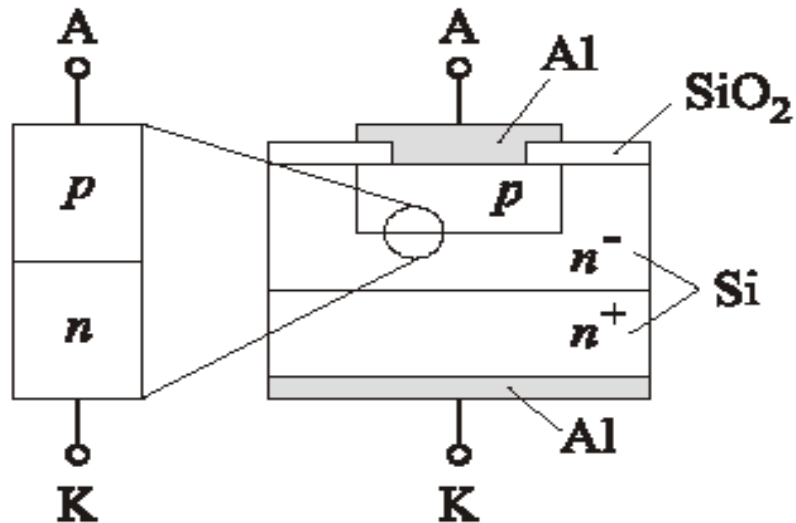


1. Grundlagen der Quantenmechanik
2. Elektronische Zustände
3. Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente
4. Elektronen in Kristallen
5. Halbleiter
  - 5.1 Quasiklassische Beschreibung von Elektronen im Halbleiter
  - 5.2 Stromtransport in Bändern
6. Quantenstatistik für Ladungsträger
7. Dotierte Halbleiter
8. Halbleiter im Nichtgleichgewicht
9. Der pn-Übergang

Festkörperelektronik  
SS 2016  
8. Foliensatz  
10.06.2016

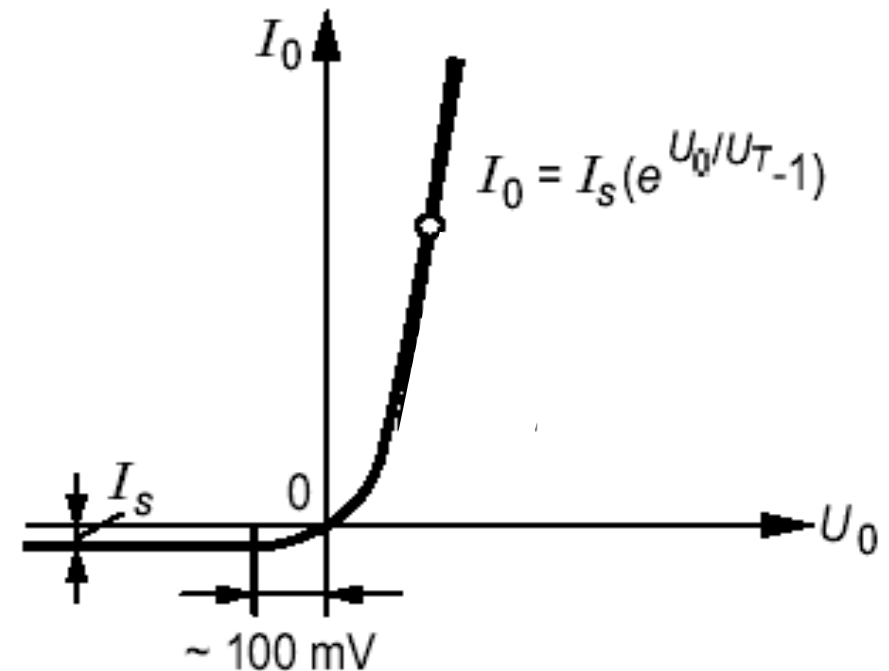
In der Vorlesung “Elektronische Schaltungen” haben Sie die Kennlinien verschiedener Halbleiterbauelemente kennen gelernt:

Dioden, Bipolare Transistoren, Feldeffekttransistoren



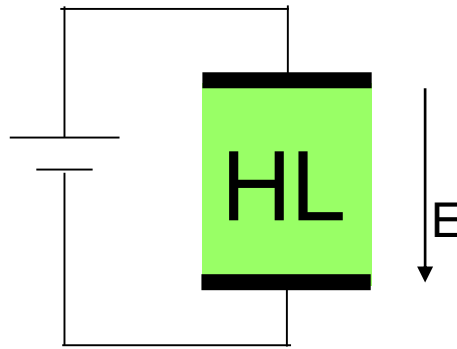
pn-Diode

Quelle: ES-Skript



- Warum sehen die Kennlinien so aus ?
- Was muss man machen, dass sie anders aussehen, was bestimmt das dynamische Verhalten ?

Bisher wurden nur elektronische Zustände diskutiert („Bänder“).  
Wie bewegen sich Elektronen in Kristallen?

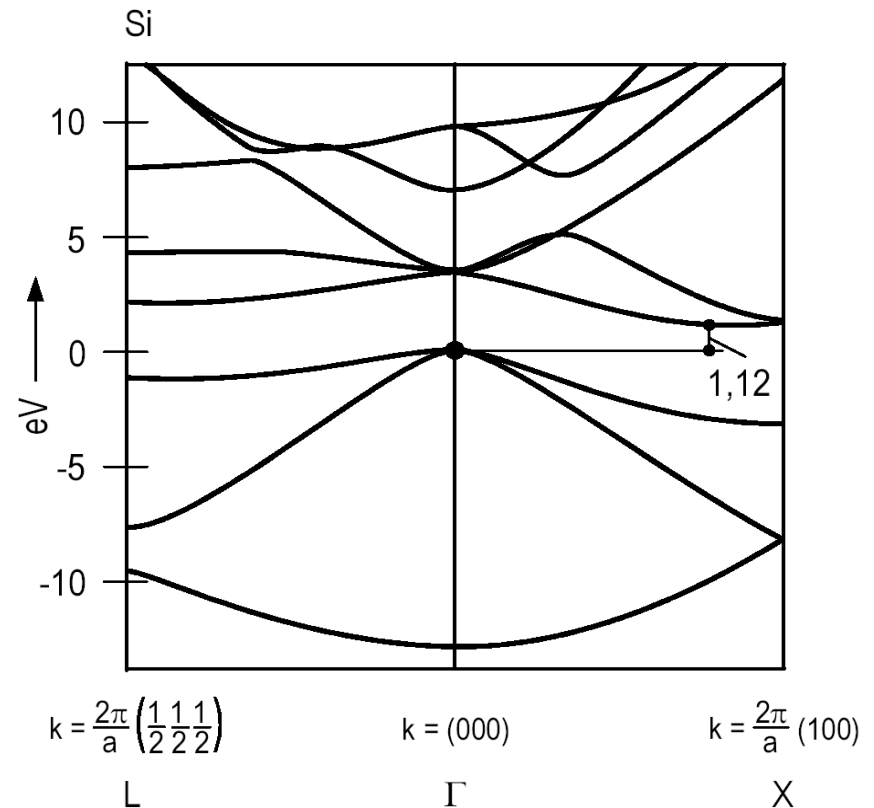


makroskopisch:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

bzw.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}$$

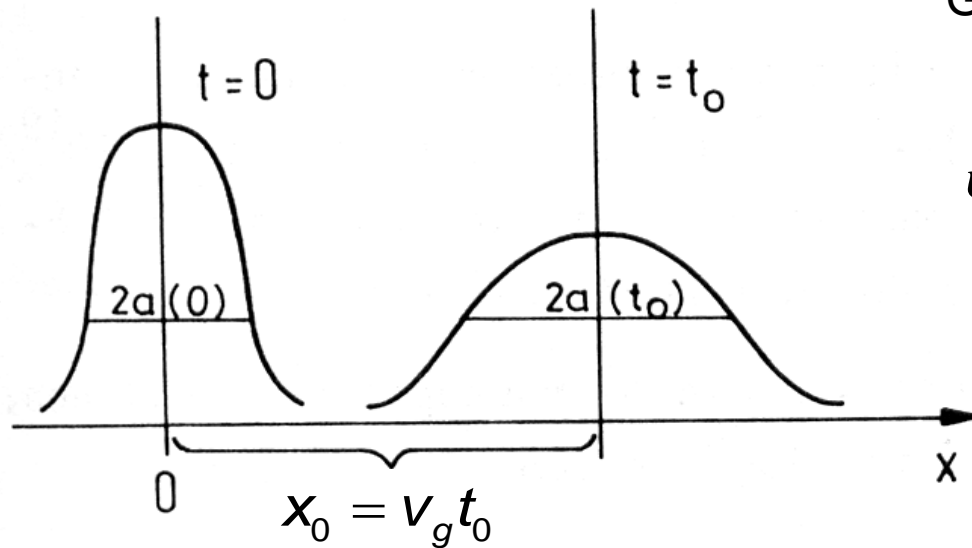


Wie berechnet man  $\sigma$  ??

1. **Grundlagen der Quantenmechanik**
2. **Elektronische Zustände**
3. **Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente**
4. **Elektronen in Kristallen**
5. **Halbleiter**
  - 5.1 Quasiklassische Beschreibung von Elektronen im Halbleiter
  - 5.2 Stromtransport in Bändern
6. **Quantenstatistik für Ladungsträger**
7. **Dotierte Halbleiter**
8. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht**
9. **Der pn-Übergang**

Wir haben schon die Gruppengeschwindigkeit  $v_g$  in der 2. Vorlesung kennengelernt:

Es ergab sich als Spezialfall beim Gauss'schen Wellenpaket:



$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{a}\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \exp(jk_0 x)$$

$$v_g = \frac{\hbar k_0}{m} = 2v_p$$

Für die Gruppengeschwindigkeit  
gilt allgemeiner (siehe auch Felder und Wellen)

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Überprüfung für das freie Elektron:

$$\frac{\partial}{\partial k} \omega(k) = \frac{\partial}{\partial k} \left( \frac{\hbar k^2}{2m} \right) = \frac{\hbar k}{m}$$

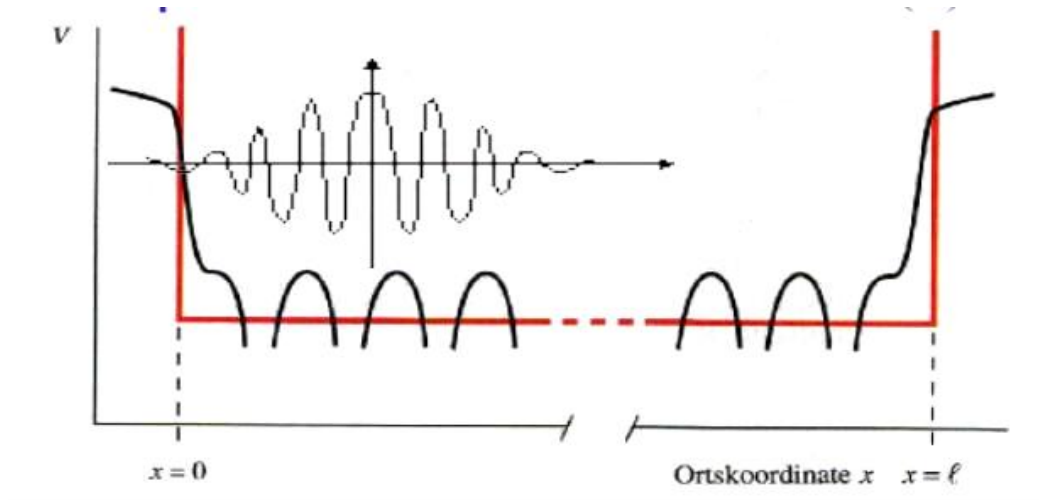


Abb.: Wellenpaket im periodischen Potential

Gruppengeschwindigkeit  
(Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt eines Wellenpaketes bewegt)

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Dieser Zusammenhang gilt nicht nur für das freie Elektron sondern für jede  $x$ -beliebige Dispersionsrelation (auch für em. Wellen)

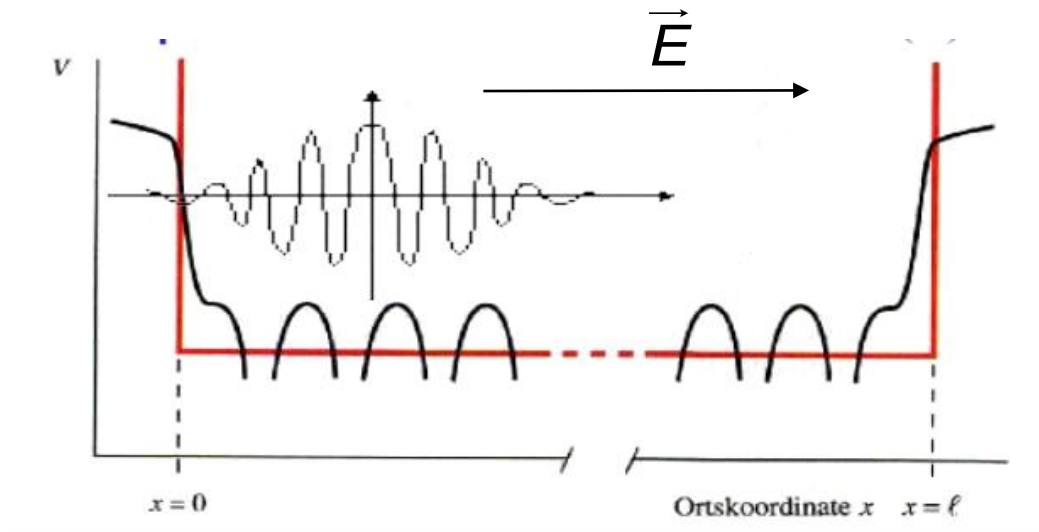


Abb.: Wellenpaket im periodischen Potential

Gruppengeschwindigkeit  
(Geschwindigkeit, mit der sich der Schwerpunkt eines Wellenpaketes bewegt)

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$$

Dieser Zusammenhang gilt nicht nur für das freie Elektron sondern für jede x-beliebige Dispersionsrelation (auch für em. Wellen)

Was passiert, wenn nun ein elektrisches Feld auf das Elektron einwirkt ??

## Ziel:

Ableitung einer Bewegungsgleichung für ein Elektron im Kristall:

Für die Gruppengeschwindigkeit gilt:

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k};$$

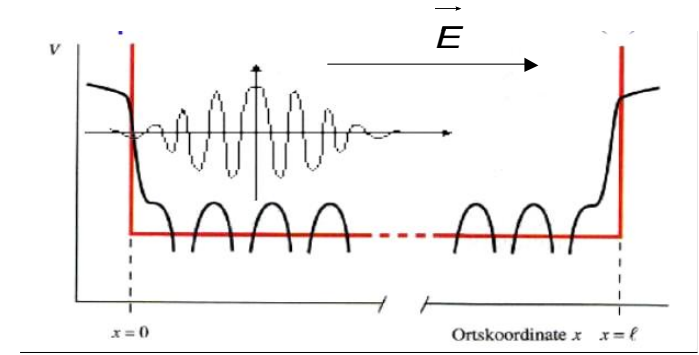


Abb.: Wellenpaket im periodischen Potential

Klassische Änderung der Energie pro infinitesimaler Zeiteinheit:

klassisch:  $\frac{dW}{dt} = \frac{\text{Arbeit}}{\text{Zeit}} = \frac{\text{Kraft} \cdot \text{Weg}}{\text{Zeit}} = \text{Kraft} \cdot \text{Geschwindigkeit} = Fv$

für ein Blochelektron mit bekannter Dispersion  $W(k)$

...um  $W$  zu ändern, muss  $k$  geändert werden

$$\frac{dW}{dt} = \underbrace{\frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k}}_{v_g} \frac{d(\hbar k)}{dt}$$



D.h.  $\frac{d(\hbar k)}{dt}$  kann mit  $F$  identifiziert werden, bzw. es gilt  $\frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar} F$

Das bedeutet, dass eine Kraft unabhängig von der Bandstruktur den  $k$ -Vektor verändert.

Wie sieht es mit der Beschleunigung eines Elektrons mit bekannter Dispersionsrelation  $W(k)$  aus ?

$$a = \frac{dv_g}{dt} = \frac{1}{\hbar} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial W}{\partial k} \right) = \frac{1}{\hbar} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \right) \frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar^2} \left( \frac{\partial^2 W}{\partial k^2} \right) F$$

Analog zum klassischen  **$F=ma$**  kann also eine Masse des Blochelektrons definiert werden:

$$\frac{1}{m^*} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \quad \text{bzw.} \quad m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

„Masse“ des Kristallelektrons wird bestimmt durch die Bandstruktur !!!

## Transporteigenschaften von Kristallelektronen werden bestimmt durch die Bandstruktur

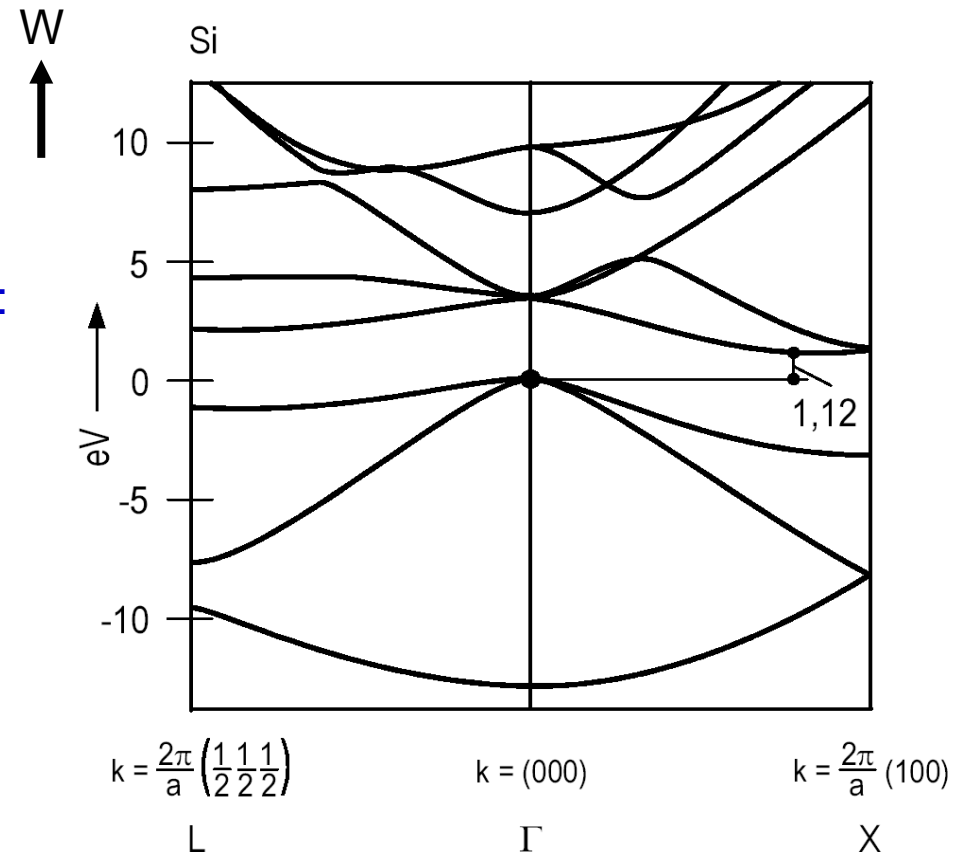
- (Gruppen)Geschwindigkeit ist gegeben durch

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k};$$

- Die effektive Masse dieser Elektronen ist:

$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

- Kristallelektronen benehmen sich bei Beschleunigung wie Teilchen der Masse  $m^*$  ( $m_{\text{eff}}$ )!



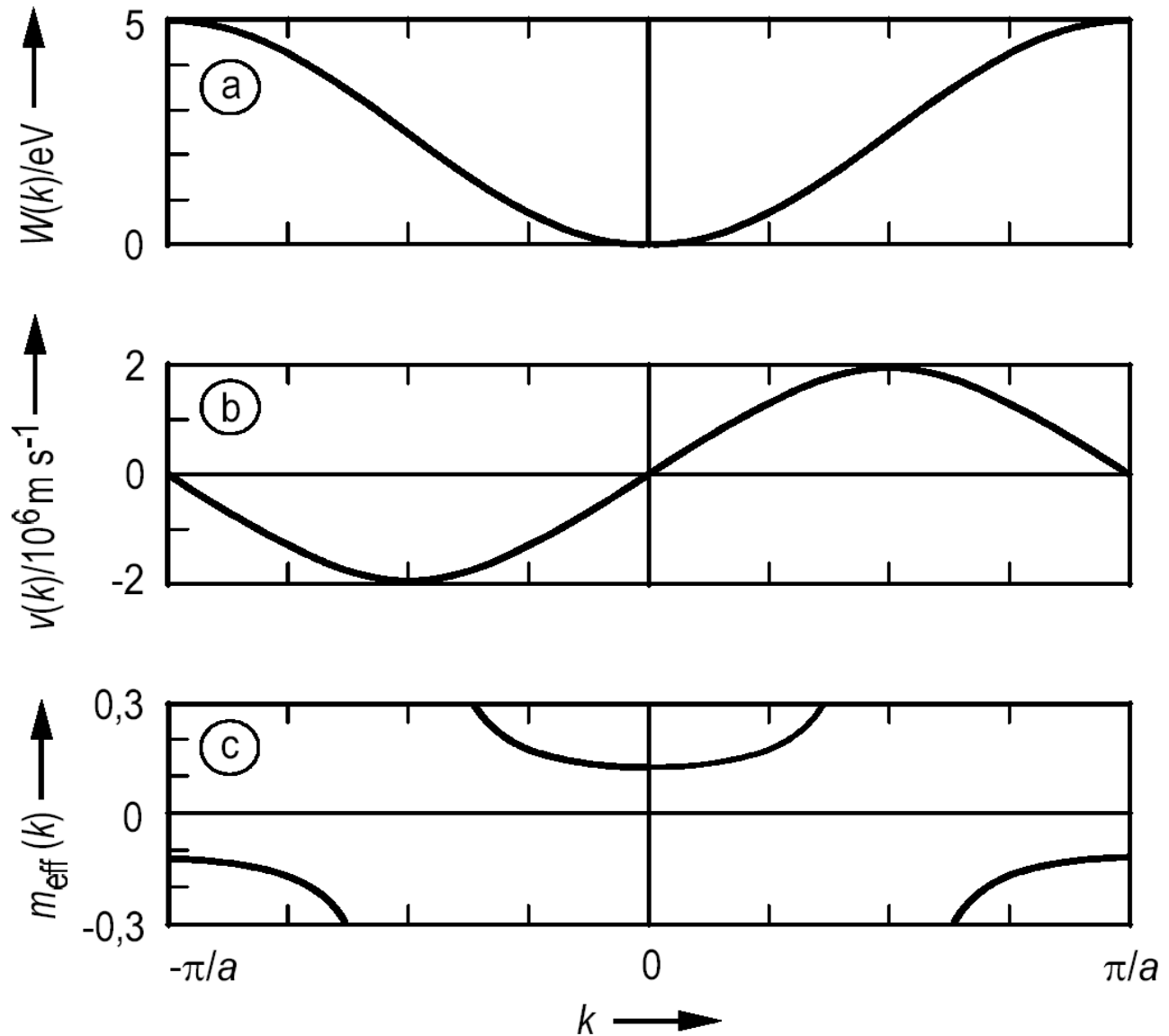
....dies führt (hauptsächlich in der Theorie) zu einem sehr merkwürdigen Verhalten ...

Bsp.: kosinusförmiges  
Band

$$W(k) = \frac{\Delta W}{2} (1 - \cos(ka))$$

$$v_g = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial W(k)}{\partial k};$$

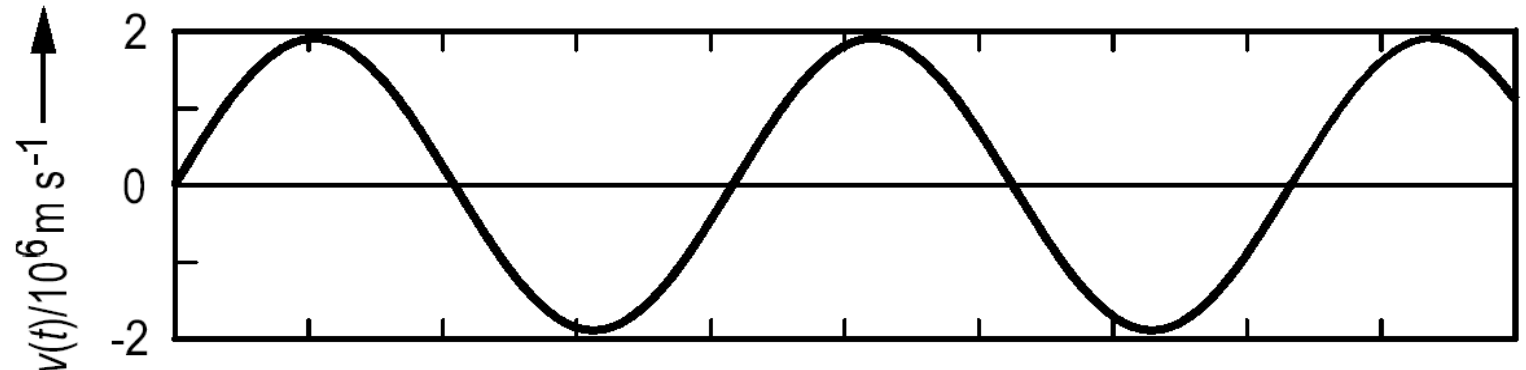
$$m^* = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1}$$



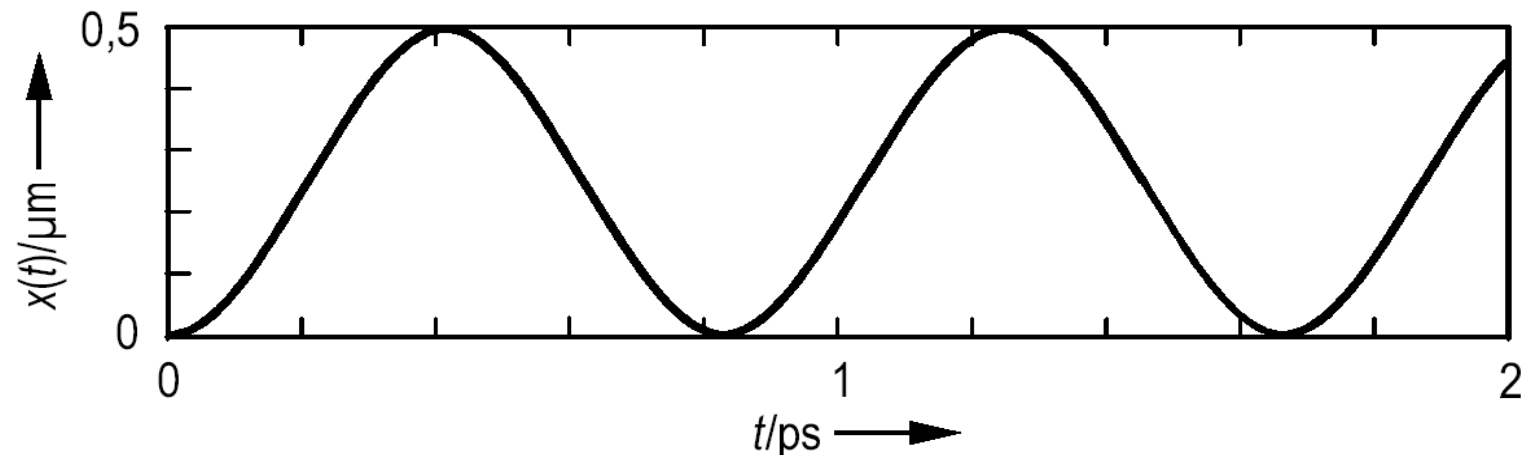
Eine konstante Kraft  $F$   
bewirkt das folgende  
 $k(t)$ :

$$\frac{dk}{dt} = \frac{1}{\hbar} F \quad k(t) = k(0) + \frac{1}{\hbar} Ft$$

und für  
 $v_g(t)$ :



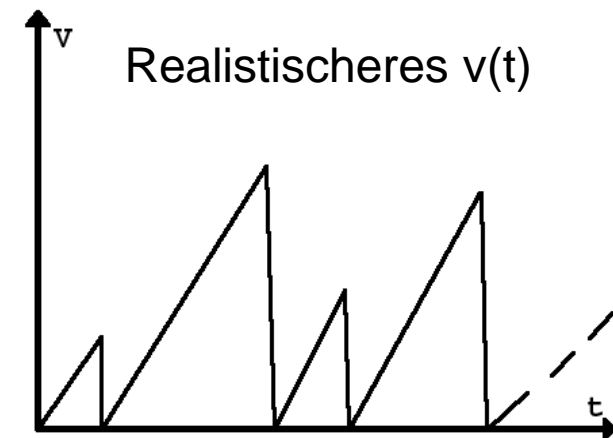
..und in  $x(t)$



- Nach diesem Modell erwarten wir bei einem konstanten Feld eine oszillierende Bewegung der Elektronen (Bloch-Oszillationen).

In einem realen Kristall wird die Bewegung des Elektrons unterbrochen durch z.B.

- Stöße mit Gitterschwingungen (Wechselwirkung mit Phononen)
- Streuung an Defekten
- Elektron-Elektron-Streuung
- Die Zeit  $\tau$  für diese Störungen ist typischerweise viel kürzer als die Periode der Bloch-Oszillation.



Bloch-Oszillationen können nur in speziell hergestellten künstlichen Kristallen beobachtet werden ... aber sind interessant für die **THz-Technik.**

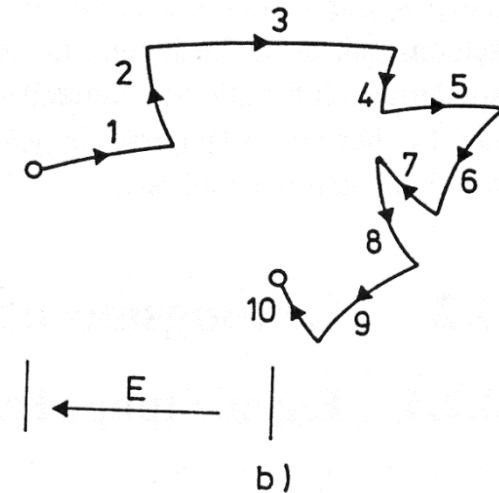
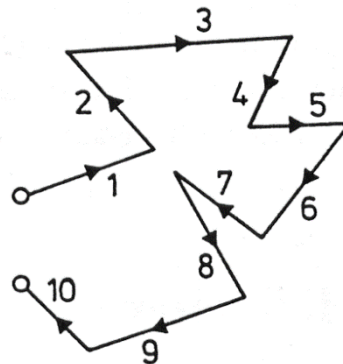
Strom im Halbleiter:

Abfolge von Phasen der Beschleunigung und abrupten Stößen

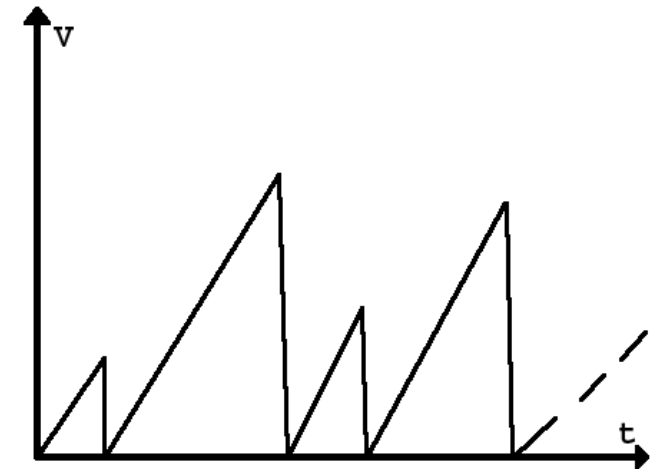
Elektronen werden durch den Halbleiter getrieben

↓  
„Drift“ströme

Elektronenbahn  
ohne/mit Feld



Elektronen werden im Mittel nach der Zeit  $\tau$  durch Stoß mit Atomrumpf abrupt abgebremst.



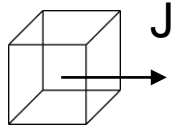
Damit ergibt sich (nicht ganz sauber)  
als mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \frac{F}{m} \tau = \frac{qE\tau}{m^*} = \frac{-eE\tau}{m^*} \equiv -\mu E$$

Damit ergibt sich eine zentrale Größe der  
Halbleiterelektronik, die Beweglichkeit  $\mu$ :

$$\mu = \frac{e\tau}{m^*}$$

Sie ist ein Maß dafür, wie schnell sich ein Elektron im Halbleiter unter  
Einwirkung des elektrischen Feldes bewirkt



Stromdichte durch ein Volumenelement:

$$J = q \cdot n \cdot \bar{v}$$

Ladung pro  
Teilchen (1e)  
(Einheit: C=As)

Dichte der Ladungen  
(Einheit: m<sup>-3</sup> bzw cm<sup>-3</sup>)

mittlere Geschwindigkeit  
Einheit: m/s

Die Stromdichte ist direkt proportional zur Beweglichkeit:

$$J = qn\bar{v} = qn\mu E$$

-hohe Beweglichkeiten



-hohe Stromdichten



-geringe Schaltzeiten

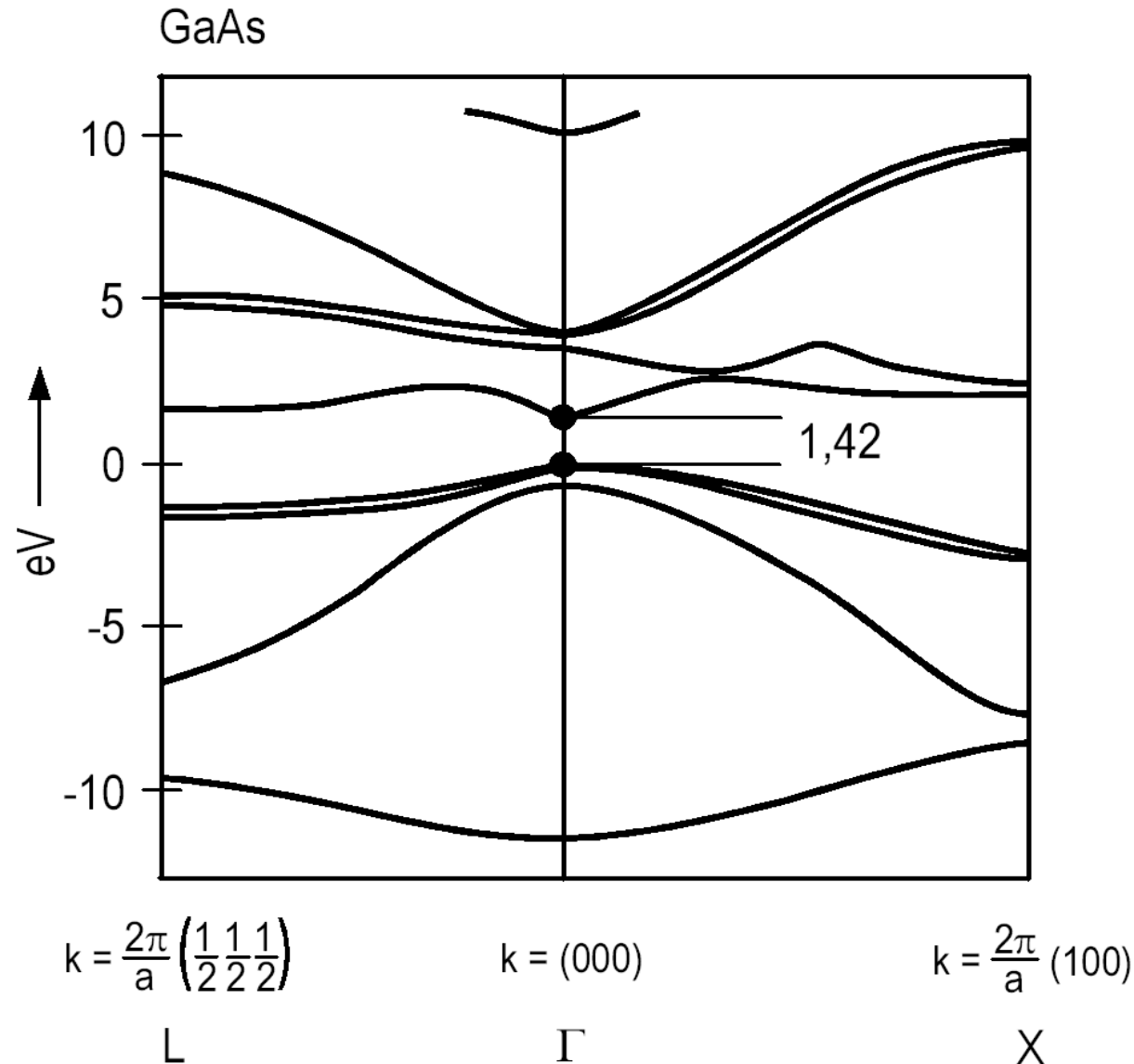


Die effektive Masse der Ladungsträger ist eine Funktion des k-Wertes und des Bandes.

$$m_{\text{eff}} = \hbar^2 \left( \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2} \right)^{-1}$$

Die Zeitkonstante  $\tau$  ist ebenfalls nicht konstant.

Deshalb ist die Beweglichkeit nicht für alle Elektronenzustände gleich.



Die Träger relaxieren durch Stöße zu den niedrig gelegenen Zuständen im Band.

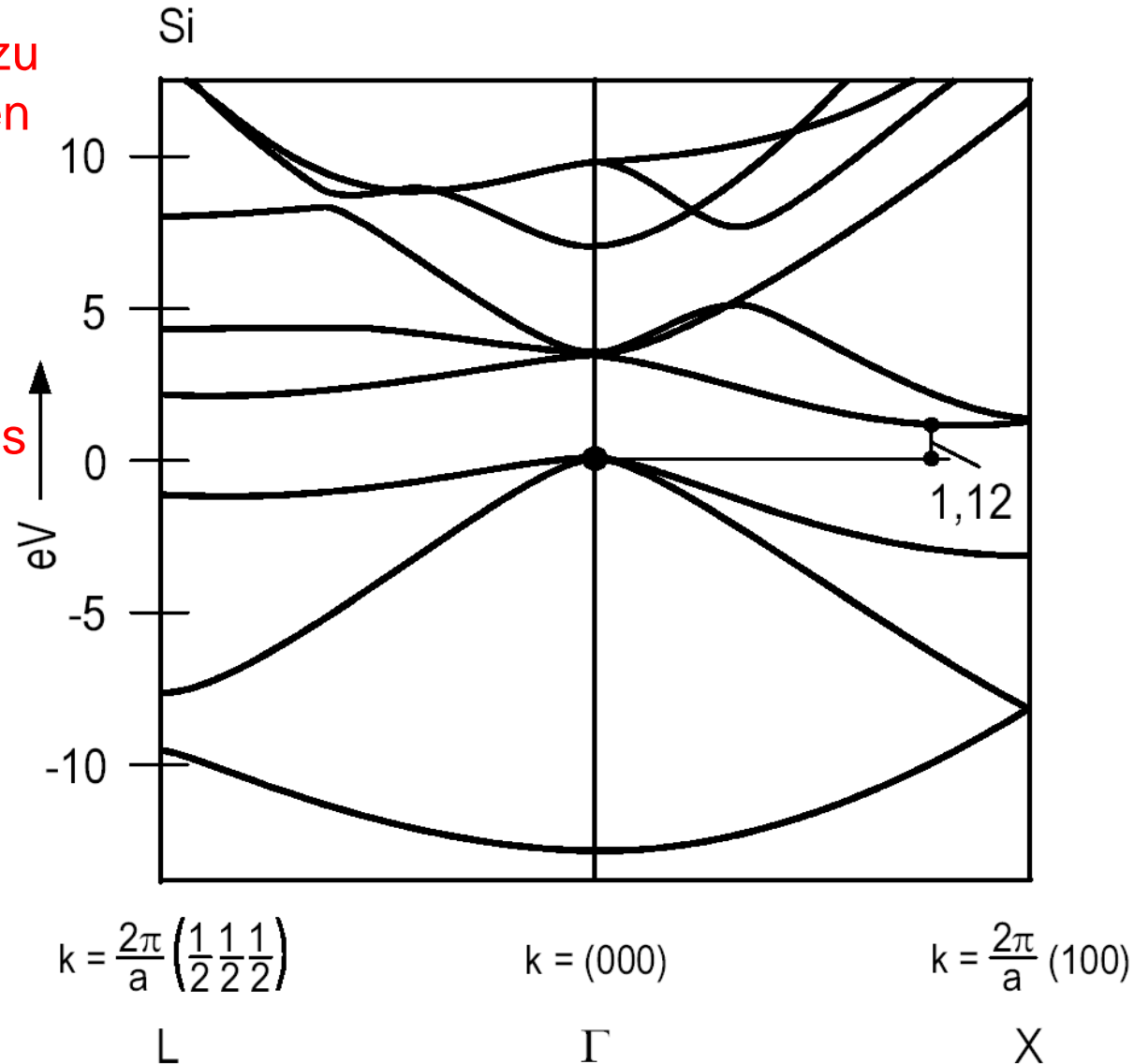
Deshalb heißt  $\tau$  auch Intradbandimpulsrelaxationszeit.

Die Elektronenbeweglichkeit im Leitungsband ist bei Si kleiner als bei GaAs.

Dies sieht man an der geringeren Bandkrümmung im Minimum.

$$\frac{1}{m_{\text{eff}}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W(k)}{\partial k^2}$$

$$\mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$$



Für Hochfrequenzbauelemente  
(optische Nachrichtentechnik,  
Mobilfunk) sind die Si-Elektronen  
u. U. nicht schnell genug.



Erforschung und Einsatz von  
anderen Halbleitermaterialien

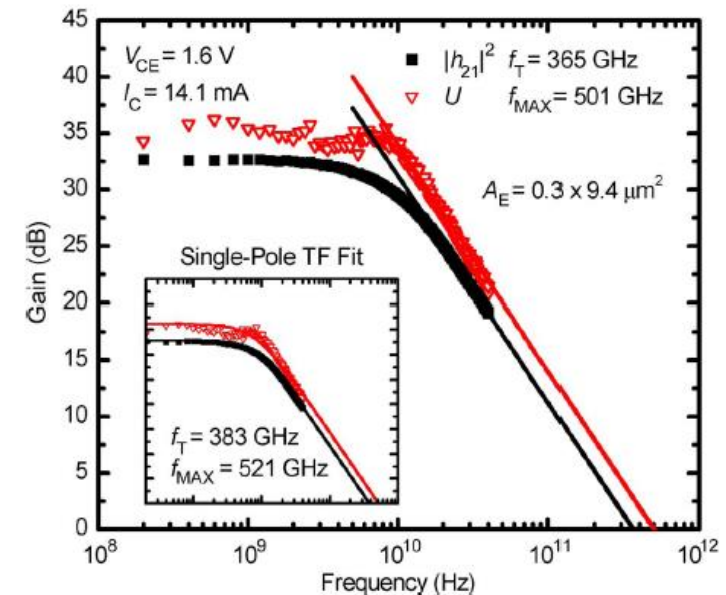


z.B. GaAs, InP, SiGe, ...

IEEE ELECTRON DEVICE LETTERS, VOL. 32, NO. 5, MAY 2011

## InP/GaAsSb DHBTs With 500-GHz Maximum Oscillation Frequency

Rickard Lövlom, Ralf Flückiger, Yuping Zeng, Olivier Ostinelli, Andreas R. Alt, *Student Member*,  
Hansruedi Benedickter, and C. R. Bolognesi, *Fellow, IEEE*

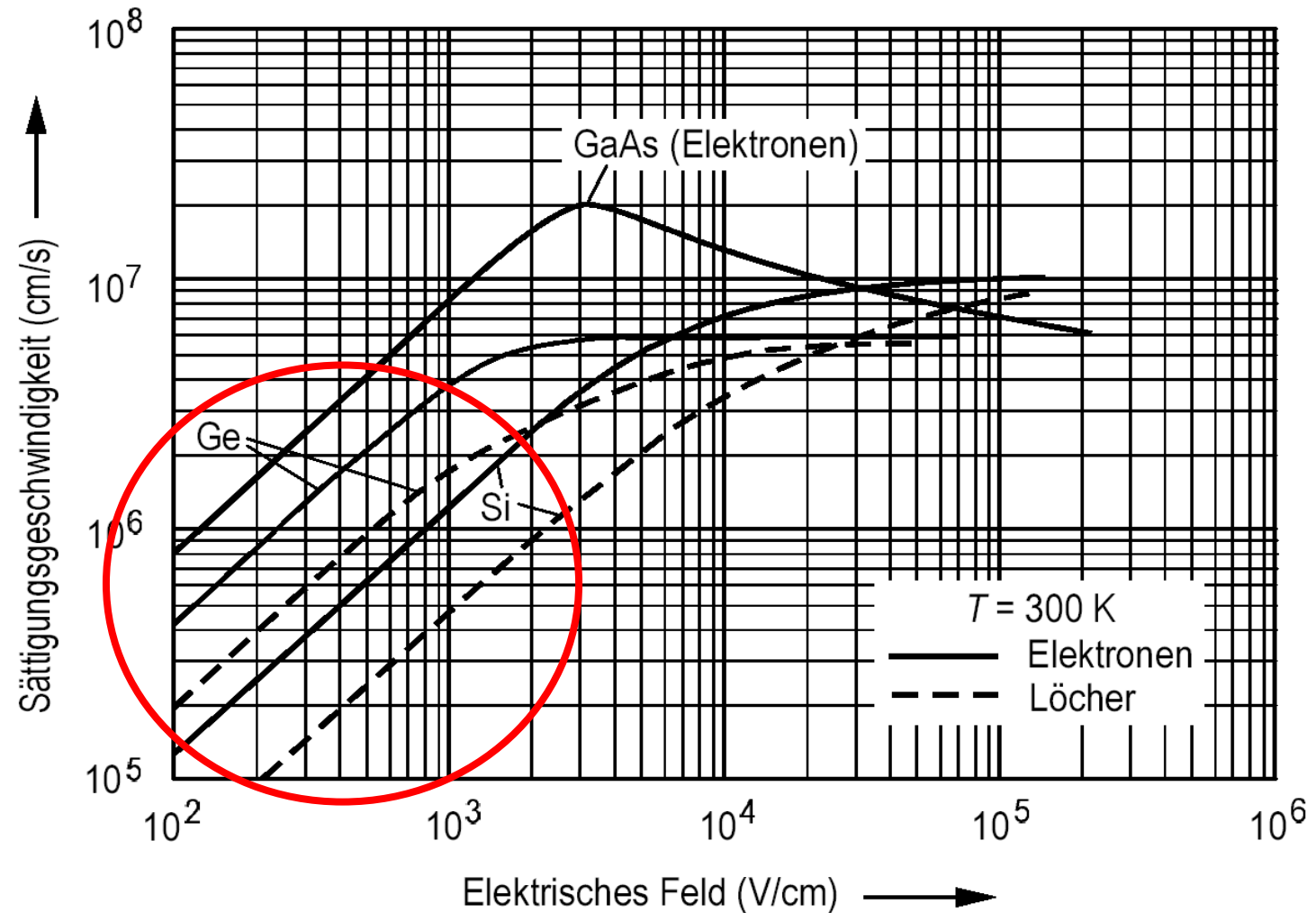


**Die Beweglichkeit ist nicht naturgegeben und auch nur näherungsweise konstant !**

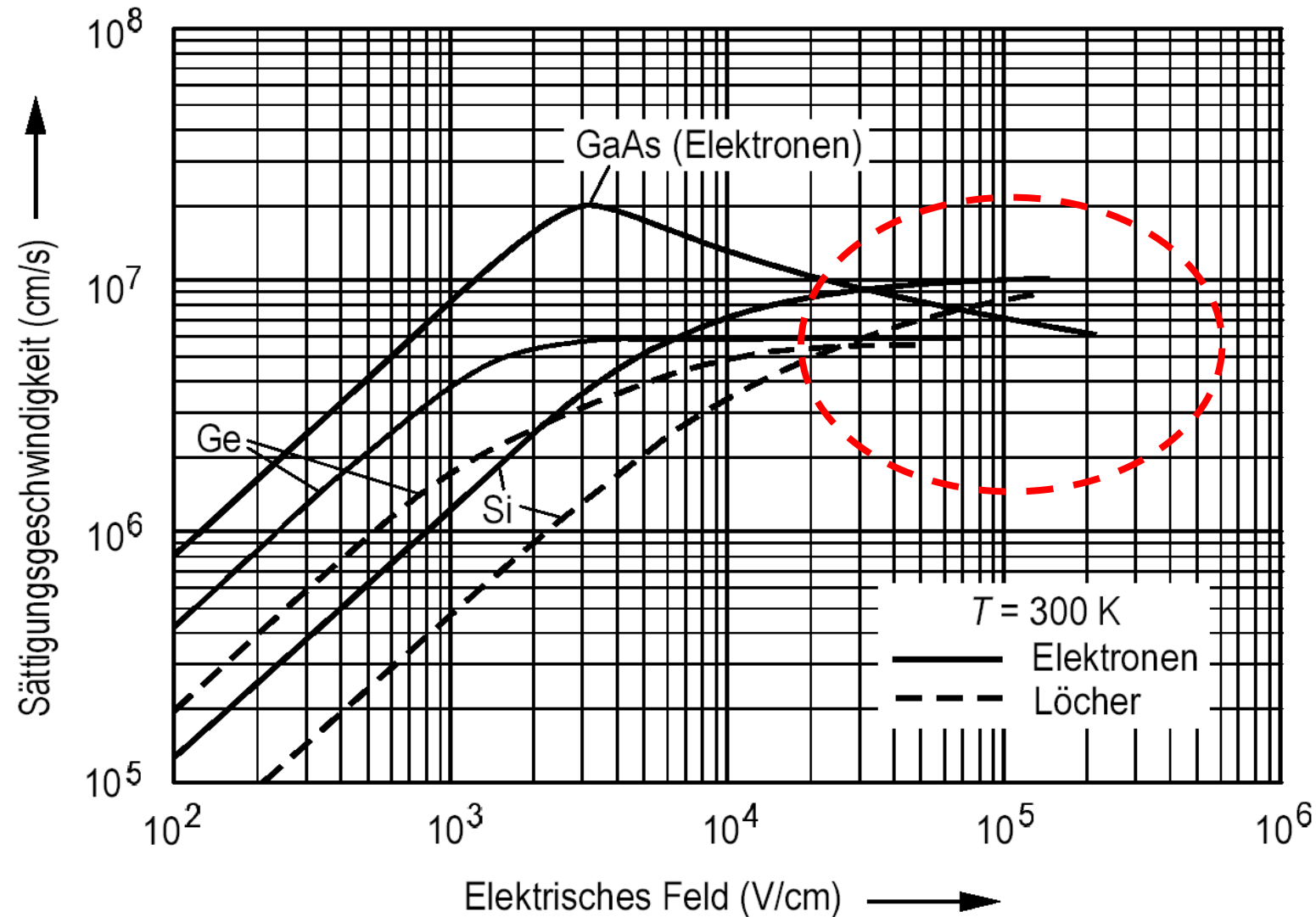
Sie wird bestimmt durch:

- Reinheit des Halbleiters (wenige Streuprozesse)
- Wahl des Materials
- den k-Zustand (Energie) des Elektrons

$$\bar{v} = \mu E$$
$$\mu = \frac{e\tau}{m_{\text{eff}}}$$



Für kleine Feldstärken ist die Beweglichkeit der Ladungsträger und die effektive Masse ungefähr konstant. In diesem Bereich ist die Parabelnäherung zur Bandstruktur anwendbar.



Elektronen hoher Energie haben z.B. eine geringere Beweglichkeit

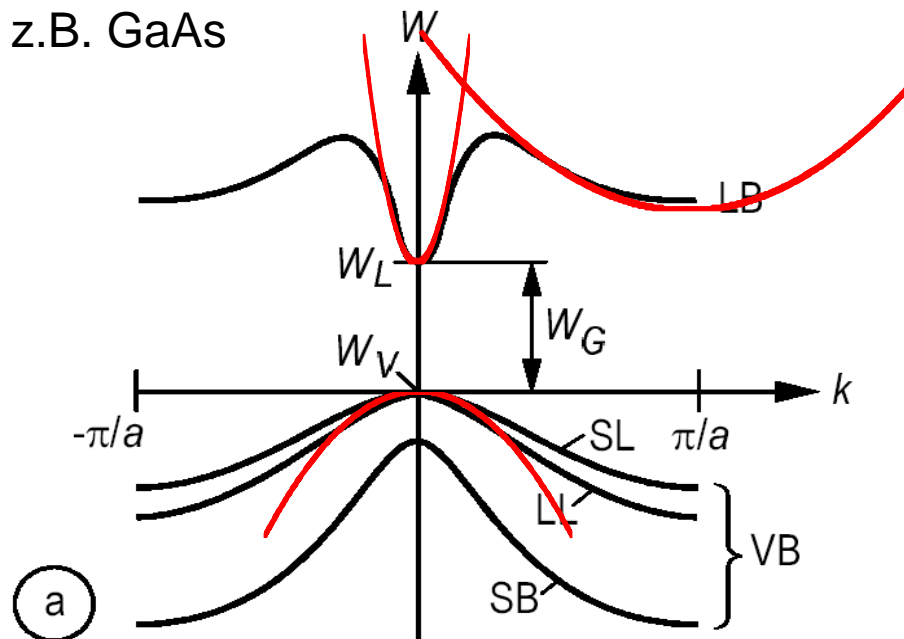
1. **Grundlagen der Quantenmechanik**
2. **Elektronische Zustände**
3. **Vom Wasserstoffatom zum Periodensystem der Elemente**
4. **Elektronen in Kristallen**
5. **Halbleiter**
  - 5.1 Quasiklassische Beschreibung von Elektronen im Halbleiter
  - 5.2 Stromtransport in Bändern
6. **Quantenstatistik für Ladungsträger**
7. **Dotierte Halbleiter**
8. **Halbleiter im Nichtgleichgewicht**
9. **Der pn-Übergang**

Da die Bandstruktur in diesen Bereichen symmetrisch ist, können wir sie durch eine Parabel annähern.

Die Elektronen verhalten sich wie freie Elektronen mit einer konstanten effektiven Masse.

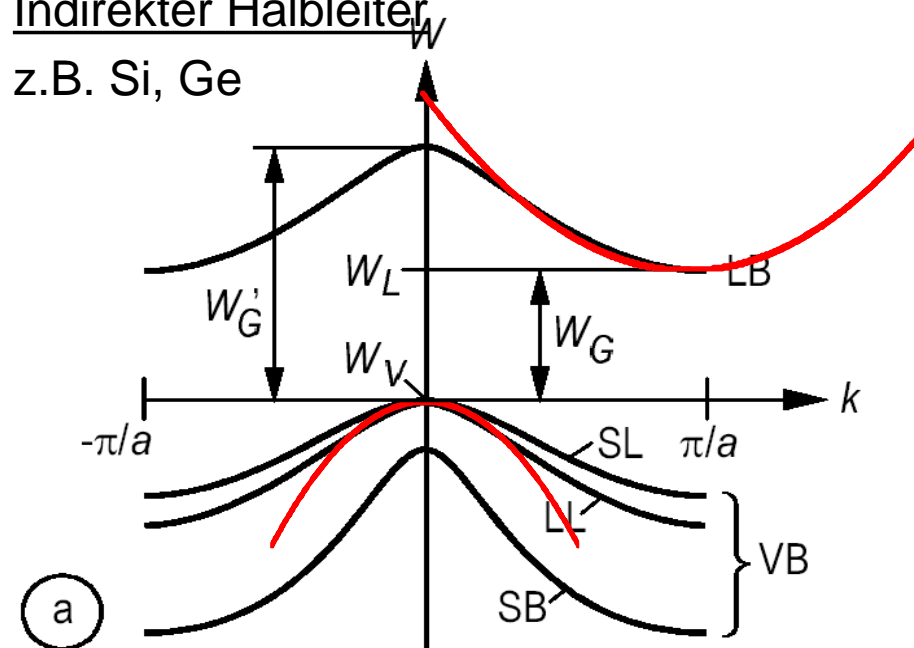
## Direkter Halbleiter mit „Seitenttal“

z.B. GaAs

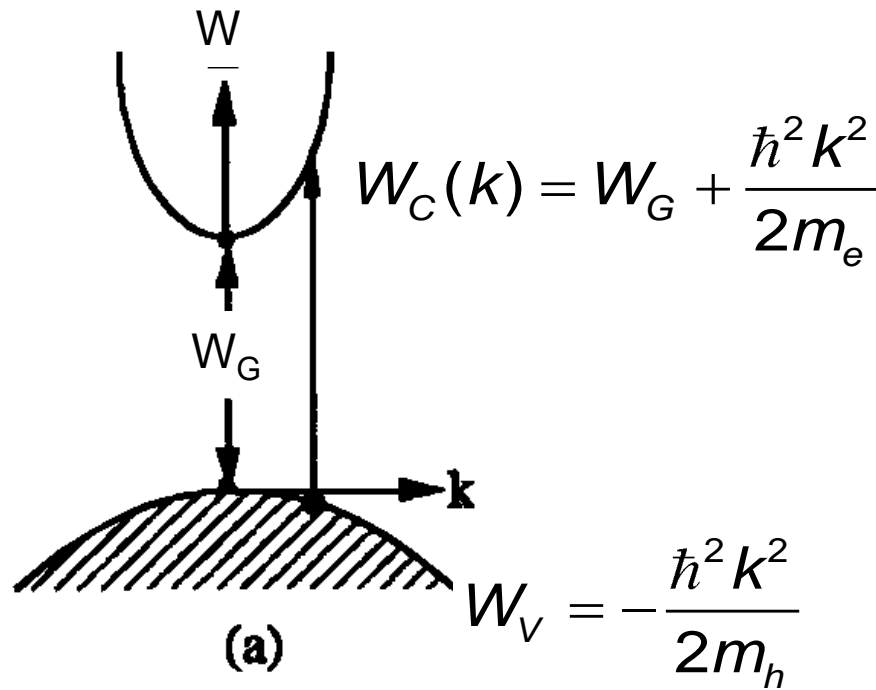


## Indirekter Halbleiter

z.B. Si, Ge





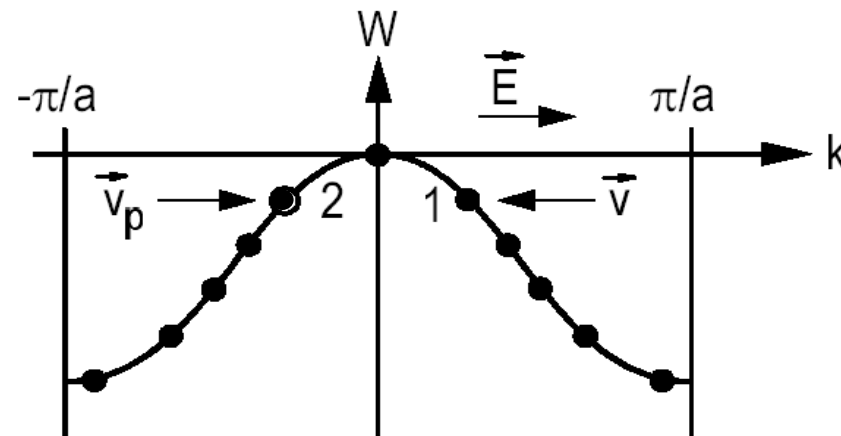


$m_{e,h}$ : Effektive Elektron(Loch)masse

$$\vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m_{e,h}}$$

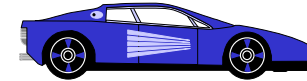
$$\frac{1}{m_{e,h}} = \frac{1}{\hbar^2} \frac{\partial^2 W_n(\vec{k})}{\partial k^2}$$

- Strombeiträge einzelner Elektronen in einem vollbesetzten Band kompensieren sich paarweise:



- Strom wird nur getragen von teilweise gefüllten Bändern

Wir wollen Autos von Karlsruhe nach Frankfurt bringen.

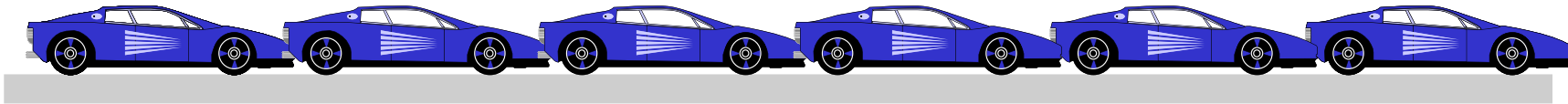


Ist die Autobahn ganz leer, so werden keine Autos transportiert.

- Aber wenn alles voll ist, geht auch nichts mehr ....Stau auf der A5...

**Elektronen sind  
Fermionen und können  
sich stauen !**



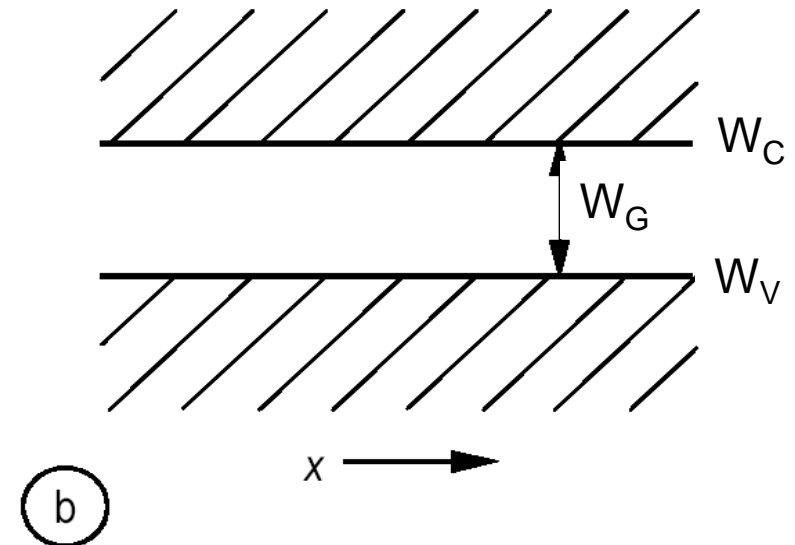
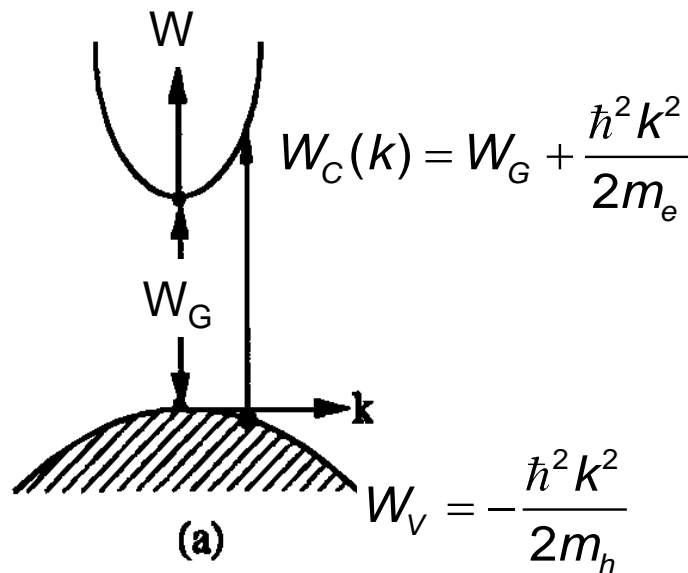


Vollgefüllte Bänder tragen nicht zum Stromfluss bei !

Für die meisten Berechnungen in Halbleiterbauelementen sind nur wenige Bänder wichtig:

- ⇒ die (fast) gefüllten Bänder mit der höchsten Energie
- ⇒ die (fast) leeren Bänder mit der niedrigsten Energie

Die Bandstruktur wird dann in einem vereinfachten Bändermodell dargestellt:



Für die meisten Berechnungen in Halbleiterbauelementen sind nur wenige Bänder wichtig:

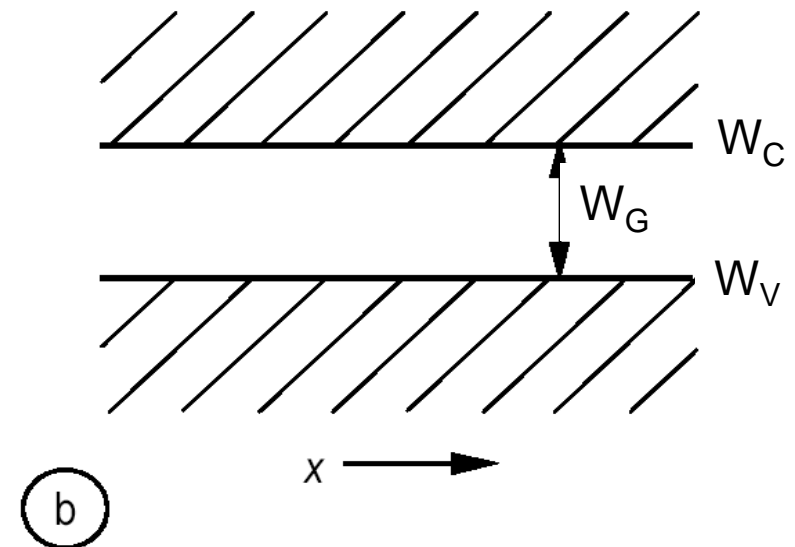
- ⇒ die (fast) gefüllten Bänder mit der höchsten Energie
- ⇒ die (fast) leeren Bänder mit der niedrigsten Energie

Die Bandstruktur wird dann in einem vereinfachten Bändermodell dargestellt:

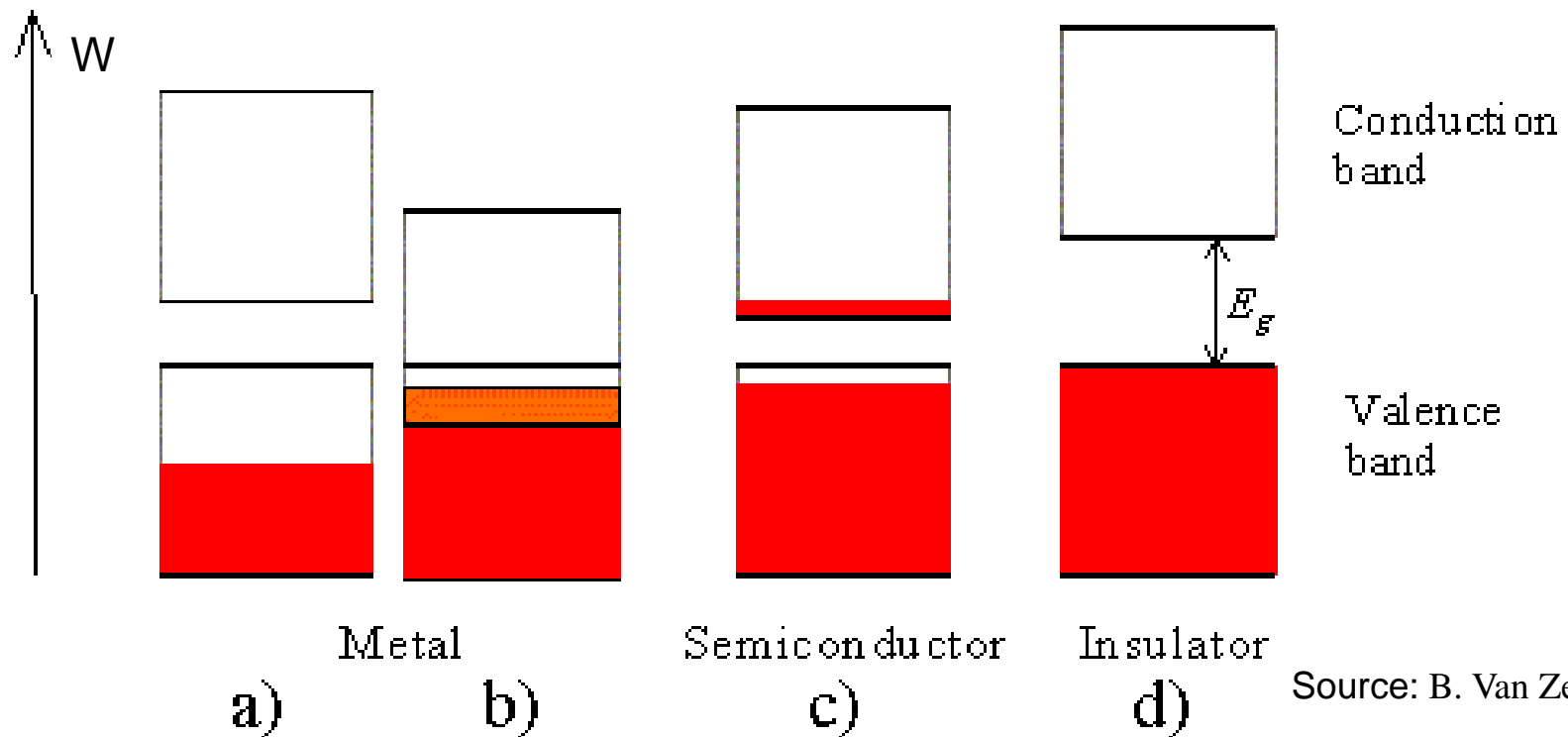
$W_C$ : Minimum des Leitungsbands  
(Conduction band)

$W_V$ : Maximum des Valenzbandes  
(Valence band)

$W_G$ : Energielücke  
(Energy gap)



Die Verteilung von Elektronen auf die Bänder sieht bei Metallen, Halbleitern und Isolatoren bei Raumtemperatur folgendermaßen aus:



Anstatt die vielen unbeweglichen (im Stau stehenden) Elektronen im Valenzband zu betrachten, ist es einfacher die wenigen beweglichen **Defektelektronen (Löcher)** zu analysieren.

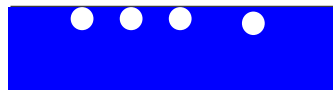
Fehlende Elektronen im fast vollständig besetzten Valenzband sind beweglich (Analogie: Wasserblasen)

Löcher können als einzelne Teilchen mit einer positiven Ladung und im Vorzeichen geänderter effektiver Masse (positiv wenn Elektronenmasse negativ !) angesehen werden

- Beispiel GaAs:



negativ geladene Elektronen  
im Leitungsband:  $m^* = 0.067 m_0$

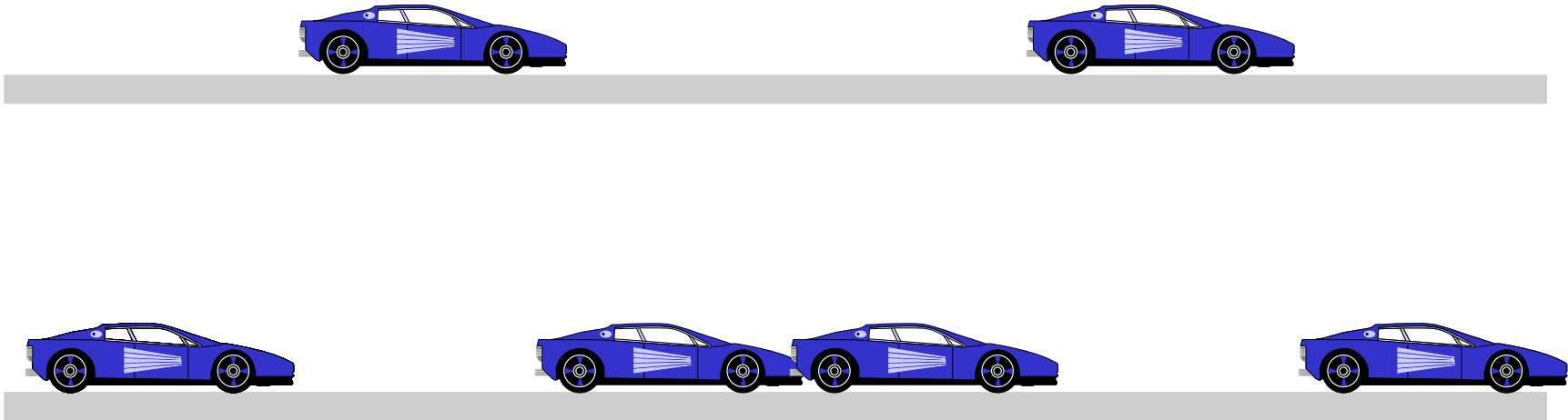


positiv geladene Löcher  
im Valenzband:  $m^* \approx +0.5 m_0$



# Analogie doppelstöckige Autobahn

FE 8.33  
SS 2016



Stromfluss in teilweise gefüllte Bändern

# Analogie doppelstöckige Autobahn

FE 8.34  
SS 2016



Stromfluß in teilweise gefüllte Bändern.

Quantitativ wird die Leitfähigkeit  $\sigma$  berechnet durch:

$$\sigma = e(\mu_n n + \mu_p p)$$

The diagram illustrates the components of the conductivity formula  $\sigma = e(\mu_n n + \mu_p p)$ . Arrows point from descriptive text to the variables in the equation:

- Ladung des Elektrons** points to  $e$ .
- Beweglichkeit der Ladungsträger im Leitungsband** points to  $\mu_n$ .
- Anzahl der Ladungsträger im Leitungsband** points to  $n$ .
- Beweglichkeit der Ladungsträger im Valenzband** points to  $\mu_p$ .
- Anzahl der Defektelektroden im Valenzband** points to  $p$ .

Wie kommen die Elektronen bei Halbleitern eigentlich ins Leitungsband und wie viele gibt es dort?