3. Stationäres Verhalten von Messsystemen

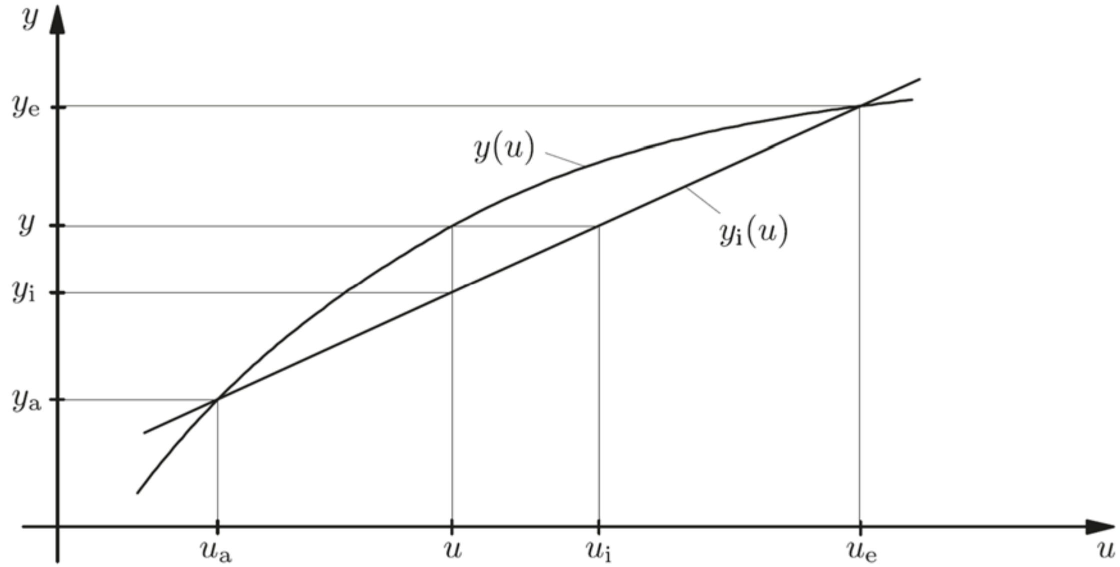
Inhaltsübersicht

3 Stationäres Verhalten von Messsystemen

- Stationärer Zustand:
  - Alle Einschwingvorgänge sind abgeklungen
  - Z. B. stabile Anzeige am Messsystem
  - Bestimmung des Verhaltens des Messsystems alleine durch die stationäre Messkennlinie

Ideale und reale Messkennlinie

- **Stationäre Messkennlinie** $y(u)$: funktionaler Zusammenhang zwischen Messwerten u und Anzeigewerten y im stationären Zustand
- Jetzt zunächst Vernachlässigung von Störungen $\boldsymbol{z}$

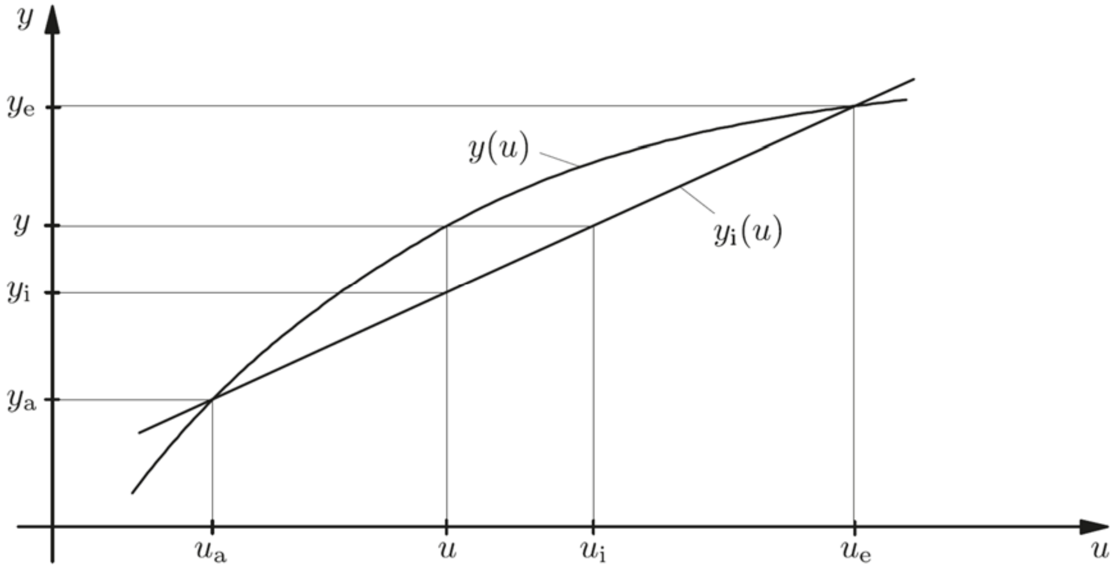


Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

- **Messbereich** $[u_\mathrm{a}, u_\mathrm{e}]$: Bereich, in dem die Messwerte u liegen können
- **Anzeigebereich** $[y_\mathrm{a}, y_\mathrm{e}]$: Bereich, in dem die Anzeigewerte y liegen können
- **Empfindlichkeit** $S(u)$ (engl. Sensitivity): Steigung der Messkennlinie:
  $$S(u) = \frac{\partial y(u)}{\partial u} = \frac{\partial f(u)}{\partial u}$$
  i. a. Funktion der Messgröße u: d. h. nichtlineares Verhalten der (realen) Messkennlinie

Ideale und reale Messkennlinie

- **Ideale Kennlinie**:
  Häufig gemachte Vereinfachung der realen Messkennlinie durch Verbindung von Messanfang $(u_\mathrm{a}, y_\mathrm{a})$ und Messende $(u_\mathrm{e}, y_\mathrm{e})$ zu einer linearen Kennlinie $y_\mathrm{i}(u)$ mit konstanter Steigung $S_\mathrm{i} = \frac{y_\mathrm{e} - y_\mathrm{a}}{u_\mathrm{e} - u_\mathrm{a}}$ (ideale Empfindlichkeit):
  $y_\mathrm{i}(u) = S_\mathrm{i}(u - u_\mathrm{a}) + y_\mathrm{a}$

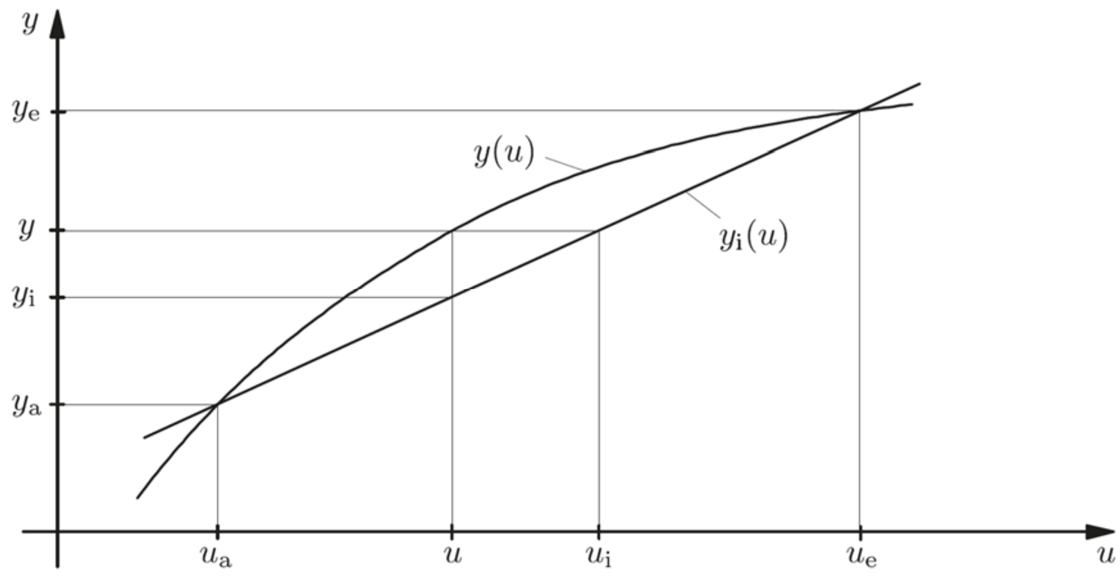


Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

  - Gleich große Änderungen der Messgröße gehen dann mit der gleichen Empfindlichkeit in die Messanzeige ein
  - Im folgenden: Analyse der Fehler, die durch Verwendung der idealen anstelle einer realen nichtlinearen Kennlinie entstehen

Ideale und reale Messkennlinie

- Ideale Messkennlinie führt zu fehlerhafter Zuordnung von Messwert und Anzeigewert:
  - **Idealer Messwert** u_i: resultiert bei Annahme einer idealen (linearen) Kennlinie aus dem tatsächlichen Anzeigewert y
  - **Idealer Anzeigewert** y_i: resultiert bei Annahme einer idealen (linearen) Kennlinie aus dem tatsächlichen Messwert u



Abgleich der Messkennlinie

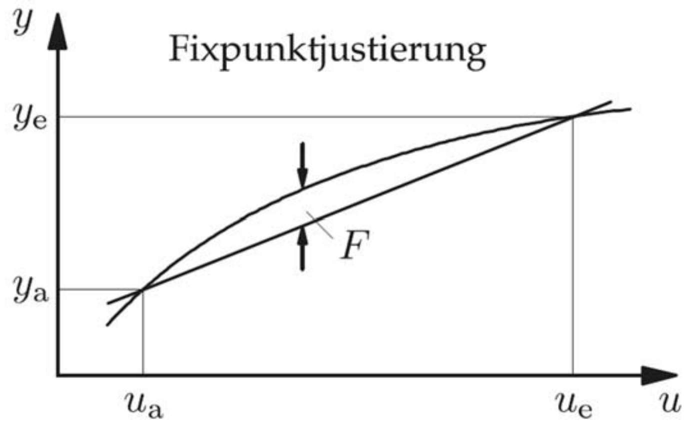
- Zunächst Herstellung der Normalbedingungen des Messsystems (gemäß Spezifikation): Äußere Störgrößen konstant halten bzw. durch Abschirmung/Filterung fernhalten
- Einstellvorgang, um das Messsystem gemäß seiner technischen Beschreibung für die vorgesehen Messaufgabe tauglich zu machen:
  Abgleich oder **Justierung**:
  Physikalischer Eingriff in das Gerät oder seine Maßverkörperung mit dem Ziel, den Messbereich auf den vorgesehenen Bereich der Ausgabeeinrichtung, des Ausgangssignals oder der Anzeige abzubilden
- Vom Abgleichen/Justieren zu unterscheiden:
  Eichen: gesetzlich festgelegte Maßnahme durch amtliche Prüfbehörden (z. B. für den Handel)
  siehe Vorlesung Fertigungsmesstechnik

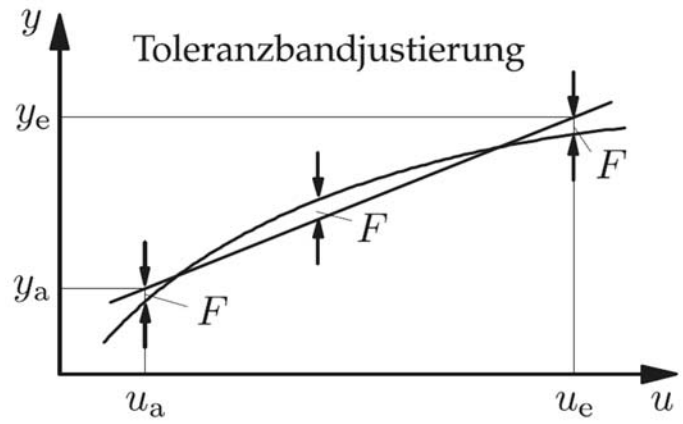
Abgleich der Messkennlinie

- Beispiel: Justierung eines Temperaturmessgeräts:
  - Messbereich $[20\ °\mathrm{C}, 100\ °\mathrm{C}]$ soll auf den Anzeigebereich $[0\ \%, 100\ \%]$ abgebildet werden
  - Anzeigegröße: elektrische Spannung U im Bereich $[2\ \mathrm{mV}, 300\ \mathrm{mV}]$
  - Anzeige mittels Zeigerinstrument mit Skala
  - Ziel der Justierung: möglichst kleine Fehler an den Rändern des Messbereichs, d. h. bei $U = 2\ \mathrm{mV}$ soll der Zeiger am Anfangspunkt der Skala ($20\ °\mathrm{C}$) stehen und bei $U = 300\ \mathrm{mV}$ soll der Zeiger am Endpunkt der Skala ($100\ °\mathrm{C}$) stehen

Abgleich der Messkennlinie

- Zwei Eingriffsmöglichkeiten für den Abgleich einer (linearen) Messkennlinie: additive Verschiebung und multiplikative Drehung
- Gebräuchliche Verfahren:
  - **Fixpunktjustierung**: Justierung für Messanfang $(u_\mathrm{a}, y_\mathrm{a})$ und Messende $(u_\mathrm{e}, y_\mathrm{e})$, d. h. Messkennlinie geht durch diese Punkte hindurch, dort verschwinden die Messfehler
    Messbereich $[u_\mathrm{a}, u_\mathrm{e}]$ wird auf den Anzeigebereich $[y_\mathrm{a}, y_\mathrm{e}]$ abgebildet
  - **Toleranzbandjustierung**: zusätzliche additive Verschiebung der Fixpunkt-justierung
    Ziel: Minimierung des maximalen Fehlers F im Messbereich
    Messkennlinie geht nicht mehr durch Messanfang und Messende





3.1 Stationäre Messkennlinie und deren Fehler

Abgleich der Messkennlinie

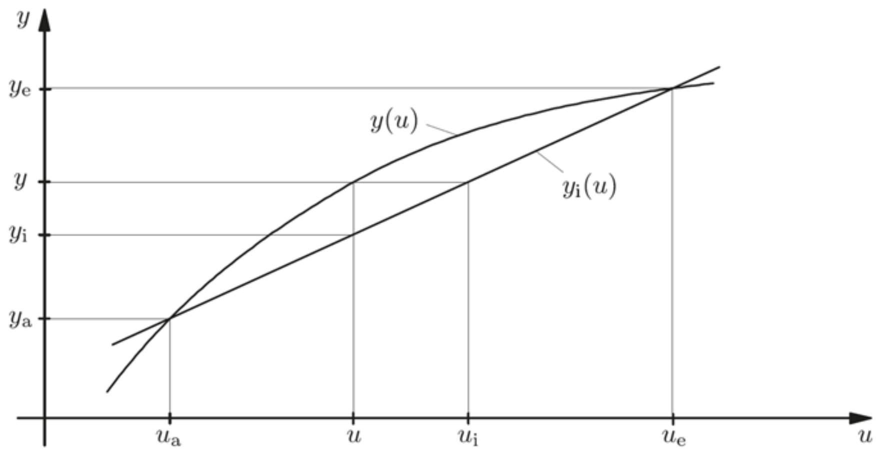
- In der Praxis: eher Fixpunktjustierung, um Aufwand zu reduzieren
- Abgleich unter Normalbedingungen: Festlegung eines Störgrößenvektors $\boldsymbol{z}_0$
- Damit Justierung der physikalischen Messkennlinie $y(u, \boldsymbol{z})$ so, dass die Kennlinie durch den Messanfang $(u_\mathrm{a}, y_\mathrm{a})$ und das Messende $(u_\mathrm{e}, y_\mathrm{e})$ verläuft: $y_\mathrm{a} = f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0)$, $y_\mathrm{e} = f(u_\mathrm{e}, \boldsymbol{z}_0)$
- Nullpunktfehler (Offset): $e(\boldsymbol{z}) = f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}\,) - y_\mathrm{a}$
  verschwindet unter Normalbedingungen: $e(\boldsymbol{z}_0) = f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) - y_\mathrm{a} = 0$

Kennlinienfehler bei realer Kennlinie

- Nach Justierung eines Messsystems: verbleibende systematische Fehler werden als Kennlinienfehler bezeichnet:
  - Nichtlinearitäten der realen Kennlinie
  - Einfluss von Störgrößen $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{z}_0$

Relativer Kennlinienfehler F_r

- Entsteht durch Bezug der Messgröße u auf den Messanfang u_a:
  $$F_\mathrm{r} = \frac{(u_\mathrm{i} - u_\mathrm{a}) - (u - u_\mathrm{a})}{u - u_\mathrm{a}} = \frac{u_\mathrm{i} - u}{u - u_\mathrm{a}}$$
- Angabe mittels Anzeigegrößen:
  - Mit $y - y_\mathrm{a} = S_\mathrm{i}(u_\mathrm{i} - u_\mathrm{a})$,
    $y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a} = S_\mathrm{i}(u - u_\mathrm{a})$,
    $y - y_\mathrm{i} = S_\mathrm{i}(u_\mathrm{i} - u)$ folgt:
    $$F_\mathrm{r} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{S_\mathrm{i}} \frac{S_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}}$$
    (Bezug auf $y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}$: Anzeigespanne)
  - Andere übliche Definitionen:
    - Bezug auf Anzeigebereich $y_\mathrm{e} - y_\mathrm{a}$: $\quad F_\mathrm{r} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{e} - y_\mathrm{a}}$
    - Bezug auf den Sollwert y_i: $\quad F_\mathrm{r} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i}}$
    - Bezug auf den Endwert y_e: $\quad F_\mathrm{r} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{e}}$

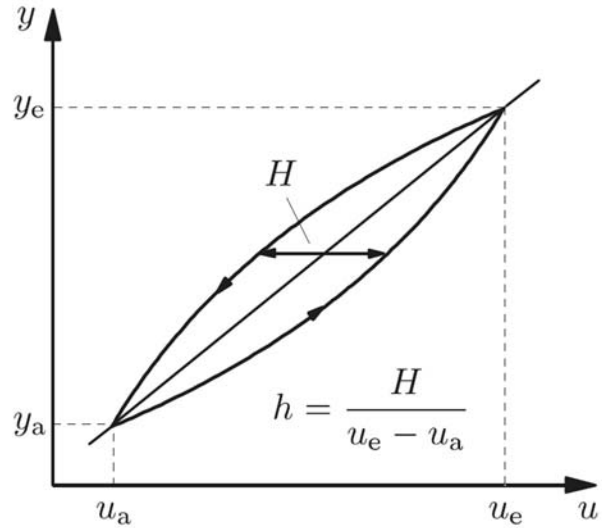


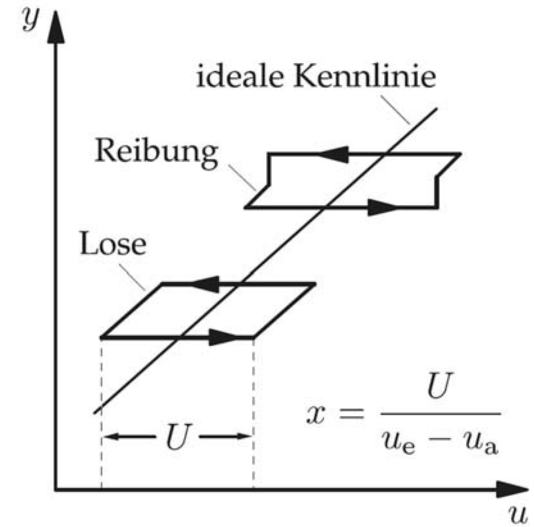
Hysterese und Umkehrspanne

- Beobachtung: Ausgangsgröße y kann unterschiedlich sein, wenn eine Messgröße u „von unten“ oder „von oben“ angefahren wird
- Tritt v. a. bei Geräten mit mechanischen Teilen auf, mögliche Ursachen:
  - (Haft-)Reibung: Anzeigegröße y ändert sich sprunghaft bei Überwindung der Haftreibung
  - Spiel (Lose), Hemmungen

Hysterese und Umkehrspanne

- Hysterese:
  - Messgröße wird langsam vom Messanfang u_a bis zum Messende u_e gesteigert und langsam reduziert
  - Hysterese: größte auftretende Differenz H der Messgröße zwischen den Kennlinien, Bezug auf Messbereich: $h = \frac{H}{u_e - u_a}$
- Umkehrspanne:
  - Geringe Änderung der Messgröße
  - Umkehrspanne: größte Abweichung U zwischen Steigerung und Reduktion, Bezug auf Messbereich: $x = \frac{U}{u_e - u_a}$





Hysterese und Umkehrspanne

- Falls Umkehrspanne vorhanden ist, dann auch Hysterese
- Umgekehrt nicht unbedingt: Hysterese kann durch innere Störgrößen verursacht werden, die für kleine Änderungen der Messgröße verschwinden
  Beispiel: elastische Nachwirkung von Messfedern

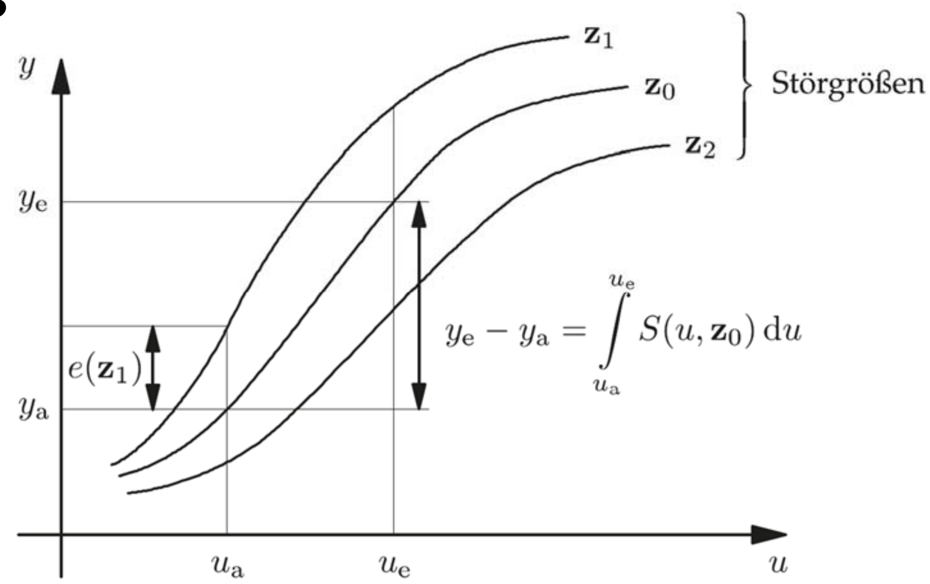
3.1 Stationäre Messkennlinie und deren Fehler

Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Grundlage: relativer Kennlinienfehler $F_\mathrm{r} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}}$
- Jetzt Betrachtung von äußeren Störgrößen $\boldsymbol{z}$ und Nichtlinearitäten der Kennlinie als Fehler

Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Betrachtung der realen Empfindlichkeit
  $S(u, \boldsymbol{z}) = \frac{\partial y(u,\boldsymbol{z})}{\partial u} = \frac{\partial f(u,\boldsymbol{z})}{\partial u}$,
  dadurch Berechnung der realen (stationären) Kennlinie im Messbereich $[u_\mathrm{a}, u_\mathrm{e}]$:



$$y = f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}) + \int_{u_\mathrm{a}}^{u} S(u, \boldsymbol{z})\,\mathrm{d}u$$

$$\Rightarrow \quad y - y_\mathrm{a} = \int_{u_\mathrm{a}}^{u} S(u, \boldsymbol{z})\,\mathrm{d}u + \underbrace{f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}) - y_\mathrm{a}}_{e(\boldsymbol{z})\text{: Nullpunktfehler}} = \int_{u_\mathrm{a}}^{u} S(u, \boldsymbol{z})\,\mathrm{d}u + e(\boldsymbol{z})$$

- Nullpunktfehler $e(\boldsymbol{z})$: im Abgleich ($\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_0$): $e(\boldsymbol{z}_0) = 0$ (s. o.)

Abschätzung des Kennlinienfehlers

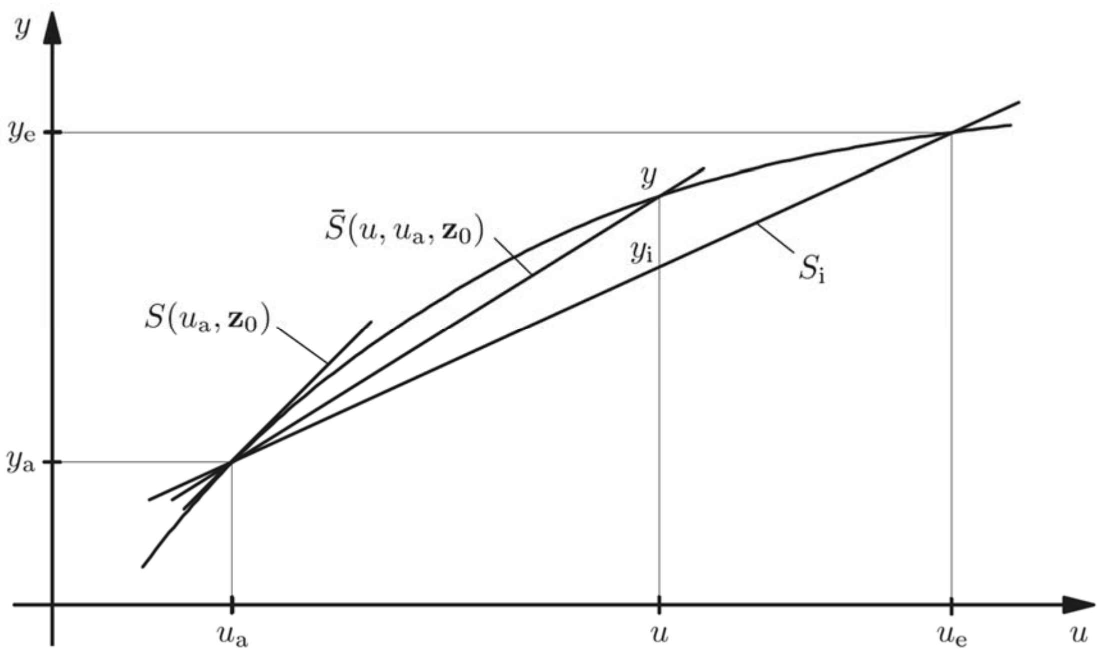
- Mittlere Empfindlichkeit $\bar{S}(u, u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0)$ im Abgleich:

$$y - y_\mathrm{a} = \int_{u_\mathrm{a}}^{u} S(u, \boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u \stackrel{!}{=} \bar{S}(u, u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a})$$

$$\Rightarrow \quad \bar{S}(u, u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) = \frac{1}{u - u_\mathrm{a}} \int_{u_\mathrm{a}}^{u} S(u, \boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u = \frac{y - y_\mathrm{a}}{u - u_\mathrm{a}}$$

- Für das Messende $(u_\mathrm{e}, y_\mathrm{e})$:

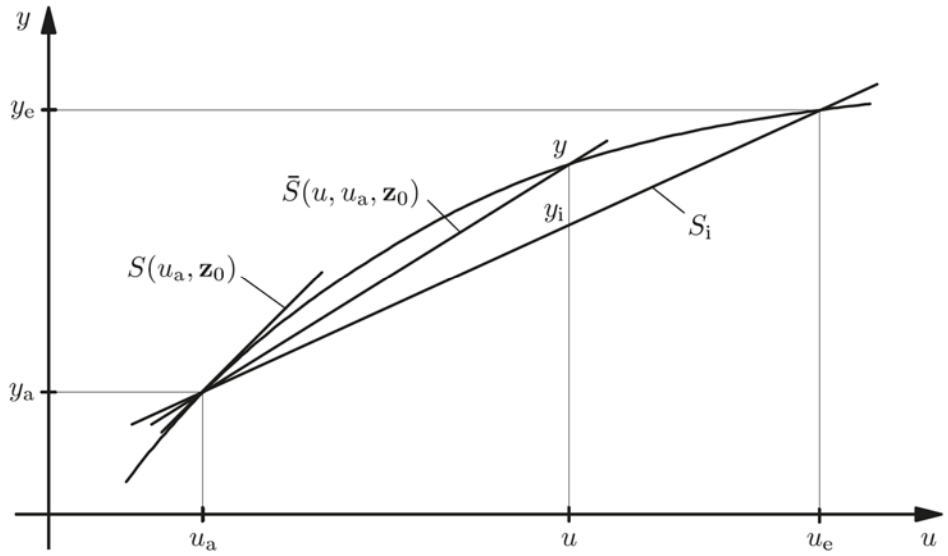
$$\bar{S}(u_\mathrm{e}, u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) = \frac{1}{u_\mathrm{e} - u_\mathrm{a}} \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{e}} S(u, \boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u = \frac{y_\mathrm{e} - y_\mathrm{a}}{u_\mathrm{e} - u_\mathrm{a}} = S_\mathrm{i} \text{ (ideale Empf.)}$$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Abweichung der mittleren Empfindlichkeit von der idealen Empfindlichkeit: Empfindlichkeitsdifferenz: $\Delta\bar{S}(u,\boldsymbol{z}_0) = \bar{S}(u,u_\mathrm{a},\boldsymbol{z}_0) - S_\mathrm{i}$ abhängig von der jeweiligen Position des Messwerts im Messbereich und von der Wahl des Messanfangs u_a



- Relativer Kennlinienfehler:

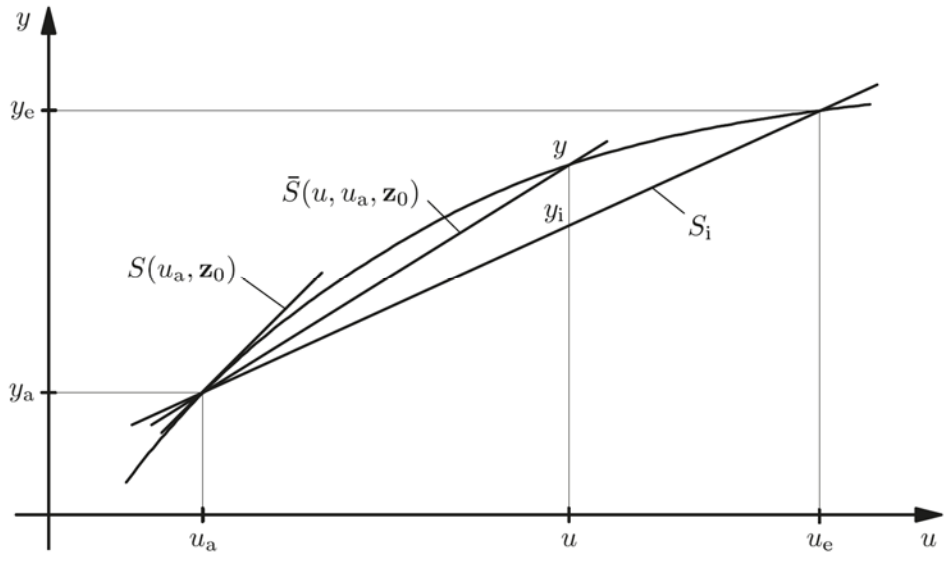
$$F_\mathrm{r} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}} = \frac{(y - y_\mathrm{a}) - (y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a})}{y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}}$$
$$= \frac{\bar{S}(u,u_\mathrm{a},\boldsymbol{z}_0)(u-u_\mathrm{a}) - S_\mathrm{i}(u-u_\mathrm{a})}{S_\mathrm{i}(u-u_\mathrm{a})} = \frac{\bar{S}(u,u_\mathrm{a},\boldsymbol{z}_0) - S_\mathrm{i}}{S_\mathrm{i}} = \frac{\Delta\bar{S}(u,\boldsymbol{z}_0)}{S_\mathrm{i}}$$

- Resultierende Anzeige:

$$y - y_\mathrm{a} = (y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a})\cdot(1+F_\mathrm{r}) = S_\mathrm{i}\cdot(u-u_\mathrm{a})\cdot(1+F_\mathrm{r})$$

Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Relativer Kennlinienfehler am Messanfang u_a:
  Hier ist $y = y_\mathrm{i}$ und damit
  $$F_\mathrm{r} = \frac{(y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}) - (y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a})}{y_\mathrm{i} - y_\mathrm{a}} = 0$$



- In der Nähe des Messanfangs u_a:
  - Entwicklung der Kennlinie in Taylorreihe um den Messanfang:

$$y = f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) + \left.\frac{\partial f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0)}{\partial u}\right|_{u=u_\mathrm{a}} (u - u_\mathrm{a})$$
$$+ \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0)}{\partial u^2}\right|_{u=u_\mathrm{a}} (u - u_\mathrm{a})^2 + \cdots$$
$$= f(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) + S(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a}) + \frac{1}{2!} S'(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a})^2 + \cdots$$

Abschätzung des Kennlinienfehlers

- Entwicklung der Kennlinie in Taylorreihe um den Messanfang:

$$\begin{aligned} y - y_\mathrm{a} &= S(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a}) + \frac{1}{2!} S'(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a}) + \cdots \\ &= (u - u_\mathrm{a}) \left(S(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) + \frac{1}{2!} S'(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a}) + \cdots \right) \end{aligned}$$

- Vergleich mit der mittleren Empfindlichkeit
  $y - y_\mathrm{a} = \bar{S}(u, u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a})$ ergibt

$$\bar{S}(u, u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) = S(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) + \frac{1}{2!} S'(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a}) + \cdots$$

- Damit relativer Kennlinienfehler in der Nähe des Messanfangs:

$$\begin{aligned} F_\mathrm{r} = \frac{\bar{S}(u, u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) - S_\mathrm{i}}{S_\mathrm{i}} &\approx \frac{S(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) + \frac{1}{2} S'(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a}) - S_\mathrm{i}}{S_\mathrm{i}} \\ &= \frac{\Delta \bar{S}(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0)}{S_\mathrm{i}} + \frac{1}{2} \frac{S'(u_\mathrm{a}, \boldsymbol{z}_0)}{S_\mathrm{i}} (u - u_\mathrm{a}) \end{aligned}$$

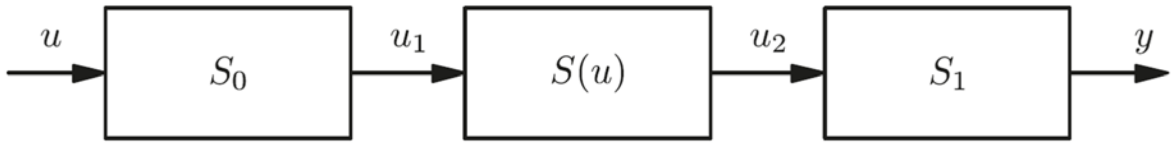
3.2 Kennlinienfehler unter Normalbedingungen

- Im folgenden: Betrieb des Messsystems unter spezifizierten Normalbedingungen:
  - Konstanter Störgrößenvektor $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{z}_0$
  - Justiertes Gerät, so dass Nullpunktfehler $e(\boldsymbol{z}_0) = 0$
- Auftretende Messfehler werden als Abweichung der realen Messkennlinie von der idealen Messkennlinie interpretiert
- Ziel in diesem Abschnitt: Gewinnung einer möglichst idealen (linearen) Messkennlinie mit konstanter Empfindlichkeit $S = S_\mathrm{i} = \mathrm{const.}$, dazu Anwendung der Ansätze:
  - Herabsetzen des Messbereichs
  - Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder
  - Wahl des günstigsten Messbereichs
  - Differenzmethode
  - Gegenkopplung

3.2 Kennlinienfehler unter Normalbedingungen

Herabsetzen des Messbereichs

- Idee: Beaufschlagung des nichtlinearen Anteils in der Signalübertragungskette so, dass gesamte Übertragungskette möglichst linear wird
- Lineare Übertragungs-glieder: $S_0 \ll 1$, $S_1 \gg 1$
- Nichtlinearer Anteil: $S(u)$



- Lineares Glied S_0: $u_1 - u_{1a} = S_0 \cdot (u - u_a)$
- Nichtlineares Glied $S(u)$: $u_2 - u_{2a} = S_i \cdot (1 + F_r) \cdot (u_1 - u_{1a})$
- Lineares Glied S_1: $y - y_a = S_1 \cdot (u_2 - u_{2a})$

- Gesamt: $y - y_a = S_0\, S_1\, S_i \cdot (1 + F_r) \cdot (u - u_a)$

Herabsetzen des Messbereichs

- Wegen $S_0 \ll 1$ Betrieb des nichtlinearen Gliedes am Anfang $u_{1\mathrm{a}}$ des Messbereichs, dort relativer Fehler:

$$F_\mathrm{r} \approx \frac{S(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0) + \frac{1}{2} S'(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u_1 - u_{1\mathrm{a}}) - S_\mathrm{i}}{S_\mathrm{i}}$$

$$= \frac{S(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0) + \frac{1}{2} S'(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0) \cdot S_0 \cdot (u - u_\mathrm{a}) - S_\mathrm{i}}{S_\mathrm{i}}$$

$$= \frac{S(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0)}{S_\mathrm{i}} - 1 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{S'(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0)}{S_\mathrm{i}} \cdot S_0 \cdot (u - u_\mathrm{a})}_{\approx\, 0}$$

- $y - y_\mathrm{a} = S_0\, S_1\, S_\mathrm{i} \cdot (1 + F_\mathrm{r}) \cdot (u - u_\mathrm{a})$
  $\approx S_0\, S_1\, S(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0) \cdot (u - u_\mathrm{a})$
  nur noch von der konstanten Empfindlichkeit $S(u_{1\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}_0)$ am Messeingang des nichtlinearen Gliedes abhängig
- Kompensation des kleinen S_0 durch entsprechend großes S_1:
  $S_0 \cdot S_1 = 1$

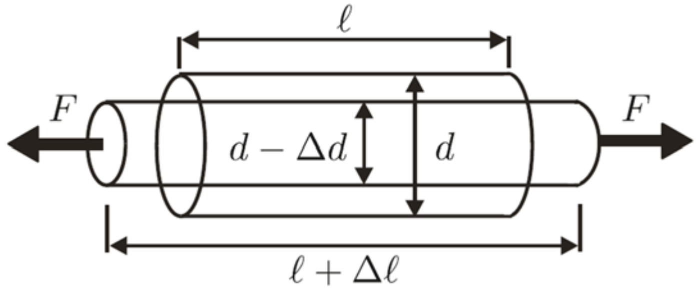
3.2 Kennlinienfehler unter Normalbedingungen

Herabsetzen des Messbereichs

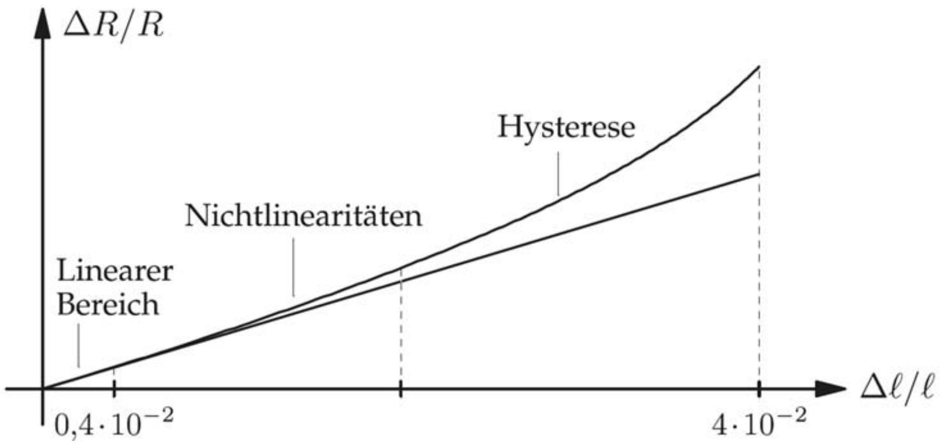
- Vorgehensweise entspricht Linearisierung um einen Arbeitspunkt (hier: um $u_{1\mathrm{a}}$)
- Nachteil: Kleine Signalamplitude von u_2 kann Rauschen erhöhen

Herabsetzen des Messbereichs

- Beispiel: Wegmessung mit Dehnungsmessstreifen (DMS)
  - Prinzip: Mechanische Beanspruchung ändert Länge l und Querschnitt $A = \frac{\pi d^2}{4}$ und damit Widerstand $R \propto \frac{l}{A}$ eines Leiters



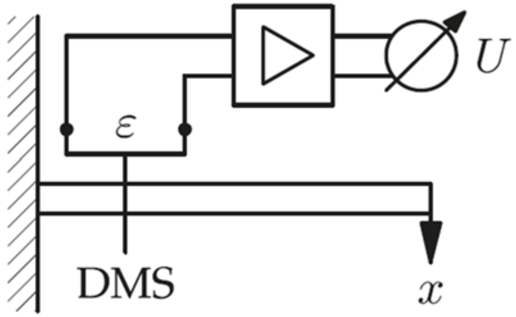
  - Bei großen Wegen x: starke Nichtlinearität (bis zur Zerstörung) des DMS

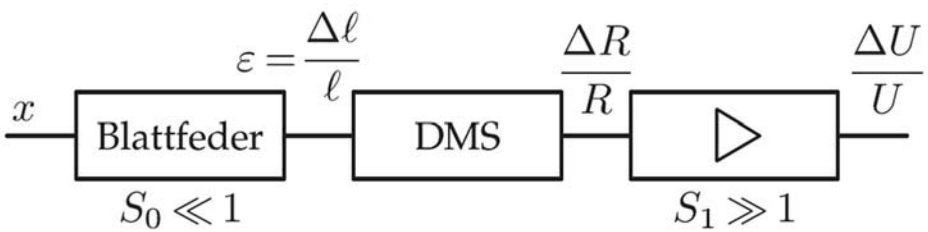


Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Herabsetzen des Messbereichs

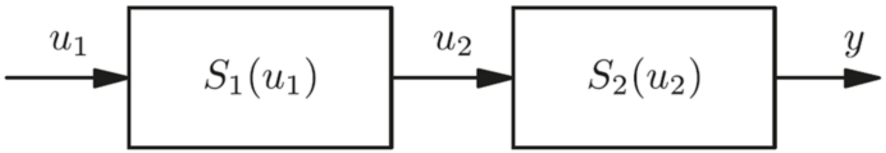
- Beispiel: Wegmessung mit Dehnungsmessstreifen (DMS)
  - Wegmessung z. B. mittels Blattfeder:
    - Umformung des großen Weges x in kleine Dehnung $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$, Längenänderung des DMS: $\varepsilon \cdot l$
    - Umsetzung der Längenänderung $\frac{\Delta l}{l}$ in Widerstandsänderung $\frac{\Delta R}{R}$ im linearen Bereich des DMS
    - Umsetzung von $\frac{\Delta R}{R}$ in Spannungsänderung $\frac{\Delta U}{U}$ mit $S_1 \gg 1$





Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

- Idee: Reihenschaltung zweier nichtlinearer Übertragungsglieder mit den Empfindlichkeiten $S_1(u)$ und $S_2(u)$, so dass gesamte Übertragungskette möglichst linear wird



- Kennlinien der einzelnen Glieder:

$$u_2 = f_1(u_1),\, S_1(u_1) = \frac{\partial u_2}{\partial u_1} = \frac{\partial f_1(u_1)}{\partial u_1}$$

$$y = f_2(u_2),\, S_2(u_2) = \frac{\partial y}{\partial u_2} = \frac{\partial f_2(u_2)}{\partial u_2}$$

- Gesamtempfindlichkeit: $\frac{\partial y}{\partial u_1} = \frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial u_1} = S_1(u_1) \cdot S_2(u_2)$
- Lineare Gesamtkennlinie erfordert also $S_1(u_1) \cdot S_2(u_2) = S = \text{const.}$
- Formal erfüllt, wenn Kennlinie des zweiten Gliedes gerade die Umkehrfunktion des ersten Gliedes ist: $y = f_2(u_2) = f_1^{-1}(u_2)$

Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

- Approximation von $y = f_2(u_2) = f_1^{-1}(u_2)$ mittels Taylor-Reihenentwicklung um den Arbeitspunkt
- Linearitätsbedingungen: erste drei Ableitungen der Kennlinie $S = S_1(u_1) \cdot S_2(u_2)$ müssen verschwinden (d. h. konstante Steigung, konstante Krümmung, konstante Krümmungsänderung usw.):

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}u_1} = S_1' S_2 + S_1 S_2' \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}u_1} = S_1' S_2 + S_1^2 S_2' = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 S}{\mathrm{d}u_1^2} = S_1'' S_2 + 3 S_1 S_1' S_2' + S_1^3 S_2'' = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^3 S}{\mathrm{d}u_1^3} = S_1''' S_2 + 4 S_1 S_1'' S_2' + 3 {S_1'}^2 S_2' + 6 S_1^2 S_1' S_2'' + S_1^4 S_2''' = 0$$

- Bedingungen sind mit steigenden Anforderung an die Linearisierung der Reihe nach zu erfüllen
- Reihenfolge der nichtlinearen Glieder in der Übertragungskette ist unerheblich: Bedingungen sind im wesentlichen symmetrisch

3.2 Kennlinienfehler unter Normalbedingungen

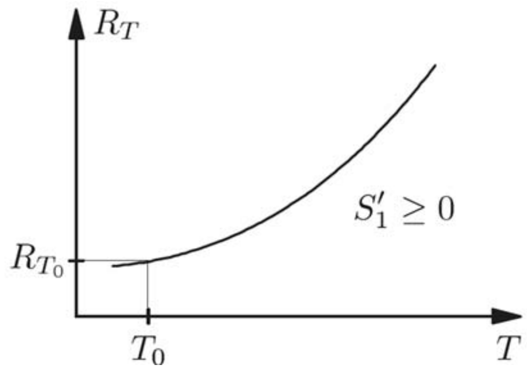
Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

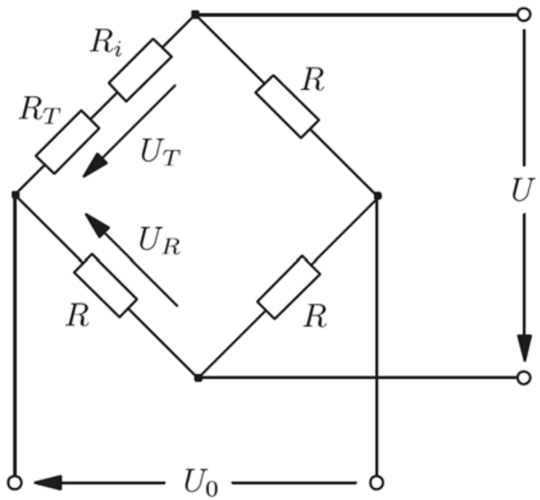
- Beispiel: Widerstandsthermometer in Brückenschaltung
  - Temperaturabhängiger Widerstand mit nichtlinearer Kennlinie
    $\Delta R_T = f_1(T) = R_T - R_{T_0} = a(T - T_0) + b(T - T_0)^2$
  - Brückenschaltung im Abgleichverfahren: Justierwiderstand R_i mit $R = R_{T_0} + R_i$, so dass Brücke im Messanfang $\Delta R_T = R_T - R_{T_0} = 0$ auf $U = 0$ abgeglichen ist
  - $U = f_2(\Delta R_T) = U_T - U_R$

$$= U_0 \left[\frac{R_T + R_i}{R_T + R_i + R} - \frac{R}{R + R} \right]$$

$$= U_0 \left[\frac{R_{T_0} + \Delta R_T + R_i}{R_{T_0} + \Delta R_T + R_i + R} - \frac{1}{2} \right]$$

$$= U_0 \left[\frac{\Delta R_T + R}{\Delta R_T + 2R} - \frac{\frac{1}{2}\Delta R_T + R}{\Delta R_T + 2R} \right] = U_0 \frac{\frac{\Delta R_T}{2}}{\Delta R_T + 2R} = U_0 \frac{\Delta R_T}{4R} \cdot \frac{1}{1 + \frac{\Delta R_T}{2R}}$$





Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

- Beispiel: Widerstandsthermometer in Brückenschaltung
  - Empfindlichkeit des temperaturabhängigen Widerstands:

$$S_1(T = T_0) = \left.\frac{\mathrm{d}(\Delta R_T)}{\mathrm{d}T}\right|_{T=T_0} = a$$

$$S_1'(T = T_0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2(\Delta R_T)}{\mathrm{d}T^2}\right|_{T=T_0} = 2b$$

  - Empfindlichkeit der Brückenschaltung:

$$S_2(\Delta R_T = 0) = \left.\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}(\Delta R_T)}\right|_{\Delta R_T=0} = U_0 \left.\frac{R}{(\Delta R_T + 2R)^2}\right|_{\Delta R_T=0} = \frac{U_0}{4R}$$

$$S_2'(\Delta R_T = 0) = \left.\frac{\mathrm{d}^2 U}{\mathrm{d}(\Delta R_T)^2}\right|_{\Delta R_T=0} = -U_0 \left.\frac{2R}{(\Delta R_T + 2R)^3}\right|_{\Delta R_T=0} = -\frac{U_0}{4R^2}$$

Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

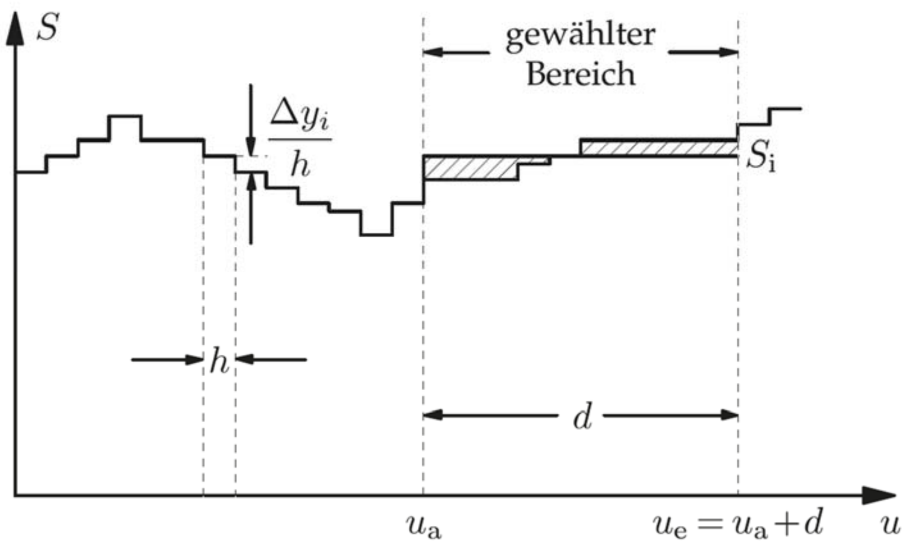
- Beispiel: Widerstandsthermometer in Brückenschaltung
  - Bedingung für konstante Empfindlichkeit $S = S_1 S_2$:
    $$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}u_1} = S_1' S_2 + S_1^2 S_2' = 0$$
  - Eingesetzt: Bedingung für die Widerstände R:
    $$2b\frac{U_0}{4R} - a^2\frac{U_0}{4R^2} = 0 \quad \Rightarrow R = \frac{a^2}{2b} \quad (b > 0)$$
  - Damit Justierwiderstand:
    $$R_i = R - R_{T_0} = \frac{a^2}{2b} - R_{T_0}$$
  - Damit muss also gelten (wegen $R > 0$, $R_i > 0$): $b > 0$, $\frac{a^2}{2b} > R_{T_0}$
  - Z. B. bei Platin-Widerstandsthermometern: $b < 0$,
    Linearisierung kann daher hier so nicht erreicht werden

Reihenschaltung zweier nichtlinearer Glieder

- Beispiel: Widerstandsthermometer in Brückenschaltung
  - Z. B. Nickel-Widerstandsthermometer:
    - $R_{T_0} = 100\,\Omega$ bei $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$: $a = 0{,}574\,\Omega/°\mathrm{C}$, $b = 0{,}0007\,\Omega/(°\mathrm{C})^2$
    - Damit Justierwiderstand: $R_i = \frac{a^2}{2b} - R_{T_0} = 135{,}34\,\Omega$
    - Vergleich der Kennlinien (Approximation durch Newton-Polynome):
      - Ohne Linearisierung ($R_i = 0$): $R = R_i + R_{T_0} = R_{T_0} = 100\,\Omega$
        $$\Rightarrow \frac{U}{U_0} = 1{,}87 \cdot 10^{-3} \frac{T}{°\mathrm{C}} \left(1 - 1{,}7 \cdot 10^{-2} \frac{T}{°\mathrm{C}}\right)$$
      - Mit Linearis. ($R_i = 135{,}34\,\Omega$): $R = R_i + R_{T_0} = \frac{a^2}{2b} = 235{,}34\,\Omega$
        $$\Rightarrow \frac{U}{U_0} = 0{,}61 \cdot 10^{-3} \frac{T}{°\mathrm{C}} \left(1 - 2{,}0 \cdot 10^{-4} \frac{T}{°\mathrm{C}}\right)$$
      - D. h. geringere Nichtlinearität, aber auch geringere Empfindlichkeit

Wahl des günstigsten Messbereichs

- Idee: Auswahl eines kleinen Messbereichs, der eine möglichst lineare Kennlinie aufweist, aus dem gesamten möglichen Messbereich
- Dazu Bewertung der Empfindlichkeit S (besser als Bewertung der Kennlinie) mittels Ableitung oder Differenzen erster Ordnung Δy_i oder Steigung $\Delta y_i/h$ (mit h: Stützstellenabstand)
- Auswahl eines Intervalls $[u_\mathrm{a}, u_\mathrm{e}]$, in dem die Empfindlichkeit S hinreichend hoch und möglichst konstant ist, als Arbeitsbereich



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Wahl des günstigsten Messbereichs

- Analytische Bestimmung des Arbeitsbereichs mittels des Gütemaßes

$$Q = \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} (S(u) - S_\mathrm{i})^2 \,\mathrm{d}u$$

- Gesucht ist der Messanfang u_a, der mit Rücksicht auf die Nebenbedingung $S_\mathrm{i} = \frac{1}{d}\int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S(u)\,\mathrm{d}u$ das Gütemaß Q minimiert:

$$Q = \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S^2(u)\,\mathrm{d}u - 2S_\mathrm{i} \underbrace{\int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S(u)\,\mathrm{d}u}_{= S_\mathrm{i} d} + S_\mathrm{i}^2 d$$

$$= \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S^2(u)\,\mathrm{d}u - S_\mathrm{i}^2 d$$

Wahl des günstigsten Messbereichs

- Notwendige Bedingung für Minimum von $Q = \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S^2(u)\,\mathrm{d}u - S_\mathrm{i}^2 d$ (Leibniz-Regel für Parameterintegrale anwenden, auch für S_i):

$$\frac{\partial Q}{\partial u_\mathrm{a}} = S^2(u_\mathrm{a}+d) - S^2(u_\mathrm{a}) - 2S_\mathrm{i}\big(S(u_\mathrm{a}+d) - S(u_\mathrm{a})\big)$$

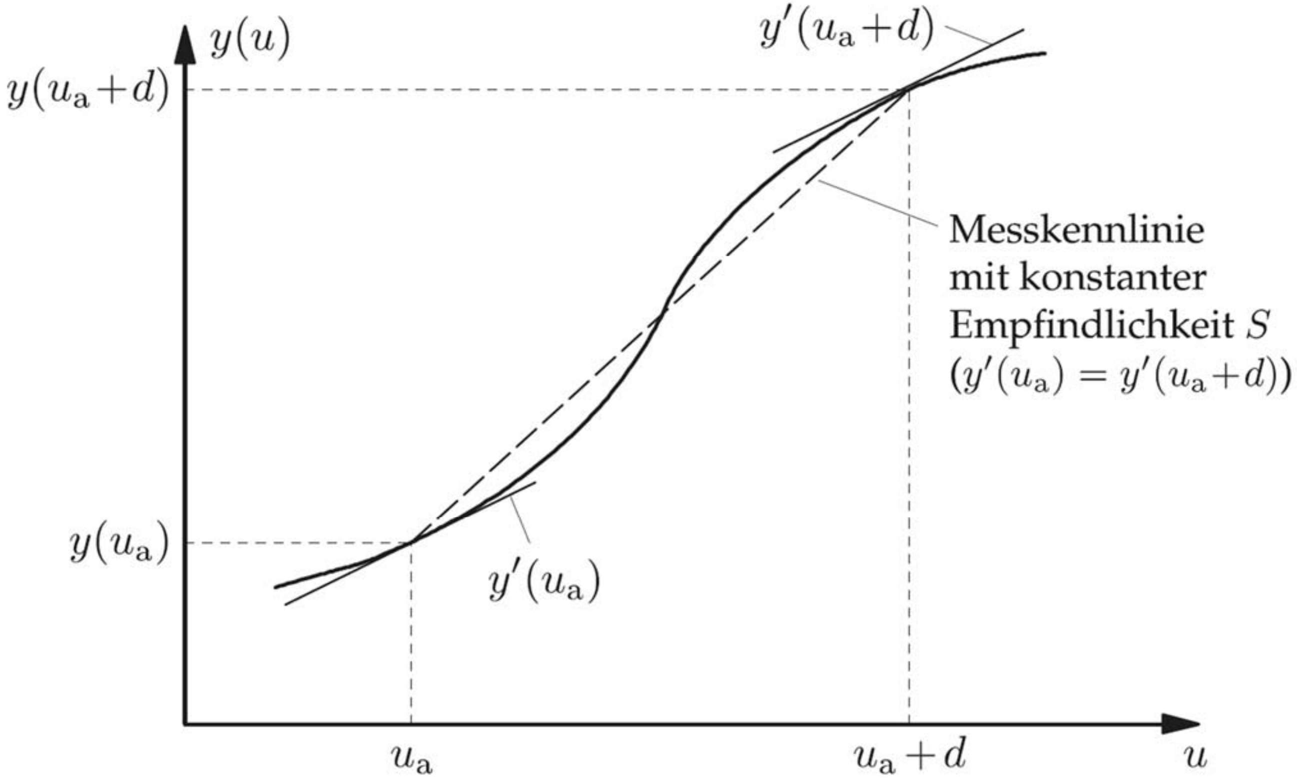
$$= 2\underbrace{\big(S(u_\mathrm{a}+d) - S(u_\mathrm{a})\big)}_{\mathrm{I}}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\big(S(u_\mathrm{a}+d) + S(u_\mathrm{a})\big) - S_\mathrm{i}\right)}_{\mathrm{II}} = 0$$

- Zwei Kriterien $(\mathrm{I}, \mathrm{II})$, von denen eines zu erfüllen ist

Wahl des günstigsten Messbereichs

I. $S(u_\mathrm{a}+d) - S(u_\mathrm{a}) = y'(u_\mathrm{a}+d) - y'(u_\mathrm{a}) = 0$:
Arbeitsbereich um einen Wendepunkt legen

- Messbereich muss nicht symmetrisch zum Wendepunkt liegen
- Lineare Kennlinie muss nicht durch den Wendepunkt gehen

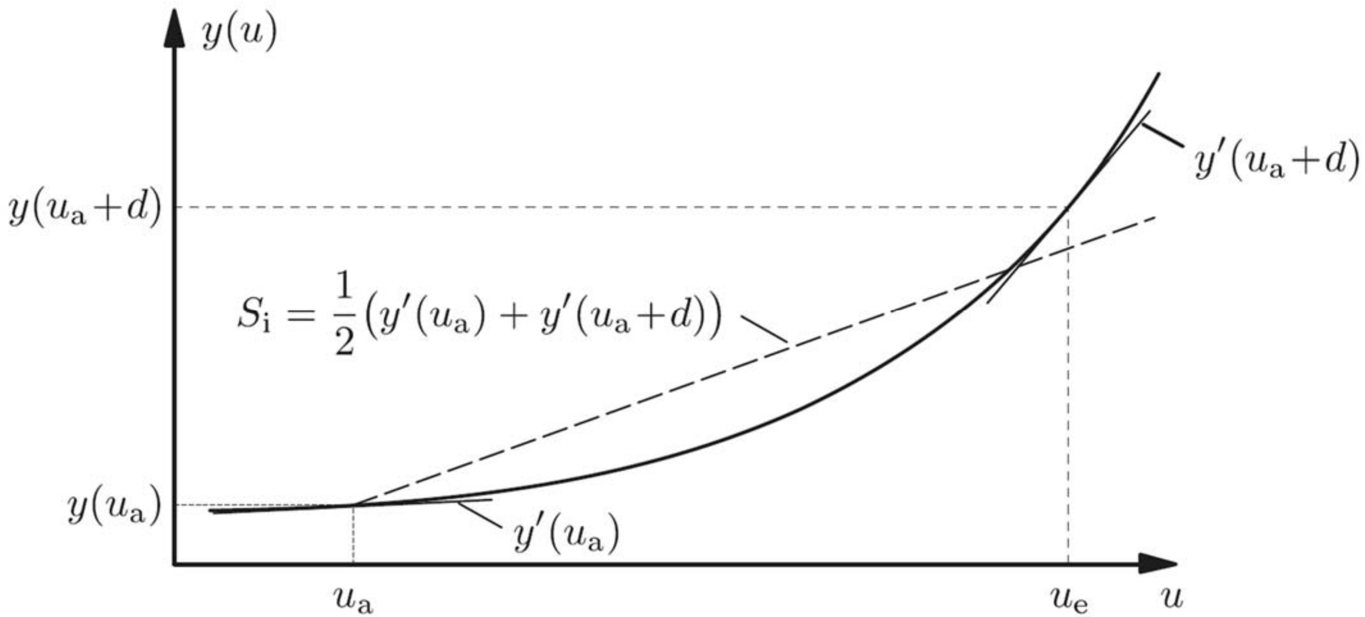


Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Wahl des günstigsten Messbereichs

II. $\frac{1}{2}\big(S(u_\mathrm{a}+d)+S(u_\mathrm{a})\big)-S_\mathrm{i}=\frac{1}{2}\big(y'(u_\mathrm{a}+d)+y'(u_\mathrm{a})\big)-S_\mathrm{i}=0$:
Arbeitsbereich so legen, dass arithmetisches Mittel der Steigungen am Messanfang und -ende der mittleren Steigung S_i entspricht

- Lineare Kennlinie muss nicht durch den Endpunkt gehen (wie bei der Fixpunktjustierung)
- Mittlere (ideale) Steigung S_i aus $S_\mathrm{i}=\frac{1}{d}\int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S(u)\,\mathrm{d}u$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Wahl des günstigsten Messbereichs

- Alternativ zur zusätzlichen Erzielung einer hohen Empfindlichkeit: Gütemaß

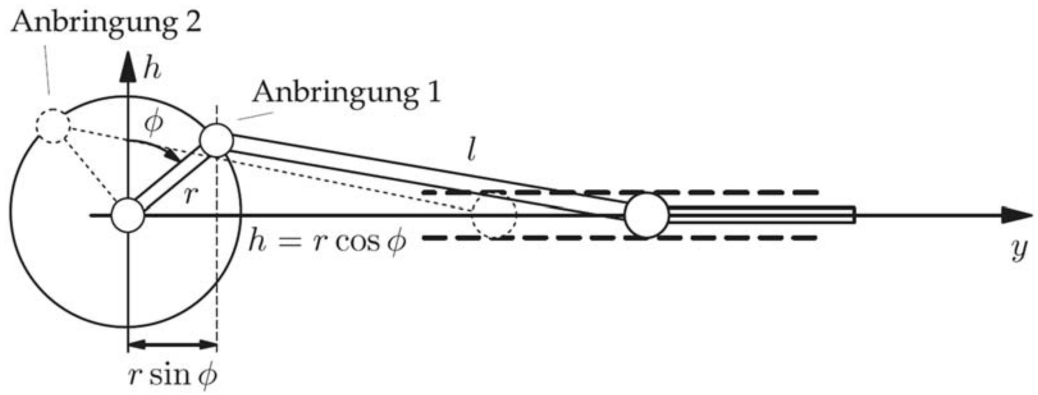
$$R = \frac{1}{S_\mathrm{i}^2 d} Q = \frac{1}{S_\mathrm{i}^2 d} \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} (S(u) - S_\mathrm{i})^2 \,\mathrm{d}u = \frac{1}{S_\mathrm{i}^2 d} \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S^2(u) \,\mathrm{d}u - 1$$

- Notwendige Bedingung für Minimum von R (Produktregel beachten):

$$\underbrace{\big(S(u_\mathrm{a} + d) - S(u_\mathrm{a})\big)}_{\mathrm{I}} \left[S_\mathrm{i} d \big(S(u_\mathrm{a} + d) + S(u_\mathrm{a})\big) - 2 \int_{u_\mathrm{a}}^{u_\mathrm{a}+d} S^2(u) \,\mathrm{d}u \right] = 0$$

- Kriterium I: siehe oben, d. h. Extremum des Gütemaßes R bei passender Wahl des Messbereichs $[u_\mathrm{a}, u_\mathrm{a} + d]$ um einen Wendepunkt
- Sicherstellung, dass es sich um ein Minimum handelt, mittels Abschätzung der Empfindlichkeit an zwei Messstellen

Wahl des günstigsten Messbereichs



- Beispiel: Kurbeltrieb: Umformung des Drehwinkels ϕ (Messgröße u_{a}) in eine lineare Position y
  - Kinematik:
    $$y = r\sin\phi + \sqrt{l^2 - r^2\cos^2\phi}$$
  - Erwünscht: möglichst linearer Zusammenhang zwischen y und ϕ
  - Annahme: $\frac{r}{l} \ll 1$, daraus folgt mit $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{x}{2}$ für $x \ll 1$:
    $$\frac{y}{l} = \frac{r}{l}\sin\phi + 1 - \frac{r^2}{2l^2}\cos^2\phi$$
  - Empfindlichkeit:
    $$S(\phi) = \frac{\mathrm{d}\left(\frac{y}{l}\right)}{\mathrm{d}\phi} = \frac{r}{l}\cos\phi + \frac{r^2}{l^2}\cos\phi\sin\phi$$

Wahl des günstigsten Messbereichs

- Beispiel: Kurbeltrieb
  - Im folgenden: $u_\mathrm{a} = \phi_\mathrm{a},\ d = \frac{\pi}{2}$
  - Kriterium I $(S(u_\mathrm{a} + d) - S(u_\mathrm{a}) = 0)$:

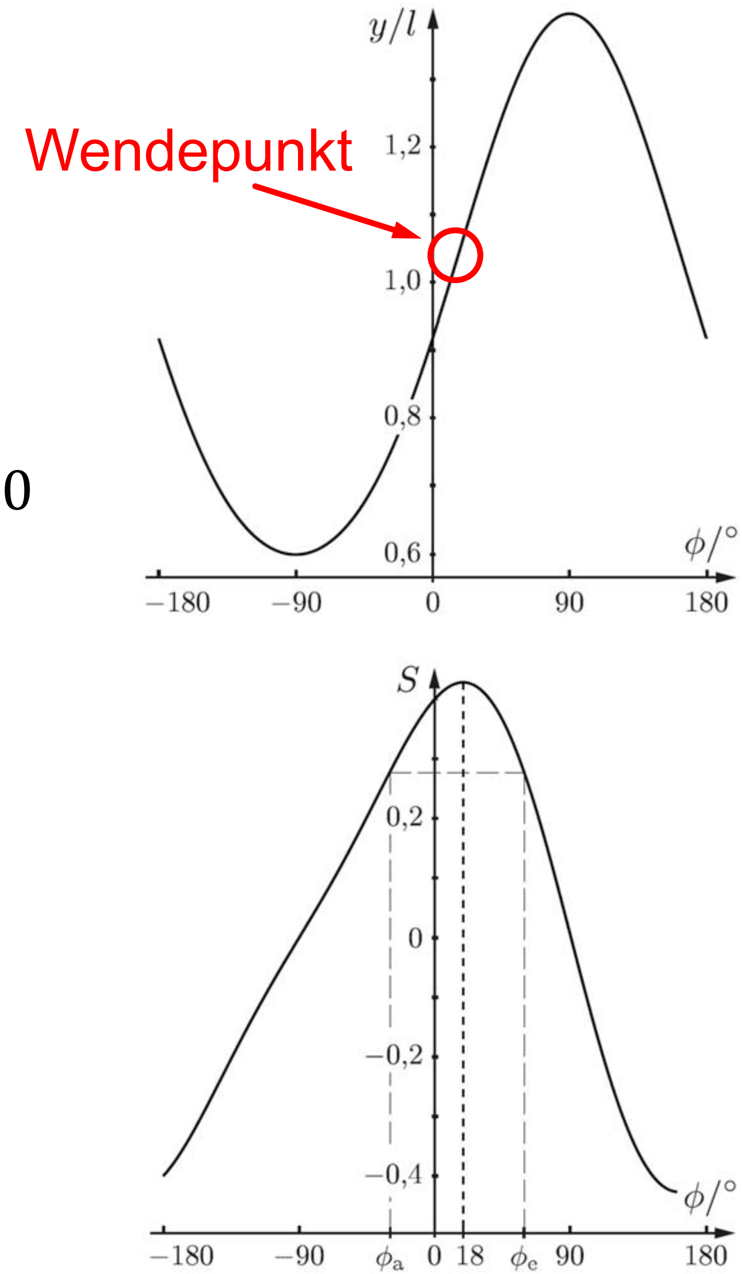
$$-\frac{r}{l}\sin\phi_\mathrm{a} - \frac{r^2}{l^2}\sin\phi_\mathrm{a}\cos\phi_\mathrm{a} - \left(\frac{r}{l}\cos\phi_\mathrm{a} + \frac{r^2}{l^2}\cos\phi_\mathrm{a}\sin\phi_\mathrm{a}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{2r}{l} = -\frac{1}{\cos\phi_\mathrm{a}} - \frac{1}{\sin\phi_\mathrm{a}}$$

nur nummerisch lösbar, z. B. für $\frac{r}{l} = 0{,}4$:

$\phi_\mathrm{a} \approx -30{,}7°,\ \phi_\mathrm{e} \approx 59{,}3°$

S_ia siehe unten



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Wahl des günstigsten Messbereichs

- Beispiel: Kurbeltrieb
  - Kriterium II ($\frac{1}{2}\left(S(u_\mathrm{a}+d)+S(u_\mathrm{a})\right)-S_\mathrm{i}=0$):

    $$\frac{r}{2l}(-\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a})-S_\mathrm{i}=0$$

    Empfindlichkeit S_i muss hier vorgegeben werden, z. B. aus Fixpunktjustierung:

    $$S_\mathrm{i}=\frac{y(\phi_\mathrm{a}+d)-y(\phi_\mathrm{a})}{d}$$

    Eingesetzt:

    $$\frac{r}{2l}(-\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a}) -\frac{2r}{\pi l}\left(\cos\phi_\mathrm{a}-\sin\phi_\mathrm{a}+\frac{r}{2l}(-\sin^2\phi_\mathrm{a}+\cos^2\phi_\mathrm{a})\right)=0$$

    $$\Leftrightarrow (-\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a})\left(\frac{r}{2l}-\frac{2r}{\pi l}-\frac{r^2}{\pi l^2}(\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a})\right)=0$$

Wahl des günstigsten Messbereichs

- Beispiel: Kurbeltrieb
  - Kriterium II:

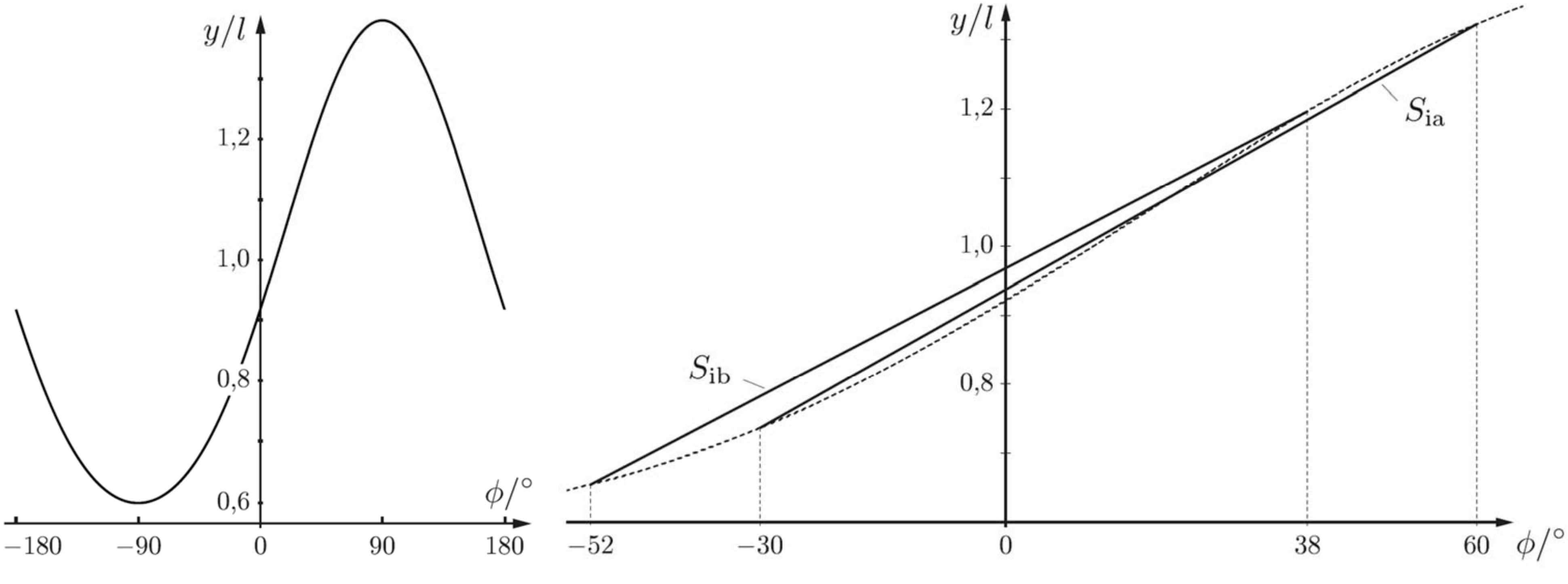
$$\underbrace{(-\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a})}_{\text{A}}\underbrace{\left(\frac{r}{2l}-\frac{2r}{\pi l}-\frac{r^2}{\pi l^2}(\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a})\right)}_{\text{B}}=0$$

A: $-\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a}=0$
mittels Näherungsverfahren lösbar: $\phi_\mathrm{a}\approx-52°$, $\phi_\mathrm{e}\approx 38°$
S_ib siehe nächste Folie

B: $\frac{r}{2l}-\frac{2r}{\pi l}-\frac{r^2}{\pi l^2}(\sin\phi_\mathrm{a}+\cos\phi_\mathrm{a})=0$
mittels Näherungsverfahren lösbar: $\phi_\mathrm{a}\approx 45°$, $\phi_\mathrm{e}\approx 145°$
offensichtlich kein Minimum

Wahl des günstigsten Messbereichs

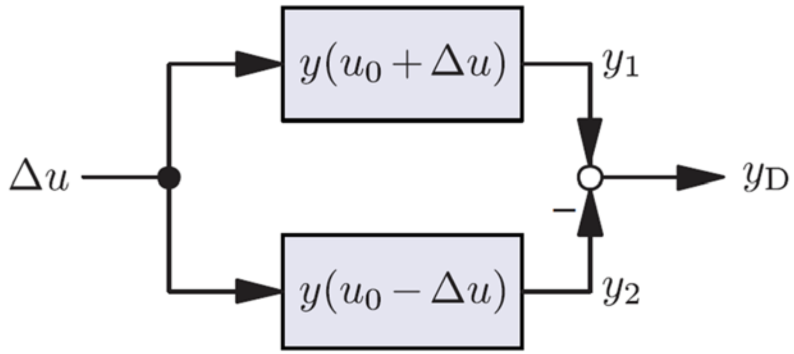
- Beispiel: Kurbeltrieb
  - Vergleich der Lösungen:
    Kriterium I liefert in diesem Fall die bessere Anpassung:
    kleinere Abweichung der Linearisierung von der realen Kennlinie



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Differenzmethode

- Idee: Parallelschaltung zweier gleichartiger (nichtlinearer) Teilsysteme, die mit einer Messgröße gegensinnig (d. h. mit unterschiedlichem Vorzeichen) beaufschlagt werden



- Abweichungen Δu vom Arbeitspunkt u_0: $\Delta u = u - u_0$
- Gegensinnige Beaufschlagung durch entsprechende Anordnung bzw. entsprechenden Betrieb der Sensoren

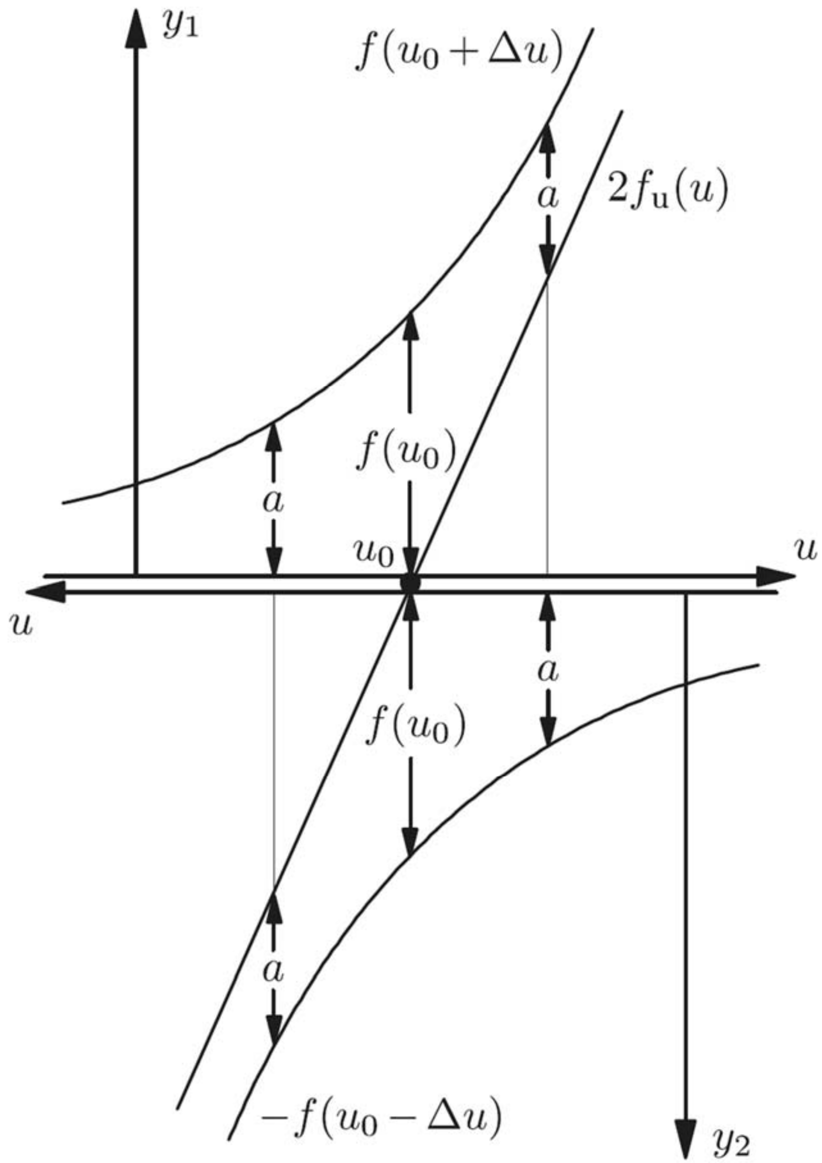
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Differenzmethode

- Wirkungsweise: dazu Zerlegung einer Funktion $f(\Delta u)$ in einen geraden Anteil $f_\mathrm{g}(\Delta u)$ und einen ungeraden Anteil $f_\mathrm{u}(\Delta u)$:
  $f(\Delta u) = f_\mathrm{g}(\Delta u) + f_\mathrm{u}(\Delta u)$
- Gerade Funktion: $f_\mathrm{g}(-\Delta u) = f_\mathrm{g}(\Delta u)$
- Ungerade Funktion: $f_\mathrm{u}(-\Delta u) = -f_\mathrm{u}(\Delta u)$
- Damit ist $f(\Delta u) + f(-\Delta u) = 2 f_\mathrm{g}(\Delta u)$,
  $f(\Delta u) - f(-\Delta u) = 2 f_\mathrm{u}(\Delta u)$
- Gerader Anteil (z. B. Anteile $\propto u^2$, u^4): unerwünschte Nichtlinearitäten
- Ungerade Anteile: hauptsächlich erwünschter Anteil $\propto u$, aber auch unerwünschte Nichtlinearitäten höherer Ordnung z. B. $\propto u^3$, u^5 usw.
- Wahl des Arbeitspunkts u_0 in der Mitte des Messbereichs, Kennlinie wird durch Differenzbildung als ungerader Funktionsanteil gebildet:
  $y_\mathrm{D} = f(\Delta u) - f(-\Delta u) = 2 f_\mathrm{u}(\Delta u)$,
  dadurch wird also der Anteil des geraden Funktionsanteils unterdrückt

Differenzmethode

- $y_\mathrm{D} = f(\Delta u) - f(-\Delta u) = 2f_\mathrm{u}(\Delta u)$



Differenzmethode

- Taylor-Entwicklung der gegensinnig beaufschlagten Kennlinien:

$$y(u_0+\Delta u) = y(u_0) + S(u_0)\Delta u\left(1 + \frac{S'(u_0)}{S(u_0)}\frac{\Delta u}{2!} + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)}\frac{\Delta u^2}{3!} + \cdots\right)$$

$$y(u_0-\Delta u)$$

$$= y(u_0) + S(u_0)(-\Delta u)\left(1 + \frac{S'(u_0)}{S(u_0)}\frac{-\Delta u}{2!} + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)}\frac{(-\Delta u)^2}{3!} + \cdots\right)$$

- Daraus Differenz:

$$y_\mathrm{D} = y(u_0+\Delta u) - y(u_0-\Delta u)$$

$$= 2S(u_0)\Delta u\left(1 + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)}\frac{\Delta u^2}{3!} + \cdots + \frac{S^{(2v)}(u_0)}{S(u_0)}\frac{\Delta u^{2v}}{(2v+1)!} + \cdots\right)$$

  Krümmung (gerader Anteil zweiter Ordnung) fällt also weg (genauso wie alle anderen geraden Anteile)

- Mit $S_\mathrm{i} = S(u_0)$:
  Ideale Kennlinie: $y_\mathrm{D} = 2S_\mathrm{i}\cdot\Delta u$, d. h. doppelte Empfindlichkeit

Differenzmethode

- Relativer Fehler:
  - Für die ursprüngliche Kennlinie (s. o.):

$$F_\mathrm{r} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i}} \approx \frac{S(u_0, \boldsymbol{z}_0) + \frac{1}{2} S'(u_0, \boldsymbol{z}_0) \cdot \Delta u - S_\mathrm{i}}{S_\mathrm{i}}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{S'(u_0, \boldsymbol{z}_0)}{S_\mathrm{i}} \Delta u$$

  - Für die Differenzanordnung:

$$F_\mathrm{rD} = \frac{y_\mathrm{D} - y_\mathrm{iD}}{y_\mathrm{iD}} \approx \frac{2S(u_0, \boldsymbol{z}_0) + \frac{1}{3} S''(u_0, \boldsymbol{z}_0) \cdot \Delta u^2 - 2S_\mathrm{i}}{2S_\mathrm{i}}$$

$$= \frac{1}{6} \frac{S''(u_0, \boldsymbol{z}_0)}{S_\mathrm{i}} \Delta u^2$$

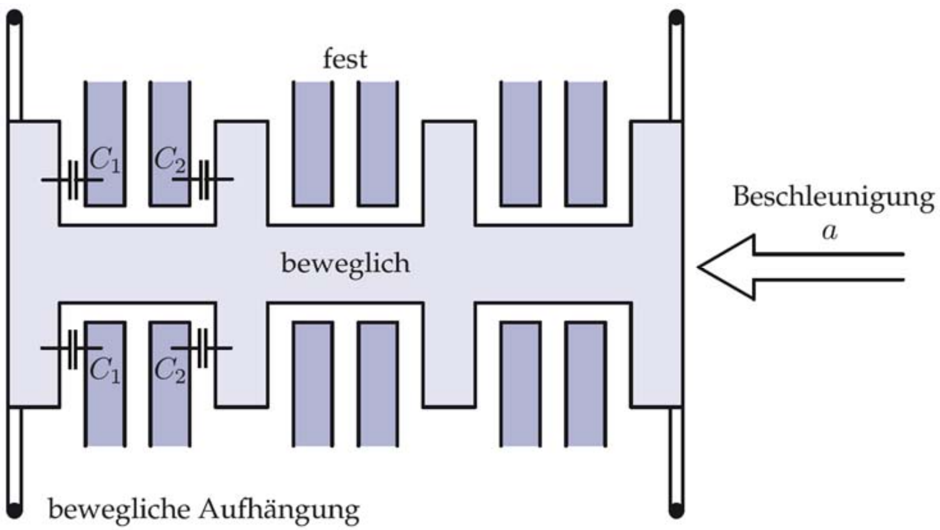
  d. h. proportional zur 2. Ableitung, quadratisch ansteigend

  - Verhältnis der relativen Fehler:

$$\frac{F_\mathrm{rD}}{F_\mathrm{r}} = \frac{1}{3} \frac{S''(u_0, \boldsymbol{z}_0)}{S'(u_0, \boldsymbol{z}_0)} \Delta u$$

Differenzmethode

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Messung der Beschleunigung a bzw. der Beschleunigungs-kraft F_m
  - Kammartige Struktur, an 4 Stellen beweglich befestigt
  - Feder-Masse-System: $m\Delta\ddot{d} + \beta\Delta\dot{d} + c\Delta d = ma = F_m$
  - Stationärer Zustand: $\Delta d = \text{const.}$:
    $c\Delta d = ma = F_m$
    $\Delta d = \frac{m}{c}a = \frac{1}{\omega_0^2}a$

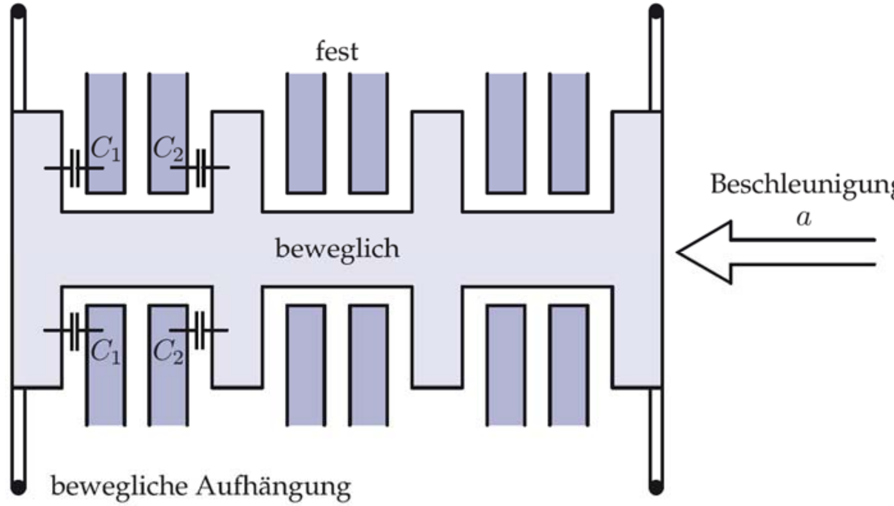


Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

  - Hohe Eigenfrequenzen ω_0, daher kleine Auslenkungen Δd
  - Strukturen bilden Kapazitäten C_1 und C_2

Differenzmethode

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Bei Auslenkung um Δd nach links: C_2 wird größer, C_1 wird kleiner:



$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{\varepsilon A}(d + \Delta d) = \frac{d}{\varepsilon A}\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right) = \frac{1}{C_0}\left(1 + \frac{1}{d\omega_0^2}a\right)$$

$$\frac{1}{C_2} = \frac{1}{\varepsilon A}(d - \Delta d) = \frac{d}{\varepsilon A}\left(1 - \frac{\Delta d}{d}\right) = \frac{1}{C_0}\left(1 - \frac{1}{d\omega_0^2}a\right)$$

Differenzmethode

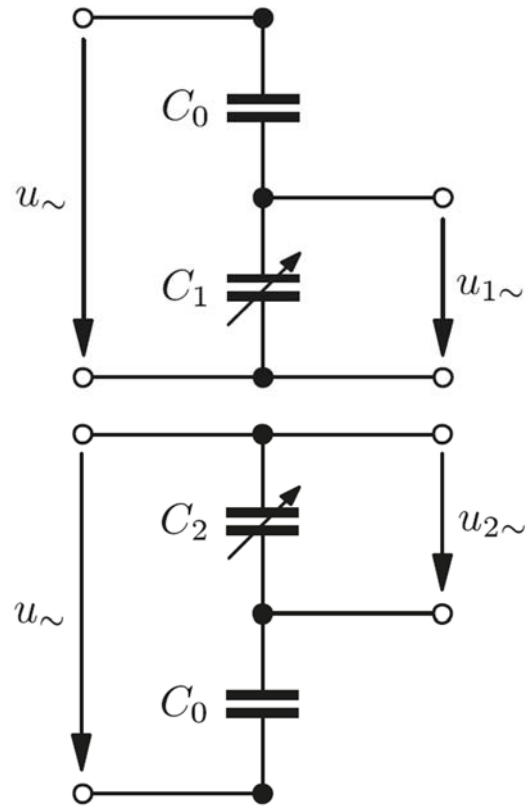
- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Messung der Kapazitätsänderungen mittels Spannungsteiler:

$$u_{1\sim} = \frac{\frac{1}{C_1}}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_0}} u_\sim = \frac{1 + \frac{\Delta d}{d}}{2 + \frac{\Delta d}{d}} u_\sim$$

$$u_{2\sim} = \frac{\frac{1}{C_2}}{\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_0}} u_\sim = \frac{1 - \frac{\Delta d}{d}}{2 - \frac{\Delta d}{d}} u_\sim$$

  - Daraus Differenzspannung:

$$\Delta u_\sim = u_{1\sim} - u_{2\sim} = \frac{2\frac{\Delta d}{d}}{4 - \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2} u_\sim$$



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Differenzmethode

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Taylor-Entwicklung:

$$\Delta u_{\sim} = \Delta u_{\sim}\left(\frac{\Delta d_0}{d}\right) + \left.\frac{\partial \Delta u_{\sim}}{\partial \frac{\Delta d_0}{d}}\right|_{\Delta d_0} \frac{\Delta d}{d} + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 \Delta u_{\sim}}{\partial \left(\frac{\Delta d_0}{d}\right)^2}\right|_{\Delta d_0} \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2 + \cdots$$

  - Für kleine Auslenkungen $\frac{\Delta d}{d} \ll 1$:

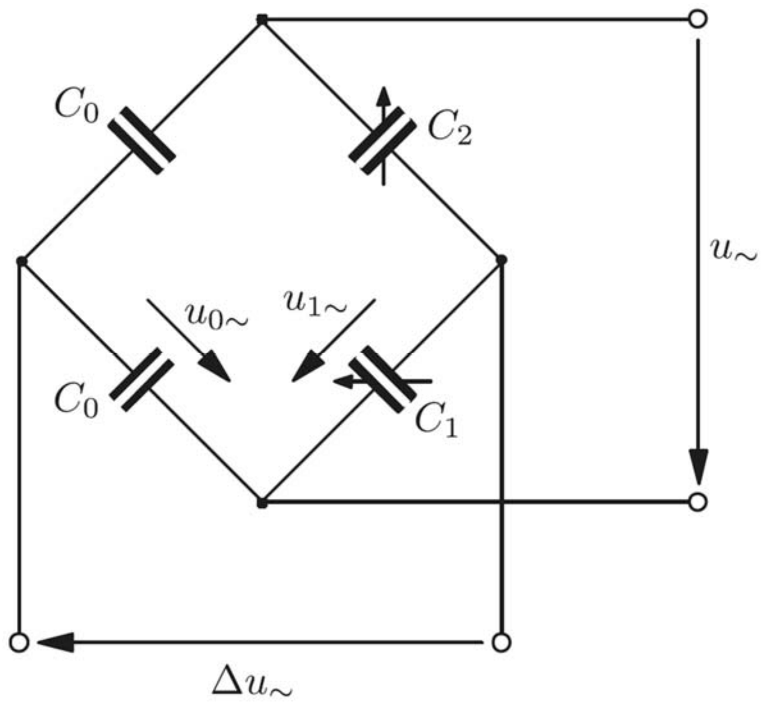
$$\Delta u_{\sim} = \frac{2\frac{\Delta d}{d}}{4 - \left(\frac{\Delta d}{d}\right)^2} u_{\sim} \approx \frac{1}{2}\frac{\Delta d}{d} u_{\sim}$$

    d. h. näherungsweise linearer Zusammenhang zwischen $\Delta u_{\sim}$und Δd
  - Insbesondere verschwinden die Koeffizienten der geraden Exponenten

Differenzmethode

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Umsetzung normalerweise als Wechselstrombrücke:

$$\Delta u_\sim = u_{1\sim} - u_{2\sim} = \left(\frac{C_1^{-1}}{C_1^{-1} + C_2^{-1}} - \frac{1}{2} \right) u_\sim \approx \frac{1}{2} \frac{\Delta d}{d} u_\sim$$



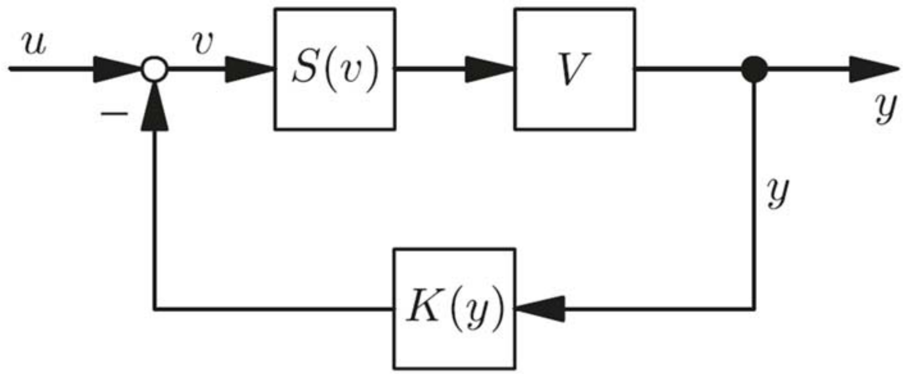
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Differenzmethode

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Nach Gleichrichtung (im stationären Zustand):
    $$|\Delta u_{\sim}| = \frac{1}{2}\frac{\Delta d}{d}|u_{\sim}| = \frac{1}{2}\frac{ma}{cd}|u_{\sim}| = \frac{1}{2}\frac{F_m}{cd}|u_{\sim}|$$
  - Empfindlichkeit:
    $$S_i = \frac{|\Delta u_{\sim}|}{F_m} = \frac{|u_{\sim}|}{2F_m}\frac{\Delta d}{d} = \frac{|u_{\sim}|}{2cd}$$

Gegenkopplung

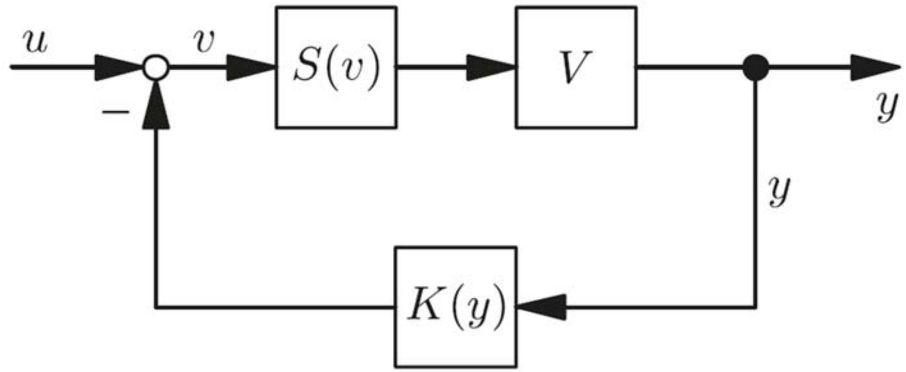
- Wirkungsvolle Methode, um für viele Fälle eine nahezu ideale Kennlinie zu erhalten
- Idee: Verwendung eines geschlossenen (Regel-)Kreises
- Kompensationsverfahren:
  Messgröße u wird mit einer vom Ausgangssignal y abgeleiteten Größe $K(y)$ verglichen und ein Abgleich durchgeführt, bis Differenz v verschwindet



- Voraussetzung: Existenz eines Übertragungsgliedes (Messgliedes) $K(y)$, das ein Signal in der gleichen physikalischen Größe wie die Messgröße u liefert
  (fehlt z. B. für Abbildung einer elektrischen Ausgangsgröße in eine Temperatur)
- Nachteil: Dynamische Effekte des geschlossenen Kreises möglich (siehe Kap. 5)

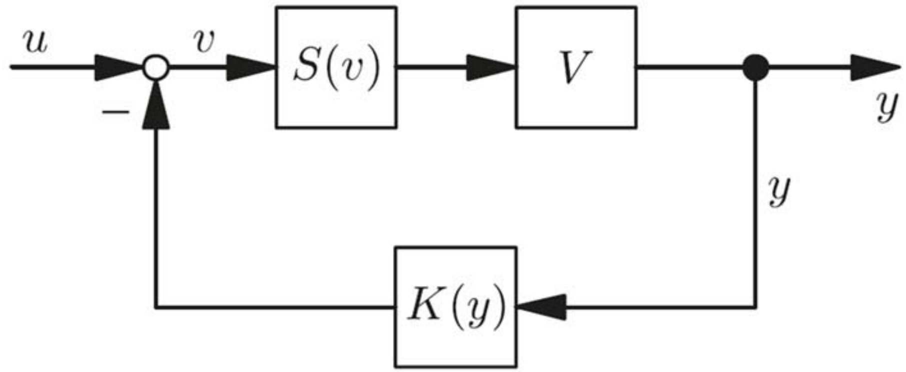
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Gegenkopplung



- Physikalische Messkennlinie $f(v)$ mit Empfindlichkeit $S(v) = \frac{\partial f(v)}{\partial v}$
- Kleiner Messbereich $[v_\mathrm{a}, v_\mathrm{e}]$ (wegen Gegenkopplung), daher konstante Empfindlichkeit $S(v_\mathrm{a}) = S(v_\mathrm{e}) = S_\mathrm{i} > 0$
- Aus dem Blockschaltbild:
  $y = S_\mathrm{i} V \cdot v,\ v = u - K(y)$
  $\Rightarrow v = \frac{1}{S_\mathrm{i} V} y = u - K(y),\ K(y) = u - \frac{1}{S_\mathrm{i} V} y$
- Für große Verstärkungen $V \gg 1$: $K(y) \approx u$
- Daher **Kennlinie** der gesamten Anordnung: $y = K^{-1}(u)$
- Auch anwendbar, um nichtlineare Kennlinien zu realisieren (z. B. für Messbereiche, die mehrere Größenordnungen umfassen)
  Beispiel: Teilchenraten in der Kerntechnik: logarithmische Verstärker, realisiert mittels Kompensationsgliedern $K(y)$ mit exponentieller Charakteristik (z. B. Diodenkennlinien)

Gegenkopplung



- Falls lineare Rückkoppelung (d. h. $K(y) = K' \cdot y$):

  $$K(y) = K' \cdot y = u - \frac{1}{S_\mathrm{i} V} y$$

  $$\Rightarrow \quad u = K' \left(1 + \frac{1}{K' S_\mathrm{i} V}\right) y$$

  $$\Rightarrow \quad y = \frac{u}{K'} \frac{1}{1 + \frac{1}{K' S_\mathrm{i} V}}$$

- Näherung: $\frac{1}{1+x} \approx 1 - x$ für $|x| \ll 1$ (Potenzreihenentwicklung):

  $$y \approx \frac{u}{K'} \left(1 - \frac{1}{K' S_\mathrm{i} V}\right)$$

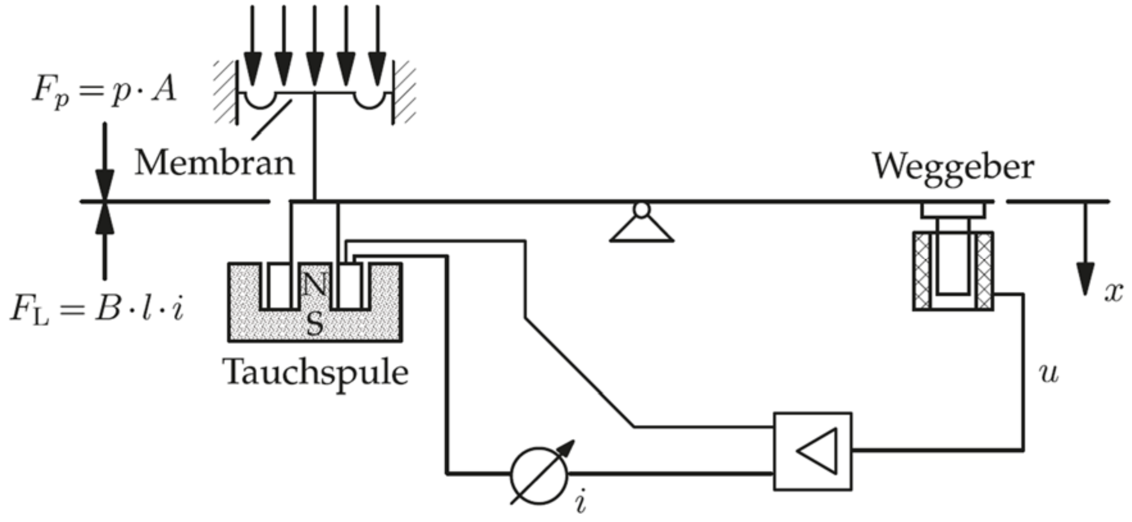
- Vergleich mit idealer Kennlinie: $y_\mathrm{i} = \frac{1}{K'} u$: relativer Kennlinienfehler:

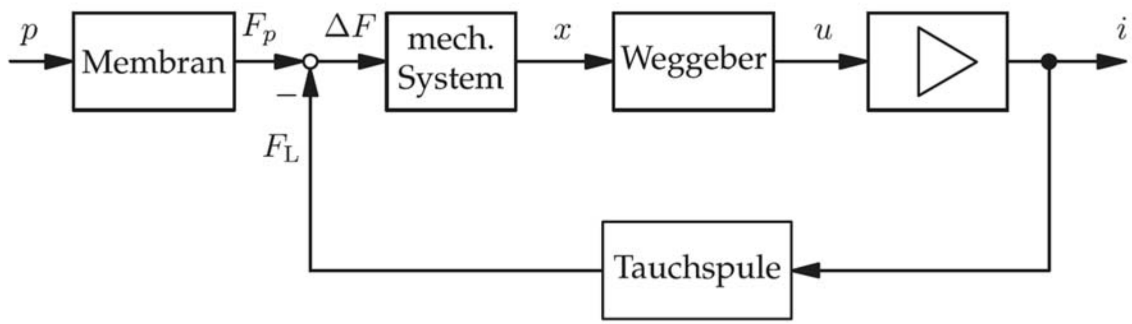
  $$F_\mathrm{rG} = \frac{y - y_\mathrm{i}}{y_\mathrm{i}} =\approx -\frac{1}{K' S_\mathrm{i} V}$$

  d. h. bei hoher Verstärkung V verschwindet der rel. Kennlinienfehler

Gegenkopplung

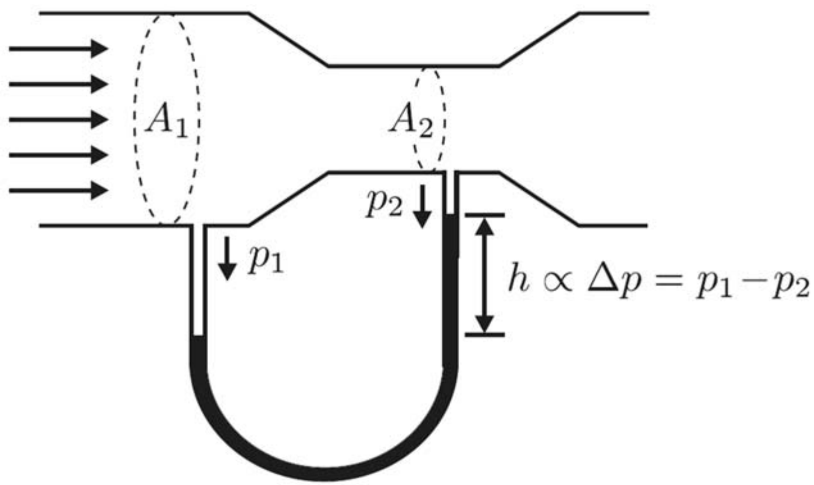
- Beispiel:
  Druck-Messumformer
  - Gegenkopplung mittels Kräftevergleich
    (es gibt kein geeignetes Übertragungsglied, das einen Strom in einen Druck umwandelt)
  - Für $V \gg 1$: $\Delta F \approx 0$:
    Kräftegleichgewicht
    $F_\mathrm{p} = p \cdot A = F_\mathrm{L} = B \cdot l \cdot i$
    $\Rightarrow \quad i = \frac{A}{B \cdot l} p$





Gegenkopplung

- Beispiel: Durchflussmessung
  - Wirkdruckverfahren:
    $$\Delta p = \frac{\rho}{2}\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right) q_\mathrm{V}^2$$
    d. h. Wirkdruck Δp ist proportional zum Quadrat des Volumendurchflusses q_V



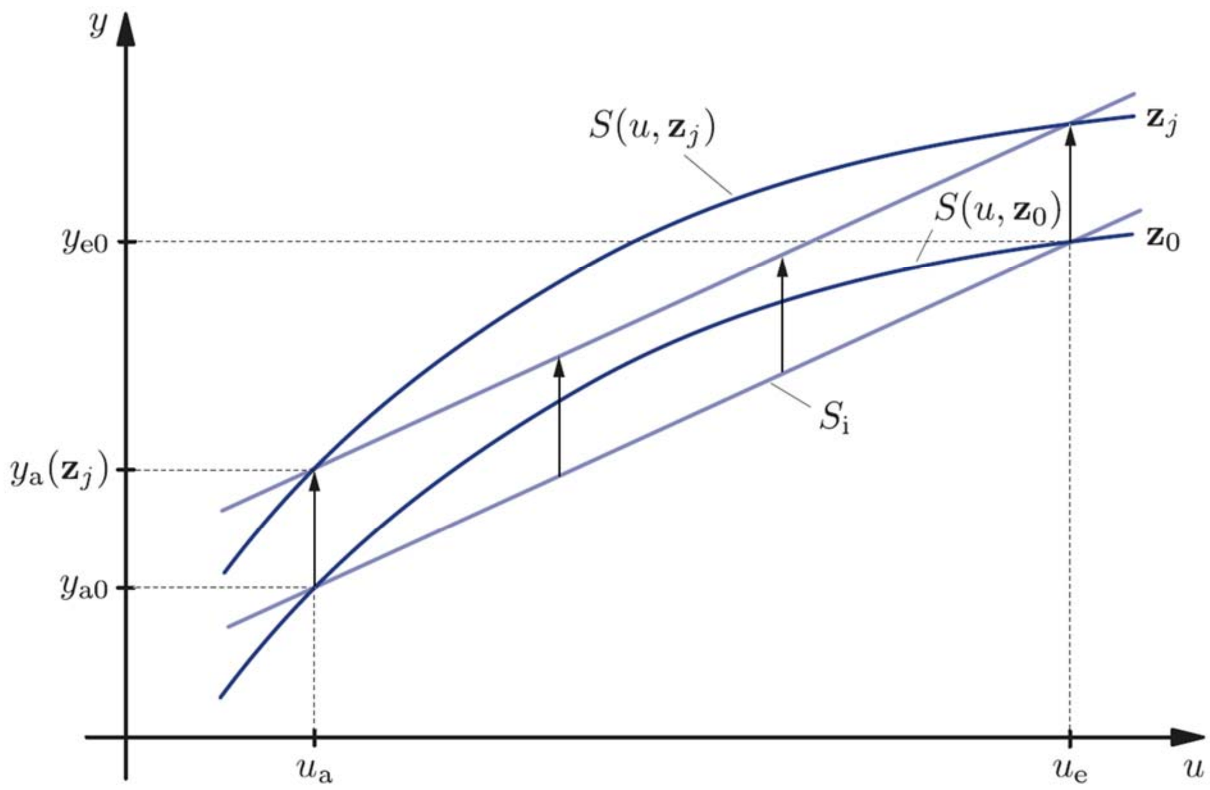
  - Messung des Wirkdrucks Δp z. B. mit dem Druckumformer des obigen Beispiels
  - Hier Wahl der Kennlinie des Kompensationsgliedes im Rückkopplungszweig: $K(y) = K \cdot y^2$:
    $$y = K^{-1}(\Delta p) \propto \sqrt{\frac{2}{\rho\left(\frac{1}{A_2^2} - \frac{1}{A_1^2}\right)}} \cdot \sqrt{\Delta p} = q_\mathrm{V}$$
  - Dann wird gesamte Messkennlinie linear

3.3 Kennlinienfehler bei Abweichungen von den Normalbedingungen

- Bisher: Stationäre Eigenschaften der Messkennlinie bei spezifizierten Normalbedingungen
- Jetzt: Berücksichtigung von Abweichungen der Betriebsbedingungen von den Normalbedingungen: $\boldsymbol{z} \neq \boldsymbol{z}_0$
- Beispiele für variable Störgrößen:
  - Temperatur
  - Feuchte
  - Mechanische Erschütterungen, Stöße
  - Aussteuerung des Messsystems über den Messbereich hinaus
  - Änderung von Hilfsenergien (Energieversorgung)
- Dadurch Änderungen im Kennlinienabgleich erforderlich
- Unterscheidung in superponierende (additive) und deformierende (multiplikative) Störgrößen

Superponierende Störgrößen

- Charakteristische Eigenschaft: über den gesamten Messbereich konstant, charakteristisch ist daher der Messanfang (auch wenn gleichzeitig ein deformierender Fehler vorliegt): Nullpunktfehler



- Nullpunktfehler ändert sich abhängig vom Störgrößenvektor $\boldsymbol{z}$: $e(\boldsymbol{z}) = \underbrace{e(\boldsymbol{z}_0)}_{=0} + \Delta e(\boldsymbol{z})$
- Empfindlichkeit ändert sich nicht: $\Delta S(u, \boldsymbol{z}) = 0$
- Physikalische Messkennlinie: $y = y_{a0} + \int_{u_a}^{u} S(u, \boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u + \Delta e(\boldsymbol{z})$

Superponierende Störgrößen

- Änderung des Nullpunktfehler in Abhängigkeit von $\boldsymbol{z}$ (Approximation durch Taylor-Reihe 1. Ordnung):

$$F_{\mathrm{sup}} = \Delta e(\boldsymbol{z}) = y(u_{\mathrm{a}}, \boldsymbol{z}) - y_{\mathrm{a0}} \approx \sum_j \left.\frac{\partial y(u_{\mathrm{a}}, \boldsymbol{z})}{\partial z_j}\right|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0} \Delta z_j$$

- Relativer superponierender Fehler bezogen auf Anzeigespanne:

$$F_{\mathrm{r,sup}} = \frac{\Delta e(\boldsymbol{z})}{y(u, \boldsymbol{z}_0) - y_{\mathrm{a0}}} = \frac{\sum_j \left.\frac{\partial y(u_{\mathrm{a}}, \boldsymbol{z})}{\partial z_j}\right|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0} \Delta z_j}{\int_{u_{\mathrm{a}}}^{u} S(u, \boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u}$$

- Vereinfachte Abschätzung:
  Empfindlichkeit im Messbereich sei konstant ($S(u, \boldsymbol{z}_0) \approx S_{\mathrm{i}}$),
  d. h. Linearität bezüglich Δz_j ($\left.\frac{\partial y(u_{\mathrm{a}}, \boldsymbol{z})}{\partial z_j}\right|_{\boldsymbol{z}=\boldsymbol{z}_0} \approx \frac{y_{\mathrm{a}}(z_j) - y_{\mathrm{a0}}}{\Delta z_j}$):

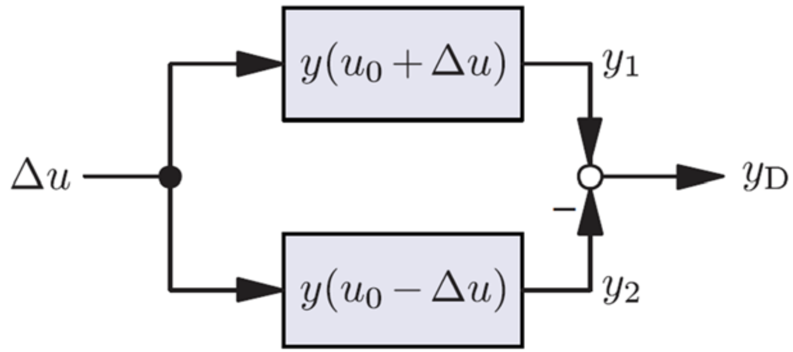
$$F_{\mathrm{r,sup}} \approx \frac{1}{S_{\mathrm{i}}(u - u_{\mathrm{a}})} \sum_j \left(y_{\mathrm{a}}(z_j) - y_{\mathrm{a0}}\right)$$

Superponierende Störgrößen

- Die Definition $F_{\mathrm{r,sup}} \approx \frac{1}{S_{\mathrm{i}}(u-u_{\mathrm{a}})} \sum_j \left(y_{\mathrm{a}}(z_j) - y_{\mathrm{a0}}\right)$ strebt für den Messanfang u_{a} gegen unendlich, daher wird der relative Fehler auch auf den Anzeigebereich bezogen:

$$F_{\mathrm{rA,sup}} \approx \frac{1}{S_{\mathrm{i}}(u_{\mathrm{e}} - u_{\mathrm{a}})} \sum_j \left(y_{\mathrm{a}}(z_j) - y_{\mathrm{a0}}\right) = \frac{1}{y_{\mathrm{e0}} - y_{\mathrm{a0}}} \sum_j \left(y_{\mathrm{a}}(z_j) - y_{\mathrm{a0}}\right)$$

Unterdrückung superponierender Störgrößen mit der Differenzmethode



- Differenzanordnung: In Differenz geht nur der ungerade Signalanteil ein (s. o.), superponierende Störgröße ist aber eine gerade Funktion:
  $$y_1 = y(u_0 + \Delta u) + z_1$$
  $$y_2 = y(u_0 - \Delta u) + z_2$$
- Daraus Differenz (s. o.):
  $$y_D = y(u_0 + \Delta u) + z_1 - (y(u_0 - \Delta u) + z_2)$$
  $$= 2S(u_0)\Delta u \left(1 + \frac{S''(u_0)}{S(u_0)} \frac{\Delta u^2}{3!} + \cdots \right) + z_1 - z_2$$
- Lineare Näherung:
  $$y_D \approx 2S(u_0)\Delta u \left(1 + \frac{z_1 - z_2}{2S(u_0)\Delta u}\right)$$

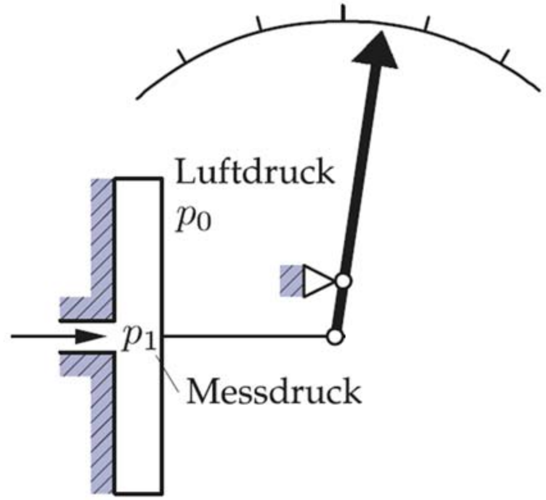
Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

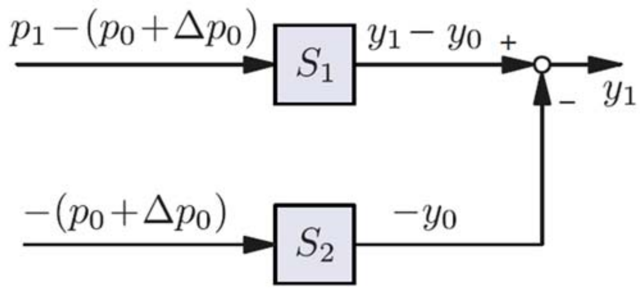
Unterdrückung superponierender Störgrößen mit der Differenzmethode

- Relativer superponierender Fehler:
  $$F_{\mathrm{r,sup}} = \frac{z_1 - z_2}{2S(u_0)\Delta u}$$
  verschwindet bei gleichartig einwirkenden Störungen $z_1 = z_2$
- D. h. superponierende Störgrößen z_j wirken sich gleichmäßig auf beide Zweige einer Differenzanordnung aus und verschwinden daher
- Aus diesem Grund und wegen des Linearisierungseffekts (s. o.) weite Verbreitung der Differenzanordnung in der Messtechnik

Unterdrückung superponierender Störgrößen mit der Differenzmethode

- Beispiel: Absolutdruckmesser
  - Membrandose erzeugt Kraft, die eine zur Differenz zwischen Messdruck p_1 und Luftdruck p_0 proportionale Kraft erzeugt
  - Störgröße: veränderlicher Luftdruck Δp_0
  - Abhilfe: Zweite Membrandose mit Vakuum in Differenzanordnung

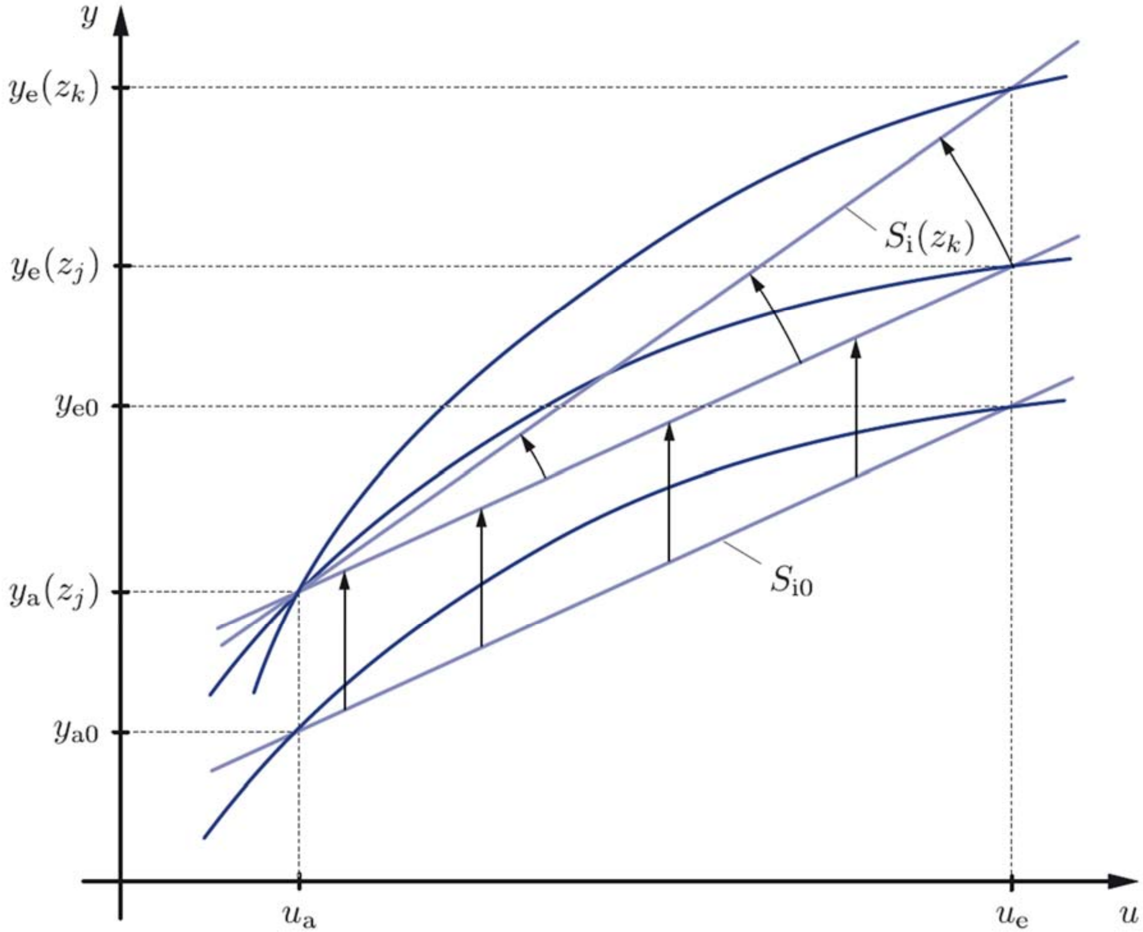




$S_1 = S_2$

Deformierende Störgrößen

- Charakteristische Eigenschaft: Empfindlichkeit ändert sich in Abhängigkeit vom Störgrößenvektor: $S(u, \boldsymbol{z}) = S(u, \boldsymbol{z}_0) + \Delta S(u, \boldsymbol{z})$
- Nullpunktfehler ändert sich dagegen bei rein deformierenden Fehlern nicht: $\Delta e(\boldsymbol{z}) = 0$
- Resultierende Messkennlinie:



Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

$$y = y_a + \int_{u_a}^{u} S(u, \boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u + \int_{u_a}^{u} \Delta S(u, \boldsymbol{z})\,\mathrm{d}u = y(u, \boldsymbol{z}_0) + \int_{u_a}^{u} \Delta S(u, \boldsymbol{z})\,\mathrm{d}u$$

Deformierende Störgrößen

- Abschätzung der Empfindlichkeitsänderung durch Taylor-Reihe im Störgrößenabgleichpunkt $\boldsymbol{z}_0$:

$$\Delta S(u,\boldsymbol{z}) \approx \sum_k \frac{\partial S(u,z_0)}{\partial z_k} \Delta z_k$$

- Damit absoluter Kennlinienfehler:

$$F_{\mathrm{def}} = \Delta y = y - y(u,\boldsymbol{z}_0) = \sum_k \int_{u_\mathrm{a}}^{u} \frac{\partial S(u,z_0)}{\partial z_k} \Delta z_k \,\mathrm{d}u$$

- Relativer deformierender Kennlinienfehler, bezogen auf Anzeigewert:

$$F_{\mathrm{r,def}} = \frac{y - y(u,\boldsymbol{z}_0)}{y(u,\boldsymbol{z}_0) - y_{\mathrm{a}0}} = \frac{\sum_k \int_{u_\mathrm{a}}^{u} \frac{\partial S(u,z_0)}{\partial z_k} \Delta z_k \,\mathrm{d}u}{\int_{u_\mathrm{a}}^{u} S(u,\boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u}$$

3.3 Kennlinienfehler bei Abweichungen von den Normalbedingungen

Deformierende Störgrößen

- Abschätzung des relativen deformierenden Kennlinienfehlers:
  Konstante Empfindlichkeit im Messbereich: $S(u,\boldsymbol{z}_0) \approx S_{\mathrm{i}0}$,
  Konstante Empfindlichkeitsänderungen: $\frac{\partial S(u,z_0)}{\partial z_k} \approx \frac{S_{\mathrm{i}}(z_k)-S_{\mathrm{i}0}}{\Delta z_k} = \frac{\Delta S_{\mathrm{i}}(z_k)}{\Delta z_k}$
- Damit wird

$$F_{\mathrm{r,def}} = \frac{\sum_k \int_{u_{\mathrm{a}}}^{u} \frac{\partial S(u,z_0)}{\partial z_k} \Delta z_k \,\mathrm{d}u}{\int_{u_{\mathrm{a}}}^{u} S(u,\boldsymbol{z}_0)\,\mathrm{d}u} \approx \frac{1}{S_{\mathrm{i}0}} \sum_k \Delta S_{\mathrm{i}}(z_k)$$

- Einfluss einer einzelnen deformierenden Störgröße z_k auf die Steigung der Messkennlinie, bezogen auf Anzeigewert, der sich bei Berücksichtigung einer zusätzlichen superponierenden Störgröße z_j ergibt:

$$F_{\mathrm{r,def}} = \frac{\Delta S_{\mathrm{i}}(z_k)}{S_{\mathrm{i}0}} = \frac{S_{\mathrm{i}}(z_k) - S_{\mathrm{i}0}}{S_{\mathrm{i}0}} = \frac{\left[y_{\mathrm{e}}(z_k) - y_{\mathrm{a}}(z_j)\right] - \left[y_{\mathrm{e}}(z_j) - y_{\mathrm{a}}(z_j)\right]}{y_{\mathrm{e}}(z_j) - y_{\mathrm{a}}(z_j)}$$

$$= \frac{\left[y_{\mathrm{e}}(z_k) - y_{\mathrm{a}}(z_j)\right] - \left[y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}\right]}{y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}}$$

Deformierende Störgrößen

- Jetzt Überlagerung eines superponierenden Fehlers Δz_j und eines deformierenden Fehlers Δz_k
- Taylor-Reihenentwicklung im Störgrößenabgleichpunkt $\boldsymbol{z}_0$:

$$y = y(u, \boldsymbol{z}_0) + \frac{\partial y(u, \boldsymbol{z}_0)}{\partial z_j} \Delta z_j + \frac{\partial y(u, \boldsymbol{z}_0)}{\partial z_k} \Delta z_k$$

- Für lineare Kennlinien:

$$y = y_{a0} + S_\mathrm{i}(u - u_\mathrm{a}) + \underbrace{\Delta e(z_j)}_{\text{superponierender Fehler}} + \underbrace{\frac{\Delta S_\mathrm{i}(z_k)}{S_{\mathrm{i}0}} S_{\mathrm{i}0}(u - u_\mathrm{a})}_{\text{deformierender Fehler}}$$

$$= y(u, \boldsymbol{z}_0) + \left[y_\mathrm{a}(z_j) - y_{\mathrm{a}0}\right] + \frac{\left[y_\mathrm{e}(z_k) - y_\mathrm{a}(z_j)\right] - \left[y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}\right]}{y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}} S_{\mathrm{i}0}(u - u_\mathrm{a})$$

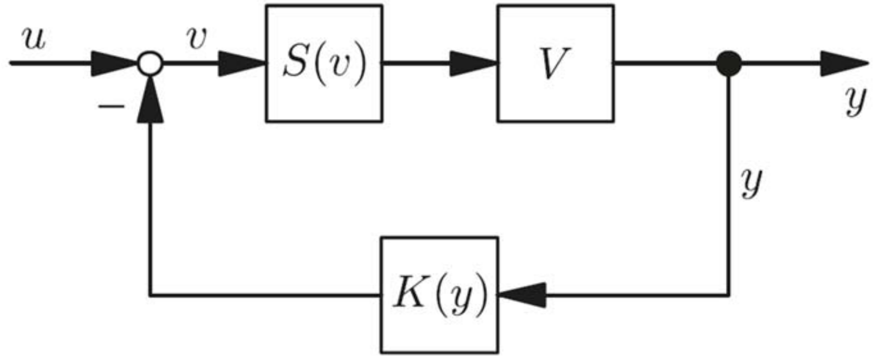
Deformierende Störgrößen

- Damit relativer Fehler bezogen auf die Anzeigespanne:
$$F_\mathrm{r} = \frac{y - y(u, \boldsymbol{z}_0)}{y(u, \boldsymbol{z}_0) - y_{\mathrm{a}0}} = \frac{y_\mathrm{a}(z_j) - y_{\mathrm{a}0}}{S_{\mathrm{i}0}(u - u_\mathrm{a})} + \frac{[y_\mathrm{e}(z_k) - y_\mathrm{a}(z_j)] - [y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}]}{y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}}$$
d. h. Superposition von superponierendem und deformierendem Fehler
- Diese Definition strebt für den Messanfang u_a gegen unendlich, daher wird der relative Fehler auch auf den Anzeigebereich bezogen:
$$F_{\mathrm{rA}} = \frac{y - y(u, \boldsymbol{z}_0)}{y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}} = \frac{y_\mathrm{a}(z_j) - y_{\mathrm{a}0}}{y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}} + \frac{[y_\mathrm{e}(z_k) - y_\mathrm{a}(z_j)] - [y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}]}{y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}}$$
$$= \frac{y_\mathrm{e}(z_k) - y_{\mathrm{e}0}}{y_{\mathrm{e}0} - y_{\mathrm{a}0}}$$

3.3 Kennlinienfehler bei Abweichungen von den Normalbedingungen

Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

- Ziel: Einfluss einer deformierenden Störgröße z_k auf die Steigung S_i der Messkennlinie durch Gegenkopplung reduzieren
- Messkennlinie des gegengekoppelten Messsystems:
  $$y = \frac{u}{K'}\frac{1}{1+\frac{1}{K'S_\mathrm{i}V}}$$



- Deformierende Störung: Empfindlichkeit des Messglieds ändert sich im Messbereich durch die deformierende Störung:
  $S_\mathrm{i}(z_k) = S_{\mathrm{i}0} + \Delta S_\mathrm{i}(z_k)$
- Änderung der Kennlinie bedingt durch Änderung von S_i (Quotientenregel anwenden):
  $$\frac{\partial y}{\partial S_\mathrm{i}} = u\frac{V}{(1+K'S_\mathrm{i}V)^2}$$

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

- Abschätzung des Kennlinienfehlers durch Taylor-Reihenentwicklung:

$$y = y(S_{\mathrm{i0}}) + \left.\frac{\partial y}{\partial S_{\mathrm{i}}}\right|_{S_{\mathrm{i0}}} \Delta S_i(z_k) + \cdots$$

$$\approx u\,\frac{S_{\mathrm{i0}}V}{1+K'S_{\mathrm{i0}}V}\left(1+\frac{1}{1+K'S_{\mathrm{i0}}V}\frac{\Delta S_{\mathrm{i}}(z_k)}{S_{\mathrm{i0}}}\right)$$

- Relativer Fehler:

$$F_{\mathrm{rG,def}} = \frac{y-y(S_{\mathrm{i0}})}{y(S_{\mathrm{i0}})} = \frac{1}{1+K'S_{\mathrm{i0}}V}\frac{\Delta S_{\mathrm{i}}(z_k)}{S_{\mathrm{i0}}}$$

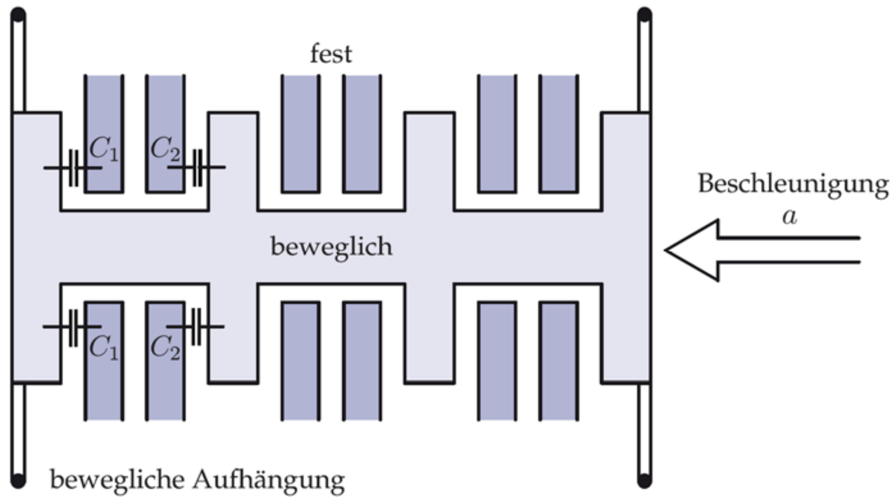
- Verhältnis des relativen Fehlers zum nicht gegengekoppelten System ($F_{\mathrm{r,def}} = \frac{\Delta S_{\mathrm{i}}(z_k)}{S_{\mathrm{i0}}}$):

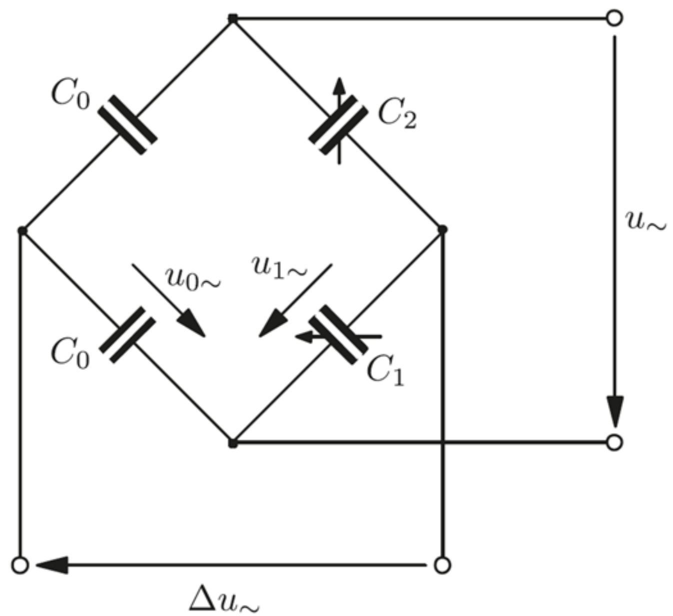
$$\frac{F_{\mathrm{rG,def}}}{F_{\mathrm{r,def}}} = \frac{1}{1+K'S_{\mathrm{i0}}V}$$

  d. h. relativer Fehler wird um die Verstärkung des offenen Kreises reduziert

Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor (s. o.)
  - Empfindlichkeit: $S_i = \frac{|u_\sim|}{2cd}$,
    abhängig von der Wechselspannung $|u_\sim|$,
    mit der die Brücke gespeist wird
  - damit deformierende Störgröße: $|u_\sim|$

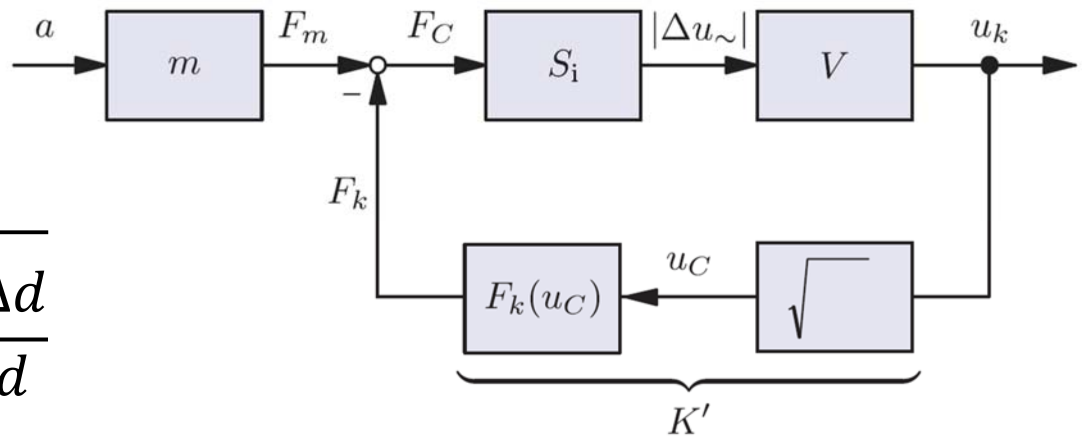




Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor (s. o.)
  - Jetzt Gegenkopplung mit dem nichtlinearen Übertragungsglied



$$u_C = \sqrt{V|\Delta u_\sim|} = \sqrt{V \frac{1}{2} \frac{|u_\sim|}{c} \frac{\Delta d}{d}}$$

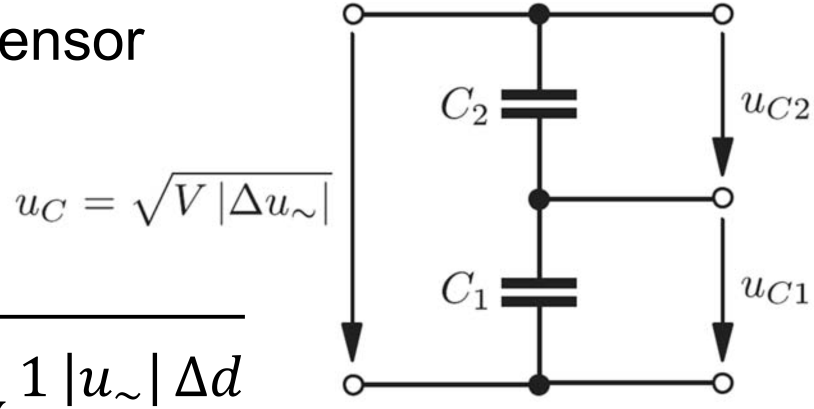
zur Reduktion des Einflusses von $|u_\sim|$

  - Resultierende Gesamtübertragungsfunktion K' der Rückführung soll linear sein und bewirken, dass durch Rückkopplung der verstärkten Ausgangsspannung u_k auf die Kammstruktur eine kompensierende Anziehungskraft F_k ausgeübt wird, die diese in die Nulllage zurückholt und die Beschleunigungskraft F_m ausgleicht

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Verteilung der rückgeführten Spannung u_C auf die beiden Kondensatoren C_1 und C_2:



$$u_{C1} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right) u_c = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\Delta d}{d}\right) \sqrt{V \frac{1}{2} \frac{|u_\sim|}{c} \frac{\Delta d}{d}}$$

$$u_{C2} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta d}{d}\right) u_c = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\Delta d}{d}\right) \sqrt{V \frac{1}{2} \frac{|u_\sim|}{c} \frac{\Delta d}{d}}$$

  - Energie der Kondensatoren:

$$E_{1,2} = \frac{1}{2} C_{1,2} u_{C1,2}^2 = \frac{C_0 V}{16} |u_\sim| \left(1 \pm \frac{\Delta d}{d}\right) \frac{\Delta d}{d}$$

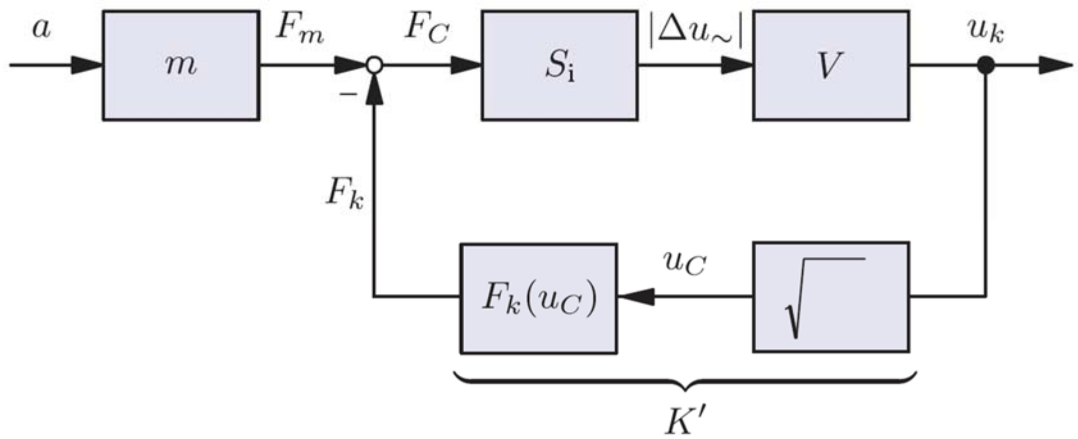
  - Kräfte auf die Kondensatoren durch Ableitung der Energie nach Δd:

$$F_{k1,2} = \frac{C_0 V}{8} |u_\sim| \left(\frac{1}{2d} \pm \frac{\Delta d}{d^2}\right)$$

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

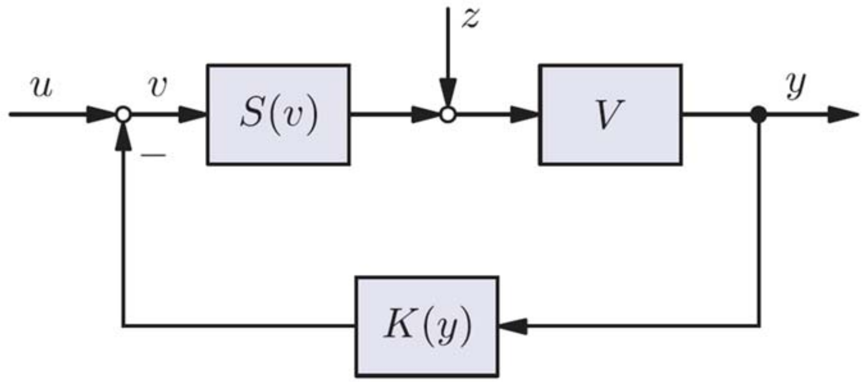
- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Differenz dieser Kräfte zieht die Kondensatorplatten in Richtung Nulllage zurück:
    $$F_k = F_{k1} - F_{k2} = \frac{C_0 V}{4d}|u_\sim|\frac{\Delta d}{d} = \frac{C_0 V}{2d}|\Delta u_\sim| = \frac{C_0}{2d}u_k = K' u_k$$
  - Gesamtübertragungsfunktion der Rückführung:
    $$K' = \frac{C_0}{2d}$$
    d. h. Proportionalglied
  - Kräftegleichgewicht im stationären Zustand:
    $$F_m = F_C + F_k$$
    $$ma = c\Delta d + \frac{C_0}{2d}u_k$$
    $$= \frac{c2d}{|u_\sim|}\frac{u_k}{V} + \frac{C_0}{2d}u_k$$



Deformierende Störgrößen bei Gegenkopplung

- Beispiel: Kapazitiver Beschleunigungssensor
  - Kräftegleichgewicht im stationären Zustand:
    $$F_m = ma = F_c + F_k = \frac{c2d}{|u_\sim|}\frac{u_k}{V} + \frac{C_0}{2d}u_k$$
  - Bei großer Verstärkung:
    - Auslenkung $\Delta d \approx 0$
    - $F_C \approx 0 \quad \Rightarrow \quad F_m \approx F_k$
    - Empfindlichkeit: Inverse Übertragungskonstante der Rückführung:
      $$u_k = \frac{1}{K'}F_m = \frac{2md}{C_0}a$$
    - Schwankungen der Speisespannung $|u_\sim|$ und der Federsteifigkeit c gehen nur noch um den Verstärkungsfaktor V reduziert ein
    - Lithographische Fertigung: gute Einhaltung von m, d, C_0

Superponierende Störgrößen bei Gegenkopplung



- Frage: Ist eine Reduzierung einer additiven Störung z durch eine Gegenkopplung möglich?
- Bei großer Verstärkung:

  $$vS(v) + z \approx 0 \quad \Rightarrow \quad v = -\frac{z}{S(v)}$$

  $$v = u - K(y) \quad \Rightarrow \quad y = K^{-1}(u - v)$$

  $$= K^{-1}\left(u + \frac{z}{S(v)}\right)$$

  d. h. z geht (um $S(v)$ reduziert) in das Ergebnis y ein
- Grundsätzlich: Superponierende Störgrößen lassen sich durch eine Gegenkopplung nicht vollständig eliminieren

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Kompensation systematischer Störeinflüsse

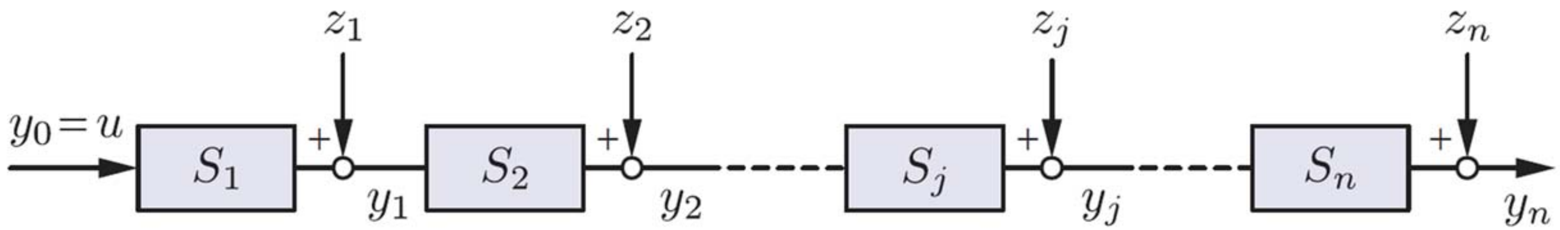
- Hier: Kompensation des Einflusses einer dominanten Störgröße z auf die Ausgangsgröße y
- Korrekturmöglichkeit: Kennfeldinterpolation (siehe Kap. 2.3)
- Anstelle der bisher verwendeten physikalischen Kennlinie $y = f(u)$ wird jetzt zusätzlich die Abhängigkeit von der dominanten Störgröße z betrachtet und vorab in einem Kennfeld gespeichert:
  $y = f(u, z)$
- Bei der Messung: Erfassung der Messgröße u und der Störgröße z
- Bilineare Interpolation (s. o.):
  $$y(u,z) \approx y(u_i, z_j) + \frac{\Delta y(u_i)}{\Delta u_i} \Delta u + \frac{\Delta y(z_j)}{\Delta z_j} \Delta z + \frac{\Delta^2 y(u_i, z_j)}{\Delta u_i \Delta z_j} \Delta u \, \Delta z$$
  d. h. fortlaufende Adaption der Ausgangsgröße an die sich ändernde Störgröße
- Damit sind reproduzierbare und genaue Messergebnisse erzielbar, wenn der Einfluss der Störgröße bekannt ist

Abschirmung

- Abschirmung: Fernhalten von Störgrößen vom Messsystem
- Beispiele:
  - Thermostatisierung (Temperaturregelung) zur Unterdrückung eines Temperatureinflusses
  - Luftdichte Verpackung zur Unterdrückung des Einflusses von Luftfeuchte
  - Elektrische und magnetische Abschirmung
- Erzeugt häufig erheblichen (Hardware-)Aufwand

Superponierende Störgrößen in Messketten

- Signal $u(t)$ wird in einer Messkette übertragen
- An den Schnittstellen sind jeweils Störungen z_j additiv überlagert



- Damit Kennlinie des j-ten Gliedes (Annahme: lineare Kennlinien S_j):
  $y_j = S_j y_{j-1} + z_j$
- Kennlinie der gesamten Messkette:
  $y_n = (S_n S_{n-1} \cdots S_1)u + (S_n S_{n-1} \cdots S_2)z_1 + \cdots + S_n z_{n-1} + z_n$
- Absoluter Fehler:

$$F = y_n - u \prod_{j=1}^{n} S_j = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{k=j}^{n-1} S_{k+1} \right) z_j + z_n$$

- Beitrag eines Übertragungsgliedes zum Fehler ist damit abhängig von seiner Position in der Kette

Superponierende Störgrößen in Messketten

- Relativer Fehler bezogen auf den Anzeigebereich $\mathrm{d}y(u = d)$:

$$F_{\mathrm{rA}} = \frac{F}{y} = \frac{\sum_{j=1}^{n-1}\left(\prod_{k=j}^{n-1} S_{k+1}\right) z_j + z_n}{d \prod_{j=1}^{n} S_j} = \frac{1}{d} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{z_j}{\prod_{k=1}^{j} S_k}$$

$$= \frac{z_1}{S_1 d} + \frac{z_2}{S_1 S_2 d} + \cdots + \frac{z_n}{S_1 S_2 \cdots S_n d}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} F_{\mathrm{rA}j}$$

d. h. additive Überlagerung der relativen Fehler der einzelnen Glieder

Superponierende Störgrößen in Messketten

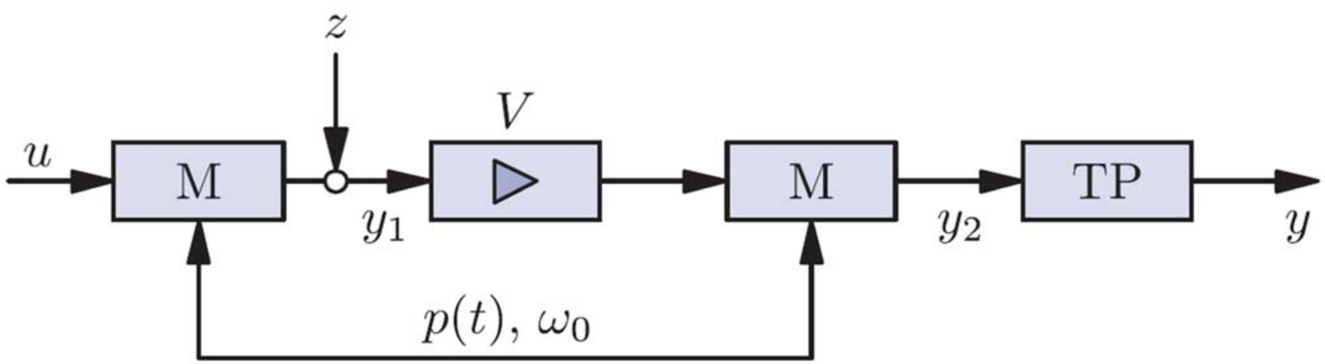
- Anwendungsfall mehrstufiger Verstärker ($S_j > 0$):
  - Fehler wird reduziert, wenn die erste Stufe eine möglichst hohe Verstärkung aufweist: $S_1 \gg S_j,\ j > 1$
  - In der ersten Stufe möglichst hochwertige Verstärker einsetzen, die wenig von superponierenden Störgrößen (z. B. Drift) beeinflusst werden
  - Höherer Aufwand der Signalverarbeitung in der ersten Stufe, z. B. Differenzschaltung, Thermostatisierung, Zerhacker (siehe unten)

Superponierende Störgrößen in Messketten

- Beispiel: Zweistufiger Verstärker
  - Zwei Stufen mit gleicher Verstärkung $S_\mathrm{a} = S_\mathrm{b} = 30$
  - Stufe a: Nullpunktdrift $0{,}5\ \mathrm{mV}$
  - Stufe b: Nullpunktdrift $1\ \mathrm{mV}$
  - Anordnung $\mathrm{a} - \mathrm{b}$:
    $$F = \sum_{j=1}^{n-1} \left(\prod_{k=j}^{n-1} S_{k+1} \right) z_j + z_n = (30 \cdot 0{,}5 + 1)\ \mathrm{mV} = 16\ \mathrm{mV}$$
  - Anordnung $\mathrm{b} - \mathrm{a}$:
    $F = (30 \cdot 1 + 0{,}5)\ \mathrm{mV} = 30{,}5\ \mathrm{mV}$

Zerhackerverstärker (engl. Chopper amplifier)

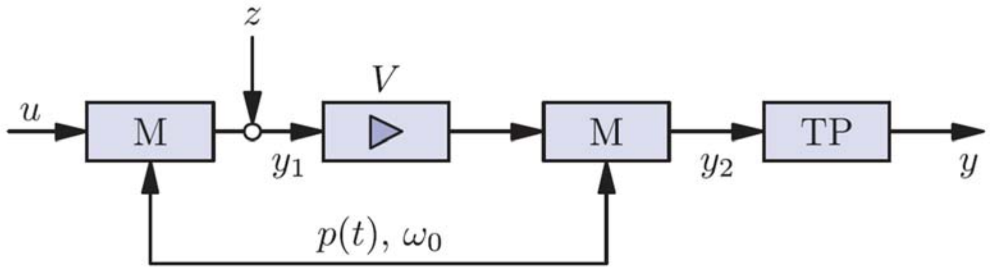
- Modulationsverstärker zur driftfreien Verstärkung kleiner Gleichspannungen
- Genutzt insbesondere zur Unterdrückung des Einflusses temperaturabhängiger Offsetschwankungen am Verstärkereingang (z. B. von Operationsverstärkern)
- Dazu Modulation des niederfrequenten Eingangssignals u zu höheren Frequenzen

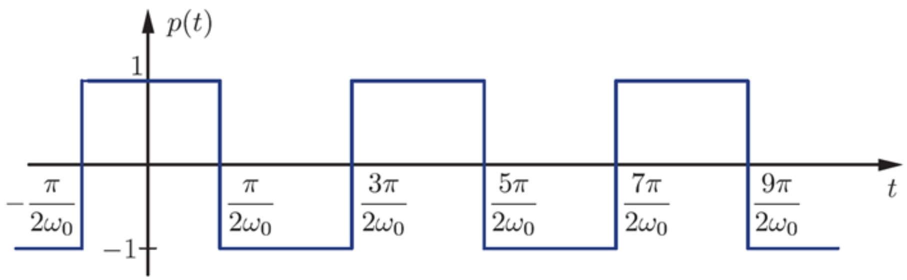


- Modulatoren M: zeitgleich angesteuert

3.3 Kennlinienfehler bei Abweichungen von den Normalbedingungen

Zerhackerverstärker (engl. Chopper amplifier)





- Erste Modulation: Multiplikation des Eingangssignals mit einem mittelwertfreien Rechtecksignal $p(t)$ mit Frequenz $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- Störung wird nicht moduliert:
  $y_1(t) = u(t) \cdot p(t) + z(t)$
- Zweite Modulation von y_1 mit $p(t)$:
  $$y_2(t) = V y_1(t) p(t) = V u(t) \underbrace{p^2(t)}_{=1} + V z(t) p(t) = V u(t) + V z(t) p(t)$$

  d. h. Eingangssignal $u(t)$ wird unverzerrt übertragen, Störung $z(t)$ wird mit der mittelwertfreien Umschaltfunktion $p(t)$ moduliert
- Störung kann daher mit Tiefpass eliminiert werden
- Umschaltfunktion selbst erzeugt keine Störung, da $\int_0^T p(t)\,\mathrm{d}t = 0$

Zerhackerverstärker (engl. Chopper amplifier)

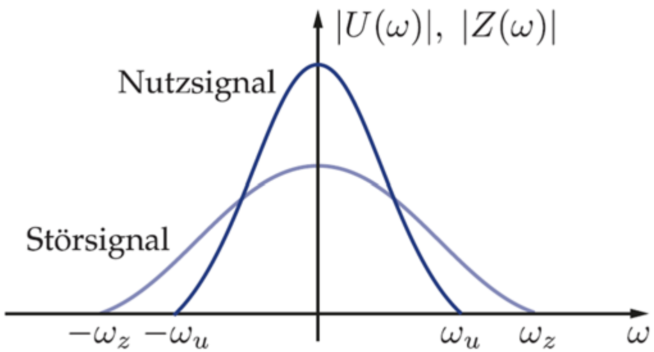
- Im Folgenden: Betrachtung des Zerhackerverstärkers im Frequenzbereich
- Dazu Vereinfachung der Umschaltfunktion (Vernachlässigung höherfrequenter Anteile und von Vorfaktoren):
  $p(t) \approx \cos(\omega_0 t)$

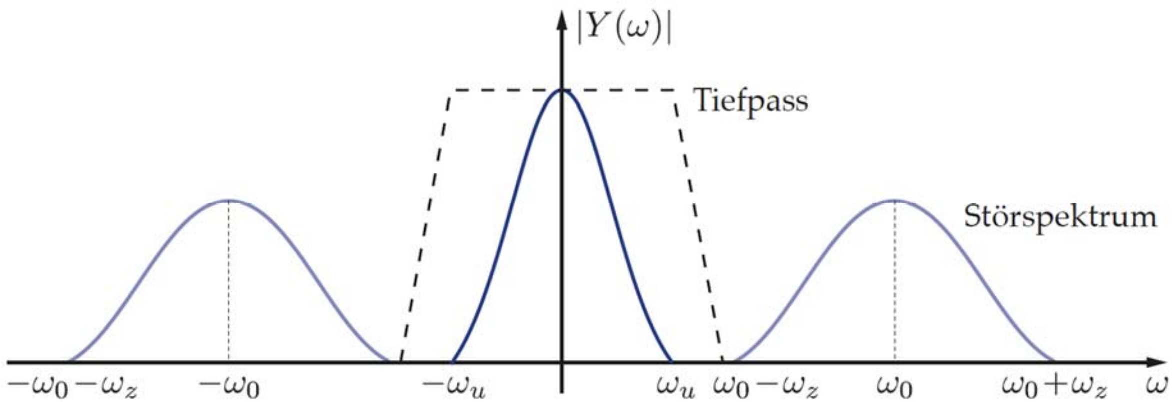
Zerhackerverstärker (engl. Chopper amplifier)

- Betrachtung im Frequenzbereich der Fourier-Transformation:
  - Erste Modulation:
    - Multiplikation des Eingangssignals $u(t)$ mit Umschaltfunktion $p(t)$:
      Faltung von $U(\omega)$ mit $P(\omega)$ im Frequenzbereich
    - Spektrum $P(\omega)$: nur eine Frequenz, d. h. Delta-Impulse bei $\pm\omega_0$
    - Damit Spektrum von $y_1(t) = u(t) \cdot \cos(\omega_0 t) + z(t)$:
      $Y_1(\omega) = \frac{1}{2} U(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} U(\omega + \omega_0) + Z(\omega)$

Zerhackerverstärker (engl. Chopper amplifier)

- Zweite Modulation (mit $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2x)$):
  - $$y_2(t) = V\,u(t)\cos^2(\omega_0 t) + V\,z(t)\cos(\omega_0 t)$$
    $$= \frac{V}{2}u(t) + \frac{V}{2}u(t)\cos(2\omega_0 t) + V\,z(t)\cos(\omega_0 t)$$
  - $Y_2(\omega) = \frac{V}{2}U(\omega) + \frac{V}{4}U(\omega \pm 2\omega_0) + \frac{V}{2}Z(\omega \pm \omega_0)$
    d. h. weitere Verschiebung des Störspektrums $Z(\omega)$ um $\pm\omega_0$, zusätzliches Auftreten des Nutzsignals bei $\pm 2\omega_0$





Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

Zerhackerverstärker (engl. Chopper amplifier)

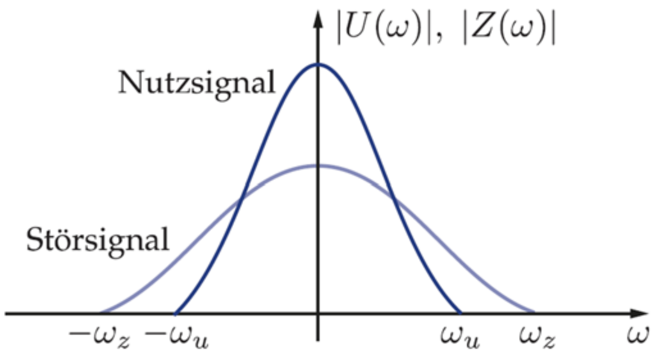
- Tiefpassfilterung der hochfrequenten Anteile mit

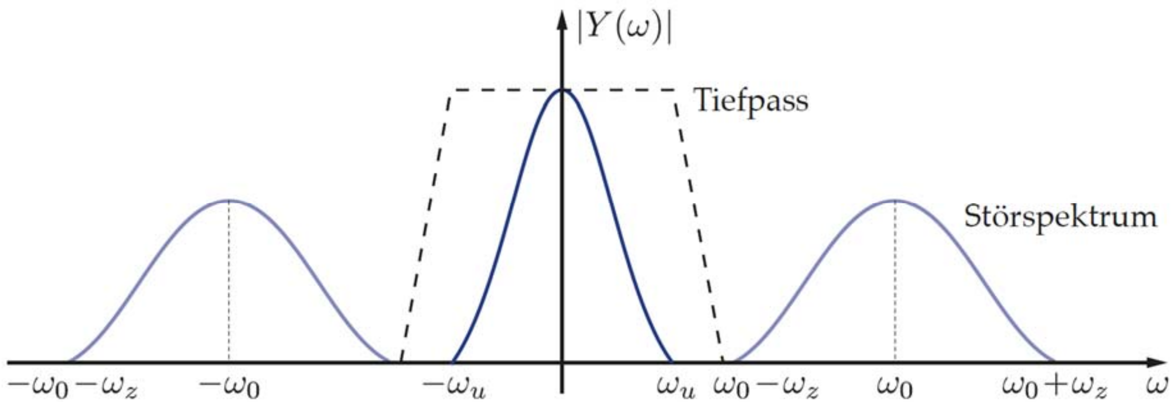
$$|T(\omega)| = \begin{cases} 1 \text{ für } |\omega| \leq |\omega_u| \\ 0 \text{ für } |\omega| > |\omega_0| - |\omega_z| \end{cases}$$

- Damit wird

$$Y(\omega) = Y_2(\omega) \cdot T(\omega) = \frac{V}{2} U(\omega)$$

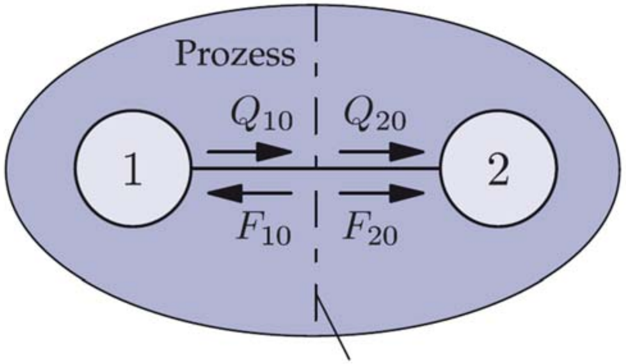
- Zur Vermeidung spektraler Überlappungen: $\omega_0 > \omega_u + \omega_z$, d. h. nutzbare Signalbandbreite ist eingeschränkt



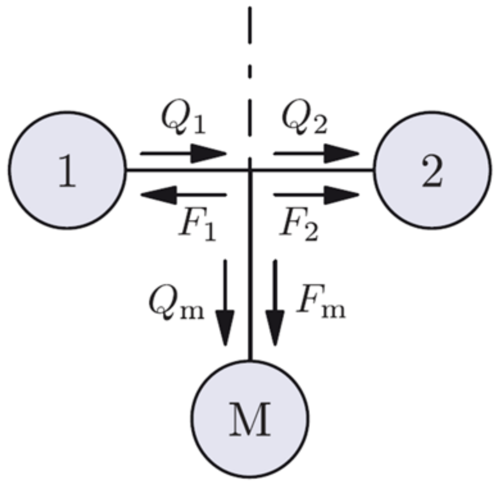


3.4 Rückwirkung des Messsystems

- Messvorgang: Durch den Abgriff einer Messgröße findet ein Energiefluss zwischen Prozess und Messsystem statt
- Ursprüngliche Messgröße kann dadurch verfälscht werden
- Zerlegung des Prozesses in Teil 1 und Teil 2 durch eine Messschnittstelle
- Dort Austausch von verallgemeinerten Größen „Kraft“ F und „Fluss“ Q (z. B. Spannung und Strom, Federkraft und Auslenkung)
- Messgröße im Folgenden: verallgemeinerte Kraft F_1



Prozess ohne Messsystem

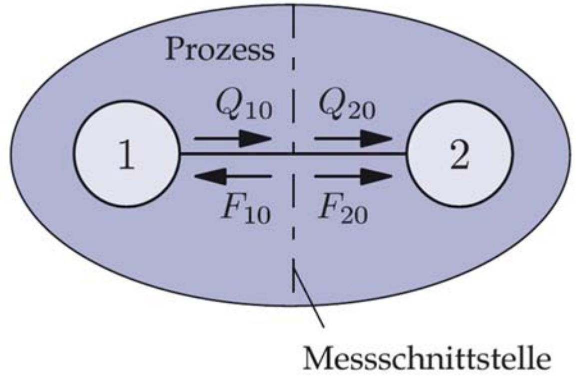


Prozess mit Messsystem M

Bildquelle: F. Puente León: Messtechnik, 10. Auflage, Springer, 2015

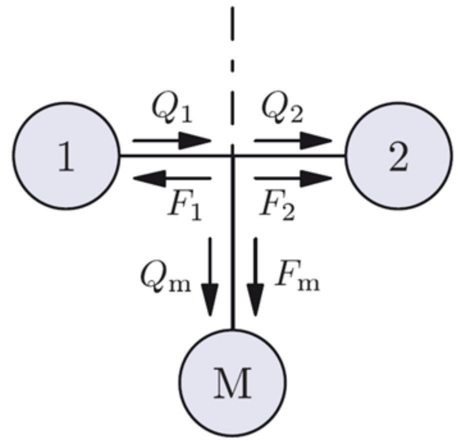
3.4 Rückwirkung des Messsystems

- Fluss ohne Messsystem: $Q_{10} = Q_{20}$
- Fluss mit Messsystem: $Q_1 = Q_2 + Q_\mathrm{m}$
  bzw. $Q_{10} + \Delta Q_1 = Q_{20} + \Delta Q_2 + Q_\mathrm{m}$
- Kraft ohne Messsystem: $F_{10} = -F_{20}$
- Kraft mit Messsystem: $F_1 = -F_2 = -F_\mathrm{m}$



Prozess ohne Messsystem

- Physikalische Gesetzmäßigkeiten im Prozess ergeben Zusammenhänge zwischen Kraft und Fluss in der Form
  $Q_i = f_i(F_1, F_2, \dots)$
- Kleine Abweichungen der Flussgrößen ΔQ_i: näherungsweise berechenbar durch Differential $\frac{\partial Q_i}{\partial F_i} \Delta F_i$



Prozess mit Messsystem M

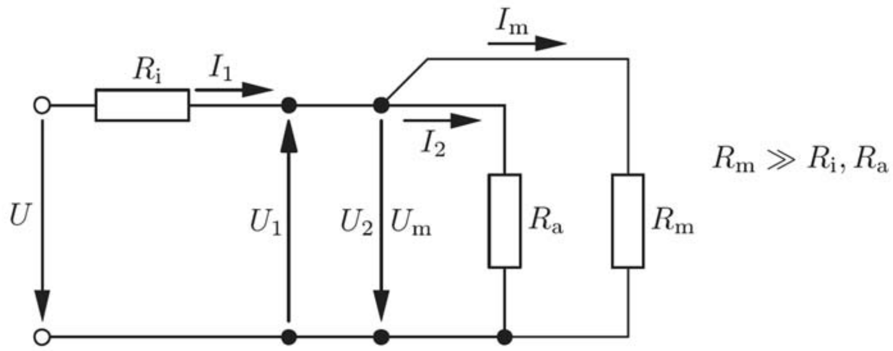
- Annahme: linearer Zusammenhang im Messsystem $F_\mathrm{m} = Q_\mathrm{m} W_\mathrm{m}$
  W_m: könnte z. B. Innenwiderstand des Messsystems sein

3.4 Rückwirkung des Messsystems

- Aus Flussgleichung $Q_{10} + \Delta Q_1 = Q_{20} + \Delta Q_2 + Q_\mathrm{m}$:
  $$\frac{\partial Q_1}{\partial F_1} \Delta F_1 = \frac{\partial Q_2}{\partial F_2} \Delta F_2 + \frac{F_\mathrm{m}}{W_\mathrm{m}}$$
- Mit $F_1 = -F_2 = -F_\mathrm{m}$:
  $$\frac{\partial Q_1}{\partial F_1} \Delta F_1 = -\frac{\partial Q_2}{\partial F_2} \Delta F_1 - \frac{F_1}{W_\mathrm{m}}$$
  $$\Rightarrow \frac{\Delta F_1}{F_1} = -\frac{1}{W_\mathrm{m}} \left(\frac{\partial Q_1}{\partial F_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial F_2} \right)^{-1}$$
  d. h. durch den Energie-/Leistungsverbrauch des Messsystems ändert sich die Messgröße F_1 um ΔF_1
- Analoge Beziehungen, falls der verallgemeinerte Fluss die Messgröße ist

3.4 Rückwirkung des Messsystems

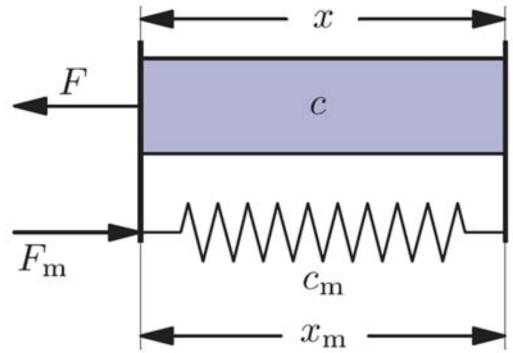
- Beispiel: Spannungsmessung an einem Spannungsteiler
  - Messeinrichtung parallel zu R_a mit Innenwiderstand R_m
  - Entsprechungen: $F_1 = U_1$, $Q_1 = I_2$, $W_\mathrm{m} = R_\mathrm{m}$, $\frac{\partial Q_1}{\partial F_1} = \frac{1}{R_\mathrm{i}}$, $\frac{\partial Q_2}{\partial F_2} = \frac{1}{R_\mathrm{a}}$



  - Daraus folgt mit $\frac{\Delta F_1}{F_1} = -\frac{1}{W_\mathrm{m}}\left(\frac{\partial Q_1}{\partial F_1} + \frac{\partial Q_2}{\partial F_2}\right)^{-1}$:

$$\frac{\Delta U_1}{U_1} = -\frac{1}{R_\mathrm{m}}\left(\frac{1}{R_\mathrm{i}} + \frac{1}{R_\mathrm{a}}\right)^{-1}$$

  - Fehler geht also gegen Null, wenn $R_\mathrm{m} \to \infty$, d. h. hochohmiges Messgerät bei Spannungsmessung (analog: niederohmiges Messgerät bei Strommessung)
  - Exakte Rechnung: zusätzlicher Term $\frac{1}{R_\mathrm{m}}$ im Nenner, denn Formel oben ist nur Näherung (wg. Abbruch der Taylor-Reihe nach dem linearen Glied)



- Beispiel: Längenmesstaster
  - Länge eines Werkstücks soll gemessen werden: Messgröße x
  - Längenmesstaster mit Charakteristik $F_\mathrm{m} = c_\mathrm{m} x_\mathrm{m}$
  - Werkstück: Federkonstante c mit $c \gg c_\mathrm{m}$
  - Ohne Anlegen des Messtasters: Kraft im Werkstück $F_0 = 0$
  - Stabiler Arbeitspunkt: $x = x_\mathrm{m}$
  - Kräftegleichgewicht: $F = -F_\mathrm{m}$ bzw. $\underbrace{F_0}_{=0} + \Delta F = -F_\mathrm{m}$
  - Entwicklung der Kraftänderung nach dem Weg: $\Delta F = -F_\mathrm{m}$, $\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x = -c_\mathrm{m} x$
  - Mit $\frac{\partial F}{\partial x} = c$: $\frac{\Delta x}{x} = -\frac{c_\mathrm{m}}{\frac{\partial F}{\partial x}} = -\frac{c_\mathrm{m}}{c}$
  - Für $c \gg c_\mathrm{m}$ ist die Wegänderung erwartungsgemäß klein