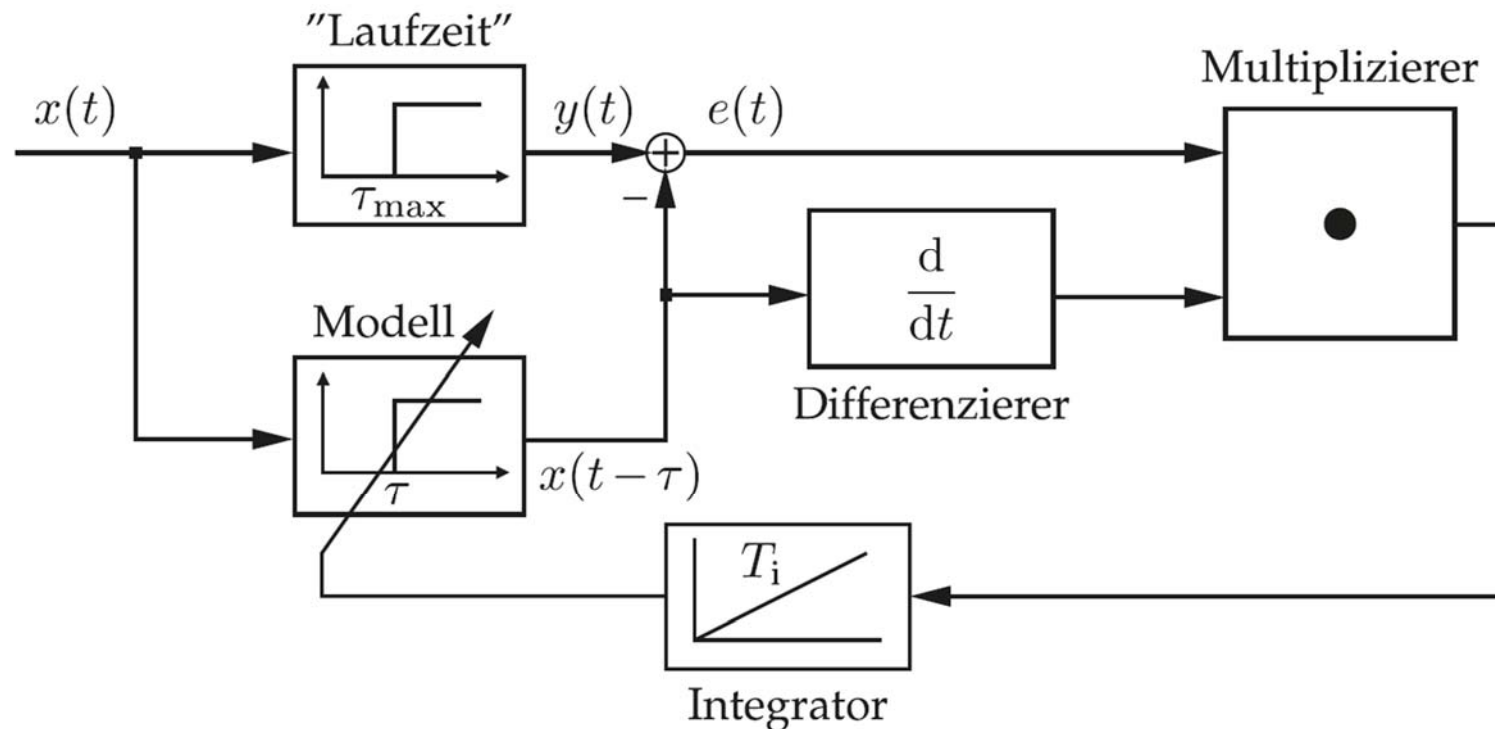
© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns

Closed-loop-Korrelation

- Bedingung für Minimum von $Q = E\{e^2(t, \tau)\} = E\{(y(t) - x(t - \tau))^2\}$:
$$\frac{dQ}{d\tau} = \frac{dE\{e^2(t, \tau)\}}{d\tau} = 2E\left\{e(t, \tau) \frac{de(t, \tau)}{d\tau}\right\} = 0$$
$$\Rightarrow E\{(y(t) - x(t - \tau)) \dot{x}(t - \tau)\} = 0$$
- Ableitung $\frac{dQ}{d\tau}$ hat also im Minimum τ_{\max} einen Vorzeichenwechsel und verhält sich wie die Regelabweichung eines Regelkreises

Closed-loop-Korrelation

- Maximumsuche lässt sich daher als einfache Regelung mit I-Regler für τ umsetzen
- **Closed-loop-Korrelation, Nachlaufkorrelator oder Laufzeit-Tracker:** Regler sucht die Laufzeit $\tau = \tau_{\max}$ und verfolgt sie bei Änderungen



Closed-loop-Korrelation

- Gesucht wurde ja eigentlich das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion
- Daher Vermutung: Minimierung des Gütemaßes

$$Q = E\{e^2(t, \tau)\} = E\{(y(t) - x(t - \tau))^2\}$$

mit Ergebnis $E\{(y(t) - x(t - \tau)) \dot{x}(t - \tau)\} = 0$

entspricht dem Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion $r_{xy}(\tau)$

- Aus $E\{(y(t) - x(t - \tau)) \dot{x}(t - \tau)\} = 0$:
 $E\{\dot{x}(t - \tau) y(t)\} - E\{x(t - \tau) \dot{x}(t - \tau)\} = 0$
 $\Rightarrow r_{\dot{x}y}(-\tau) - r_{x\dot{x}}(\tau = 0) = 0$

Closed-loop-Korrelation

- $r_{\dot{x}y}(-\tau) - r_{x\dot{x}}(\tau = 0) = 0$
- Ableitung der Korrelationsfunktion (Herleitung siehe Literatur oder Kap. 8.1):
$$\dot{r}_{xy}(\tau) = -r_{x\dot{y}}(\tau) = r_{\dot{y}x}(\tau)$$
- Autokorrelationsfunktion $r_{xx}(\tau)$ ist allgemein eine gerade Funktion mit Maximum bei $\tau = 0$:
$$\dot{r}_{xx}(\tau = 0) = 0 = r_{x\dot{x}}(\tau = 0)$$
- Daraus folgt (mit $r_{xy}(-\tau) = r_{yx}(\tau)$):
$$r_{\dot{x}y}(-\tau) - r_{x\dot{x}}(\tau = 0) = r_{\dot{x}y}(-\tau) = 0$$

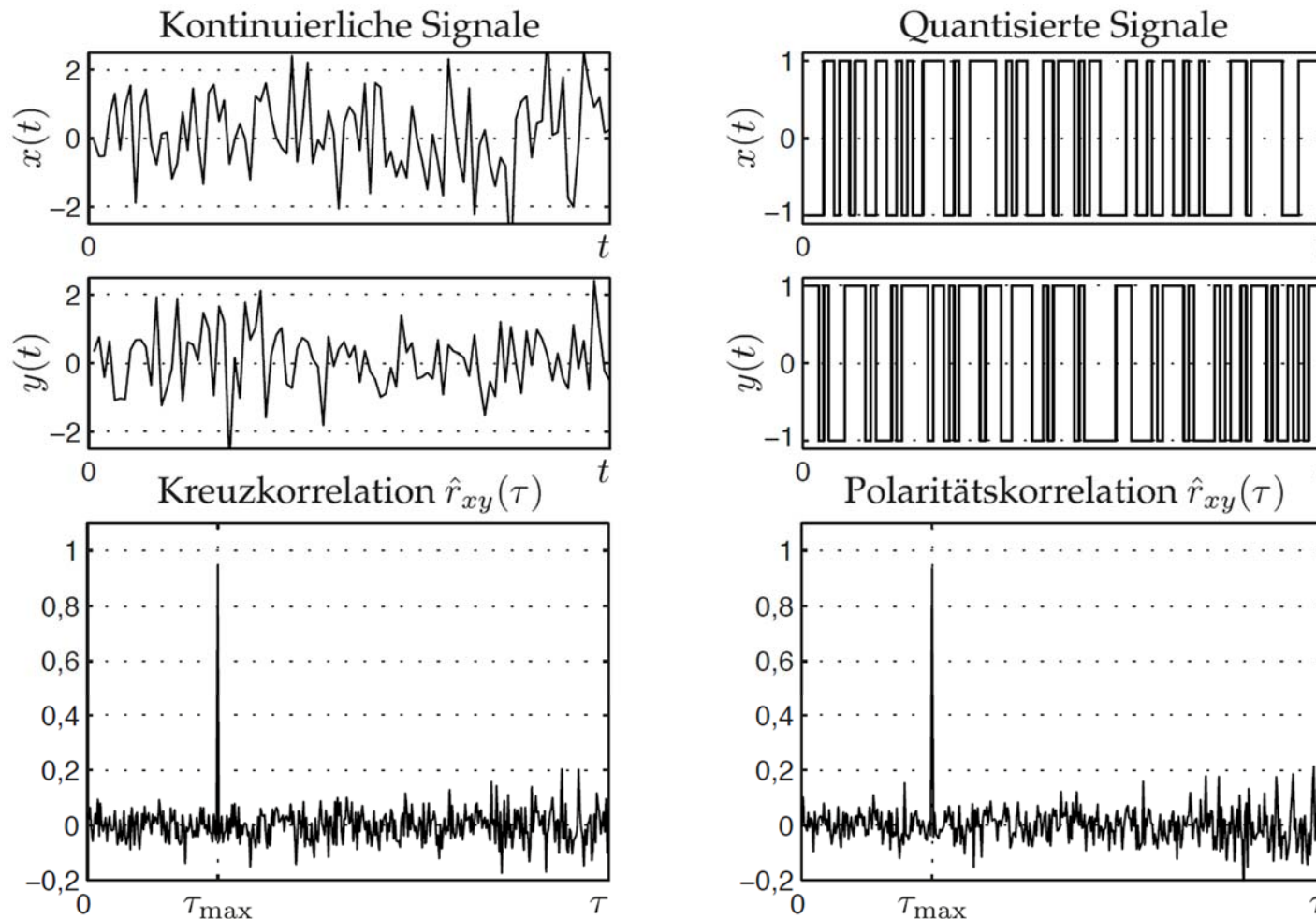
$$\Rightarrow r_{\dot{x}y}(-\tau) = r_{y\dot{x}}(\tau) = -\dot{r}_{yx}(\tau) = \dot{r}_{xy}(\tau) = 0$$
- $\dot{r}_{xy}(\tau) = 0$ ist aber gerade die notwendige Bedingung für das Maximum der Kreuzkorrelationsfunktion
- D. h. die Bildung des Erwartungswerts $E\{(y(t) - x(t - \tau)) \dot{x}(t - \tau)\}$ entspricht wie vermutet der Differentiation der Kreuzkorrelationsfunktion

Polaritätskorrelation

- Closed-loop-Korrelator vermeidet vollständige numerische Berechnung der Kreuzkorrelationsfunktion und eine laufende Anpassung von τ_{\max}
- Aber immer noch Bildung von Produkten der zeitverschobenen und abgeleiteten Signale $(y(t) - x(t - \tau)) \dot{x}(t - \tau)$ notwendig
- Reduktion des Aufwands durch grobe Quantisierung der Signale $x(t)$, $y(t)$ mit 1 Bit: Polaritätskorrelation
- Dadurch Reduktion der Multiplikation auf einfache logische Operationen, die mit logischen Gattern realisiert werden können

Polaritätskorrelation

- Statistische Eigenschaften der quantisierten Signale bleiben in der Regel erhalten, insbesondere Lage des Maximums der Kreuzkorrelationsfunktion

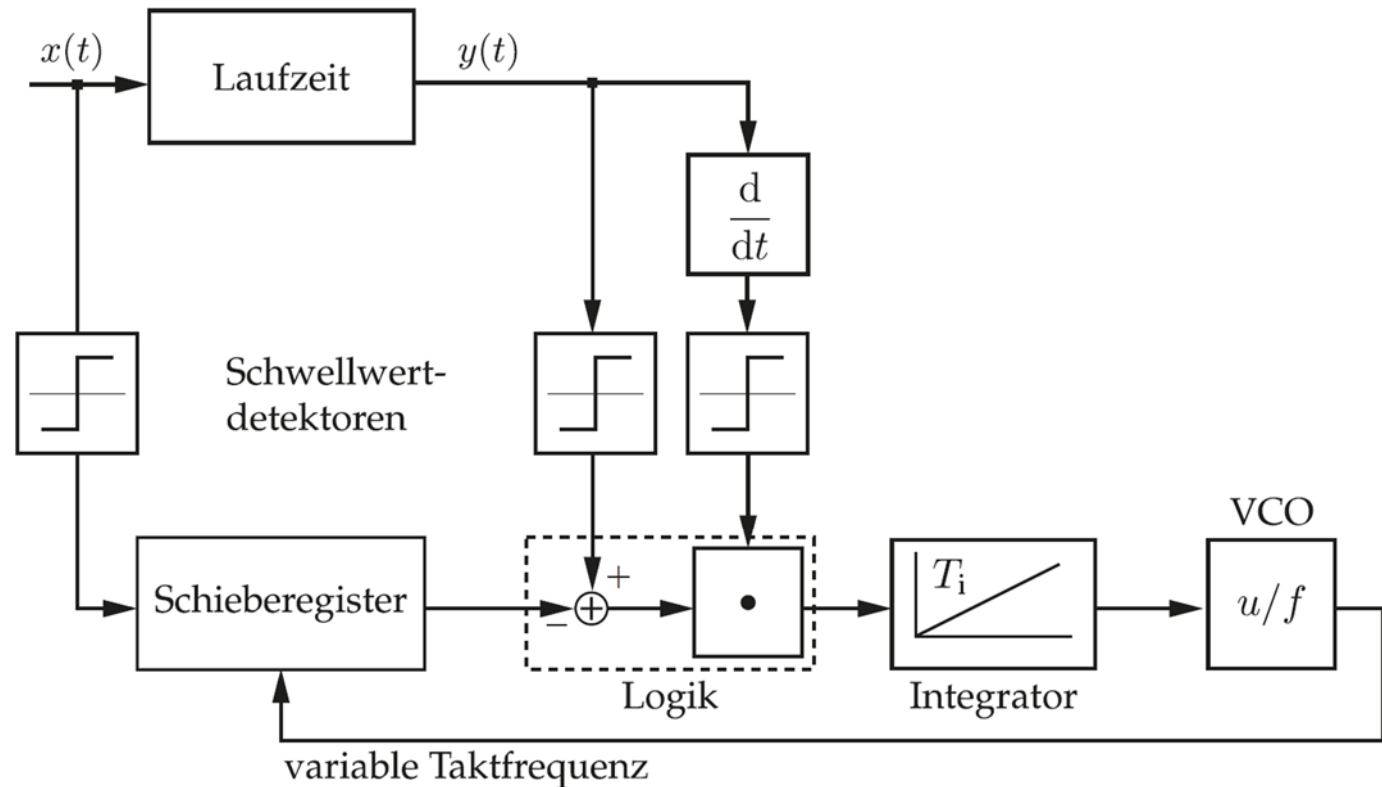


Polaritätskorrelation

- Polaritätskorrelationsfunktion für abgetastete Signale der Länge N ($\tau = k t_A$):

$$\hat{r}_{xy}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1-k} \text{sign}(x_{n+k}) \text{sign}(y_n), \quad |k| = 0, 1, \dots, M \ll N$$

- Umsetzung der Zeitverschiebung um τ mittels Schieberegister, das durch eine variable Taktfrequenz angesteuert wird, z. B. mit einem spannungsgesteuerten Oszillator (VCO)



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Ähnlichkeit von Spektren, Dopplerfrequenzmessung

- Bisherige Anwendung der Korrelationsfunktion $r_{xy}(\tau)$: Bewertung der Ähnlichkeit von (um τ zeitverschobenen) Zeitfunktionen
- In ähnlicher Weise lässt sich die Korrelationsfunktion auch im Frequenzbereich zur Bewertung der Ähnlichkeit von (um ϑ frequenzverschobenen) Spektren nutzen:

$$\varrho_{XY}(\vartheta) = \langle X(f + \vartheta), Y(f) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} X(f + \vartheta) Y^*(f) df < \infty$$

- Distanz der Spektren (siehe oben: Ähnlichkeit von Zeitfunktionen):

$$\begin{aligned} \|X(f + \vartheta) - Y(f)\|^2 &= \langle X(f + \vartheta), X(f + \vartheta) \rangle + \langle Y(f), Y(f) \rangle \\ &\quad - 2 \operatorname{Re}\{\langle X(f + \vartheta), Y(f) \rangle\} \\ &= \|X(f)\|^2 + \|Y(f)\|^2 - 2 \operatorname{Re}\{\varrho_{XY}(\vartheta)\} \end{aligned}$$

Ähnlichkeit von Spektren, Dopplerfrequenzmessung

- Satz von Parseval:

$$\begin{aligned}\varrho_{XY}(\vartheta) &= \int_{-\infty}^{\infty} X(f + \vartheta) Y^*(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}^{-1}\{X(f + \vartheta)\} \mathcal{F}^{-1}\{Y^*(f)\} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi\vartheta t} y^*(t) dt = \langle x(t) e^{-j2\pi\vartheta t}, y(t) \rangle\end{aligned}$$

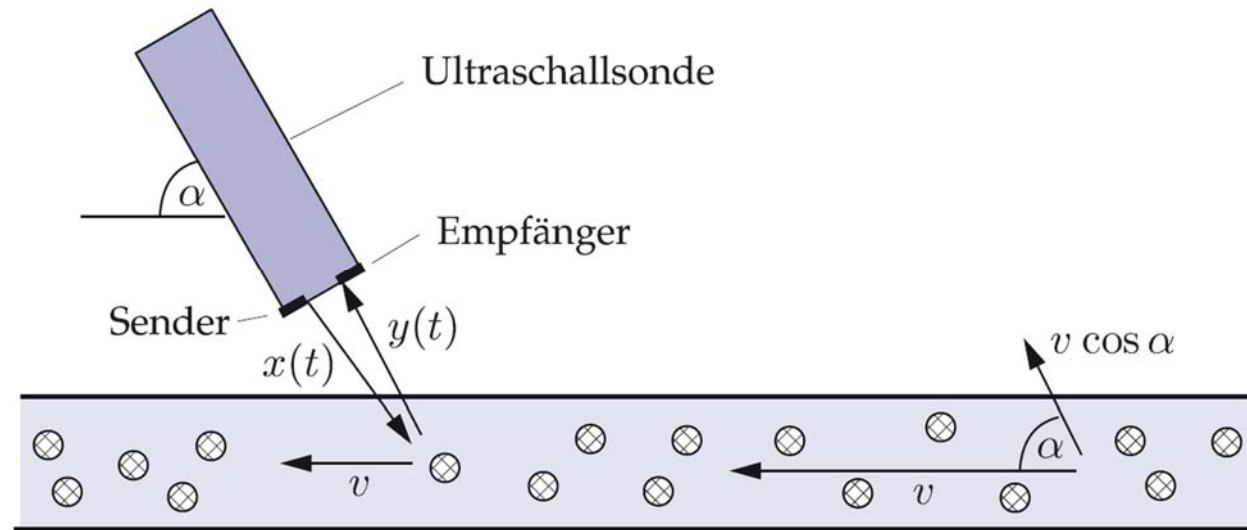
d. h. Frequenzverschiebung des Spektrums entspricht einer Modulation des Zeitsignals,
die Korrelationsfunktion im Frequenzbereich vergleicht also die spektrale Ähnlichkeit des frequenzmodulierten Signals $x(t)$ mit $y(t)$

Ähnlichkeit von Spektren, Dopplerfrequenzmessung

- Beispiel: Geschwindigkeitsmessung mittels Doppler-Effekt

- Berührungslose Messung der Geschwindigkeit einer Flüssigkeit

- Ultraschallsonde sendet harmonisches Signal $x(t)$ mit Frequenz f_0



- Schallwellen werden vom Medium reflektiert und als $y(t)$ empfangen
- Relativbewegung des Mediums ergibt nach dem Doppler-Effekt eine Frequenzverschiebung des empfangenen Signals
- Relativgeschwindigkeit zur Sonde hin: $v \cos \alpha$

Ähnlichkeit von Spektren, Dopplerfrequenzmessung

- Beispiel: Geschwindigkeitsmessung mittels Doppler-Effekt
 - Teilchen im Medium (bewegter Empfänger) empfängt die Frequenz
$$f_1 = f_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right)$$
 - Vom ruhenden Empfänger empfangene Frequenz des an den Teilchen (bewegter Sender) reflektierten Schalls:

$$f = \frac{f_1}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha} = f_0 \frac{1 + \frac{v}{c} \cos \alpha}{1 - \frac{v}{c} \cos \alpha}$$

- Approximation des Nenners für kleine Strömungsgeschwindigkeiten ($v \ll c$):

$$\begin{aligned} f &= f_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{v}{c} \cos \alpha \right)^n \\ &\approx f_0 \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) \cdot \left(1 + \frac{v}{c} \cos \alpha \right) \\ &\approx f_0 \left(1 + 2 \frac{v}{c} \cos \alpha \right) = f_0 + \Delta f \end{aligned}$$

Ähnlichkeit von Spektren, Dopplerfrequenzmessung

- Beispiel: Geschwindigkeitsmessung mittels Doppler-Effekt
 - Vom ruhenden Empfänger empfangene Frequenz: $f \approx f_0 + \Delta f$,
d. h. Frequenzverschiebung um $\Delta f = 2f_0 \frac{v}{c} \cos \alpha$
 - Empfangssignal ist also proportional zum frequenzverschobenen Sendesignal $Y(f) = k \cdot X(f + \Delta f)$

- Maximum der spektralen Korrelationsfunktion

$$\varrho_{XY}(\vartheta) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f + \vartheta) Y^*(f) df = k \int_{-\infty}^{\infty} X(f + \vartheta) X^*(f + \Delta f) df$$

erhält man daher bei $\vartheta = \Delta f$

- Daraus Bestimmung der Strömungsgeschwindigkeit:

$$v = \Delta f \frac{c}{2f_0 \cos \alpha} = \vartheta \frac{c}{2f_0 \cos \alpha}$$

Selbstähnlichkeit von Signalen

- Selbstähnliche Signale: Signale, die sich nach einer gewissen Verschiebung τ zu sich selbst ähnlich sind: periodische Signale mit Periode τ
- Autokorrelation kann daher zur Detektion von selbstähnlichen Signalen bzw. Signalanteilen genutzt werden

Selbstähnlichkeit von Signalen

- Beispiel: Signal, das von starkem Rauschen überlagert ist:

$y(t) = x(t) + n(t)$ mit

- $x(t)$: stochastischer Prozess mit Musterfunktionen
 $x_i(t) = \sin(\omega t + \varphi_i)$

- $n(t)$: mittelwertfreies Rauschen

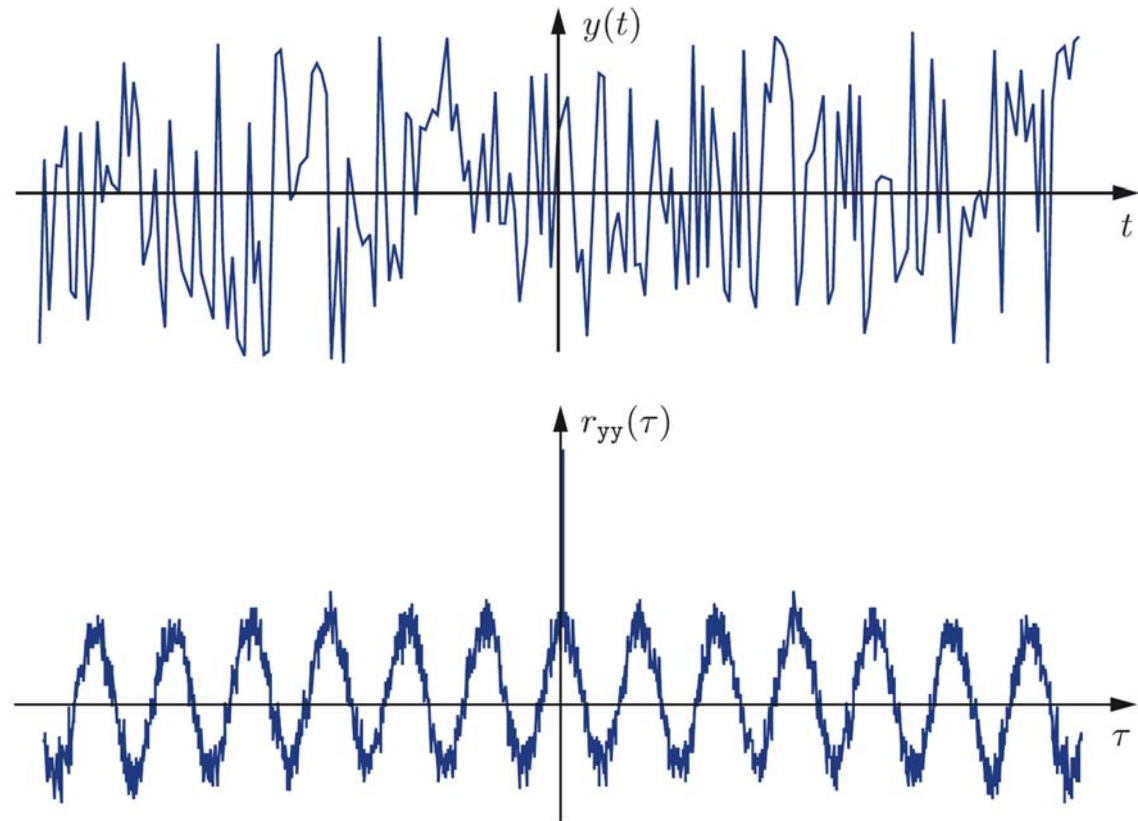
- $x(t)$ und $n(t)$ sind unkorreliert

- Korrelationsfunktion:

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= r_{xx}(\tau) + r_{nn}(\tau) \\ &= \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) + r_{nn}(\tau) \end{aligned}$$

d. h. $r_{xx}(\tau)$ ist periodisch, $r_{nn}(\tau)$ wird klein für hinreichend große τ :

$$r_{nn}(\tau) \approx 0 \text{ für } |\tau| \gg 0$$



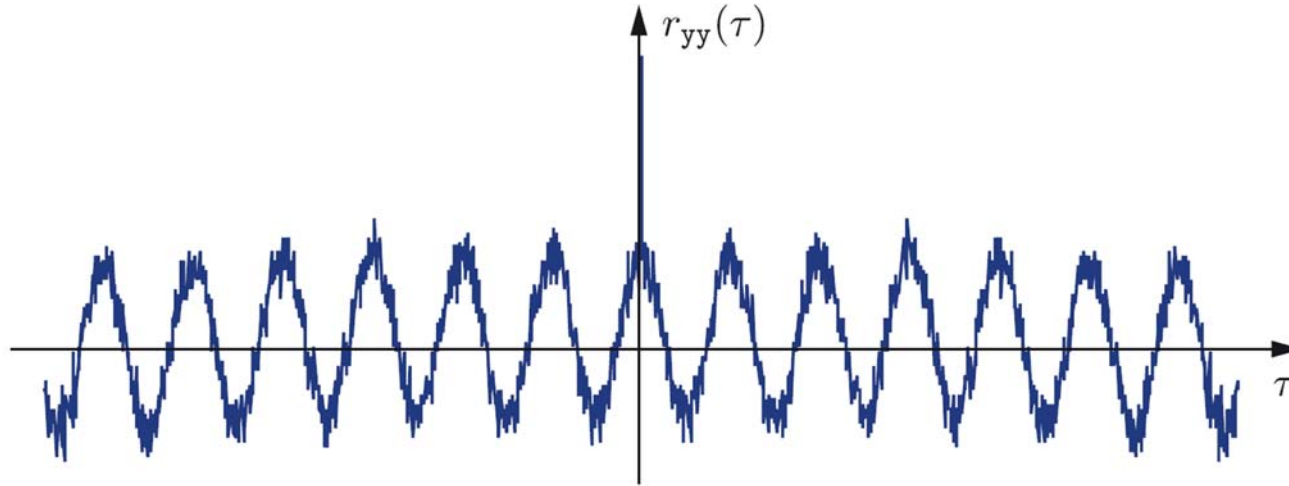
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns

Selbstähnlichkeit von Signalen

- Beispiel: Signal, das von starkem Rauschen überlagert ist
 - Für große τ gilt daher:

$$r_{yy}(\tau) = \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) + r_{nn}(\tau) \approx \frac{1}{2} \cos(\omega\tau) = r_{xx}(\tau)$$



- Einsatz des Verfahrens z. B.
 - Detektion von Brummstörungen (Netz) in elektrischen Signalen
 - Schwingungsanalyse
 - Frühzeitige Diagnose von Maschinenschäden (z. B. Lagerschäden)

Leistungsdichtespektrum

- Signalanalyse kann im Zeit- oder im Frequenzbereich erfolgen (siehe z. B. Vorlesung „Signale und Systeme“)
- Im Frequenzbereich: Anwendung der Fourier-Transformation (weniger: Laplace-Transformation)
- Für Musterfunktionen von stationären (d. h. unendlich ausgedehnten) Prozessen ist die Fourier-Transformationen aber i. a. nicht anwendbar, da das Fourier-Integral dann nicht existiert
- Abhilfe: Fourier-Transformation der Korrelationsfunktion, dabei zunächst Erfassung der Eigenschaften des Prozesses durch Erwartungswertbildung im Zeitbereich, dann Analyse dieser Eigenschaften im Frequenzbereich
- Vorteil: einfachere Beschreibung der Übertragung von stochastischen Prozessen durch lineare, zeitinvariante Systeme (LTI-Systeme)
- Im Folgenden: Annahme schwach stationärer Zufallsprozesse

Leistungsdichtespektrum

- Definition: **Autoleistungsdichtespektrum**

Das Autoleistungsdichtespektrum eines schwach stationären Zufallsprozesses $x(t)$ ist definiert als die Fourier-Transformierte der Autokorrelationsfunktion:

$$S_{xx}(f) = \mathcal{F}\{r_{xx}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- Diese Definition ist auch als Wiener-Khintchine-Theorem bekannt

- Umkehrung:

$$r_{xx}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xx}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Leistungsdichtespektrum

- Autoleistungsdichtespektrum gibt an, welche Frequenzen wie stark im statistischen Mittel in einer Musterfunktion enthalten sind
- $S_{xx}(f)$ stellt die Leistungsverteilung über den Frequenzen f dar:
 - Integral von $S_{xx}(f)$ über Frequenzbereich $f_1 \leq f \leq f_2$ ergibt Leistung des Prozesses in diesem Spektralbereich

- Gesamte Leistung eines Zufallsprozesses:

$$P_x = E\{x^2\} = r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

- Gemeint ist hier die mittlere Leistung (Mittelung über alle Zeiten), nicht die Momentanleistung (in einem begrenzten Zeitintervall)
- Analog: Leistung eines Leistungssignal (das nicht einem Zufallsprozess entstammt):

$$P_x = r_{xx}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xx}(f) df$$

6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Leistungsdichtespektrum

- Man könnte noch ein „Energiedichtespektrum“ für Energiesignale einführen:

$$S_{xx}^E(f) = \mathcal{F}\{r_{xx}^E(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}^E(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau,$$

dies wird aber nicht gemacht, da im Spektralbereich nicht zwischen Energie- und Leistungssignalen unterschieden werden kann

Leistungsdichtespektrum

- Definition: **Kreuzleistungsdichtespektrum (Kreuzspektrum)**

Das Kreuzleistungsdichtespektrum (oder kurz Kreuzspektrum) zweier schwach stationärer Zufallsprozesse $x(t)$ und $y(t)$ ist definiert als die Fourier-Transformierte der Kreuzkorrelationsfunktion:

$$S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{r_{xy}(\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

- Umkehrung:

$$r_{xy}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{xy}(f)\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{xy}(f) e^{j2\pi f\tau} df$$

Leistungsdichtespektrum

- Korrelation von Energiesignalen entspricht Faltung (s. o.):

$$r_{xx}^E(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t + \tau) x^*(t) dt = x(\tau) * x^*(-\tau)$$

- Faltung im Zeitbereich entspricht Multiplikation im Frequenzbereich:

$$S_{xx}^E(f) = X(f) \cdot X^*(f) = |X(f)|^2$$

d. h. ist $x(t)$ die Impulsantwort eines (stabilen) LTI-Systems, dann ist die zugehörige spektrale Energiedichte $S_{xx}^E(f)$ gerade das Betragsquadrat $|X(f)|^2$ der Übertragungsfunktion $X(f)$ des Systems; die Phaseninformation geht dabei verloren

Eigenschaften des Leistungsdichtespektrums

- $S_{xx}(f)$ ist für reelle Prozesse eine gerade Funktion: $S_{xx}(f) = S_{xx}(-f)$
- $S_{xx}(f)$ ist für reelle Prozesse reell für alle Frequenzen: $\text{Im}\{S_{xx}(f)\} = 0$,
 $S_{xx}(f) = S_{xx}^*(f)$
(weil $r_{xx}(\tau)$ reell und gerade ist)
- $S_{xx}(f) \geq 0$ für alle Frequenzen f
(weil die Leistung für jede Frequenz ≥ 0 sein muss)
- $S_{xy}(f) = S_{yx}(-f)$,
sind $x(t)$ und $y(t)$ reell, gilt zusätzlich:
 $S_{xy}(f) = S_{xy}^*(-f) = S_{yx}(-f) = S_{yx}^*(f)$
- $S_{xy}(f)$ ist i. a. nicht reellwertig
(weil die Kreuzkorrelationsfunktion auch für reellwertige Prozesse i. a. nicht symmetrisch ist)

6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Rauschen

- Viele Störeinflüsse lassen sich durch Zufallsprozesse modellieren, deren Leistungsdichtespektrum über einen großen Frequenzbereich annähernd konstant ist
z. B. thermisches Rauschen, Störungen in der Signalübertragung
- Modellierung solcher Störungen mittels weißem Rauschen

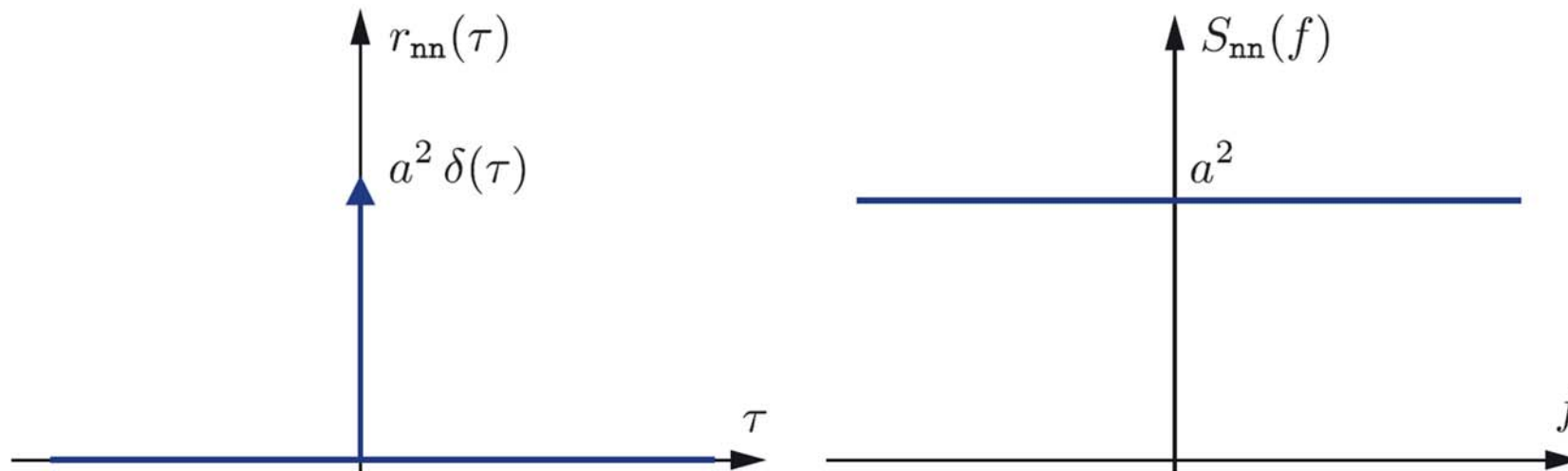
6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Rauschen

- Definition: **Weißes Rauschen**

Einen Zufallsprozess $n(t)$ nennt man weißes Rauschen, wenn sein Leistungsdichtespektrum für alle Frequenzen konstant ist:

$$S_{nn}(f) = a^2 = \text{const. für alle } f$$



- Symbol $n(t)$: engl. *noise* für Rauschen oder (Stör-)Geräusch
- Autokorrelationsfunktion von weißem Rauschen:
$$r_{nn}(f) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{nn}(f)\} = \mathcal{F}^{-1}\{a^2\} = a^2 \delta(\tau)$$

Rauschen

- Autokorrelationsfunktion von weißem Rauschen: $r_{nn}(f) = a^2 \delta(\tau)$, verschwindet also für alle Verschiebungen $\tau \neq 0$
- Benachbarte Werte von $n(t)$ sind also unkorreliert, d. h. die Signalamplitude von $n(t)$ müsste sich unendlich schnell ändern, was physikalisch nicht möglich ist
- Genauso: Leistung für weißes Rauschen:
 $P_n = r_{nn}(0) = a^2 \delta(0) \rightarrow \infty$,
genauso: $P_n = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} a^2 df \rightarrow \infty$
ist unendlich groß und daher physikalisch nicht möglich
- Weißes Rauschen ist daher eine Idealisierung, die aber dennoch aufgrund der einfachen Form von Autokorrelationsfunktion und Leistungsdichte gerne verwendet wird

Rauschen

- Nach oben dargestellter Definition keine Aussage über die Signalwerte
- Oft weitere Annahme: normalverteilte Signalwerte:
weißes Gauß'sches Rauschen
- Dann folgt aus der Unkorreliertheit benachbarter Signalwerte auch die statistische Unabhängigkeit

Rauschen

- Praxisgerechtere Annäherung von Rauschprozessen: Unterdrückung hoher Frequenzanteile
- Diese Annahme trifft z. B. zu, wenn das Störsignal durch Systeme mit Tiefpass- oder Bandpasscharakter übertragen wird
- Dann bleibt die Signalleistung endlich
- Solche Rauschprozesse, deren Leistungsdichtespektrum zu hohen Frequenzen hin abfällt, nennt man **farbiges Rauschen**

Rauschen

- Beispiel: Farbiges Rauschen
 - Weißes Rauschen wird mit einem Tiefpass erster Ordnung gedämpft, Übertragungsfunktion:

$$G(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_g}} = \frac{f_g}{f_g + jf}$$

- Resultierendes farbiges Rauschen hat die Leistungsdichte

$$S_{nn}(f) = \frac{a^2 \cdot f_g^2}{f_g^2 + f^2}$$

(Herleitung siehe unten)

- Autokorrelationsfunktion:

$$r_{nn}(\tau) = \mathcal{F}^{-1}\{S_{nn}(f)\} = a^2 \pi f_g e^{-2\pi f_g |\tau|}$$

- Leistung $P_n = r_{nn}(0) = a^2 \pi f_g$ ist damit endlich

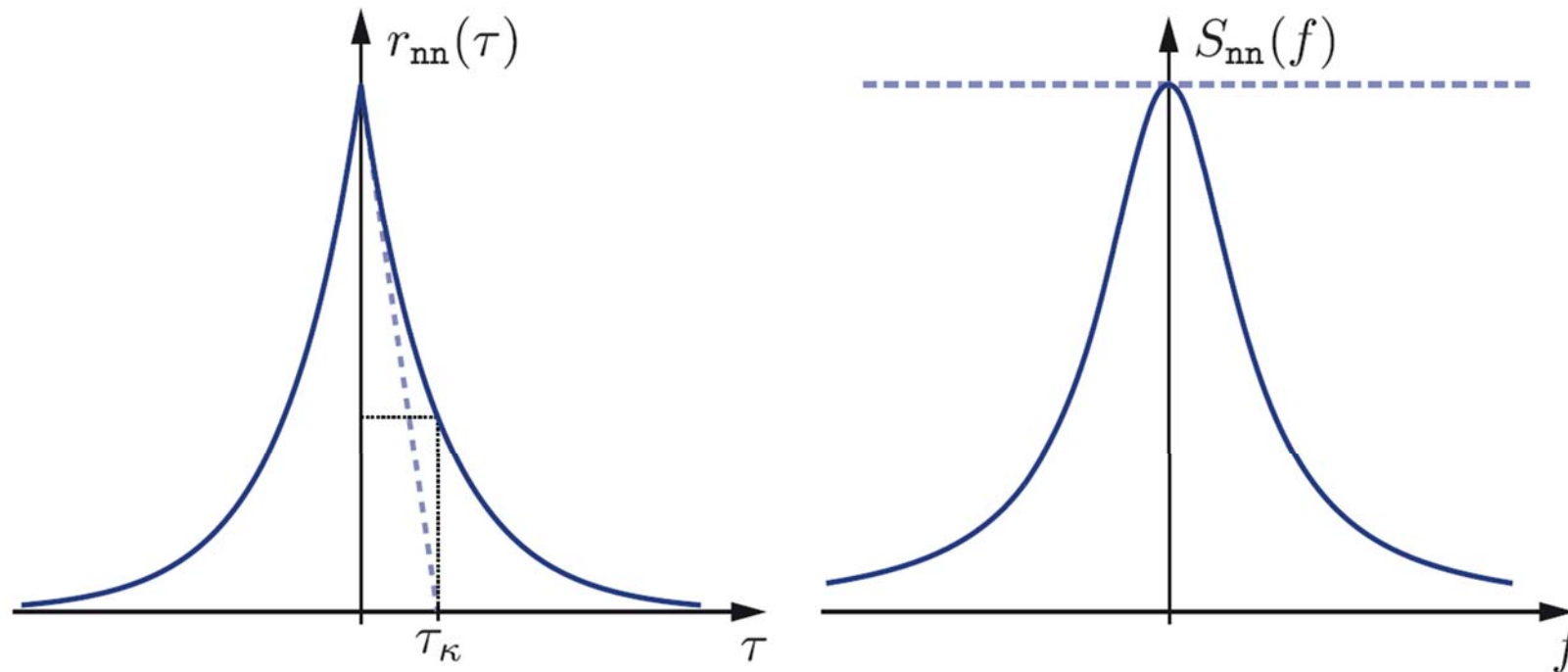
6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Rauschen

- Beispiel: Farbiges Rauschen

- Leistungsdichte $S_{nn}(f) = \frac{a^2 \cdot (2\pi f_g)^2}{(2\pi f_g)^2 + (2\pi f)^2}$,

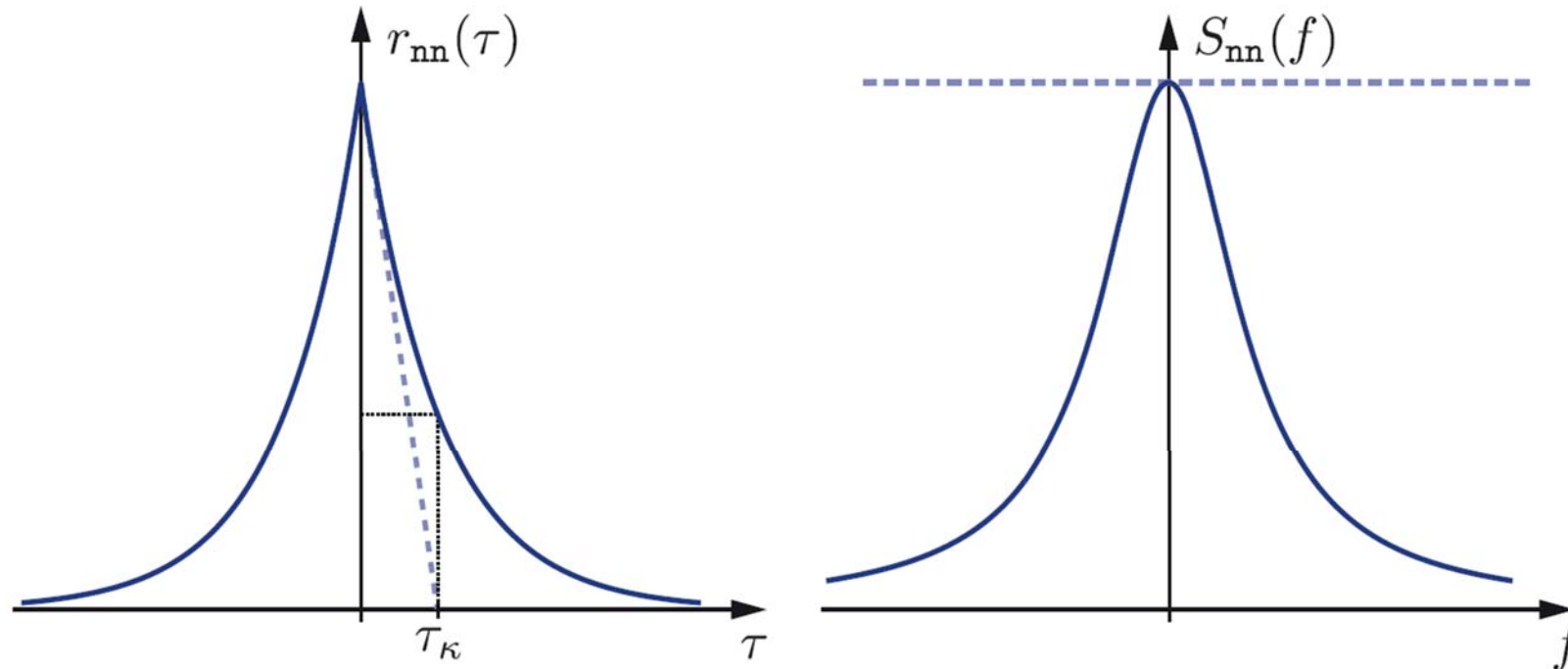
Autokorrelationsfunktion $r_{nn}(\tau) = a^2 \pi f_g e^{-2\pi f_g |\tau|}$



6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Rauschen

- Beispiel: Farbiges Rauschen



- AKF ist breiter, d. h. benachbarte Signalwerte sind korreliert
- Maß für die Breite der AKF: **Korrelationslänge** τ_k : Zeitverschiebung, bei der die AKF auf den Wert $\frac{r_{nn}(0)}{e} \approx 37\% \cdot r_{nn}(0)$ abgefallen ist

Rauschen

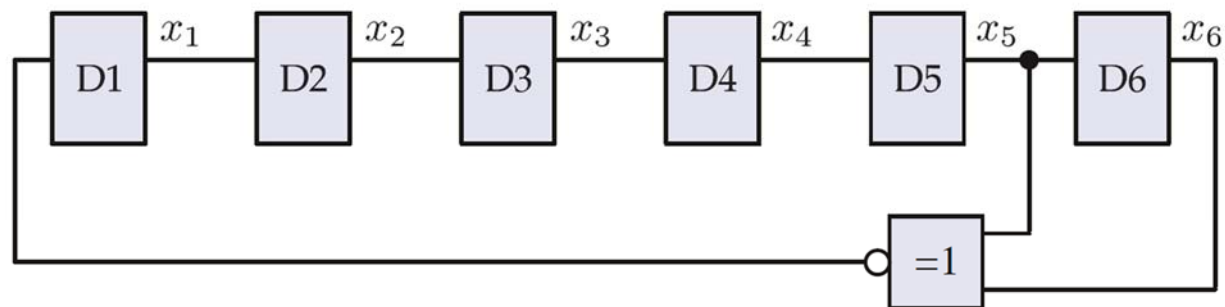
- Wie lässt sich ein möglichst ideales weißes Rauschen praktisch auf einfache Weise erzeugen, z. B. als Testsignal für die Systemidentifikation?
- Naheliegende Möglichkeit: Verwendung eines physikalischen Prozess, z. B. thermisches Rauschen eines Widerstands (erzeugt aber kein ideal weißes Rauschen)
- Einfachere Möglichkeit: **pseudostochastische Binärfolgen** (engl. *pseudo-random binary sequences*, PRBS)

6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

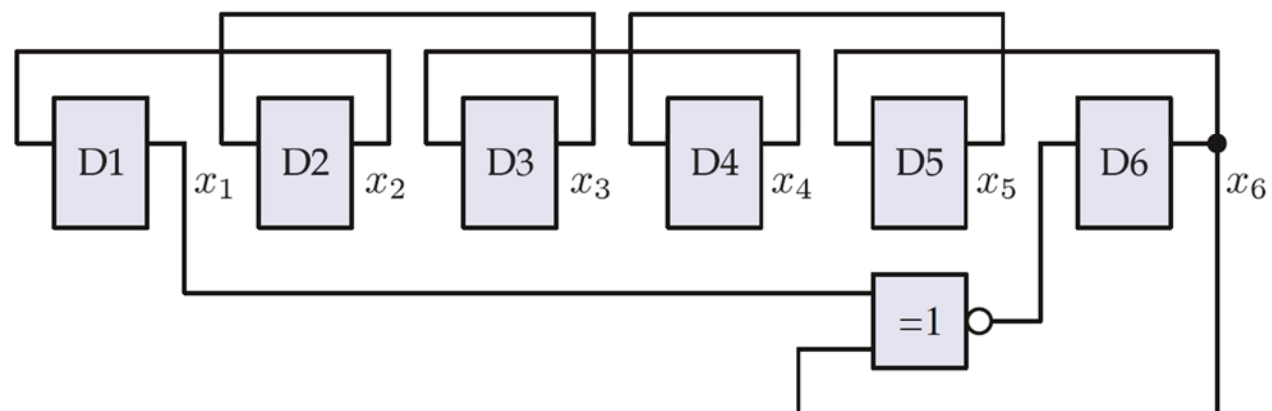
Rauschen

- Dazu Verwendung eines Schieberegisters aus D-Flipflops (Verzögerung um einen Takt) der Länge N , deren Werte mit der Taktzeit t_A nach links oder rechts verschoben wird
- Beispiel: $N = 6$
- Beim Schieben nach rechts: am Eingang von D1 liegt der Ausgang der Äquivalenz von D5 und D6 an
- Beim Schieben nach links: am Eingang von D6 liegt der Ausgang der Äquivalenz von D1 und D6 an

Rechts-Schieben



Links-Schieben



6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Rauschen

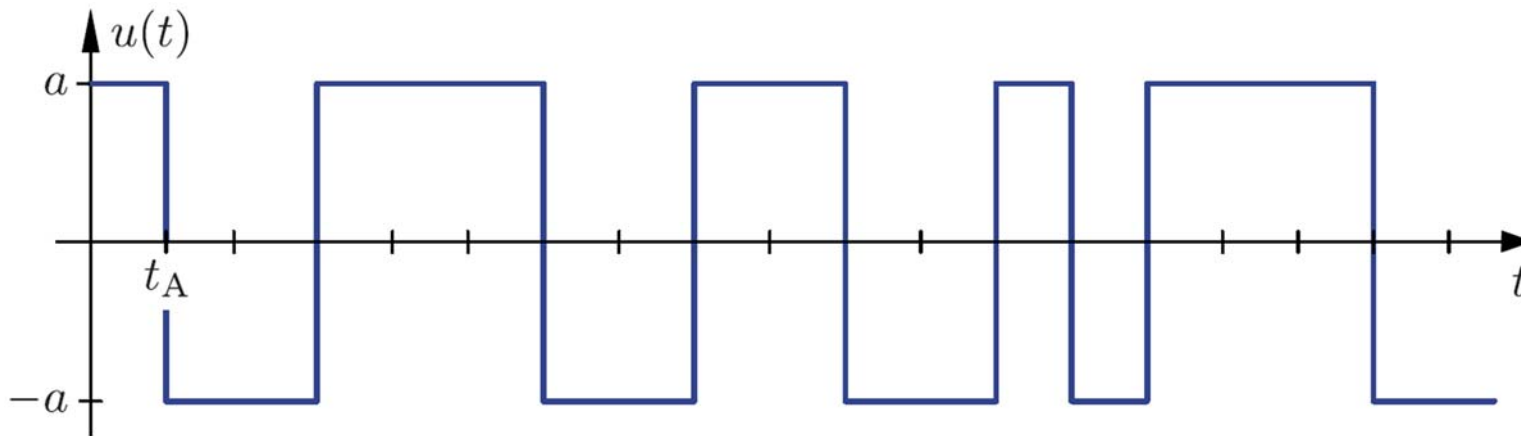
- Beschaltungen für unterschiedliche Längen N der Schieberegister:

Länge N des Schieberegisters	Äquivalenz-Beschaltung		Periode
1	$0 \equiv x_1$	$0 \equiv x_1$	1
2	$x_1 \equiv x_2$	$x_1 \equiv x_2$	3
3	$x_2 \equiv x_3$	$x_1 \equiv x_3$	7
4	$x_3 \equiv x_4$	$x_1 \equiv x_4$	15
5	$x_3 \equiv x_5$	$x_1 \equiv x_4$	31
6	$x_5 \equiv x_6$	$x_1 \equiv x_6$	63
7	$x_4 \equiv x_7$	$x_1 \equiv x_5$	127
8	$(x_3 \equiv x_5) \equiv (x_7 \equiv x_8)$	$(x_4 \equiv x_6) \equiv (x_1 \equiv x_8)$	255
9	$x_5 \equiv x_9$	$x_1 \equiv x_6$	511
10	$x_7 \equiv x_{10}$	$x_1 \equiv x_8$	1023
11	$x_9 \equiv x_{11}$	$x_1 \equiv x_{10}$	2047

6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Rauschen

- Periodenlänge: $2^N - 1$, da der Fall, dass alle x_i den Wert 1 besitzen, ausgeschlossen wird (durch eine nicht dargestellte Zusatzschaltung)
- Erzeugtes Ausgangssignal: $u(t)$ mit
$$u(t) = \begin{cases} a & \text{für } x_N = 1 \\ -a & \text{für } x_N = 0 \end{cases}$$
- Häufigkeiten von $-a$ und a sind ungefähr gleich

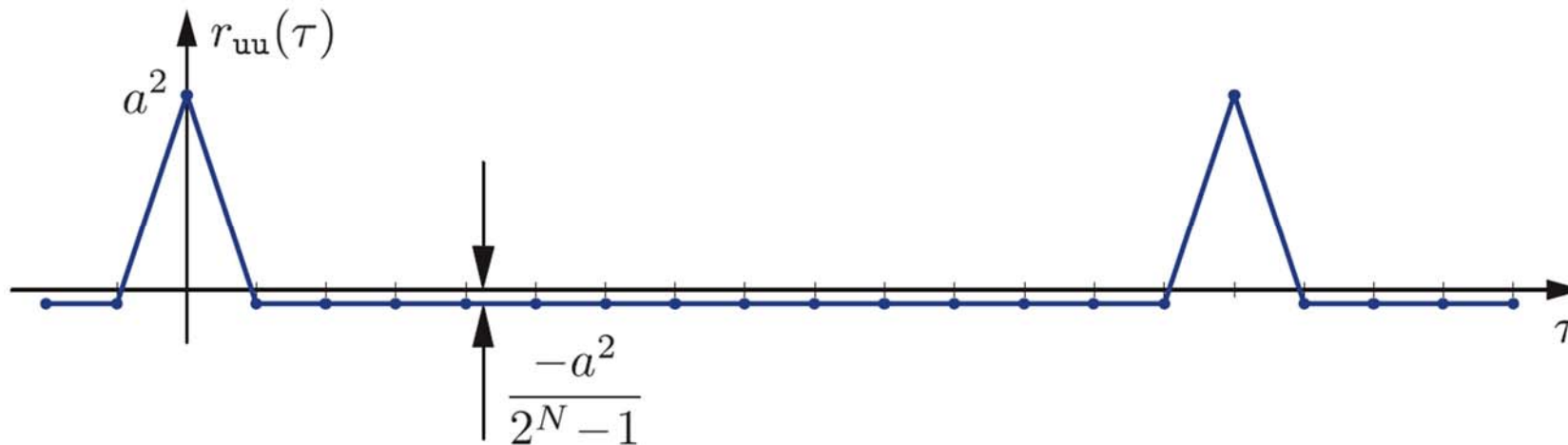


6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Rauschen

- PRBS-Folge ist periodisch, daher ist auch ihre Autokorrelationsfunktion periodisch mit der Periode $(2^N - 1)t_A$ mit

$$r_{uu}(\tau) = \begin{cases} a^2 & \text{für } \tau = k \cdot (2^N - 1)t_A, \quad k \in \mathbb{Z} \\ -\frac{a^2}{2^N - 1} & \text{sonst} \end{cases}$$



- Zur Anwendung der Systemidentifikation: Periodenlänge muss hinreichend hoch gewählt werden
- Bandbreite kann über Wahl von t_A eingestellt werden

6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Überlagerung zufälliger Störsignale

- Einfachstes und am häufigsten verwendetes Modell zur Beschreibung von rauschähnlichen Störungen:

additive Überlagerung:

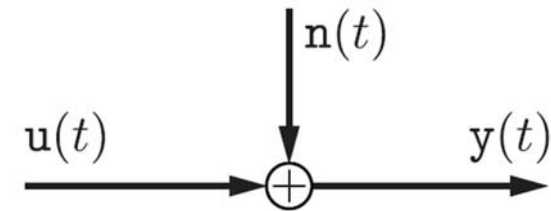
Ausgangssignal $y(t)$ ist dann Summe aus dem idealen Messsignal $u(t)$ und zufälligem Messrauschen $n(t)$:
 $y(t) = u(t) + n(t)$

- Autokorrelationsfunktion von $y(t)$:

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= E\{y(t + \tau) y^*(t)\} \\ &= E\{(u(t + \tau) + n(t + \tau))(u(t) + n(t))^*\} \\ &= E\{u(t + \tau) u^*(t)\} + E\{u(t + \tau) n^*(t)\} \\ &\quad + E\{n(t + \tau) u^*(t)\} + E\{n(t + \tau) n^*(t)\} \\ &= r_{uu}(\tau) + r_{un}(\tau) + r_{nu}(\tau) + r_{nn}(\tau) \end{aligned}$$

- Für das Leistungsdichtespektrum folgt entsprechend:

$$S_{yy}(f) = S_{uu}(f) + S_{un}(f) + S_{nu}(f) + S_{nn}(f)$$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.

Überlagerung zufälliger Störsignale

- Für reelle Signale $u(t)$, $n(t)$ (siehe oben):
$$S_{un}(f) + S_{nu}(f) = S_{un}(f) + S_{un}^*(f) = 2 \operatorname{Re}\{S_{un}(f)\}$$
- Eingesetzt:
$$S_{yy}(f) = S_{uu}(f) + S_{nn}(f) + 2 \operatorname{Re}\{S_{un}(f)\}$$
- Falls $u(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sind (was in der Praxis häufig zutrifft) und mindestens einer der Prozesse mittelwertfrei ist (typischerweise $\mu_n = 0$):
$$r_{un}(\tau) = \mu_u \mu_n^* = 0 \quad \circ \bullet \quad S_{un}(f) = 0$$
- Damit gilt für unkorrelierte Prozesse und mittelwertfreies Rauschen:
$$r_{yy}(\tau) = r_{uu}(\tau) + r_{nn}(\tau)$$
$$S_{yy}(f) = S_{uu}(f) + S_{nn}(f)$$

Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

- Übertragung deterministischer Signale durch LTI-Systeme: vollständige Beschreibung durch Impulsantwort $g(t)$ im Zeitbereich bzw. nach Fourier-Transformation durch Übertragungsfunktion $G(f)$
- Systemantwort $y(t)$ bzw. $Y(f)$:
 $y(t) = g(t) * x(t) \Leftrightarrow Y(f) = G(f) \cdot X(f)$
- Für stationäre Zufallsprozesse (d. h. mit zeitlich unendlicher Ausdehnung): Integrale der Laplace- und Fourier-Transformationen existieren meist nicht, daher wird andere Beschreibung im Frequenzbereich benötigt
- Abhilfe: Verwendung der Leistungsdichten der Eingangs- und Ausgangssignale

Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

- Dazu zunächst Betrachtung von Energiesignalen, für welche die Fourier-Transformation $X(f) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ existiert und damit $Y(f) = G(f) \cdot X(f)$ berechnet werden kann
- Energiedichtespektrum des Ausgangssignals:
$$S_{yy}^E(f) = Y(f) Y^*(f) = G(f) X(f) G^*(f) X^*(f) = |G(f)|^2 S_{xx}^E(f)$$
- Genauso auch Kreuzenergiedichtespektrum von Eingangs- und Ausgangssignal:
$$S_{xy}^E(f) = X(f) Y^*(f) = X(f) G^*(f) X^*(f) = G^*(f) S_{xx}^E(f)$$
- Diese Zusammenhänge können aber nicht ohne Weiteres auf Leistungssignale übertragen werden, denn für diese existiert meist die Fourier-Transformierte $X(f)$ nicht
- Für periodische Signale $x(t)$: Fourier-Transformierte existiert zwar (mit Hilfe von Dirac-Impulsen), aber auch dann müsste das Produkt von zwei Dirac-Impulsen für die Berechnung von $S_{xx}^E(f) = X(f) X^*(f)$ gebildet werden, das aber nicht definiert ist

6.4 Spektrale Darstellung stochastischer Signale

Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

- Beispiel: Periodisches Signal

- Harmonische Schwingung:

$$x(t) = a \cos(2\pi f_0 t) \rightsquigarrow X(f) = \frac{a}{2} (\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0))$$

- Leistungsdichte lässt sich also nicht über das Produkt $S_{xx}^E(f) = X(f) X^*(f)$ angeben, da dort Produkte der Art $\delta(f) \cdot \delta(f)$ auftreten

Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

- Abhilfe für Leistungssignale, die Musterfunktionen ergodischer Prozesse sind: Ersetzung der Integration über die Zeit durch Bildung des Erwartungswerts über die Schar
- Anschaulich: Interessant sind die Eigenschaften der gesamten Schar von Musterfunktionen, nicht eine spezielle Musterfunktion mit ihren Eigenschaften
- Für einen ergodischen Zufallsprozess $x(t)$, durch ein LTI-System mit der Impulsantwort $g(t)$ und der Übertragungsfunktion $G(f)$ übertragen wird, gelten die Beziehungen:

$$r_{xy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * g^*(-\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{xy}(f) = S_{xx}(f) \cdot G^*(f)$$

$$r_{yy}(\tau) = r_{xy}(\tau) * g(\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{yy}(f) = S_{xy}(f) \cdot G(f)$$

$$r_{yy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * r_{gg}^E(-\tau) \quad \circ \bullet \quad S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |G(f)|^2$$

Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

- Beweise:
 - Antwort $y(t)$ eines LTI-Systems mit Impulsantwort $g(t)$ auf einen Eingangsprozess $x(t)$:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t - \alpha) g(\alpha) d\alpha$$

- Multiplikation von $y^*(t)$ mit $x(t + \tau)$ und Erwartungswertbildung:

$$E\{x(t + \tau) y^*(t)\} = r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t + \tau) x^*(t - \alpha) g^*(\alpha)\} d\alpha$$

$$\Rightarrow r_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau + \alpha) g^*(\alpha) d\alpha = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xx}(\tau - \beta) g^*(-\beta) d\beta$$

$$= r_{xx}(\tau) * g^*(-\tau)$$

$$\Rightarrow S_{xy}(f) = S_{xx}(f) G^*(f) \quad (1. \text{ Gleichung})$$

Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

- Beweise:

- Multiplikation von $y(t)$ mit $y^*(t - \tau)$ und Erwartungswertbildung:

$$E\{y(t) y^*(t - \tau)\} = r_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} E\{x(t - \alpha) y^*(t - \tau) g(\alpha)\} d\alpha$$

$$\Rightarrow r_{yy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} r_{xy}(\tau - \alpha) g(\alpha) d\alpha = r_{xy}(\tau) * g(\tau)$$

$$\Rightarrow S_{yy}(f) = S_{xy}(f) G(f) \quad (2. \text{ Gleichung})$$

- $r_{xy}(\tau) = r_{xx}(\tau) * g^*(-\tau)$ eingesetzt in $r_{yy}(\tau) = r_{xy}(\tau) * g(\tau)$:

$$\begin{aligned} r_{yy}(\tau) &= r_{xx}(\tau) * g^*(-\tau) * g(\tau) \\ &= r_{xx}(\tau) * g(\tau) * g^*(-\tau) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_{yy}(f) = S_{xx}(f) G(f) G^*(f) = S_{xx}(f) |G(f)|^2 \quad (3. \text{ Gleichung})$$

- Dabei ist die Faltung der Impulsantworten die Autokorrelationsfunktion für Energiesignale (Impulskorrelation):

$$\begin{aligned} g(\tau) * g^*(-\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\tau - t) g^*(-t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} g(t + \tau) g^*(t) dt \\ &= r_{gg}^E(\tau) \end{aligned}$$

Übertragung stochastischer Signale durch LTI-Systeme

- Beispiel: Erzeugung von farbigem Rauschen (siehe auch oben)
 - Weißer Rauschprozess $x(t)$ mit $S_{xx}(f) = a^2 = \text{const.}$
 - Dämpfung mit einem Tiefpass erster Ordnung:

$$G(f) = \frac{1}{1 + j \frac{f}{f_g}} = \frac{f_g}{f_g + jf}$$

- Leistungsdichtespektrum $S_{yy}(f)$ am Ausgang des Tiefpasses:

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) \cdot |G(f)|^2 = \frac{a^2}{1 + \left(\frac{f}{f_g}\right)^2} = \frac{a^2 f_g^2}{f_g^2 + f^2}$$

6.5 Systemidentifikation

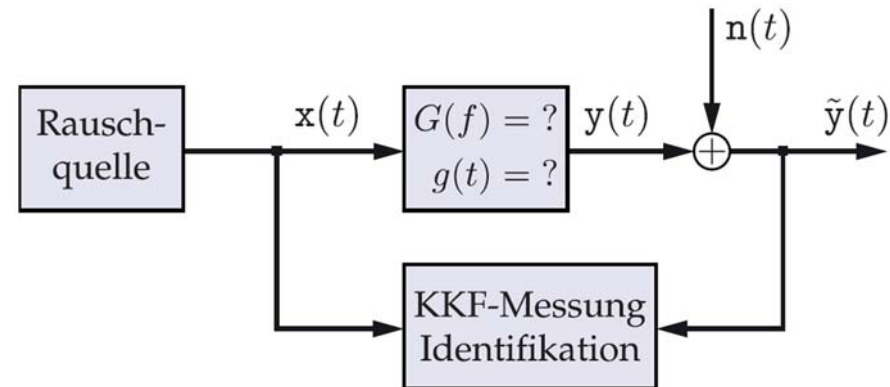
- Leistungsdichtespektren lassen sich zur Bestimmung der Übertragungsfunktion $G(f)$ eines unbekannten Systems nutzen
- Dazu Anlegen eines breitbandigen Rauschsignals $x(t)$ an den Eingang des Systems
- Bandbreite der Rauschquelle muss viel größer sein als die des untersuchten Systems, dann kann das Rauschen als weiß angenommen werden: $S_{xx}(f) = a^2 \quad \forall f$
- Ausgangssignal des Systems $y(t)$ kann zusätzlich von einem unabhängigen, mittelwertfreien Messrauschen $n(t)$ überlagert sein
- Ohne Messrauschen $n(t) = 0$:

Aus $S_{xy}(f) = S_{xx}(f) \cdot G^*(f)$:

$$S_{yx}(f) = S_{xy}(-f) = S_{xx}(-f) \cdot G^*(-f) = S_{xx}(f) \cdot G(f) = a^2 G(f)$$

$$\Rightarrow r_{yx}(\tau) = g(\tau) * a^2 \delta(\tau) = a^2 g(\tau)$$

$$\Rightarrow g(\tau) = \frac{r_{yx}(\tau)}{a^2}, \quad G(f) = \frac{S_{yx}(f)}{a^2}$$



6.5 Systemidentifikation

- Mit Messrauschen $n(t)$: gestörter Ausgang $\tilde{y}(t)$

$$\begin{aligned} r_{\tilde{y}x}(\tau) &= E\{\tilde{y}(t + \tau) x(t)\} \\ &= E\{(y(t + \tau) + n(t + \tau)) x(t)\} \\ &= E\{y(t + \tau) x(t)\} + \underbrace{E\{n(t + \tau) x(t)\}}_{= 0} \\ &= r_{yx}(\tau) \\ \Rightarrow g(\tau) &= \frac{r_{\tilde{y}x}(\tau)}{a^2} \quad \circ \bullet \quad G(f) = \frac{S_{\tilde{y}x}(f)}{a^2} \end{aligned}$$

d. h. ein überlagertes mittelwertfreies Rauschen stört die Identifikation nicht, wenn $x(t)$ und $n(t)$ unkorreliert sind

- Voraussetzung für diese direkte Vorgehensweise ist allerdings, dass das Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{xy}(f)$ vorliegt
- Dieses muss jedoch in der Regel geschätzt werden

Schätzung des Leistungsdichtespektrums

- $S_{xy}(f) = \mathcal{F}\{r_{xy}(\tau)\}$, d. h. Schwierigkeiten für die Schätzung der Autokorrelationsfunktion (siehe oben) gelten auch hier
- Bei der Schätzung beschränkt man sich auf ein endliches Messintervall ($\hat{r}_{xy}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t + \tau) y^*(t) dt$), daher erhält man auch für das Leistungsdichtespektrum $\hat{S}_{xy}(f)$ nur Schätzwerte
- Nachteil: Auch bei unkorrelierten Prozessen $x(t)$ und $n(t)$ kann das zugehörige Kreuzleistungsdichtespektrum ungleich null sein
- Vorteil: Fourier-Transformierte $X(f)$, $Y(f)$ der gemessenen (endlichen) Signale $x(t)$, $y(t)$ existieren
- Damit lässt sich also das Leistungsdichtespektrum direkt aus der Fourier-Transformierten schätzen:
$$\hat{S}_{yy}(f) = Y(f) Y^*(f)$$
$$\hat{S}_{xy}(f) = X(f) Y^*(f)$$
- $\hat{S}_{yy}(f) = Y(f) Y^*(f)$ wird auch als **Periodogramm** bezeichnet und ist reellwertig

Schätzung des Leistungsdichtespektrums

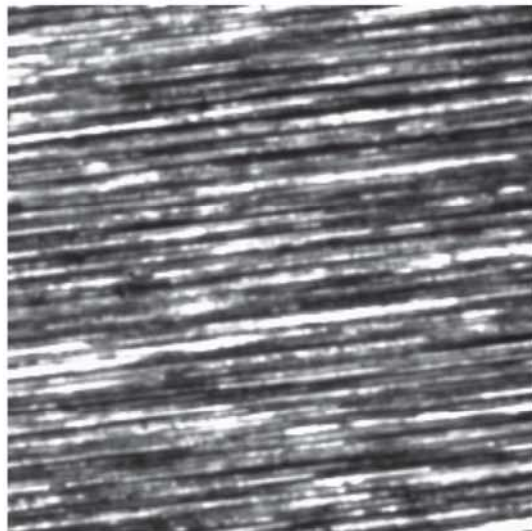
- Verbesserung dieser Schätzung durch Mittelung über mehrere Schätzvorgänge:

$$\overline{\hat{S}_{yy}(f)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{S}_{yy,i}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Y_i(f) Y_i^*(f),$$
$$\overline{\hat{S}_{xy}(f)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{S}_{xy,i}(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N X_i(f) Y_i^*(f)$$

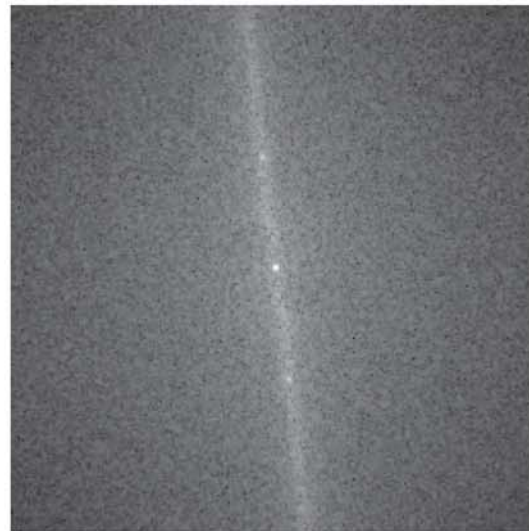
6.5 Systemidentifikation

Schätzung des Leistungsdichtespektrums

- Beispiel: Erkennung periodischer Strukturen in Bildern
 - Bild $g(x)$ der Riefentextur einer Dichtfläche: periodische Drallriefen (unerwünscht) und stochastische Schleifriefen
 - Drallriefen konzentrieren sich im Periodogramm auf eine Ursprungsgerade senkrecht zur Riefenrichtung, Dirac-Impulse entsprechend der (Orts-)Frequenz



Riefentextur $g(x)$



Periodogramm $\hat{S}_{gg}(f)$

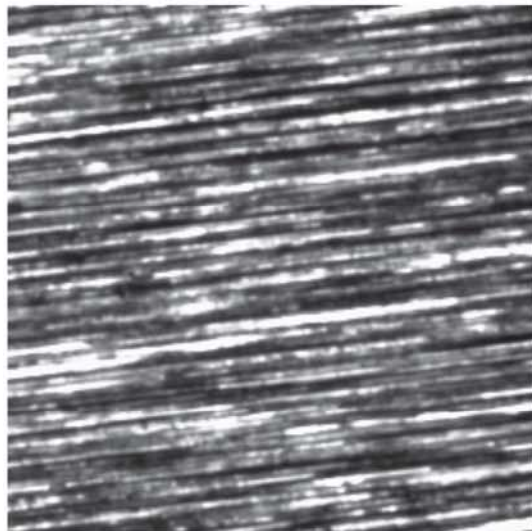


Mittelung $\overline{\hat{S}_{gg}(f)}$

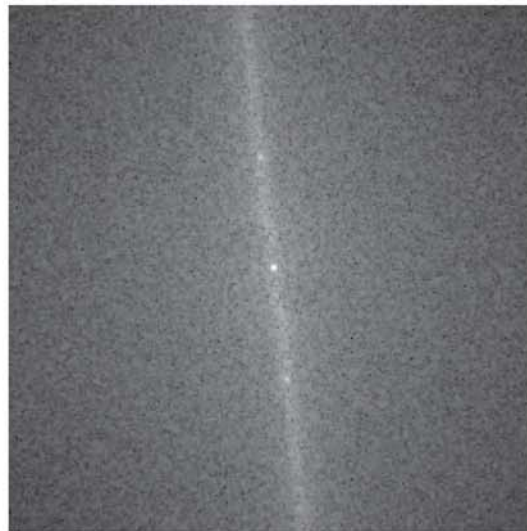
6.5 Systemidentifikation

Schätzung des Leistungsdichtespektrums

- Beispiel: Erkennung periodischer Strukturen in Bildern
 - Starkes Rauschen im Periodogramm $\hat{S}_{gg}(f)$, d. h. das Periodogramm ist kein guter Schätzer für das Leistungsdichtespektrum: man kann zeigen, dass seine Standardabweichung in der Größenordnung der zu schätzenden Größe selbst liegt
 - Dirac-Impulse sind daher nur schwach im Periodogramm erkennbar



Riefentextur $g(\mathbf{x})$



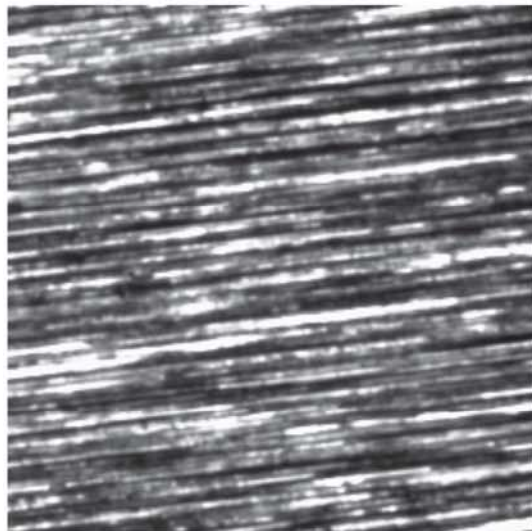
Periodogramm $\hat{S}_{gg}(f)$



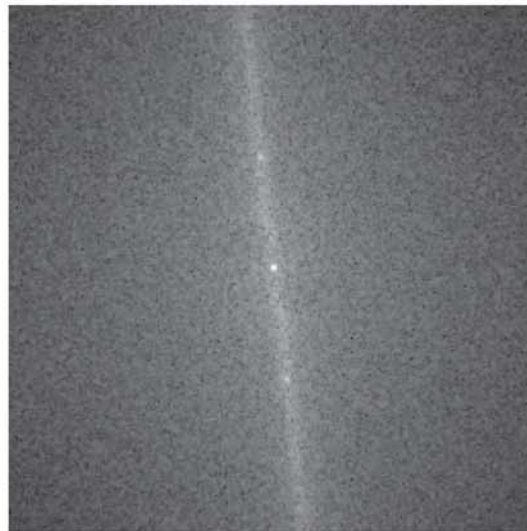
Mittelung $\overline{\hat{S}_{gg}(f)}$

Schätzung des Leistungsdichtespektrums

- Beispiel: Erkennung periodischer Strukturen in Bildern
 - Abhilfe: Mittelung $\overline{\hat{S}_{gg}(f)}$ mehrerer Periodogramme $\hat{S}_{gg}(f)$, hier mit $N = 120$ (unterschiedlichen) Bildern $g_i(x)$ derselben Textur
 - Annahme unkorrelierter Periodogramme führt zu einer Verringerung der Standardabweichung um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{N}}$
 - Dirac-Impulse sind daher besser im gemittelten Periodogramm erkennbar



Riefentextur $g(x)$



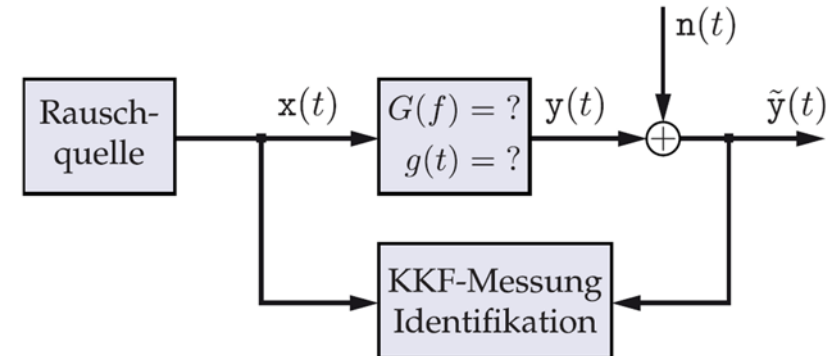
Periodogramm $\hat{S}_{gg}(f)$



Mittelung $\overline{\hat{S}_{gg}(f)}$

Systemidentifikation bei geschätzter Leistungsdichte

- Zwei mögliche Vorgehensweisen bei vorliegenden Schätzungen für das Autoleistungsdichtespektrum $\hat{S}_{yy}(f)$ (Periodogramm) bzw. für das Kreuzleistungsdichtespektrum $\hat{S}_{yx}(f)$:



1. Quotientenbildung gemittelter Periodogramme

- Periodogramm des Ausgangssignals:

$$\begin{aligned}\hat{S}_{yy}(f) &= (G(f)X(f) + N(f)) \cdot (G(f)X(f) + N(f))^* \\ &= |G(f)|^2 \hat{S}_{xx}(f) + G(f) \hat{S}_{xn}(f) + G^*(f) \hat{S}_{nx}(f) + \hat{S}_{nn}(f) \\ &= |G(f)|^2 \hat{S}_{xx}(f) + G(f) \hat{S}_{xn}(f) + G^*(f) \hat{S}_{xn}^*(f) + \hat{S}_{nn}(f) \\ &= |G(f)|^2 \hat{S}_{xx}(f) + 2 \operatorname{Re}\{G(f) \hat{S}_{xn}(f)\} + \hat{S}_{nn}(f)\end{aligned}$$

- Mittelung:

$$\overline{\hat{S}_{yy}(f)} = |G(f)|^2 \overline{\hat{S}_{xx}(f)} + 2 \operatorname{Re}\left\{G(f) \underbrace{\overline{\hat{S}_{xn}(f)}}_{\approx 0}\right\} + \overline{\hat{S}_{nn}(f)}$$

Systemidentifikation bei geschätzter Leistungsdichte

1. Quotientenbildung gemittelter Periodogramme

- Mittelung:

$$\overline{\hat{S}_{yy}(f)} \approx |G(f)|^2 \overline{\hat{S}_{xx}(f)} + \overline{\hat{S}_{nn}(f)}$$

- Schätzung für $|G(f)|^2$:

$$|\hat{G}(f)|^2 = \frac{\overline{\hat{S}_{yy}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}} = |G(f)|^2 + \frac{\overline{\hat{S}_{nn}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}}$$

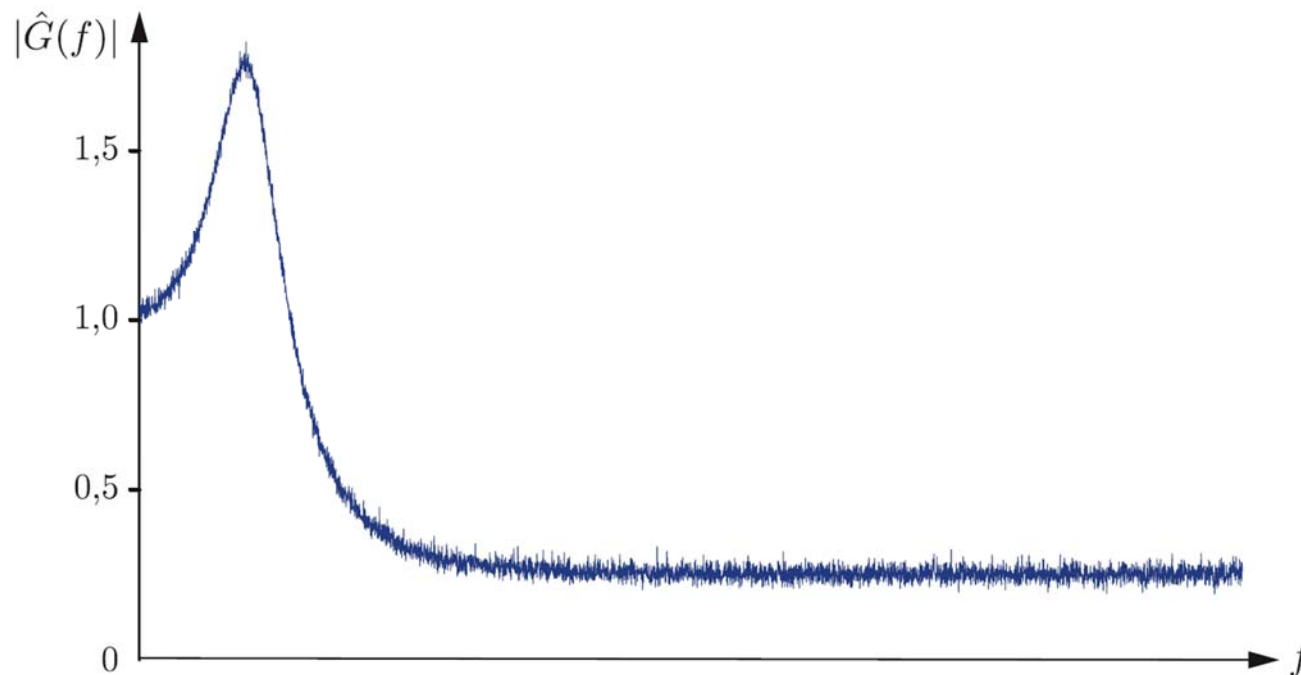
- Nachteile dieser Methodik:

- Nur der Amplitudengang $|G(f)|$ wird geschätzt, nicht der Phasengang $\angle G(f)$
- Fehler durch die überlagerte Störung $n(t)$: $\frac{\overline{\hat{S}_{nn}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}}$

Systemidentifikation bei geschätzter Leistungsdichte

1. Quotientenbildung gemittelter Periodogramme

- Schätzung für $|G(f)|^2$: $|\hat{G}(f)|^2 = \frac{\hat{S}_{yy}(f)}{\hat{S}_{xx}(f)} = |G(f)|^2 + \frac{\hat{S}_{nn}(f)}{\hat{S}_{xx}(f)}$
- Beispiel: Schätzung der Übertragungsfunktion $|\hat{G}(f)|$ eines PT_2 -Gliedes: für große Frequenzen geht $|\hat{G}(f)|$ nicht wie erwartet gegen null, sondern gegen $\frac{\hat{S}_{nn}(f)}{\hat{S}_{xx}(f)}$



Systemidentifikation bei geschätzter Leistungsdichte

2. Quotientenbildung gemittelter Kreuzleistungsdichten

- Kreuzleistungsdichtespektrum des Ausgangssignals:

$$\hat{S}_{yx}(f) = (G(f)X(f) + N(f)) \cdot X^*(f) = G(f) \hat{S}_{xx}(f) + \hat{S}_{nx}(f)$$

- Mittelung:

$$\overline{\hat{S}_{yx}(f)} = \overline{G(f) \hat{S}_{xx}(f)} + \underbrace{\overline{\hat{S}_{nx}(f)}}_{\approx 0}$$

- Komplexwertiges Kreuzleistungsdichtespektrum: Mittelung getrennt nach Betrag oder Phase bzw. Real- und Imaginärteil (zusätzlicher Aufwand)

- Schätzung für $G(f)$:

$$\hat{G}(f) = \frac{\overline{\hat{S}_{yx}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}} = \frac{\overline{G(f) \hat{S}_{xx}(f)}}{\overline{\hat{S}_{xx}(f)}}$$

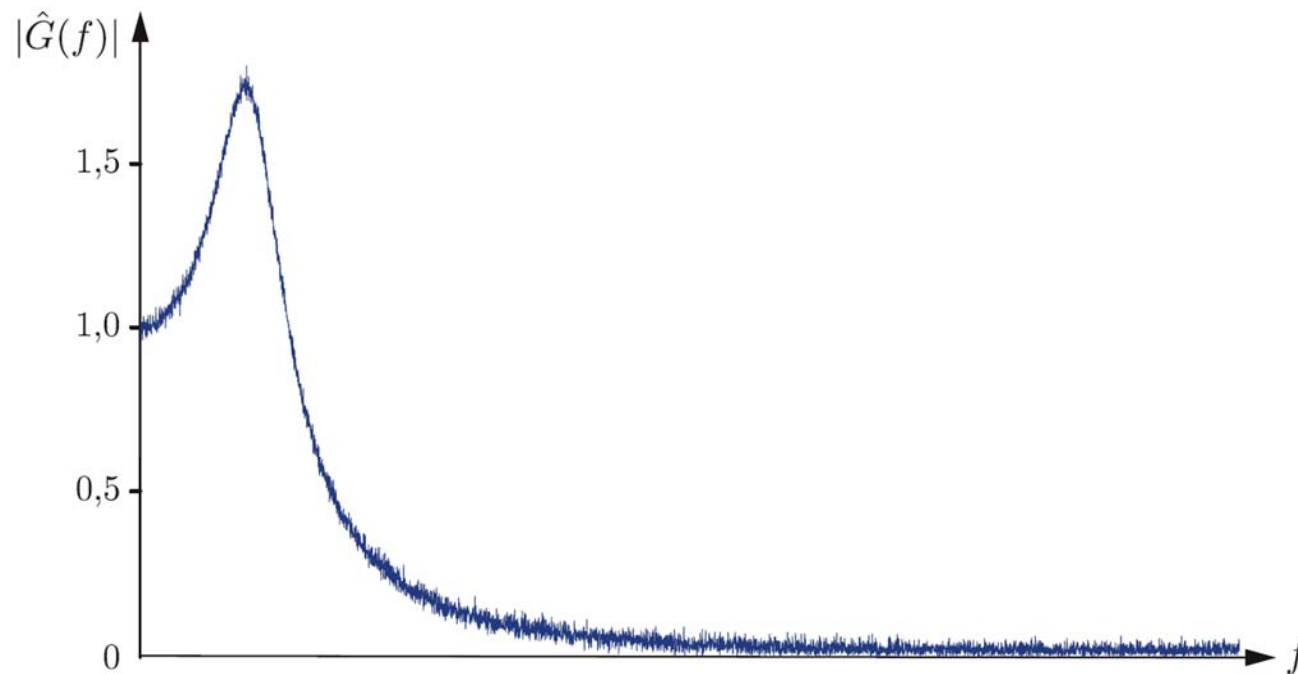
- Vorteile:

- Schätzung für Betrag und Phase
- Geringerer Einfluss der überlagerten Störung $n(t)$

Systemidentifikation bei geschätzter Leistungsdichte

2. Quotientenbildung gemittelter Kreuzleistungsdichten

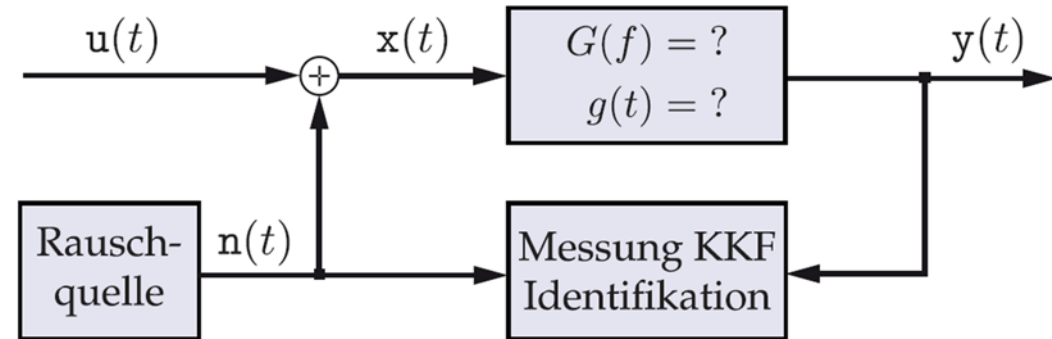
- Schätzung für $G(f)$: $\hat{G}(f) = \frac{\hat{S}_{yx}(f)}{\hat{S}_{xx}(f)} = \frac{\overline{G(f) \hat{S}_{xx}(f)}}{\hat{S}_{xx}(f)}$
- Beispiel: Schätzung der Übertragungsfunktion $\hat{G}(f)$ eines PT_2 -Gliedes: für große Frequenzen geht $|\hat{G}(f)|$ wie erwartet gegen null



6.5 Systemidentifikation

Dynamische Systemidentifikation

- Bei sich zeitlich änderndem Systemverhalten: regelmäßige Systemidentifikation erforderlich
- Systemidentifikation muss im laufenden Betrieb erfolgen, ohne Stilllegung des Systems
- Dazu Überlagerung des Eingangssignals $u(t)$ mit einem Testsignal $n(t)$
- Testsignal $n(t)$:
unkorreliertes (möglichst) weißes Rauschen
mit geringer Amplitude a , z. B. PBRF-Folgen
- Messung des Testsignals $n(t)$ und des Ausgangssignals $y(t)$, daraus Schätzung des Periodogramms $\hat{S}_{nn}(f)$ und des Kreuzleistungsdichtespektrums $\hat{S}_{yn}(f)$



6.5 Systemidentifikation

Dynamische Systemidentifikation

- Fourier-Transformierte des Eingangssignals $x(t) = u(t) + n(t)$:

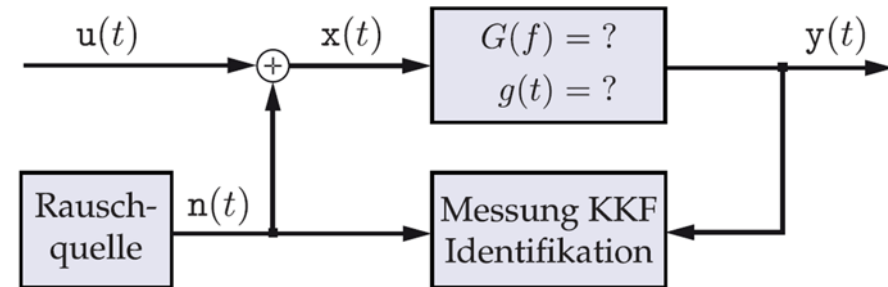
$$X(f) = U(f) + N(f)$$
- Ausgangssignal:

$$Y(f) = G(f) X(f) = G(f) U(f) + G(f) N(f)$$
- Daraus Schätzung des Kreuzleistungsdichtespektrums:

$$\hat{S}_{yn}(f) = Y(f) N^*(f) = G(f) \hat{S}_{un}(f) + G(f) \hat{S}_{nn}(f)$$
- Verbesserung der Schätzung durch Mittelung:

$$\overline{\hat{S}_{yn}(f)} = \underbrace{E\{G(f) \hat{S}_{un}(f)\}}_{\approx 0} + \overline{G(f) \hat{S}_{nn}(f)}$$
- Daraus Schätzung der Übertragungsfunktion:

$$\hat{G}(f) = \frac{\overline{\hat{S}_{yn}(f)}}{\overline{\hat{S}_{nn}(f)}} = \frac{\overline{G(f) \hat{S}_{nn}(f)}}{\overline{\hat{S}_{nn}(f)}} = \frac{\overline{G(f) \hat{S}_{nn}(f)}}{a^2}$$



6.6 Signaldetektion

- Aufgabe der Signaldetektion:
Erkennung von bekannten Mustern in einem Messsignal $y(t)$,
Feststellung der Lage des Musters im Signal
- Schwierigkeit: Muster im Signal $y(t)$ kann durch überlagerte Störungen verfälscht sein, dadurch lassen sich evtl. die gesuchten Muster nicht fehlerfrei erkennen/unterscheiden
- Typische Einsatzgebiete der Signaldetektion:
 - Signalverarbeitung: Objekterkennung und -lokalisierung anhand von Signalen, z. B. in Radarsignalen
 - Bildverarbeitung: Erkennung von Mustern (z. B. Zeichen, Bauteile, Defekte) in Bildern
 - Nachrichtentechnik: Erkennung von Symbolen im Empfänger eines Nachrichtenübertragungssystems

Signalmodell

- Gesuchtes Muster:
 - Bekannt
 - Beschrieben durch Energiesignal $u(t)$
 - Amplitude kann durch einen Faktor $K \in \mathbb{R}, K > 0$ verändert sein
 - Lage kann durch eine Verschiebung t_0 verändert sein
- Überlagerte Störungen: schwach stationärer Zufallsprozess $n(t)$
- Additive Überlagerung des verschobenen und skalierten Musters $u(t)$ und der Störung $n(t)$:
$$y(t) = K \cdot u(t - t_0) + n(t)$$

Signalmodell

- Gesucht: **lineares Detektionsfilter** mit der Impulsantwort $v(t)$, das nach Faltung mit dem Signal $y(t)$:

$$k(t) = y(t) * v(t) = \underbrace{K \cdot u(t - t_0) * v(t)}_{\text{Nutzsignal}} + \underbrace{n(t) * v(t)}_{\text{Störsignal}}$$

an der Lage t_0 , die der Verschiebung des Musters $u(t)$ entspricht, einen Maximalwert liefert

- Höhe des Maximums soll möglichst aussagekräftig (im Sinne des Signal-Rausch-Verhältnisses) sein:

$$SNR = \frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Stör}}}$$

Matched-Filter

- Dazu Annahme: Störsignal $n(t)$ ist weißes Rauschen mit $S_{nn}(f) = a^2$
- Eingesetzt in Ergebnis des Detektionsfilters:

$$k(t) = y(t) * v(t) = \underbrace{K \cdot u(t - t_0) * v(t)}_{\text{Nutzsignal } s(t)} + \underbrace{n(t) * v(t)}_{\text{Störsignal } m(t)}$$

- Nutzsignalleistung (an der Stelle des gewünschten Maximums t_0 , Faltungssatz der Fourier-Transformation anwenden):

$$\begin{aligned} P_{\text{Sig}} &= r_{ss}(0) = |K \cdot u(t - t_0) * v(t)|^2 \Big|_{t=t_0} = K^2 |u(t) * v(t)|^2 \Big|_{t=0} \\ &= K^2 |\mathcal{F}^{-1}\{U(f) V(f)\}|^2 \Big|_{t=0} = K^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} U(f) V(f) df \right|^2 \end{aligned}$$

- Störsignalleistung (mittlere Störsignalleistung, Übertragung ergodischer Prozesse durch LTI-Systeme berücksichtigen):

$$P_{\text{Stör}} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{mm}(f) df = \int_{-\infty}^{\infty} S_{nn}(f) |V(f)|^2 df = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$

Matched-Filter

- Nutzsignalleistung: $P_{\text{Sig}} = K^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} U(f) V(f) df \right|^2$,
Störsignalleistung: $P_{\text{Stör}} = a^2 \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$
- Anwendung der Schwarz'schen Ungleichung auf Nutzsignalleistung:
$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} U(f) V(f) df \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df$$
- Maximum der linken Seite (Gleichheit) wird erzielt, wenn $U(f)$ und $V(f)$ linear abhängig sind, dann wird auch

$$\begin{aligned} SNR &= \frac{P_{\text{Sig}}}{P_{\text{Stör}}} = \frac{K^2 \left| \int_{-\infty}^{\infty} U(f) V(f) df \right|^2}{a^2 \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df} \\ &= \frac{K^2 \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df}{a^2 \int_{-\infty}^{\infty} |V(f)|^2 df} = \frac{K^2 \int_{-\infty}^{\infty} |U(f)|^2 df}{a^2} = \frac{K^2 E_u}{a^2} \end{aligned}$$

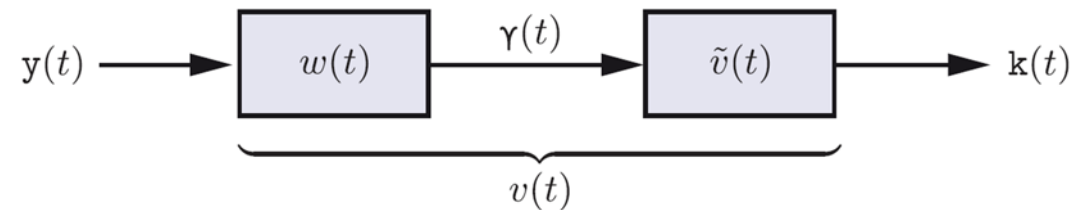
maximal

Matched-Filter

- Daraus folgt das **optimale Detektionsfilter** oder **Optimalfilter**:
 $V(f) = \text{const.} \cdot U^*(f) \Leftrightarrow v(t) = \text{const.} \cdot u^*(-t)$
- Faltung von $y(t)$ mit $u^*(-t)$ kann äquivalent auch durch Korrelation von $y(t)$ mit $u(t)$ erfolgen, daher wird das Optimalfilter auch als **Korrelationsfilter** bezeichnet
- In der englischen Literatur ist die Bezeichnung ***matched filter*** üblich

Matched-Filter bei farbigem Rauschen

- Jetzt Verallgemeinerung auf korreliertes (d. h. nicht mehr weißes, sondern farbiges) Rauschen $n(t)$ mit bekannter Autokorrelationsfunktion $r_{nn}(\tau)$ bzw. bekanntem Leistungsdichtespektrum $S_{nn}(f)$
- Dazu Zerlegung des Detektionsfilters $v(t)$ in zwei Teilfilter



- Am Ausgang des ersten Teilfilters:

$$\gamma(t) = y(t) * w(t) = K \cdot \underbrace{u(t - t_0) * w(t)}_{= \tilde{u}(t - t_0)} + \underbrace{n(t) * w(t)}_{= \rho(t)}$$

- Wahl von $w(t)$ so, dass die Faltung $\rho(t) = n(t) * w(t)$ eine Dekorrelation bewirkt, d. h. dass $\rho(t)$ ein weißer Prozess ist:
 $S_{\rho\rho}(f) = |W(f)|^2 S_{nn}(f) = \text{const.}$

$$\Rightarrow |W(f)| = \frac{1}{\sqrt{S_{nn}(f)}}$$

- $w(t)$ wird als **Whitening-Filter** bezeichnet

Matched-Filter bei farbigem Rauschen

- Damit wird die Detektion mit farbigem Rauschen auf den Fall mit weißem Rauschen zurückgeführt, wobei das zu detektierende Signal jetzt $\tilde{u}(t) = u(t) * w(t)$ ist

- Matched-Filter für $\tilde{u}(t)$: $\tilde{v}(t) = \text{const.} \cdot \tilde{u}^*(-t)$

- Insgesamt erhält man damit das

Matched-Filter für farbiges Rauschen:

$$\begin{aligned} v(t) &= \tilde{v}(t) * w(t) = \text{const.} \cdot \tilde{u}^*(-t) * w(t) \\ &= \text{const.} \cdot u^*(-t) * w^*(-t) * w(t) \end{aligned}$$

$$\bullet \rightarrow V(f) = \text{const.} \cdot U^*(f) |W(f)|^2 = \text{const.} \cdot \frac{U^*(f)}{S_{\text{nn}}(f)}$$

Matched-Filter bei farbigem Rauschen

- Matched-Filter für farbiges Rauschen:

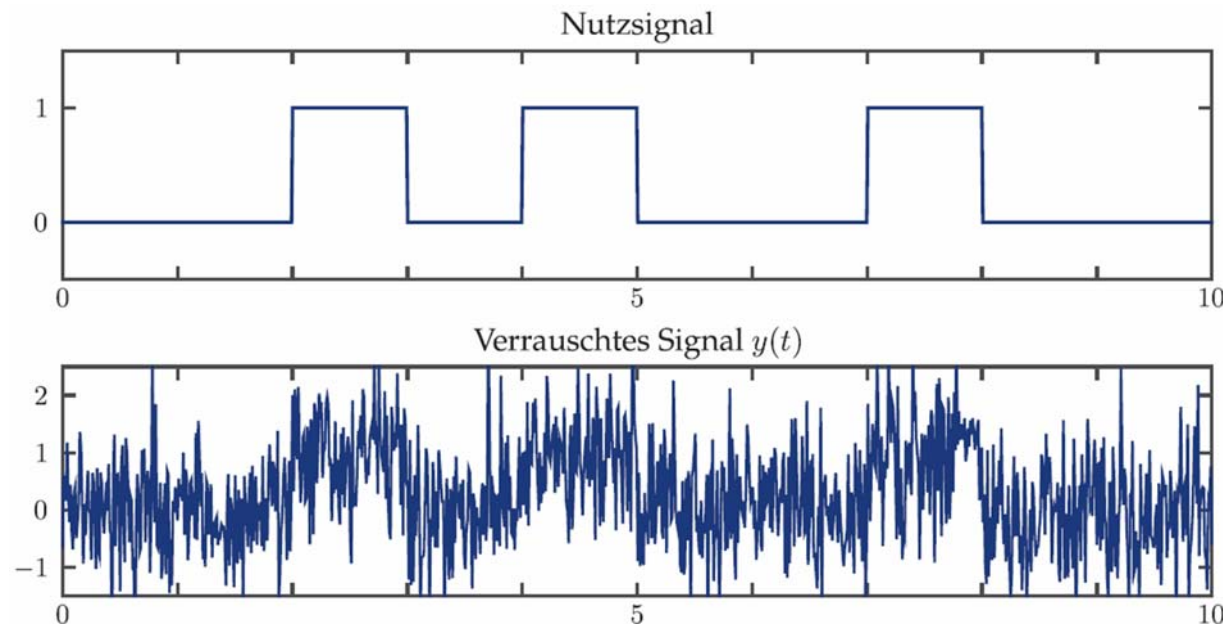
$$V(f) = \text{const.} \cdot \frac{U^*(f)}{S_{nn}(f)}$$

- $V(f)$ nimmt also
 - kleine Werte für Frequenzen an, bei denen das Rauschleistungsdichtespektrum $S_{nn}(f)$ groß im Vergleich zum Spektrum des Nutzsignals ist
 - große Werte für Frequenzen an, bei denen das Spektrum des Nutzsignals $u(t)$ groß gegenüber dem Rauschleistungsdichtespektrum $S_{nn}(f)$ ist

6.6 Signaldetektion

Matched-Filter bei farbigem Rauschen

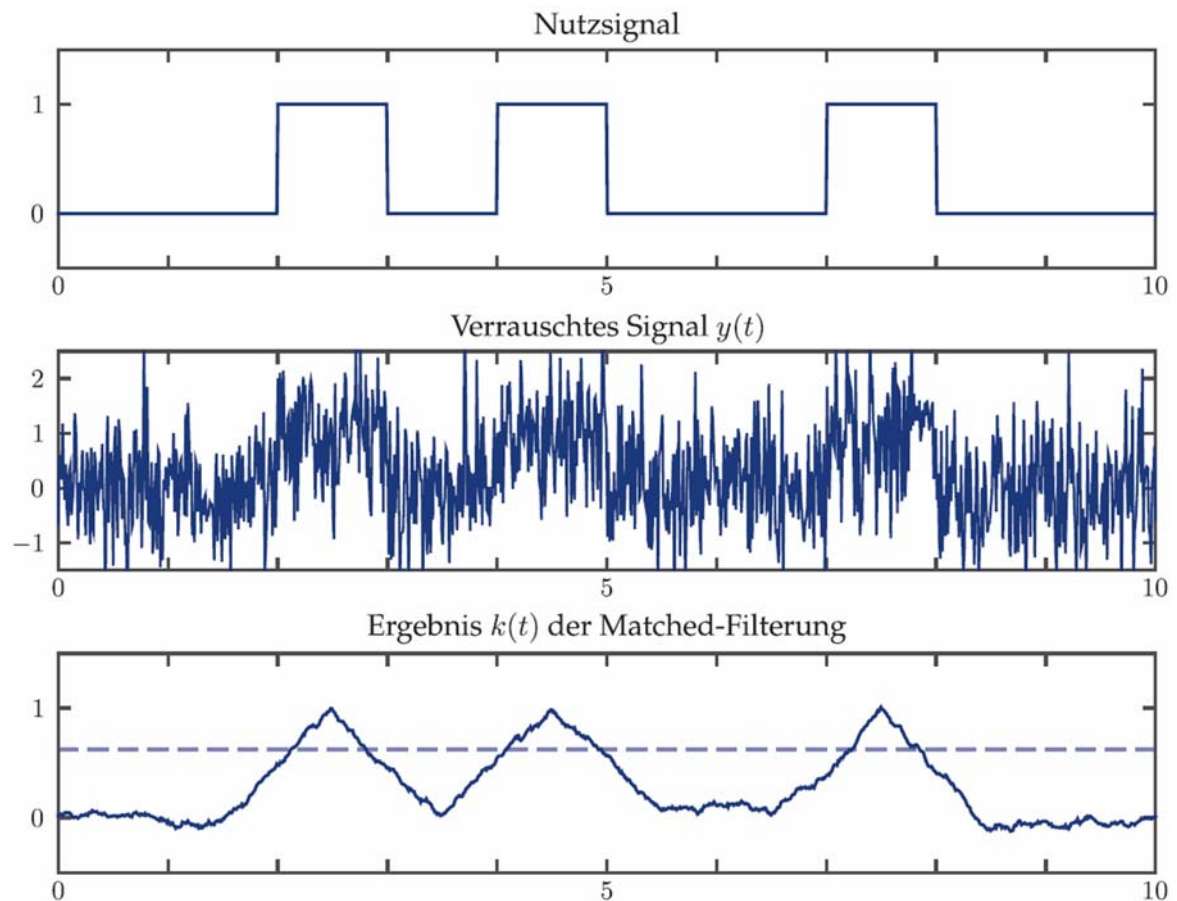
- Beispiel: Matched-Filter
 - Nachrichtensignal mit mehreren zu übertragenden Symbolen $u_i(t - t_i)$, d. h. rechteckige Pulse der Breite eins:
$$u(t) = \text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
 - Störung: additives weißes Gauß'sches Rauschen
 - Verrauschtes Signal: $y(t)$



6.6 Signaldetektion

Matched-Filter bei farbigem Rauschen

- Beispiel: Matched-Filter
 - Detektion mittels Optimalfilter: $v(t) = u(-t)$
 - Ergebnis der Filterung: $k(t) = y(t) * v(t)$,
ausgeprägte Maxima
(entsprechend der
Autokorrelationsfunktion
der Rechteck-Pulse) an
der Lage der Symbole
 - Detektion dieser
Maxima z. B. mittels
Schwellwert

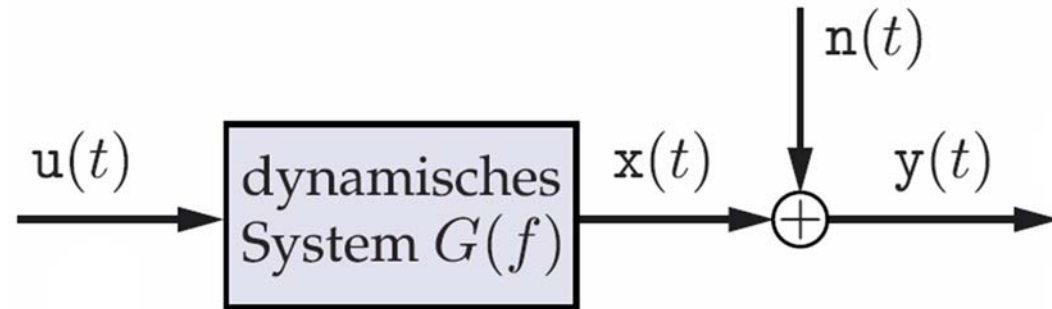


- Aufgabe der **Signalschätzung**: möglichst gute Rekonstruktion eines Signals, das durch die Dynamik eines nichtidealen (Mess-)Systems und überlagerte Störungen verfälscht wurde
- Dazu Auswertung statistischer Eigenschaften des Signals und der Störungen
- Typische Einsatzgebiete der Signalschätzung:
 - Messtechnik: Rekonstruktion des Messsignals $u(t)$ aus der Ausgangsgröße $y(t)$ zur Unterdrückung der Rückwirkung des Messsystems auf die Messgröße und von Rauscheinflüssen
 - Signalübertragung in der Nachrichten- und Automatisierungstechnik: Rekonstruktion eines gesendeten Signals $u(t)$ aus dem empfangenen Signal $y(t)$ zur Unterdrückung von Störungen durch den nichtidealen Übertragungskanal und von Rauscheinflüssen
 - Speicherung: Rekonstruktion eines gespeicherten Signals $u(t)$ aus dem vom Speicher ausgelesenen Signal $y(t)$ zur Unterdrückung von Störungen (Ausleserauschen)

6.7 Wiener-Filter

Signalmodell

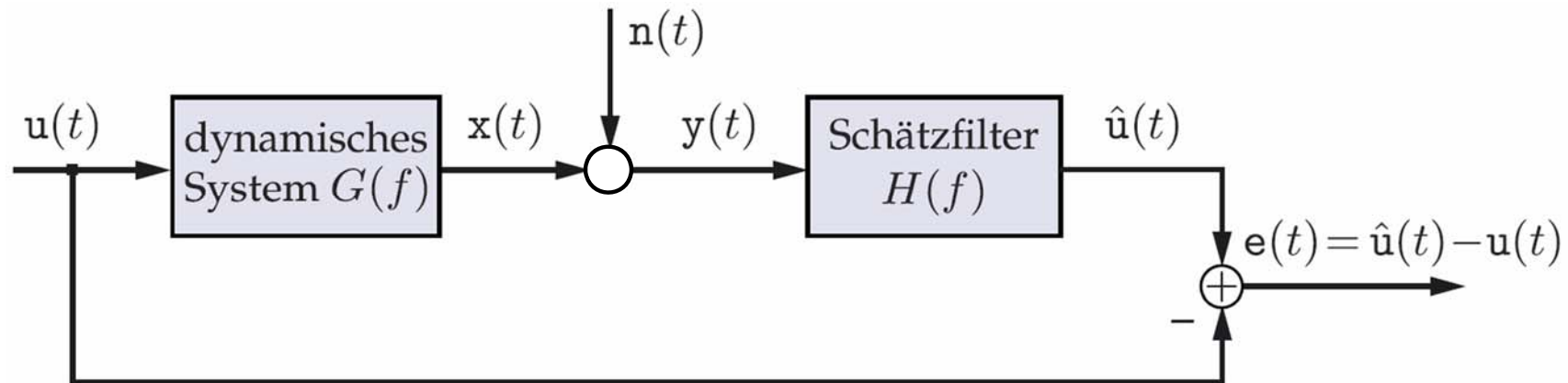
- Zu messendes Signal $u(t)$: nicht direkt zugänglich
- Beobachtetes Signal $y(t)$, verändert durch das dynamische System $G(f)$ und überlagerte Störung $n(t)$
- Annahme: Kreuzleistungsdichtespektrum $S_{yu}(f)$ sei bekannt, z. B. durch Testmessung von $y(t)$ bei bekanntem Eingangssignal $u(t)$
- Leistungsdichtespektrum $S_{yy}(f)$ kann jederzeit bestimmt werden



6.7 Wiener-Filter

Signalmodell

- Gesucht wird ein Schätzfilter $H(f)$ zur Rekonstruktion des Originalsignals $u(t)$



- Schätzkriterium: Ergebnis der Schätzung $\hat{u}(t)$ soll $u(t)$ möglichst ähnlich sein
- Dazu Minimierung der Leistung des Fehlersignals $e(t) = \hat{u}(t) - u(t)$:
$$E\{e^2(t)\} = E\left\{\left(\hat{u}(t) - u(t)\right)^2\right\} \rightarrow \min$$
- Resultierendes Filter ist dann Optimalfilter für die Signalschätzung und heißt **Wiener-Filter** (nach Norbert Wiener, 1949)

Herleitung

- Eingangssignal $u(t)$ und damit Rekonstruktionsfehler $e(t)$ sind zwar nicht bekannt, die Fehlerleistung lässt sich aber dennoch statistisch bestimmen

- Leistung des Zufallsprozesses $e(t)$ (siehe Kap. 6.4):

$$P_e = E\{e^2\} = \int_{-\infty}^{\infty} S_{ee}(f) df$$

- Leistungsdichte des Rekonstruktionsfehlers (siehe Kap. 6.4: Überlagerung von Zufallsgrößen):

$$S_{ee}(f) = S_{\hat{u}\hat{u}}(f) - S_{\hat{u}u}(f) - S_{u\hat{u}}(f) + S_{uu}(f)$$

- Einsetzen der Übertragungsfunktion des Schätzfilters $H(f)$ (siehe Kap. 6.4: Übertragung ergodischer Prozesse durch LTI-Systeme):

$$S_{ee}(f) = S_{yy}(f) |H(f)|^2 - S_{yu}(f) H(f) - S_{uy}(f) H^*(f) + S_{uu}(f)$$

- Minimierung von $S_{ee}(f)$ durch Ableitung nach $H(f)$
- $H(f)$ ist i. a. komplexwertig, daher getrennte Ableitung nach Betrag und Phase: $H = |H| e^{j\varphi}$

Herleitung

- Vereinfachung: Weglassen des Arguments f :

$$\begin{aligned} S_{ee} &= S_{yy} |H|^2 - S_{yu} H - S_{uy} H^* + S_{uu} \\ &= S_{yy} |H|^2 - S_{yu} |H| e^{j\varphi} - S_{uy} |H| e^{-j\varphi} + S_{uu} \end{aligned}$$

- Optimaler Amplitudengang: Ableitung von S_{ee} nach dem Betrag $|H|$:

$$\frac{dS_{ee}}{d|H|} = 2|H|S_{yy} - S_{yu}e^{j\varphi} - S_{uy}e^{-j\varphi}$$

$$\begin{aligned} &= 2|H|S_{yy} - S_{yu}e^{j\varphi} - S_{yu}^*e^{-j\varphi} \\ &= 2|H|S_{yy} - 2\operatorname{Re}\{S_{yu}e^{j\varphi}\} \stackrel{!}{=} 0 \end{aligned}$$

$$S_{yu}^* = S_{uy} \text{ für reelle Prozesse}$$

$$\Rightarrow |H| = \frac{\operatorname{Re}\{S_{yu}e^{j\varphi}\}}{S_{yy}}$$

- Optimaler Phasengang: Ableitung von S_{ee} nach der Phase φ :

$$\frac{dS_{ee}}{d\varphi} = -j|H|e^{j\varphi}S_{yu} + j|H|e^{-j\varphi}S_{yu}^* = -j2|H|\operatorname{Im}\{S_{yu}e^{j\varphi}\} \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Rightarrow \operatorname{Im}\{S_{yu}e^{j\varphi}\} = \operatorname{Im}\{|S_{yu}|e^{j(\arg\{S_{yu}\}+\varphi)}\} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = -\arg\{S_{yu}\}$$

Herleitung

- $|H| = \frac{\operatorname{Re}\{S_{yu}e^{j\varphi}\}}{S_{yy}}, \varphi = -\arg\{S_{yu}\}$

- φ eingesetzt in $|H|$:

$$|H| = \frac{\operatorname{Re}\{S_{yu}e^{j\varphi}\}}{S_{yy}} = \frac{\operatorname{Re}\{|S_{yu}|e^{j(\arg\{S_{yu}\}+\varphi)}\}}{S_{yy}} = \frac{|S_{yu}|}{S_{yy}}$$

$$\Rightarrow H = |H| e^{j\varphi} = \frac{|S_{yu}|}{S_{yy}} e^{-j \arg\{S_{yu}\}} = \frac{S_{yu}^*}{S_{yy}}$$

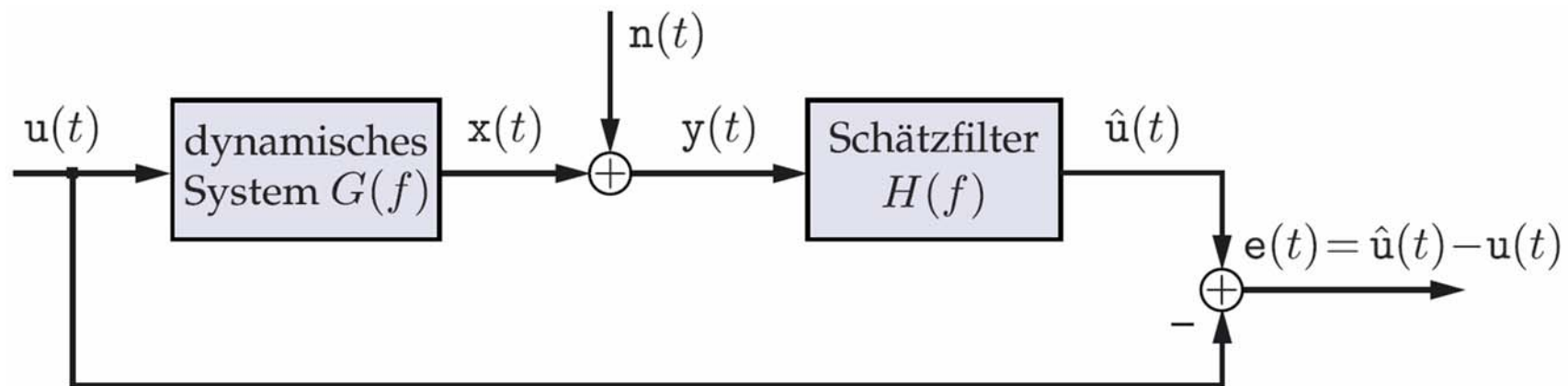
- Das Wiener-Filter ist also

$$H(f) = \frac{S_{yu}^*(f)}{S_{yy}(f)} = \frac{S_{uy}(f)}{S_{yy}(f)}$$

6.7 Wiener-Filter

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Bisher wurde keine Annahme über die Art der Signalverfälschung durch $G(f)$ (linear oder nichtlinear) und über die Art der Störung (additiv, multiplikativ oder andere) getroffen
- Jetzt Annahmen:
 - $G(f)$ beschreibt ein LTI-System
 - Additives Rauschen $n(t)$, nicht mit $u(t)$ korreliert



- Diese Annahmen treffen für viele reale (Mess-)Systeme zu

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Damit können die Leistungsdichten $S_{uy}(f)$ und $S_{yy}(f)$ genauer beschrieben werden:

$$S_{yy}(f) = S_{xx}(f) + S_{nn}(f) = S_{uu}(f) |G(f)|^2 + S_{nn}(f)$$

$$S_{uy}(f) = S_{ux}(f) + S_{un}(f) = S_{uu}(f) \underbrace{G^*(f)}_{=0} + S_{un}(f)$$

- Damit folgt das Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen:

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{S_{uy}(f)}{S_{yy}(f)} = \frac{S_{uu}(f) G^*(f)}{S_{uu}(f) |G(f)|^2 + S_{nn}(f)} \\ &= \frac{1}{G(f)} \cdot \frac{|G(f)|^2}{|G(f)|^2 + \frac{S_{nn}(f)}{S_{uu}(f)}} \end{aligned}$$

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen:

$$H(f) = \underbrace{\frac{1}{G(f)}}_{\text{inverses Filter}} \cdot \frac{|G(f)|^2}{\underbrace{|G(f)|^2 + \frac{S_{nn}(f)}{S_{uu}(f)}}_{= SNR^{-1}(f)}}$$

- Falls keine Störungen vorhanden sind: $SNR \rightarrow \infty$

$$\Rightarrow H(f) = \frac{1}{G(f)}$$

- Falls starke Störungen vorhanden sind: $SNR \rightarrow 0$

$$\Rightarrow H(f) = 0$$

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Bei Nullstellen von $G(f)$:

$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{G(f)} \cdot \frac{|G(f)|^2}{|G(f)|^2 + \frac{S_{nn}(f)}{S_{uu}(f)}} = \frac{1}{G(f)} \cdot \frac{G(f) G^*(f)}{|G(f)|^2 + \frac{S_{nn}(f)}{S_{uu}(f)}} \\ &= \frac{G^*(f)}{|G(f)|^2 + \frac{S_{nn}(f)}{S_{uu}(f)}} = 0 \end{aligned}$$

d. h. Filter schließt ebenfalls

6.7 Wiener-Filter

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

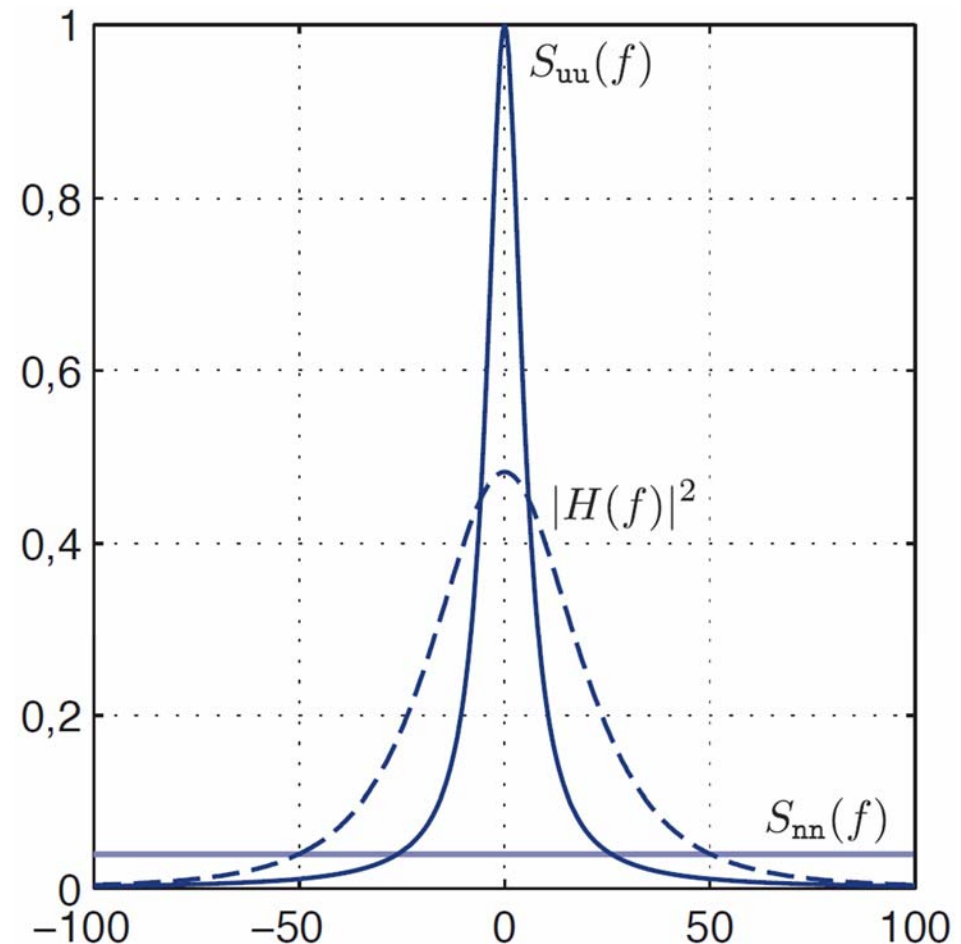
- Beispiel: Rauschunterdrückung
 - Messsignal $u(t)$ mit Tiefpasscharakteristik, additiv überlagertes weißes Rauschen $n(t)$
 - Leistungsdichtespektren:

$$S_{uu}(f) = \frac{U^2}{1 + (b \cdot 2\pi f)^2},$$

$$S_{nn}(f) = a^2$$

- Wiener-Filter (mit $G(f) = 1$):

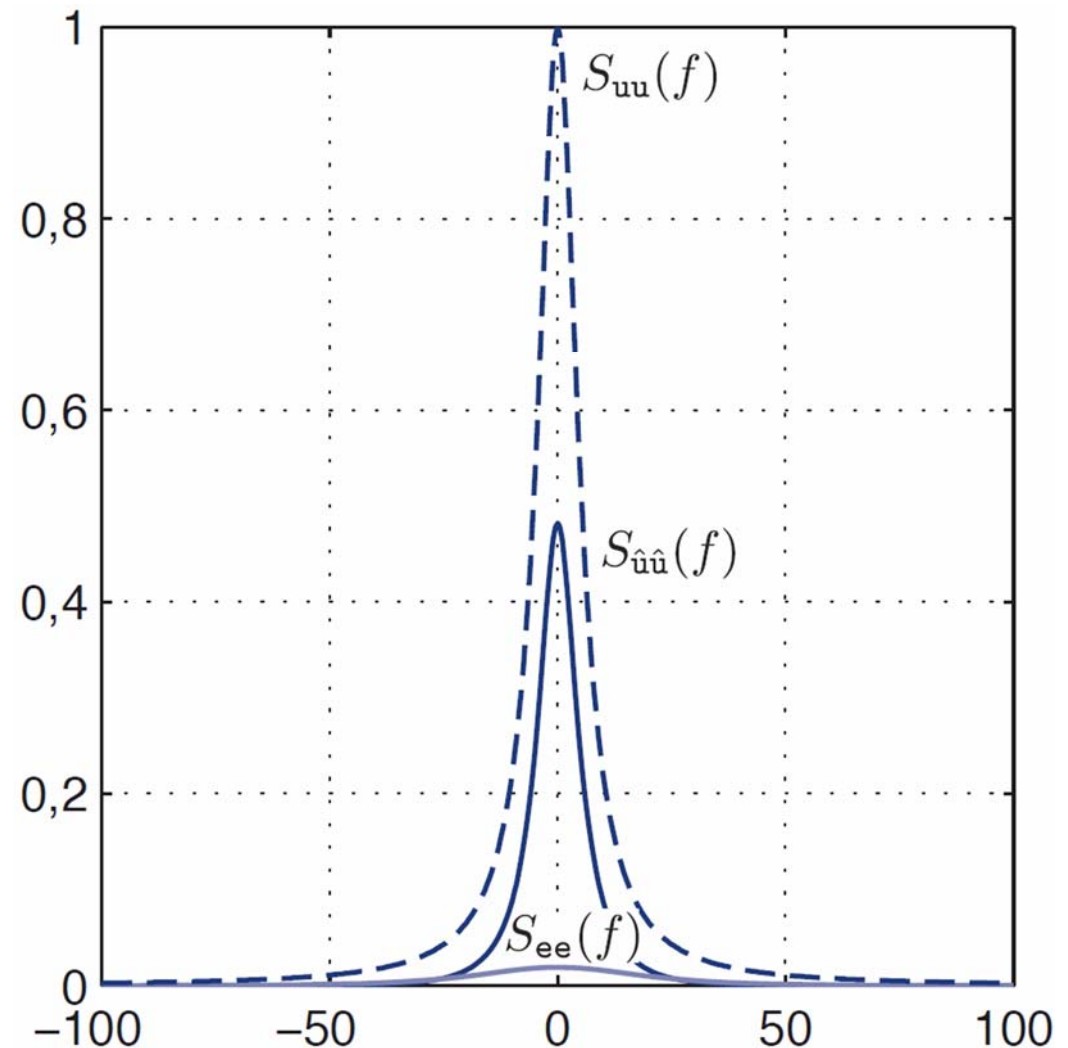
$$\begin{aligned} H(f) &= \frac{1}{1 + \frac{S_{nn}(f)}{S_{uu}(f)}} \\ &= \frac{S_{uu}(f)}{S_{uu}(f) + S_{nn}(f)} \\ &= \frac{U^2}{U^2 + a^2 + (b \cdot 2\pi f)^2} \end{aligned}$$



6.7 Wiener-Filter

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Beispiel: Rauschunterdrückung
 - Leistungsdichtespektren



Bildquelle: F. Punte León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Wiener-Filter $H(f)$ ist i. a. akausal (d. h. $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\}$ besitzt Werte ungleich null für $t < 0$), dann lässt sich die Filterung des Signals $y(t)$ nicht in Echtzeit durchführen
- Für Filterung in Echtzeit muss daher $h(t)$ so angepasst werden, dass ein kausales Signal entsteht:
$$h_{\text{kaus}}(t) = h(t) \cdot \sigma(t)$$

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

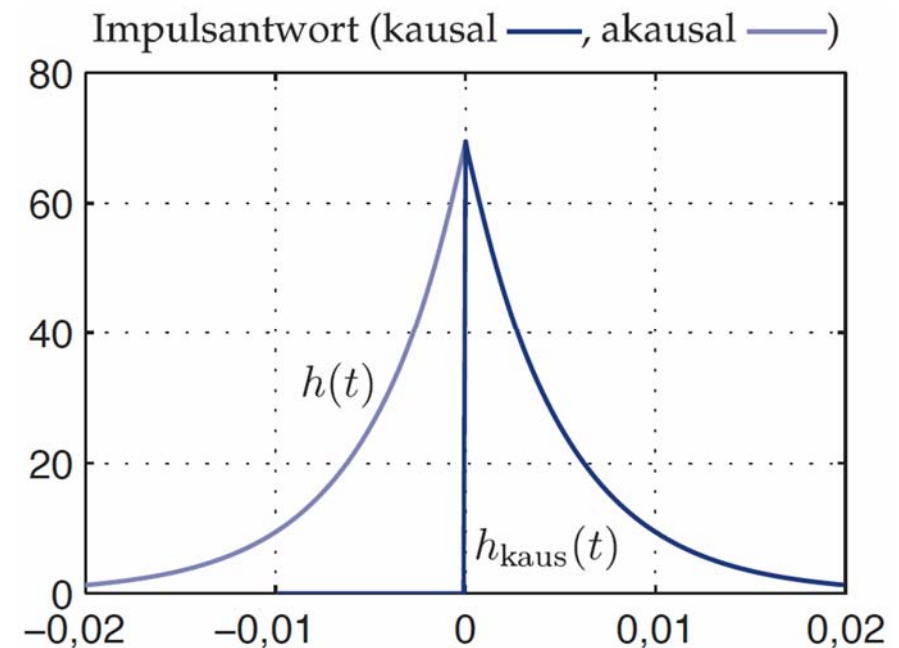
- Beispiel: Rauschunterdrückung (s. oben)
- Übertragungsfunktion des Wiener-Filters:

$$H(f) = \frac{U^2}{U^2 + a^2 + (b \cdot 2\pi f)^2} = k \frac{2\lambda}{\lambda^2 + (2\pi f)^2}$$

mit

$$k = \frac{U^2}{2ab\sqrt{U^2 + a^2}}, \quad \lambda = \sqrt{\frac{U^2}{a^2 b^2} + \frac{1}{b^2}}$$

- Impulsantwort mittels inverser Fourier-Transformation:
 $h(t) = \mathcal{F}^{-1}\{H(f)\} = k \cdot e^{-\lambda|t|}$
ist akausal
- Kausale Impulsantwort:
 $h_{\text{kaus}}(t) = k \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sigma(t)$



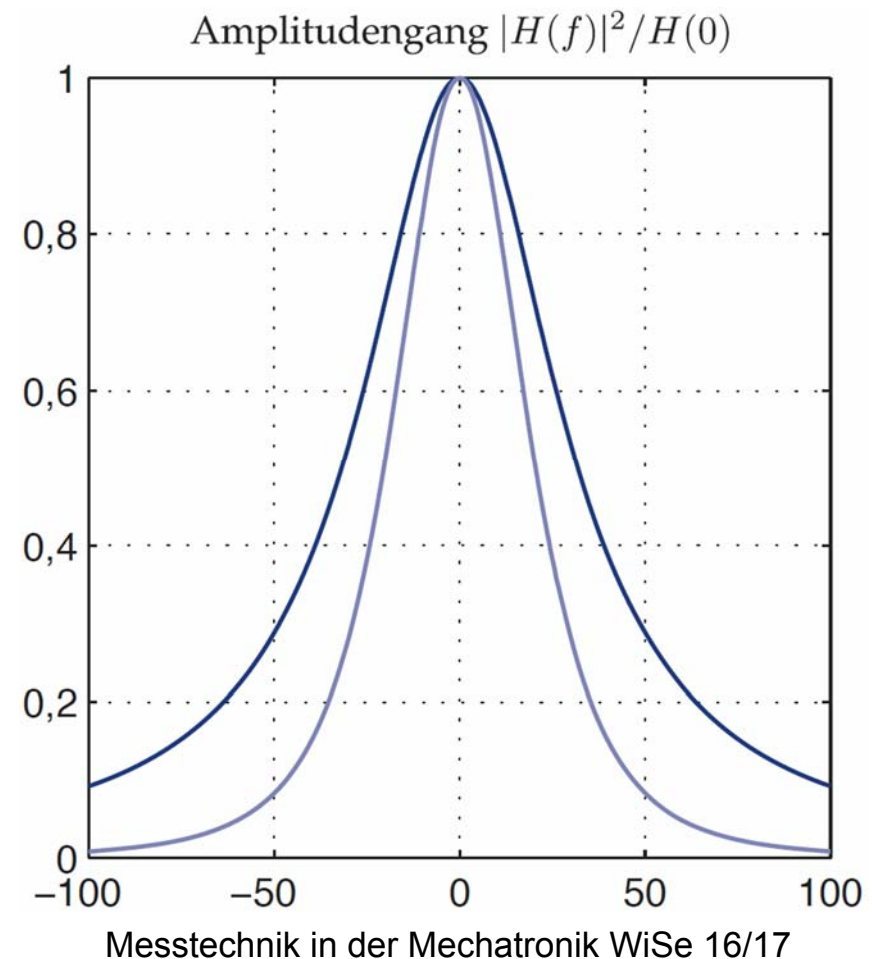
6.7 Wiener-Filter

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Beispiel: Rauschunterdrückung (s. oben)
 - Frequenzgang des kausalen Filters:

$$H_{\text{kaus}}(f) = \mathcal{F}\{h_{\text{kaus}}(t)\} = \mathcal{F}\{k \cdot e^{-\lambda t} \cdot \sigma(t)\} = k \cdot \frac{1}{\lambda + j2\pi f}$$

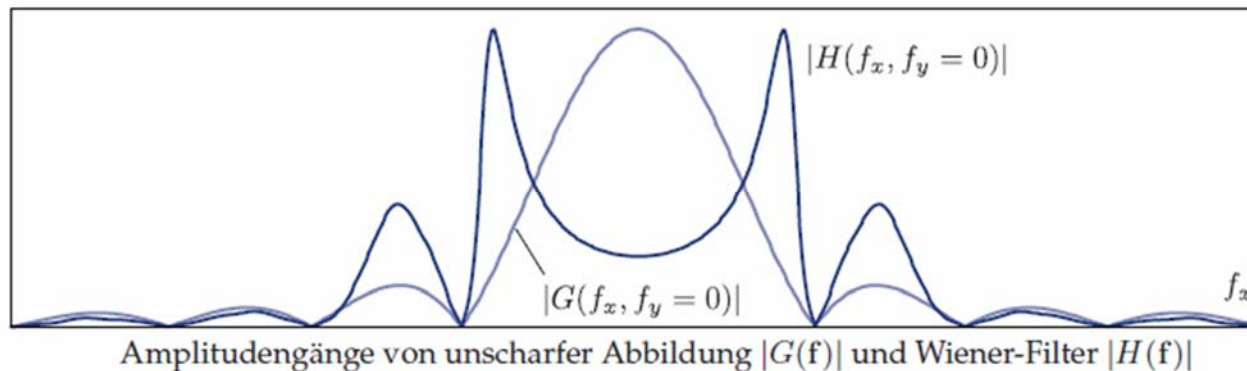
- Vergleich mit akausalem Filter:
Durchlassbereich des kausalen Filters ist deutlich breiter, Rauschunterdrückung gelingt daher nicht so gut, aber das kausale Filter kann für Echtzeitanwendungen eingesetzt werden



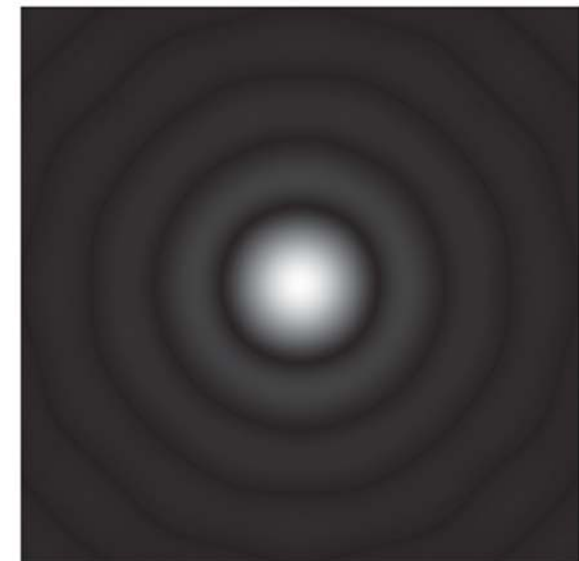
6.7 Wiener-Filter

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Beispiel: Bildrestauration
 - Aufgenommenes Eingangsbild $y(x)$, $x = (x, y)^T$, aufgenommen mit einer unscharfen Abbildungsoptik mit Tiefpasscharakter und mit Übertragungsfunktion $G(f)$, $f = (f_x, f_y)^T$
 - Amplitudengang der unscharfen optischen Abbildung: rotationssymmetrisch mit Nullstellen (auf konzentrischen Kreisen)
 - Zusätzlich additives Rauschen $n(x)$

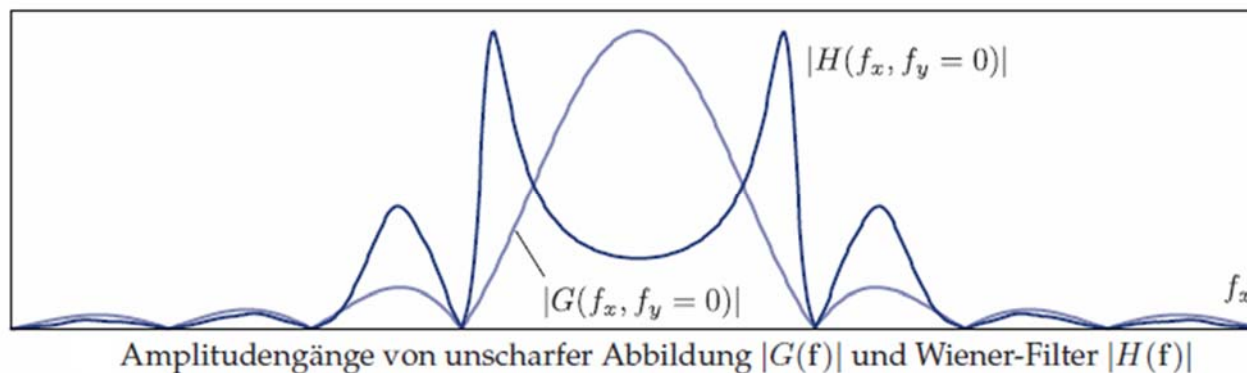


Realisierung des Messsignals $y(x)$

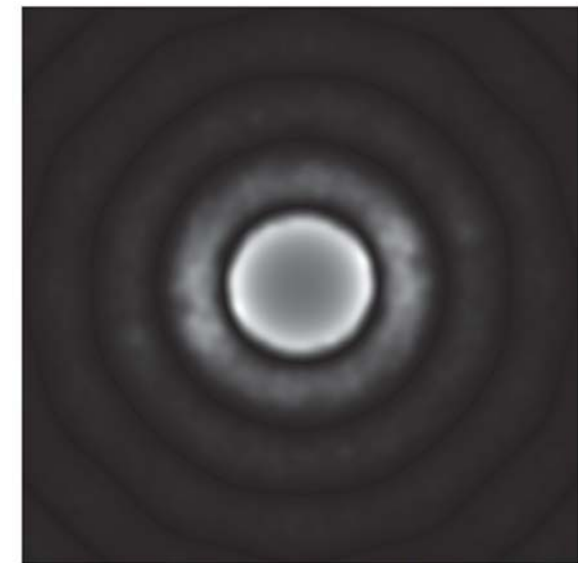


Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Beispiel: Bildrestauration
 - Annahme: weißes Rauschen $n(x)$ mit Leistungsdichte $S_{nn}(f)$
 - Leistungsdichte $S_{uu}(f)$ des unverzerrten Signals $u(x)$:
Schätzung aus dem Messsignal $y(x)$, dazu Berechnung des Periodogramms $\hat{S}_{yy}(f)$ und Subtraktion der bekannten Leistungsdichte des Rauschprozesses $S_{nn}(f)$
 - Damit Bestimmung des Wiener-Filters:
gleiche Nullstelle von $G(f)$ und $H(f)$,
aber Verstärkung von Frequenzen mit starkem Nutzanteil



Amplitudengänge von unscharfer Abbildung $|G(f)|$ und Wiener-Filter $|H(f)|$



Amplitudengang $|H(f)|$

6.7 Wiener-Filter

Wiener-Filter bei linearer Verzerrung und additivem Rauschen

- Beispiel: Bildrestauration
 - Ergebnis der Restauration: optimal im Sinne des quadratischen Fehlers, nicht unbedingt entsprechend dem visuellen Eindruck



Realisierung des Messsignals $y(x)$



Ergebnis der Wiener-Filterung