

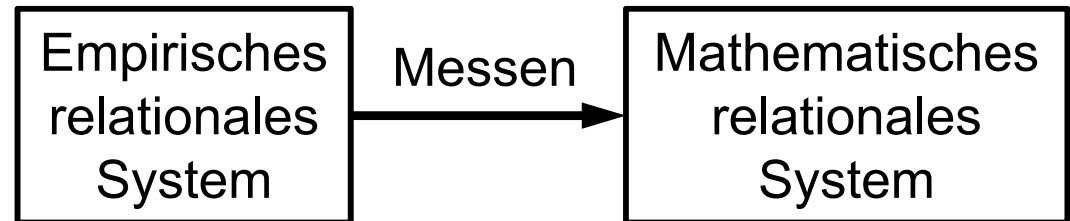
# **1. Messsysteme und Messfehler**

## **1. Messsysteme und Messfehler**

- 1.1 Skalen
- 1.2 Metrische Größen
- 1.3 Messsysteme
- 1.4 Messfehler

# 1.1 Skalen

- Messen: Zuordnen von mathematischen Symbolen (z. B. Zahlen) zu bestimmten Merkmalen empirischer Objekte, basierend auf objektiven Regeln
- Zusammenhänge zwischen den Merkmalen: empirische Relationen (z. B. „größer als“, „doppelt so groß“)
- Empirisches relationales System (ERS): Menge der empirischen Objekte bzw. Merkmale mit den zugehörigen Relationen
- Mathematisches relationales System (MRS): Menge der mathematischen Symbole mit den zugehörigen (mathematischen) Relationen
- Messen: somit homomorphe (strukturervhaltende) Abbildung vom ERS in ein MRS
- Unterschiedliche Skalentypen je nach Aussagekraft der geltenden empirischen Relationen



# 1.1 Skalen

	Skala				
	qualitativ		quantitativ (metrisch, kardinal)		
	Nominal-	Ordinal-	Intervall-	Verhältnis-	Absolut-
Empirische Relationen	~ Äquivalenz	~ Äquivalenz > Ordnung	~ Äquivalenz > Ordnung $\oplus$ Emp. Addition	~ Äquivalenz > Ordnung $\oplus$ Emp. Addition $\otimes$ Emp. Multipl.	~ Äquivalenz > Ordnung $\oplus$ Emp. Addition $\otimes$ Emp. Multipl.
Zulässige Transformationen	$\tilde{u} = f(u)$ mit $f(.)$ bijektiv	$\tilde{u} = f(u)$ mit $f(.)$ streng monoton (i.a. steigend)	$\tilde{u} = a \cdot u + b$ mit $a > 0$	$\tilde{u} = a \cdot u$ mit $a > 0$	$\tilde{u} = u$
Lageparameter	Modalwert	Median	arithmetischer Mittelwert	harmonischer/geometrischer Mittelwert	harmonischer/geometrischer Mittelwert
Streuungsmaße	Entropie	Quantile	Varianz	Variationskoeffizient	Variationskoeffizient
Mathematische Struktur	Menge	total geordnete Menge	affine Gerade	Körper	Körper
Werte von $u$	Zahlen, Begriffe, Symbole	i. d. R. natürliche Zahlen	i. d. R. reelle Zahlen	i. d. R. reelle Zahlen $> 0$	i. d. R. natürliche Zahlen

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.

## 1.2 Metrische Größen

---

- Im Kontext der Messtechnik: meist metrische Größen
- Damit Definition einer Messung:
  - Messen bedeutet, die Ausprägung einer (metrischen) Messgröße quantitativ zu erfassen
  - Dazu Vergleich der Messgröße mit einer vereinbarten Maßeinheit (dem Normal, *measurement standard*)
  - Messgröße = Zahlenwert · Maßeinheit
  - Zahlenwert: gibt an, wie oft die Maßeinheit in der Messgröße enthalten ist
- Definitionen für anders skalierte Messgrößen: hier nicht betrachtet

## 1.2 Metrische Größen

---

- Voraussetzung für Messung:
  - Eindeutige Definition der Messgröße
  - Festlegung der Einheit bzw. des Normals durch eine Konvention
- Aspekte bei der Festlegung einer Einheit:
  - Im Prinzip willkürlich möglich
  - Praktische Anwendbarkeit (sowohl im Alltagsleben als auch in der Wissenschaft)
  - Gute Reproduzierbarkeit
  - Unveränderlichkeit des Normals
  - Einfach Zusammenhänge zwischen unterschiedlichen Einheiten

### Einheitensystem

- Widerspruchsfreie Darstellung aller physikalischen Größen mittels 7 Basisgrößen möglich
- Ableitung aller anderen physikalischen Größen aus diesen Basisgrößen
- Bis ins 19. Jahrhundert: keine international einheitliche Festlegung der Basisgrößen
  - Z. B. Einheit für die Länge: Elle (Freiburger Elle: 54 cm, Badische Elle: 60 cm, Bremer Elle: 55 cm)
  - Dadurch Behinderung des nationalen/internationalen Handels

### Einheitensystem

- Vereinheitlichung ab 1790:
  - Beschluss der Schaffung eines einheitlichen Einheitensystems durch die französische Nationalversammlung, ausschließlich auf Grundlage objektiver physikalischer Kriterien, für alle Nationen zugänglich
  - 1799: einheitliches metrisches System („Mètre des Archives“, „Kilogramme des Archives“)
  - 1875: Abschluss der Meterkonvention, Unterzeichnung durch 17 Staaten



## 1.2 Metrische Größen

### Einheitensystem

- Heute gültiges Einheitensystem in Deutschland: SI-System („Système Internationale d’unités“)
- Festlegung von 7 Basisgrößen und deren Einheiten
- Auswahl der Basisgrößen nach praktischen Gesichtspunkten
- Einheiten sind zueinander kohärent (aufeinander abgestimmt):  
Ermittlung von abgeleiteten Einheiten durch Multiplikation und Division ohne Proportionalitätsfaktoren  
(z. B. Geschwindigkeit:  $\frac{\text{m}}{\text{s}}$ )

Basisgröße	Größen-symbol	Basis-einheit	Einheiten-zeichen
Länge	$l$	Meter	m
Masse	$m$	Kilogramm	kg
Zeit	$t$	Sekunde	s
Stromstärke	$I$	Ampere	A
Thermo-dynamische Temperatur	$T$	Kelvin	K
Stoffmenge	$n$	Mol	Mol
Lichtstärke	$I_V, I_L$	Candela	cd

### Einheitensystem

- Basiseinheiten:
  - Meter: Länge der Strecke, die das Licht im Vakuum während eines Zeitintervalls von  $1 / 299\,792\,458$  Sekunde zurücklegt  
Damit Festlegung der Lichtgeschwindigkeit  $c_0$   
Bezug auf Basiseinheit Sekunde
  - Kilogramm: Masse des Internationalen Kilogrammprototyps
  - Sekunde: 9 192 631 770-faches der Periodendauer der dem Übergang zwischen den beiden Hyperfeinstrukturniveaus des Grundzustandes von Atomen des Caesium-Isotops  $^{133}\text{Cs}$  entsprechenden Strahlung

### Einheitensystem

- Basiseinheiten:
  - Ampere: Stärke eines konstanten elektrischen Stromes, der, durch zwei parallele, geradlinige, unendlich lange und im Vakuum im Abstand von 1 Meter voneinander angeordnete Leiter von vernachlässigbar kleinem, kreisförmigem Querschnitt fließend, zwischen diesen Leitern pro Meter Leiterlänge die Kraft  $2 \cdot 10^{-7}$  Newton hervorrufen würde  
Bezug auf abgeleitete Einheit Newton
  - Kelvin:  $1 / 273,16$  der thermodynamischen Temperatur des Tripelpunkts von Wasser mit genau definierter isotopischer Zusammensetzung  
Temperaturdifferenzen können auch in Grad Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) angegeben werden

### Einheitensystem

- Basiseinheiten:
  - Mol: Die Stoffmenge eines Systems, das aus ebenso vielen Einzelteilchen besteht, wie Atome in 12 Gramm des Kohlenstoff-Nuklids  $^{12}\text{C}$  in ungebundenem Zustand enthalten sind  
Die zu beschreibenden Teilchen (z.B. Atome, Moleküle, Ionen, Elektronen) müssen spezifiziert sein
  - Candela: Die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz  $540 \cdot 10^{12}$  Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung 1 / 683 Watt pro Steradian beträgt

## 1.2 Metrische Größen

### Einheitensystem

- SI-Vorsätze: Dezimal-Präfixe zur vereinfachten Darstellung kleiner bzw. großer Größen:

Wert	Bezeichnung	Symbol
$10^{-24}$	Yokto	y
$10^{-21}$	Zepto	z
$10^{-18}$	Atto	a
$10^{-15}$	Femto	f
$10^{-12}$	Piko	p
$10^{-9}$	Nano	n
$10^{-6}$	Mikro	$\mu$ (u)
$10^{-3}$	Milli	m
$10^{-2}$	Zenti	c
$10^{-1}$	Dezi	d

Wert	Bezeichnung	Symbol
$10^{24}$	Yotta	Y
$10^{21}$	Zetta	Z
$10^{18}$	Exa	E
$10^{15}$	Peta	P
$10^{12}$	Tera	T
$10^9$	Giga	G
$10^6$	Mega	M
$10^3$	Kilo	k
$10^2$	Hekto	h
$10^1$	Deka	da

## 1.2 Metrische Größen

### Einheitensystem

- Abgeleitete SI-Einheiten:
  - Vereinfachung der Darstellung der jeweiligen Einheit durch Bezug auf Basiseinheiten ohne Proportionalitätsfaktor
  - Verzicht auf Mitführung der jeweiligen Basiseinheiten

Größe	Formelzeichen	SI-Einheit		Beziehung
Ebener Winkel	$\alpha$	Radian	rad	$1 \text{ rad} = 1 \text{ m/m}$
Raumwinkel	$\Omega$	Steradian	sr	$1 \text{ sr} = 1 \text{ m}^2/\text{m}$
Frequenz	$f$	Hertz	Hz	$1 \text{ Hz} = 1/\text{s}$
Kraft	$F$	Newton	N	$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m/s}^2$
Druck	$p$	Pascal	Pa	$1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2$
Energie	$E$	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ W s}$
Arbeit	$W$	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ W s}$
Wärmemenge	$Q$	Joule	J	$1 \text{ J} = 1 \text{ N m} = 1 \text{ W s}$
Leistung	$P$	Watt	W	$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N m/s}$

## 1.2 Metrische Größen

### Einheitensystem

- Abgeleitete SI-Einheiten:

Größe	Formelzeichen	SI-Einheit		Beziehung
Elektrische Ladung	$Q$	Coulomb	C	$1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$
Elektrische Spannung	$U$	Volt	V	$1 \text{ V} = 1 \text{ W/A}$
Elektrische Kapazität	$C$	Farad	F	$1 \text{ F} = 1 \text{ C/V} = 1 \text{ A s/V}$
Elektrischer Widerstand	$R$	Ohm	$\Omega$	$1 \Omega = 1 \text{ W/A}^2$
Elektrischer Leitwert	$G$	Siemens	S	$1 \text{ S} = 1/\Omega$
Induktivität	$L$	Henry	H	$1 \text{ H} = 1 \text{ Wb/A}$
Magnetischer Fluss	$\Phi$	Weber	Wb	$1 \text{ Wb} = 1 \text{ V s}$
Magnetische Flussdichte	$B$	Tesla	T	$1 \text{ T} = 1 \text{ V s/m}^2$
Lichtstrom	$\Phi$	Lumen	lm	$1 \text{ lm} = 1 \text{ cd sr}$
Beleuchtungsstärke	$E_v$	Lux	lx	$1 \text{ lx} = 1 \text{ lm/m}^2$

## 1.2 Metrische Größen

### Einheitensystem

- Abgeleitete SI-Einheiten:

Größe	Formelzeichen	SI-Einheit		Beziehung
Radioaktivität	$A$	Becquerel	Bq	$1 \text{ Bq} = 1 \text{ s}^{-1}$
Energiedosis	$D$	Gray	Gy	$1 \text{ Gy} = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2$
Äquivalentdosis	$H$	Sievert	Sv	$1 \text{ Sv} = 1 \text{ m}^2/\text{s}^2$
Katalytische Aktivität	$z$	Katal	kat	$1 \text{ kat} = 1 \text{ mol/s}$



### Anpassung der Definition der Einheiten

- Definition der Normale nicht für alle Zeiten festgelegt
- Regelmäßige Prüfung des aktuellen Entwicklungsstands und ggf. Anpassungen durch das Comité Internationale des Poids et Mesures (CIPM)
- Beispiel Meter:
  - 1889: Mechanisches Normal
    - X-förmiger Stab aus Platin-Iridium
    - Bestimmung des „Urmeters“ durch Losverfahren aus 37 Prototypen
    - 1 m: Abstand zweier Strichmarken bei Temperatur 0 °C
    - Aufbewahrung des Urmeters und sechs weiterer Prototypen in Sèvres bei Paris, Verteilung der restlichen Normale auf die Unterzeichnerstaaten der Meterkonvention

### Anpassung der Definition der Einheiten

- Beispiel Meter:
  - 1960: Normal durch Vergleich mit Strahlungswellenlänge
    - 1 m: 1 650 763,73-faches der Wellenlänge der von Atomen des Nuklids  $^{86}\text{Kr}$  (Krypton) beim Übergang vom Zustand  $5d_5$  auf den Zustand  $2p_{10}$  ausgesandten Strahlung im Vakuum
  - 1963: Normal durch Vergleich mit der Lichtgeschwindigkeit
    - 1 m: Länge, die Licht im Vakuum in einem Zeitintervall von  $1 / 299\,792\,458$  Sekunden zurücklegt
    - Bis heute gültig
- Momentane Bestrebung:
  - Rückführung der Definitionen der Normale auf Naturkonstanten
  - Dadurch gegenseitige Abhängigkeit der Einheitendefinition und der Naturkonstanten: Unsicherheit der Bestimmung der Naturkonstanten legt Unsicherheit der Einheitendefinition fest

### Struktur von Messsystemen

- Messsystem: Einrichtung zur Messung einer physikalischen Größe
- Unterschiedliche Komplexität von Messsystemen abhängig von der Messaufgabe (Messgröße, Umgebungsbedingungen, Messzeit, geforderte Unsicherheit usw.)
- Direkte Messverfahren:
  - Bestimmung des gesuchten Messwerts durch unmittelbaren Vergleich der Messgröße mit einem Bezugswert
  - Beispiel: Balkenwaage  
Vergleich der unbekannten Masse  $m$  mit der bekannten Masse der Gewichtssteine

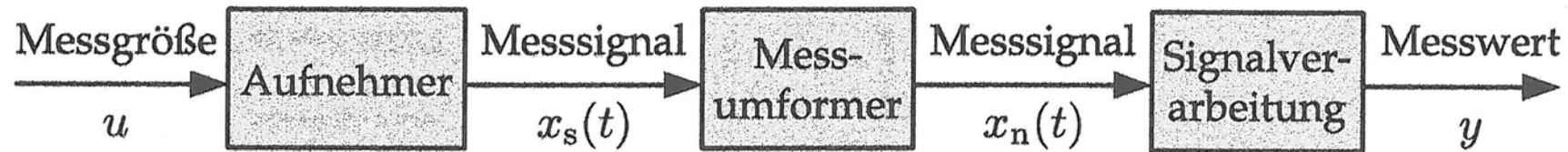
### Struktur von Messsystemen

- Indirekte Messverfahren:
  - Bestimmung des gesuchten Messwerts durch Rückführung der Messgröße auf andere, messbare Größen mittels physikalischer Zusammenhänge und Ermittlung der Messgröße aus diesen Größen
  - Beispiel: Federwaage  
Bestimmung der Masse  $m$  durch Bestimmung der Auslenkung  $x$  einer Feder  
Kräftegleichgewicht:  $mg = cx \Rightarrow m = \frac{cx}{g}$  ( $g$ : Erdbeschleunigung)  
Abgelesen wird die Auslenkung  $x$ , daraus wird die Messgröße  $m$  indirekt berechnet

## 1.3 Messsysteme

### Aufbau von Messsystemen

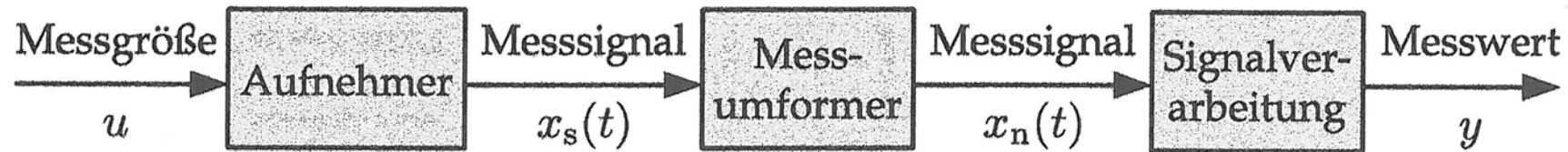
- Signalflussplan (nicht immer sind alle Komponenten vorhanden):



- Aufnehmer (auch als Sensor, Fühler bezeichnet):
  - Eingang: zu messende Größe  $u$
  - Ausgang: weiterverarbeitbares (meist elektrisches) Signal  $x_s$ , das von  $u$  abhängt
- Messumformer:
  - Abbildung des Eingangssignals  $x_s$  in ein zur Weiterverarbeitung geeigneteres Ausgangssignal  $x_n$  (z. B. Digitalisierung, Filterung, Übertragung, Speicherung)
  - Enthält meist einen Messverstärker

### Aufbau von Messsystemen

- Signalflussplan (nicht immer sind alle Komponenten vorhanden):



- Signalverarbeitung:
  - Extraktion des informationstragenden Signals  $y$  (z. B. Amplitude, Frequenz) aus dem Eingangssignal  $x_n$
  - Daraus Ermittlung des Messergebnisses
  - Dazu meist digitale Signalverarbeitung (ggf. nach Digitalisierung) mittels Digitalrechner oder Mikrocontroller
- Untersuchung des Verhaltens von Messsystemen durch Beschreibung (Modellbildung) der Komponenten: Ermittlung eines mathematischen Zusammenhangs zwischen Ein- und Ausgangsgrößen des Systems

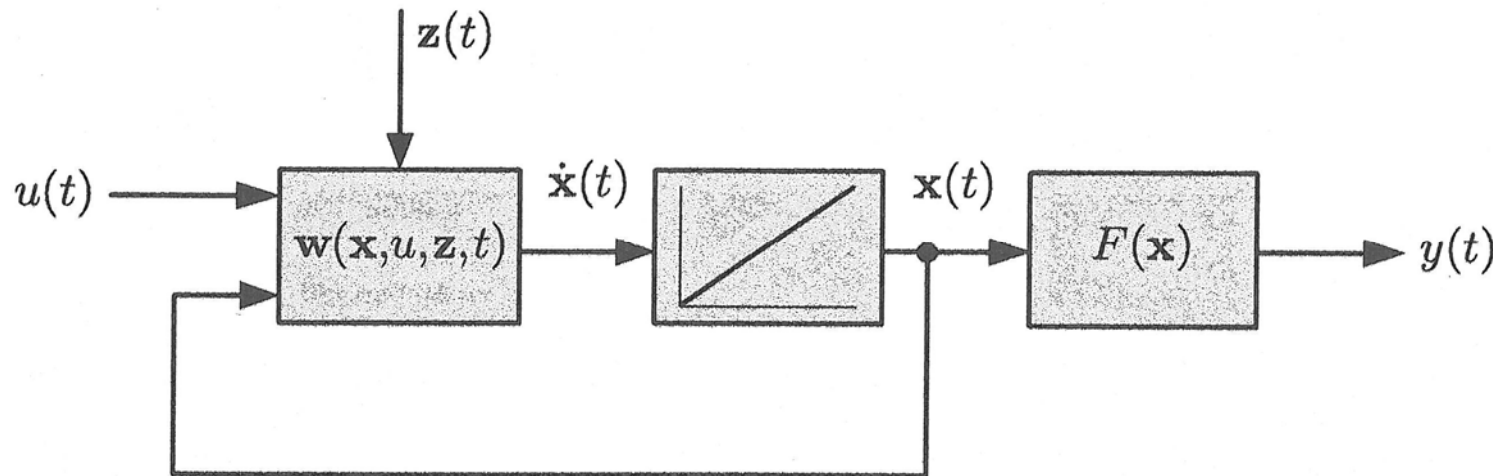
### Beschreibung von Messsystemen im Zustandsraum

- Beschreibung des dynamischen Verhaltens eines Messsystems:
  - Berücksichtigung der Messgröße (Eingangsgröße)  $u(t)$  und des angezeigten Werts (Ausgangsgröße)  $y(t)$
  - Berücksichtigung der inneren Zustandsgrößen des Systems: vermittelnde Größen zwischen Ein- und Ausgang, zusammengefasst im Zustandsvektor  $x(t)$

## 1.3 Messsysteme

### Beschreibung von Messsystemen im Zustandsraum

- Damit allgemeine Beschreibung eines Messsystems:



- Zustandsgleichung:  $\dot{\mathbf{x}}(t) = \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t), t)$
- Ausgangsgleichung:  $y(t) = F(\mathbf{x}(t))$
- Berücksichtigung von Störungen, die das Systemverhalten (meist unerwünscht) beeinflussen: Störgrößenvektor  $\mathbf{z}(t)$ , sind auch Eingangsgrößen des Systems



### Beschreibung von Messsystemen im Zustandsraum

- Ziel: eindeutige Bestimmung des Zustandsvektors für beliebige Zeitpunkte  $t > t_0$ 
  - In technischen Systemen meist möglich, wenn Anfangswert  $x(t_0)$  und Verlauf der Eingangsgröße  $u(t)$  im Intervall  $[t_0, t]$  bekannt ist
- Beispiel: Federwaage
  - Messgröße  $u$ : Masse  $m$  (zeitlich konstant)
  - Zustandsvektor  $x$ : Auslenkung  $x$  (im stationären Gleichgewicht: zeitlich konstant)
  - Parameter des Messsystems: Federkonstante  $c$ , Erdbeschleunigung  $g$
  - Mögliche Störgröße: Änderung der Federkonstanten  $c$ , z. B. durch Ermüdung
  - Ausgangsgröße  $y$ : Schätzwert der Masse  $\frac{cx}{g}$

### Beschreibung von Messsystemen im Zustandsraum

- Beispiel: Balkenwaage
  - Messgröße  $u$ : Masse  $m$  (zeitlich konstant)
  - Zustandsvektor  $x$  (im Gleichgewicht): Anzahl/Masse der Gewichtssteine  $m_g$
  - Parameter des Messsystems: Längen der Hebelarme
  - Mögliche Störgröße: Änderung der Länge der Hebelarme  $l_1, l_2$ , z. B. durch Änderung der Umgebungstemperatur
  - Modellierung der Störgröße  $z$ :
    - Änderung der Länge der Hebelarme selbst oder
    - Umgebungstemperatur und Beschreibung ihrer Wirkung auf die Länge der Hebelarme
  - Ausgangsgröße  $y$ : Schätzwert der Masse  $\frac{l_2 m_g}{l_1}$

### Beschreibung von Messsystemen im Zustandsraum

- Ideales Messsystem:
  - Alleinige Abhängigkeit der Ausgangsgröße  $y$  von der Messgröße  $u$
  - Kein Einfluss der Störgrößen  $z$
- In der Praxis nicht erreichbar
- Abhilfe: möglichst genaue Modellierung der Wirkung der Störeinflüsse auf das Messergebnis, wenn möglich dadurch Kompensation der Störeinflüsse

### Physikalische Messkennlinie

- Grundaufgabe der Messtechnik: Erfassung von stationären Messgrößen (d. h. keine Änderung der Messgröße während der Messung)
- Stationärer Zustand: alle Einschwingvorgänge sind abgeklungen:  $\dot{x} = 0$ , keine Abhängigkeit mehr von der Zeit  $t$
- (Stationäre) physikalische Messkennlinie:
  - Vereinfachung der Zustandsgleichung
$$\dot{x}(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \mathbf{w}(\mathbf{x}(t), u(t), \mathbf{z}(t), t): \quad \mathbf{w}(\mathbf{x}, u, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$$
  - Zustandsvektor ist also nur noch von der Messgröße und dem Störgrößenvektor abhängig:  $\mathbf{x} = \mathbf{g}(u, \mathbf{z})$
  - Einsetzen in Ausgangsgleichung:  $y = F(\mathbf{x}) = F(\mathbf{g}(u, \mathbf{z})) = f(u, \mathbf{z})$
  - Physikalische Messkennlinie:  $y = f(u, \mathbf{z})$
- Forderung: stetige, streng monotone Funktion zur Vermeidung von Mehrdeutigkeiten bei der rechnerischen Bestimmung von  $u$ :
$$f(u + \varepsilon) > f(u) \quad \text{oder} \quad f(u + \varepsilon) < f(u) \quad \text{für} \quad \varepsilon > 0$$

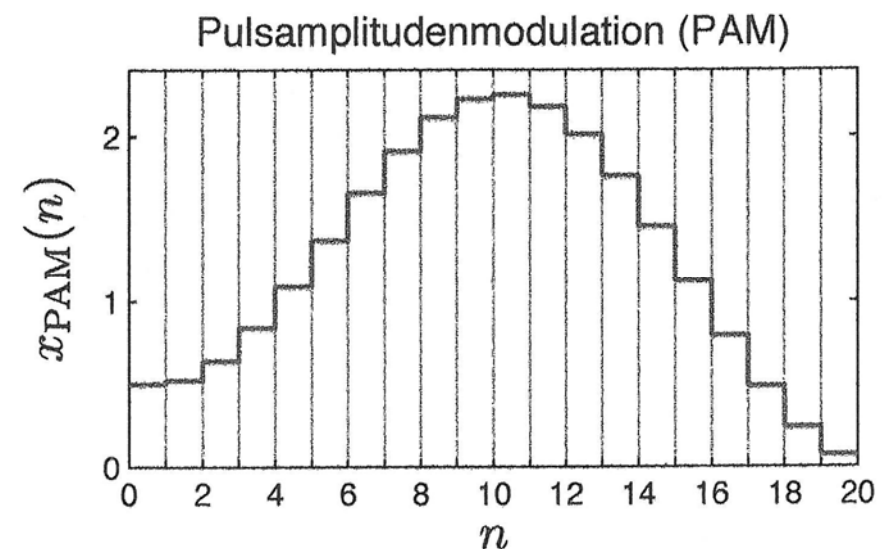
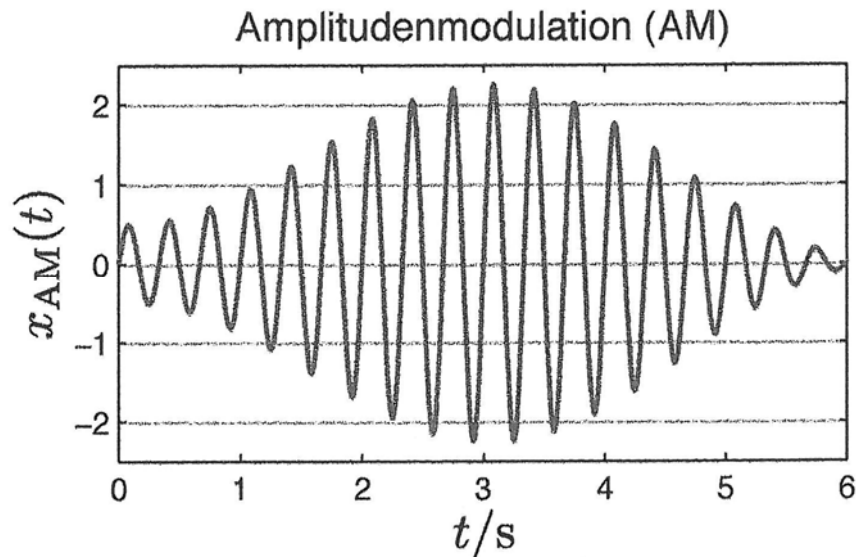
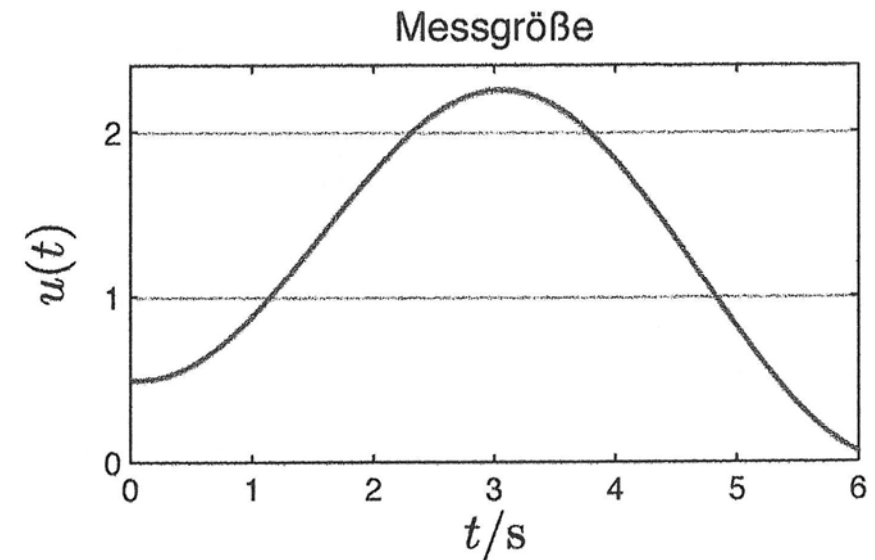
### Messsignale als Informationsträger

- Innerhalb der Messkette (zwischen den Komponenten des Messsystems): Austausch von Information über die Messgröße  $u$  in Form von Messsignalen  $x_s(t)$ ,  $x_n(t)$
- Messsignale  $x(t)$  sind somit Träger der Messgröße  $u$
- Messsignale  $x(t)$  können durchaus auch bei konstanter Messgröße  $u$  zeitlich veränderlich sein: dabei in messtechnischen Anwendungen meist harmonische und impulsförmige Messsignale
- Bei harmonischen Messsignalen: Verkörperung der Messgröße  $u$  durch Amplitude, Frequenz oder Phase
- Bei impulsförmigen Messsignalen: Verkörperung der Messgröße  $u$  u. a. durch Impulshöhe, Impulsdauer, Impulsfrequenz

## 1.3 Messsysteme

### Messsignale als Informationsträger

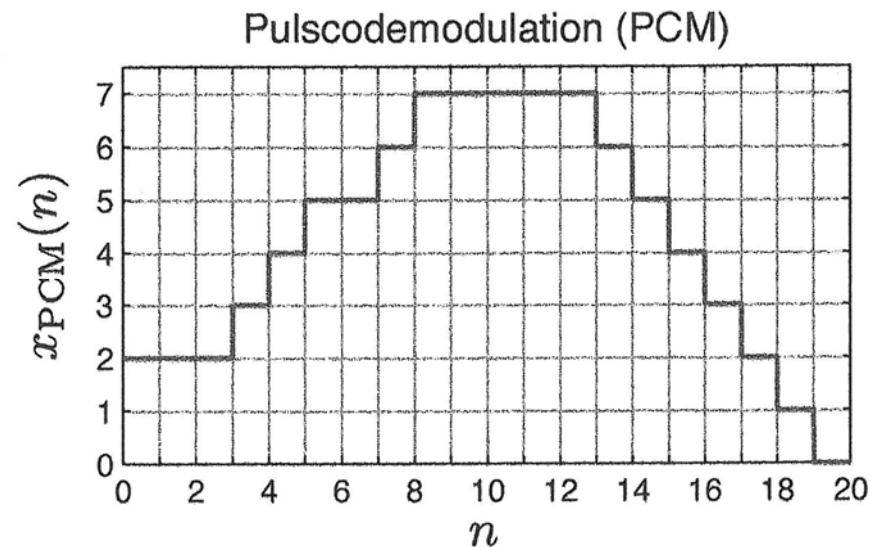
- Klassifikation von Messsignalen:
  - Amplitudenanaloge Signale:
    - Zeit: kontinuierlich oder diskret
    - Wert: kontinuierlich
    - Signalamplitude: proportional zur Messgröße  $u$



## 1.3 Messsysteme

### Messsignale als Informationsträger

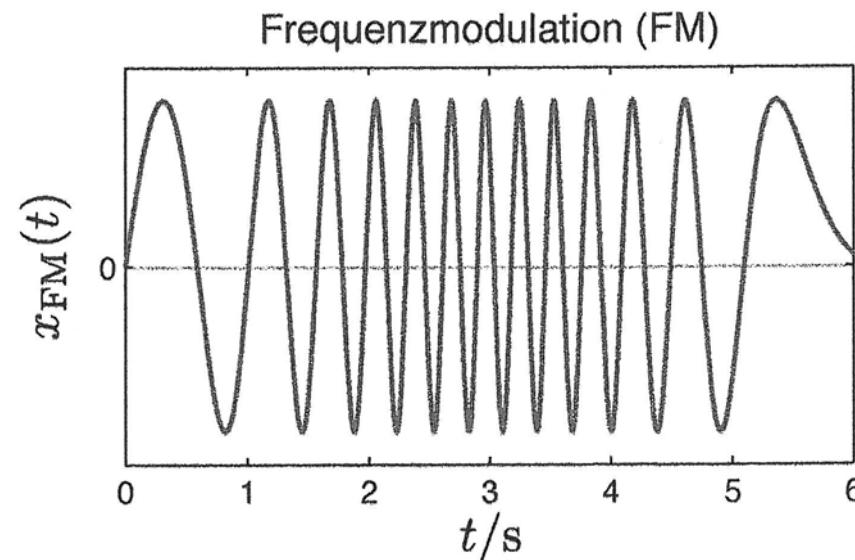
- Klassifikation von Messsignalen:
  - Digitale Signale:
    - Wert- und zeitdiskret
    - Messgröße  $u$  mittels Binärzahlen kodiert



## 1.3 Messsysteme

### Messsignale als Informationsträger

- Klassifikation von Messsignalen:
  - Frequenzanaloge Signale:
    - Zeit: kontinuierlich
    - Wert: kontinuierlich oder diskret
    - Momentanfrequenz proportional zur Messgröße  $u$

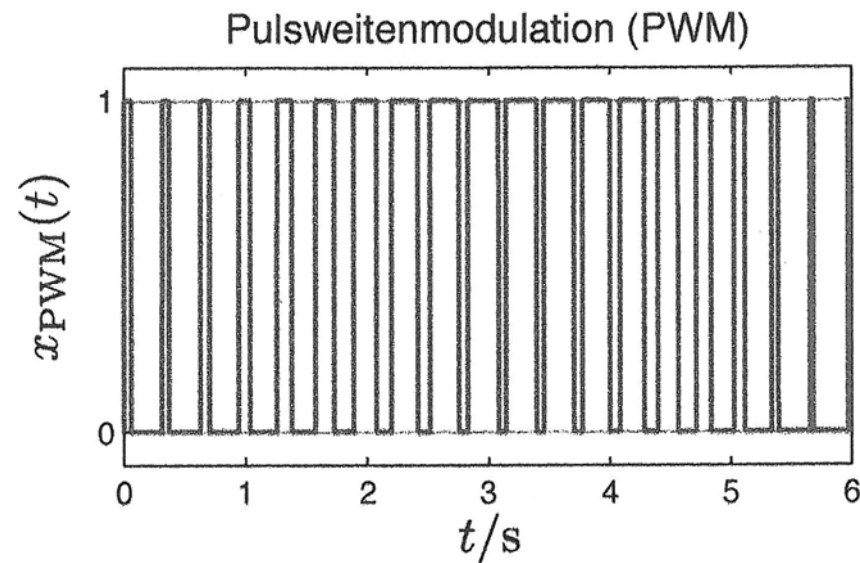




## 1.3 Messsysteme

### Messsignale als Informationsträger

- Klassifikation von Messsignalen:
  - Zeitanaloge Signale:
    - Zeit: kontinuierlich
    - Wert: impulsförmig
    - Impulsdauer oder -abstand proportional zur Messgröße  $u$



## 1.4 Messfehler

---

- Fehler: unerwünschte Abweichungen vom korrekten Messergebnis
- Begriff: „Messfehler“ oder „Messabweichung“ (DIN 1319-1)
- Dazu klare Definition erforderlich:  
was ist die interessierende Messgröße?
  - Beispiel: örtlich veränderliche Messgröße
    - Messung an repräsentativen Stellen, ggf. Bildung des Mittelwerts
    - Alternativ: orts aufgelöste Messung der Messgröße
- Jede Messung ist (mehr oder weniger) fehlerbehaftet

## 1.4 Messfehler

---

- Beispiel: Temperaturüberwachung an Turbinen:
  - Vermeidung von Überbeanspruchungen aufgrund Wärmedehnung
  - Dazu Messung der Temperatur des Gehäuses
  - Auswahl repräsentativer Messorte: große Temperaturdifferenzen bei instationären Vorgängen
  
- Beispiel: Heizwert von Brennstoffen:
  - Heizwert einer zufälligen Probe meist nicht relevant
  - Relevant ist der mittlere Heizwert (z. B. in einem Tank):  
dazu Entnahme mehrerer Proben und Schätzung eines mittleren Heizwerts

### Absoluter und relativer Fehler

- Annahme: Messgröße besitzt einen bekannten, wahren Wert  $y_w$  an der zu untersuchenden Messeinrichtung

- **Absoluter Fehler:**

$$F = y_a - y_w$$

- Positive oder negative Abweichung des angezeigten Werts  $y_a$  vom wahren Wert  $y_w$

- **Relativer Fehler:**

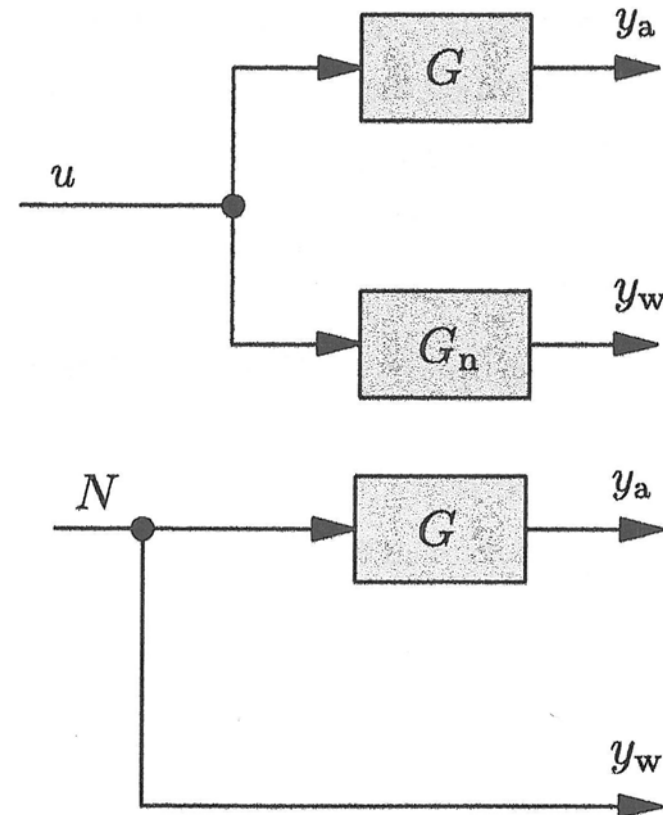
$$F_r = \frac{F}{y_w} = \frac{y_a - y_w}{y_w}$$

- Bezogene Größe: Bezug meist auf den wahren Wert
  - Dimensionslos, meist in Prozent angegeben
- Abschätzung von Fehlern: Betrag relevant
- Korrektur von Fehlern: zusätzlich Vorzeichen relevant

## 1.4 Messfehler

### Absoluter und relativer Fehler

- Bestimmung des wahren Werts  $y_w$ :
  - Messwert eines besonders genauen Präzisionsinstruments  $G_n$  (Referenzmessung)
- Messung eines bekannten Normals  $N$  (Maßverkörperung) durch das Messsystem  $G$ , Vergleich des angezeigten Werts  $y_a$  mit dem bekannten wahren Wert  $y_w$  des Normals
- Bestimmung des Fehlers des Präzisionsinstruments: durch Vergleich mit einem genaueren Präzisionsinstrument oder Messung an einem Normal („Kalibrierkette“, siehe z. B. Vorlesung Fertigungsmesstechnik)



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.

### Fehlerklassen

- **Zufällige (stochastische) Fehler:**
  - Bewirken Streuung der Messwerte: verschiedene Messwerte bei wiederholten Messungen für dieselbe Messgröße
  - Im Einzelnen nicht erfassbar, konkrete Ursachen meist unbekannt
  - Beschreibung des Messwerts über stochastische Kenngrößen: z. B. Mittelwert, Standardabweichung (siehe Kap. 4)
  - Beispiele:
    - Heizwert von Brennstoffen (s. o.)
    - Ausfallrate von Bauelementen
    - Messung von elektrischen Spannungen

### Fehlerklassen

- **Systematische Fehler:**
  - Bewirken konstante Abweichung des Messwerts
  - Falls Ursache des Fehlers und Art der Einwirkung bekannt: Kompensation des Fehlers im Prinzip möglich
  - Falls Ursache des Fehlers und Art der Einwirkung nicht bekannt: Ähnliche Behandlung wie zufällige Fehler
  - Beispiele:
    - Temperatureinfluss (kompensierbar)
    - Fehlerhafte Kalibrierung (im Prinzip kompensierbar)
    - Parallaxenfehler (im Prinzip kompensierbar)

### Fehlerursachen

- Vereinfachungen bei der Modellierung des Messsystems und des Messvorgangs:
  - Vereinfachung der physikalischen Eigenschaften des Messgegenstands, z. B. örtlich verteilte Eigenschaften (siehe Bsp. Turbinentemperatur)
  - Vereinfachung der physikalischen Komponenten des Systems, z. B. Energiespeicher
  - Idealisierung der Komponenten, z. B. durch Linearisierung, Konzentration



### Fehlerursachen

- Innere Störgrößen:
  - Unvollkommenheiten der Messeinrichtung und des Messverfahrens, z. B. Alterungseffekte an Federn
- Äußere Störgrößen:
  - Größen, die auf den physikalischen Messeffekt einen unerwünschten Einfluss haben
  - Wechselnde Umwelteinflüsse
  - Beobachtbare und deterministisch beschreibbare Störgrößen: systematische Fehler, Kompensation möglich
  - Nicht beobachtbare oder deterministisch beschreibbare Störgrößen: stochastische Fehler, Unterdrückung durch statistische Verfahren möglich (z. B. Mittelwertbildung)
  - Beispiel: Temperatureinfluss auf Brückenschaltung

### Fehlerursachen

- Beobachtungsfehler:
  - Fehler des Beobachters/Bedieners, z. B. falsche Ablesung (Parallaxe), falsche Einstellungen, falsche Vorgehensweise
- Dynamische Fehler:
  - Abweichungen des angezeigten Werts von der Messgröße aufgrund nicht ausreichender Dynamik der Messeinrichtung
  - Vgl. Abtasttheorem
  - Beispiel: Beobachtung des Druckverlaufs in einem Verbrennungsmotor
- Rückwirkung auf die Messgröße:
  - Messung soll keine Rückwirkung auf Messgröße haben, z. B. durch Eintrag/Entzug von Energie/Leistung

### Fehlerursachen

- Beispiel: Rückwirkung auf die Messgröße bei der Temperaturmessung einer Flüssigkeit:
  - Flüssigkeit mit der Temperatur  $T_w$  und der Wärmekapazität  $c$
  - Messung mittels Berührungsthermometer mit der Temperatur  $T_m$  und der Wärmekapazität  $c_m$
  - Gemessene Temperatur:
$$E_{\text{vorher}} = cT_w + c_m T_m = E_{\text{nachher}} = (c + c_m)T_a$$
$$\Rightarrow T_a = \frac{cT_w + c_m T_m}{c + c_m}$$
  - Absoluter Fehler:
$$\Delta T = T_a - T_w = \frac{c_m}{c + c_m} (T_m - T_w)$$
  - Messfehler wird also klein, wenn
    - die Wärmekapazität  $c_m$  des Thermometers klein gegenüber der Wärmekapazität der Flüssigkeit  $c$  ist
    - die Temperaturen von Thermometer  $T_m$  und Flüssigkeit  $T_w$  vor der Messung (annähernd) gleich sind

### Spezifizierte Normalbedingungen

- Hersteller eines Messsystems beschreibt in der Spezifikation die Randbedingungen und Umwelteinflüsse, unter denen er einen maximalen Fehler garantiert, z. B.:
  - Messbereich
  - Betriebsbedingungen
  - Einbauvorschriften
  - Energieversorgung
  - Vorgehensweise bei der Messung

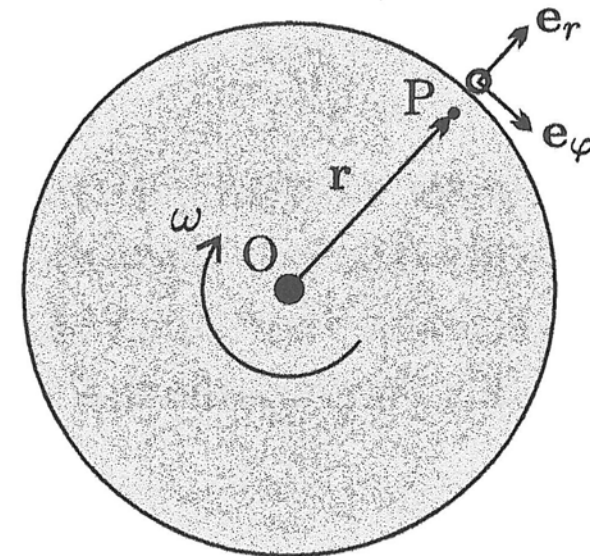
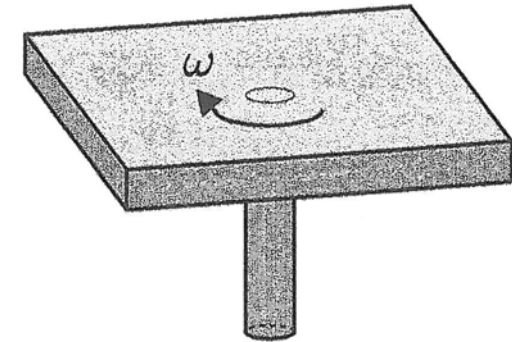
### Spezifizierte Normalbedingungen

- Beurteilung von Fehlern mittels Vergleich mit ähnlichen Geräten und deren Fehlern
- Besonders einfacher Vergleich im eingeschwungenen Zustand: statische Fehler
- Statische Fehler unter spezifizierten Normalbedingungen:
  - Störgrößen aus der Umgebung sind konstant oder null:  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_0$
- Statische Fehler bei Abweichung von den spezifizierten Normalbedingungen:
  - Einfluss der Störgrößen muss einzeln analysiert werden:
    - Definierte Abweichung von den Normalbedingungen für jede wichtige Störgröße erzeugen:  $\mathbf{z} = \mathbf{z}_i$ ,  
 $i = 1, \dots, n$ ,  $n$ : Anzahl der wichtigen Störgrößen
    - Auswirkung auf die Ausgangsgröße als Fehler feststellen

## 1.4 Messfehler

### Beispiel: mögliche Fehlerursachen

- Messung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  eines horizontal rotierenden Körpers
- Messprinzip: Messung der Beschleunigung an einem Ort P auf dem Körper
- Technische Mechanik:
  - Führungsbeschleunigung:  $\mathbf{a}_O$
  - Tangentialbeschleunigung:  $\mathbf{a}_t = \dot{\omega} \times \mathbf{r}$
  - Zentripetalbeschleunigung:  $\mathbf{a}_{zp} = \omega \times \mathbf{v}$
  - Gesamte Beschleunigung:  
$$\mathbf{a}_P = \mathbf{a}_O + \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_{zp} \approx \dot{\omega} r \cdot \mathbf{e}_\varphi - \omega^2 r \cdot \mathbf{e}_r$$

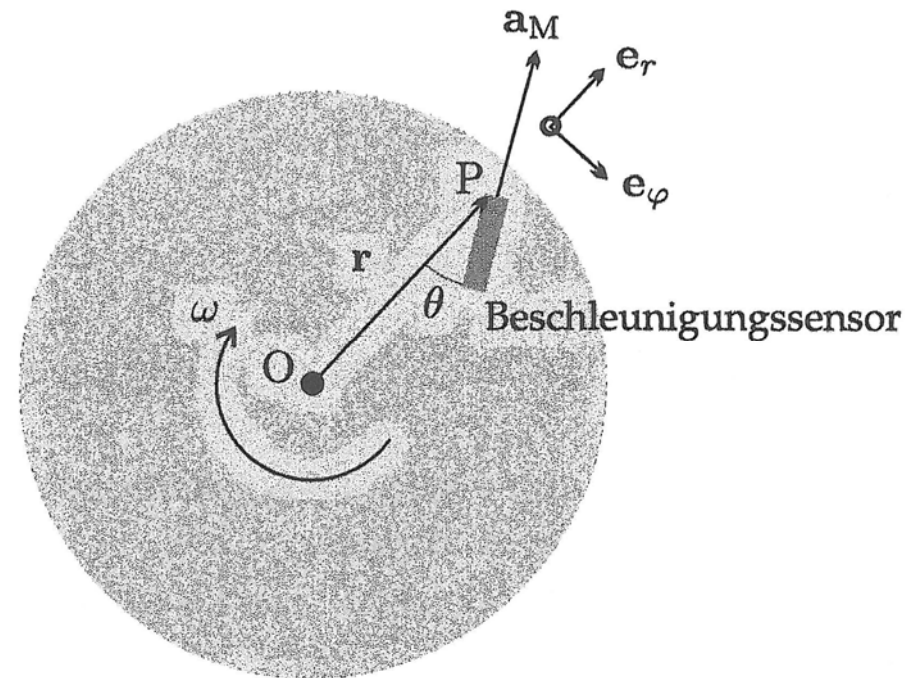


© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.  
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

## 1.4 Messfehler

### Beispiel: mögliche Fehlerursachen

- Anbringung eines idealen Beschleunigungssensors an der Scheibe:
  - Messgleichung:
$$a_M = -\dot{\omega}r \cdot \sin \theta - \omega^2 r \cdot \cos \theta$$
  - Stationärer Fall ( $\dot{\omega} = 0$ ):  
statische Messkennlinie:
$$a_M = -\omega^2 r \cdot \cos \theta$$
  - Quadratische stationäre Kennlinie:  $y = a_M = \text{const.} \cdot u^2$   
Wünschenswert ist meist eine lineare Kennlinie,  
Vorteil: konstante Empfindlichkeit  
(siehe Kap. 3: Linearisierung der Messkennlinie)



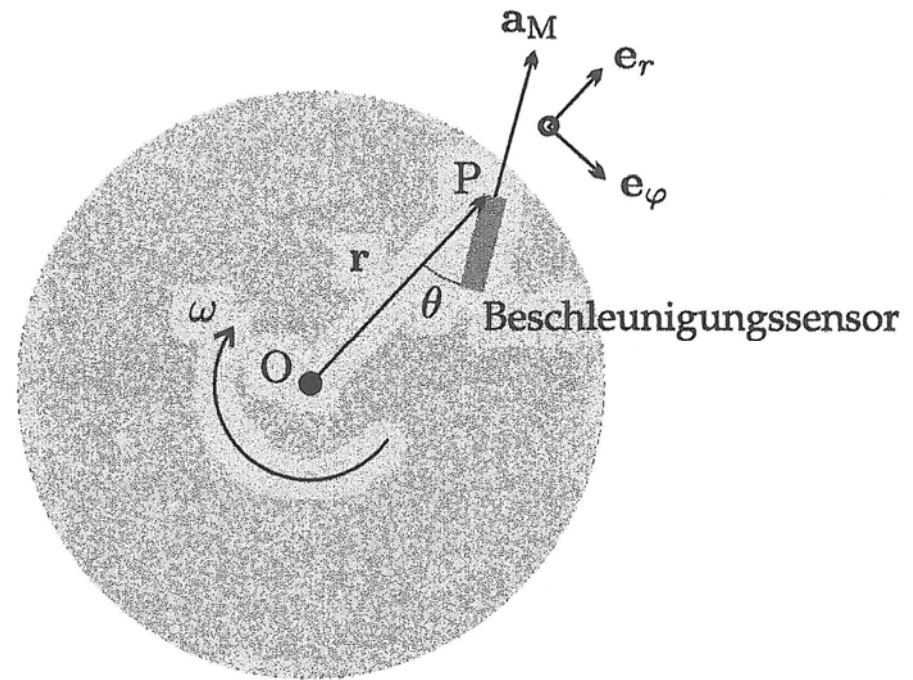
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.



### Beispiel: mögliche Fehlerursachen

- Störgrößen:  
Sensorposition  $r$  und  
Sensorausrichtung  $\theta$   
(innere Störgrößen  
des Messsystems)
- Normalbedingungen:  $r_0, \theta_0$   
(z. B. konstruktiv vorgegeben)
- Weitere mögliche Störungen  
(äußere Störgrößen):
  - Veränderliche Winkelgeschwindigkeit ( $\dot{\omega} \neq 0$ )
  - Führungsbeschleunigung  $\mathbf{a}_O \neq \mathbf{0}$ :  
kann systematisch (z. B. wenn Rotationsachse nicht vertikal steht) oder stochastisch (z. B. bei unbekannten Vibrationen) sein
  - Änderung der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ : dynamische Fehler, proportional zu  $\dot{\omega}$ , Einschwingen abwarten



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

© Michael Heizmann, IIT, KIT, alle Rechte einschließlich Kopier- und Weitergaberechte bei uns.