

Seminar: Simpliziale Topologie

Simpliziale Komplexe

Julian Seipel

28.Oktober 2015

Inhaltsverzeichnis

1 Geometrische Simplexe	2
2 Geometrische Simplicialkomplexe	11
3 Abstrakte Simplicialkomplexe	18

Konventionen

In diesem Seminarvortrag werden folgende Konventionen verwendet. Die Null ist eine natürliche Zahl. Die reellen Zahlen werden durch \mathbb{R} geschrieben. Eine Menge $A \subset \mathbb{R}^n$ ist konvex, wenn die Verbindungslinie je zweier Punkte vollkommen in A enthalten ist.

Die konvexe Hülle einer Teilmenge $A \subset \mathbb{R}^n$ eines \mathbb{R} -Vektorraums, ist der Schnitt aller konvexen Mengen, die diese Menge enthalten. Diese ist konvex. Schreibe hierfür $\text{conv}(A)$.

Es bezeichnet e_i den i -ten Einheitsvektor in \mathbb{R}^n , wobei e_0 als der Nullvektor gesetzt wird.

Eine Konvexkombination zweier Vektoren x und y , mit Parametern $\lambda, \mu \in [0, 1]$, ist eine Linearkombination $\lambda x + \mu y$ mit $\lambda + \mu = 1$.

Die Potenzmenge wird durch P geschrieben.

Für eine Menge $A \subset X$ aus einem topologischen Raum, bezeichnet \overline{A} den Abschluss von A .

Das Zeichen \mathbb{E} bedeutet ohne Einschränkung.

Die 1-Norm $\|\bullet\|_1$ auf dem \mathbb{R}^N ist durch folgende Abbildung gegeben:

$$\begin{aligned} \|\bullet\|_1 : \mathbb{R}^N &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ x = (x_1, \dots, x_N) &\mapsto \sum_{i=1}^N |x_i| \end{aligned}$$

1 Geometrische Simplexe

Topologische Räume sind im allgemeinen sehr schwer zu beschreibende mathematische Objekte. Dieses Seminar behandelt eine Methode, eine bestimmte Klasse von topologischen Räumen durch einfache geometrische Objekte, den Simplexien, zu beschreiben und zu verstehen.

Simplexe sind einfache kombinatorische Objekte, mit denen sich eine große Klasse von topologischen Räumen beschreiben lassen. Diese bilden eine Verallgemeinerung von Punkt, Gerade, gleichseitigem Dreieck und dem Tetraeder. Diese werden auf höhere Dimensionen verallgemeinert.

Wir definieren zunächst grundlegende Begriffe für die anschließende Definition der Simplexe.

Definition 1.1 (Geometrisch unabhängig¹): Eine endliche Menge $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ heißt **geometrisch unabhängig**, falls das System von Vektoren

$$a_0 - a_1, a_0 - a_2, \dots, a_0 - a_n$$

linear unabhängig im Sinne der Linearen Algebra ist. Für eine Indexmenge J heißt eine beliebige Menge $A \subset \mathbb{R}^J$ geometrisch unabhängig, falls jede endliche Teilmenge von A geometrisch unabhängig im obigen Sinne ist.

Wir zeigen für spätere Verwendung eine äquivalente Formulierung der geometrischen Unabhängigkeit.

Lemma 1.2: Teilsysteme von geometrisch unabhängigen Systemen sind geometrisch unabhängig. Eine endliche, geometrisch unabhängige Menge des \mathbb{R}^N hat maximal $N + 1$ Elemente. Für eine Menge $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ und Parametern $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$ sind folgende Aussagen äquivalent:

- (i) Das System $\{a_0, \dots, a_n\}$ ist geometrisch unabhängig.
- (ii) Für $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ und $\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$ folgt stets $t_i = 0$ für alle $i \in \{0, \dots, n\}$.

Beweis:

Sei $\{a_0, \dots, a_n\}$ ein geometrisch unabhängiges System und $\{a_{i_0}, \dots, a_{i_r}\}$ hierzu ein Teilsystem. Sei $i_0 = 0$, sonst nummeriere um oder betrachte ein anderes i_j , so dass für dieses i_j das ursprüngliche geometrisch unabhängige System der Punkt a_{i_j} als Basispunkt gewählt werden kann. Nun ist nach Definition 1.1, $a_0 - a_1, \dots, a_0 - a_n$ linear unabhängig und somit auch das Teilsystem $a_0 - a_{i_1}, \dots, a_0 - a_{i_r}$. Sei nun $A \subset \mathbb{R}^N$ ein endliches, geometrisch unabhängiges System, dann ist nach Definition 1.1, für ein Element $a \in A$, das System $\{a - a' \mid a' \in A \setminus \{a\}\}$ linear unabhängig. Die Kardinalität des Systems ist offensichtlich durch die Dimension des Vektorraum beschränkt und somit maximal gleich N , mit dem Basispunkt also $N + 1$. Für den letzten Teil des Beweises nutze man folgende Äquivalenzen

¹Oder auch affine Unabhängigkeit

i) \Rightarrow ii) Seien $\sum_{i=0}^n t_i = 0$ und $\sum_{i=0}^n t_i a_i = 0$, dann folgt

$$0 = \sum_{i=0}^n t_i a_i = t_0 a_0 + \sum_{i=1}^n t_i a_i = \sum_{i=1}^n (-a_0 t_i) + \sum_{i=1}^n t_i a_i = \sum_{i=1}^n t_i (a_i - a_0)$$

und somit $t_i = 0$ für alle i .

ii) \Rightarrow i) Betrachte folgende Gleichungen

$$0 = \sum_{i=1}^n t_i (a_i - a_0) = \sum_{i=1}^n (-a_0 t_i) + \sum_{i=1}^n t_i a_i = \sum_{i=0}^n t_i a_i.$$

Mit $t_0 := -\sum_{i=1}^n t_i$ folgt nun mit ii) die Behauptung. *foo*

■

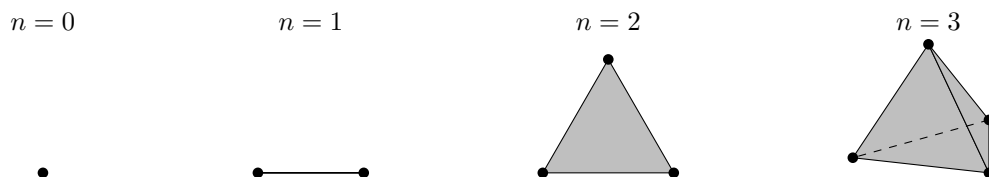
In der nächsten Definition wird das in diesem Vortrag zugrundeliegende Objekt von Interesse definiert. Dieses dient im weiteren Verlauf als Baustein für die Komplexe.

Definition 1.3 (Geometrischer n -Simplex): Zu einem geometrisch unabhängigen System $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$, nennt man die Menge

$$\left\{ \sum_{i=0}^n t_i a_i \in \mathbb{R}^N \mid t_i \in [0, 1], \sum_{i=0}^n t_i = 1 \right\}$$

den (geometrischen) n -Simplex und schreibt $a_0 \dots a_n$ oder ohne die Punkte genauer zu spezifizieren σ^n . Dies ist die Menge aller Konvexkombinationen des Systems $\{a_0, \dots, a_n\}$. Als Konvention ist der Simplex stets in den \mathbb{R}^N eingebettet für ein $N \geq n$.

Beispiel 1.4 (Einfache Beispiele): Definiere für $n \in \mathbb{N}$ den **Standardsimplex** $\sigma^n := e_0 \dots e_n$. Die Fälle $n = 0, 1, 2, 3$ sind hier aufgezeichnet. Beachte das mit $e_0 = 0$ dies nicht der Konvention aus der Vorlesung entspricht.



Um Punkte aus einem Simplex unabhängig von der Lage des Simplex im umliegenden Raum zu beschreiben, sind spezielle Koordinaten vonnöten. Diese werden nun definiert und ihre Eindeutigkeit und Stetigkeit bezüglich des Punktes bewiesen.

Lemma 1.5 (Baryzentrische Koordinaten): Es bezeichnet x einen Punkt aus dem Simplex $\sigma^n = a_0 \dots a_n$ und $(t_1, \dots, t_n) \in [0, 1]^n$. In der Darstellung $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ nennt man t_i **baryzentrische Koordinaten**. Diese sind durch x eindeutig bestimmt und als Funktionen $t_i : \sigma^n \subset \mathbb{R}^N \rightarrow [0, 1]$ stetig.

Beweis:

Zeige zunächst die Eindeutigkeit über die äquivalente Formulierung der geometrischen Unabhängigkeit aus Lemma 1.2

Eindeutigkeit: Seien zwei Darstellungen

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i = \sum_{i=0}^n s_i a_i \text{ mit } \sum_{i=0}^n t_i = \sum_{i=0}^n s_i = 1 \text{ und } t_i, s_i \in [0, 1]$$

gegeben, so folgt durch umformen

$$\sum_{i=0}^n (t_i - s_i) \cdot a_i = 0 \text{ und } \sum_{i=0}^n t_i - s_i = 0.$$

Da $\{a_0, \dots, a_n\}$ ein geometrisch unabhängiges System ist, folgt durch Lemma 1.2, dass $t_i - s_i = 0$ und damit $t_i = s_i$. Also sind die Koordinaten eindeutig.

Stetigkeit: Aufgrund der Eindeutigkeit der baryzentrischen Koordinaten sind die Abbildungen $t_i(x)$ wohldefiniert. Definiere die Vektoren $b_i := a_i - a_0$ und erweitere das linear unabhängige System $\{b_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ zu einer Basis des \mathbb{R}^N . Schreibe hierfür $\{b_i \mid 0 \leq i \leq N\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} x - a_0 &= \sum_{i=0}^n t_i a_i - 1 \cdot a_0 \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{i=0}^n t_i a_i - \sum_{i=0}^n t_i a_0 \\ &= \sum_{i=1}^n t_i \cdot (a_i - a_0) \\ &= \sum_{i=1}^n t_i b_i \\ &= \sum_{i=1}^n t_i b_i + \sum_{i=n+1}^N 0 \cdot b_i. \end{aligned}$$

Hierbei wird $(*) : \sum_{i=0}^n t_i = 1$ verwendet. Schreibe dies nun als ein lineares Gleichungssystem, mit $x = (x_1, \dots, x_N)$, $a_i = (a_i^1, \dots, a_i^N)$, $t = (t_1, \dots, t_n, 0, \dots, 0)$, $B = (b_i^j)_{i,j}$. Somit schreibt sich die obige Gleichung wie folgt: $x - a_0 = B \cdot t$.

Forme nach t um. Dies ist möglich da B als darstellende Matrix von einer Basis invertierbar ist. Nun wird ersichtlich, weshalb die t_i für $1 \leq i \leq n$ stetige Funktionen sind.

Mit $t_0 = 1 - \sum_{i=1}^n t_i$ ist die Behauptung gezeigt. ■

Die Baryzentrischen als ausgezeichnete Koordinaten ermöglichen eine gute Art der Beschreibung der Punkte innerhalb des Simplex. Mit dieser Darstellung ist es leicht, möglichst viele Eigenschaften von Simplicialen zu zeigen.

Definition 1.6 (Eckmenge, Dimension, Seite, Rand, Inneres): Sei $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \mathbb{R}^N$ ein geometrisch unabhängiges System und $\sigma = a_0 \dots a_n$ ein geometrischer n -Simplex, dann definieren wir folgende geometrische Objekte

- Die Menge $\{a_0, \dots, a_n\}$ bezeichnet man als **Eckmenge** $V(\sigma)$ von σ .
- Eine Teilmenge $\tau = b_1 \dots b_k \subset \sigma$, mit $b_i \in V(\sigma)$, heißt **Seite**, falls τ wieder einen Simplex bildet. Eine Seite heißt **echt**, falls $k \neq n$.
- Die **Dimension** von σ ist die Zahl n bzw. $\dim(\sigma) = |V(\sigma)| - 1$, wobei $\dim(\emptyset) = -1$ gesetzt wird.
- Der **Rand** von σ ist die folgende Menge:

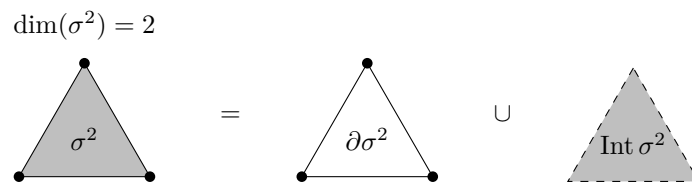
$$\partial\sigma := \bigcup \{ \tau \mid \tau \text{ ist echte Seite von } \sigma \}.$$

- Das **Innere** des Simplex ist die Menge

$$\text{Int}(\sigma) := \sigma \setminus \partial\sigma.$$

Um sich die vorherige Definition zu verdeutlichen wird nun ein anschauliches Beispiel angegeben.

Beispiel 1.7: Wir betrachten den Simplex $\sigma^2 = e_0 e_1 e_2$. Mit diesem lassen sich alle vorherigen Begriffsbildungen leicht anhand dieses Simplex angeben.



Es werden nun einige Charakterisierungen und Aussagen über die Simplexe und deren geometrische Objekte bewiesen.

Satz 1.8: Sei $\sigma = a_0 \dots a_n$ ein n -Simplex und $x \in \sigma$ mit der baryzentrischen Darstellung $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$. Dann gelten folgende Aussagen

- (a) (i) $x \in \partial\sigma \Leftrightarrow \exists 0 \leq i \leq n : t_i = 0$
(ii) $x \in \text{Int}(\sigma) \Leftrightarrow \forall 0 \leq i \leq n : t_i > 0$
- (b) Jeder Simplex σ ist eine konvexe, kompakte Teilmenge von \mathbb{R}^N und die konvexe Hülle von $\{a_0 \dots a_n\}$ identisch mit dem Simplex σ .
- (c) Das Innere $\text{Int}(\sigma)$ ist konvex und offen in σ .
- (d) Zwei Simplexe der selben Dimension sind homöomorph.
- (e) Es gibt einen Homöomorphismus $\sigma \simeq \overline{D^n}$, der den Rand $\partial\sigma$ auf die S^{n-1} abbildet.

Beweis:

(a): Zeige nur die (i), denn die (ii) folgt unmittelbar als Negation von (i) und der Tatsache, dass $\sigma = \partial\sigma \cup \text{Int}(\sigma)$ eine disjunkte Vereinigung ist.

„ \Rightarrow “ Sei x im Rand $\partial\sigma$. Dann liegt der Punkt in einer echten Seite τ von σ . Sei $(\tau = a_0 \dots a_m$ für ein $m < n$. Dann hat x eine eindeutige baryzentrische Darstellung bezüglich des Simplex σ , aber auch eine eindeutige Darstellung bezüglich der Seite τ . Es existiert also t_i, s_i , mit

$$x = \sum_{i=0}^m s_i a_i = \sum_{i=0}^n t_i a_i.$$

Durch die Eindeutigkeit der Darstellung folgt unmittelbar, dass ein $0 \leq i \leq n$ existieren muss, so dass $t_i = 0$ gilt.

„ \Leftarrow “ Gilt nun umgekehrt $t_i = 0$ für ein $0 \leq i \leq n$, so liegt der Punkt x in der echten Seite $a_0 \dots a_{i-1} a_{i+1} \dots a_n$ und damit im Rand.

(b): **kompakt:** Definiere eine stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $t_0, \dots, t_n \mapsto \sum_{i=0}^n t_i a_i$, diese ist stetig als Linearkombination stetiger Funktionen. Die Menge

$$A = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=0}^n t_i = 1 \text{ und für alle } 0 \leq i \leq n \text{ und } t_i \geq 0\}$$

ist kompakt, da man sie durch die 1-Norm $\|\bullet\|_1$ wie folgt schreiben kann $A = (\|\bullet\|_1)^{-1}(\{1\}) \cap [0, 1]^{n+1}$. Als Schnitt einer abgeschlossen und einer kompakten Menge ist A kompakt. Somit ist $\sigma = f(A)$ als Bild einer kompakten Mengen unter einer stetigen Abbildung wieder kompakt.

konvex: Seien zwei Punkte $x, y \in \sigma$ gegeben und ihre baryzentrischen Darstellungen seien $x = \sum t_i a_i$, $y = \sum s_i a_i$ mit $\sum t_i = \sum s_i = 1$. Dann folgt für eine Konvexkombination mit $\lambda \in [0, 1]$, dass

$$\begin{aligned} \lambda x + (1 - \lambda)y &= \lambda \cdot \sum_{i=0}^n t_i a_i + (1 - \lambda) \cdot \sum_{i=0}^n s_i a_i \\ &= \sum_{i=0}^n (\lambda t_i + (1 - \lambda)s_i) \cdot a_i. \end{aligned} \quad (*)$$

Jeder Punkt dieses Verbindungsstücks von x und y liegt wieder in σ , denn mit den Koeffizienten aus der Darstellung $(*)$ folgt

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (\lambda t_i + (1 - \lambda)s_i) &= \lambda \cdot \sum_{i=0}^n t_i + (1 - \lambda) \cdot \sum_{i=0}^n s_i \\ &= \lambda + (1 - \lambda) = 1. \end{aligned}$$

Also folgt $\lambda x + (1 - \lambda)y \in \sigma$.

Konvexe Hülle: Es ist zu zeigen, dass $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\}) = \sigma$. Hierbei gilt $\{a_0, \dots, a_n\} \subset \sigma$. Da conv monoton ist, folgt $\text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\}) \subset \sigma$.

Nun gilt $a_i a_j \subset \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})$, da mit $a_i \in \text{conv}(\{a_0, \dots, a_n\})$ auch jeder Punkt, der sich als Konvexkombinationen schreiben lässt in der konvexen Hülle liegt. Rekursiv folgt nun mit $\lambda := \sum_{i=1}^n t_i$ und der Darstellung

$$x = t_0 a_0 + \lambda \cdot \sum_{i=1}^n \frac{t_i}{\lambda} a_i$$

die andere Inklusion.

(c): **offen:** Da jede Seite $\tau \subset \sigma$ wieder ein Simplex ist, ist diese auch kompakt, insbesondere abgeschlossen. Nun ist der Rand $\partial\sigma$ Vereinigung dieser abgeschlossen Mengen, also wieder abgeschlossen. Das Innere ist nun das relative Komplement der abgeschlossen Menge bezüglich des Simplex, also offen in σ .

konvex: Seien zwei Punkte $x, y \in \text{Int}(\sigma)$ gegeben, dann gilt nach b), dass für die baryzentrischen Koordinaten der Punkte $t_i, s_i > 0$ gilt. Sei nun $\lambda \in [0, 1]$, dann gilt für die baryzentrischen Koordinaten der Konvexkombinationen $\lambda x + (1 - \lambda)y$ mit der selben Rechnung wie in $(*)$, die Darstellung $\lambda t_i + (1 - \lambda)s_i$. Dies ist offensichtlich stets größer als 0.

(d): Zeige, dass jeder Simplex σ homöomorph zum Standardsimplex $e_0 \dots e_n$ ist. Wir Betrachten hierfür die affine Transformation $f(x) = Ax + b$ mit $A \in \text{GL}(n, \mathbb{R})$ und $b \in \mathbb{R}^n$, die a_i auf e_i abbildet. Dies ist ein Homöomorphismus.

(e): Wir betrachten die stetige Abbildung $f : \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow S^n, f(x) = \frac{x}{\|x\|}$. Sei mit $a \in \text{Int}(\sigma), p \in \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ die Halbgerade $ap_+ := \{a + tp \mid t \geq 0\}$ gegeben. Dann beweise folgende Behauptung.

Behauptung: Der Schnitt $\partial\sigma \cap ap_+$ hat genau ein Element.

Beweis:

Zur Existenz des Elements betrachte die Menge $ap_+ \cap \text{Int}(\sigma)$. Diese ist homöomorph zu $[0, b)$ für ein $b > 0$ und somit existiert bezüglich des Homöomorphismus durch den Punkt b ein Schnittpunkt der Halbgerade mit dem Rand.

Seien nun zwei Punkte $x, y \in \partial\sigma$ gegeben, die auch in ap_+ enthalten sind. Seien $t_x, t_y \in \mathbb{R}_{>0}$ die Parameter, sodass $a + t_z \cdot p = z$ mit $z = x, y$ gilt. Sei $t_y < t_x$, dann folgt durch eliminieren von p , dass

$$x = (1 - t)a + ty \text{ mit } t = \frac{t_y}{t_x} < 1.$$

Wir wählen nun eine Folge $y_n \in \text{Int}(\sigma)$ die gegen y konvergiert und definiere $a_n := \frac{1}{1-t}(x - ty_n)$. Dann konvergiert nach Konstruktion a_n gegen a und da $a \in \text{Int}(\sigma)$ in einer offenen Menge enthalten ist, existiert ein $n \geq 0$, sodass für alle $m \geq n$ gilt $a_m \in \text{Int}(\sigma)$. Somit gilt $x = (1 - t)a_n + ty_n \in \text{Int}(\sigma)$, da die Menge konvex ist und die Folgenglieder ab einem m in der Menge $\text{Int}(\sigma)$ liegen, folgt ein Widerspruch zu $x \in \partial\sigma$. ■

Sei nun $0 \in \text{Int}(\sigma)$, sonst wende eine affine Transformation auf σ an, die den Nullpunkt in das Innere von σ verschiebt. Dies ändert nichts an der folgenden Argumentation.

Die Einschränkung der Abbildung f auf die Menge $\partial\sigma$ ein. Nach obiger Behauptung ist die Abbildung $f|_{\partial\sigma} : \partial\sigma \rightarrow S^{n-1}$ bijektiv und stetig. Da $\partial\sigma$ und S^{n-1} kompakt und hausdorffsch sind, ist die Abbildung auch ein Homöomorphismus.

Setze nun als Umkehrabbildung $g : S^{n-1} \rightarrow \partial\sigma$ und erweitere diese zu einem Homöomorphismus der Form

$$G : \overline{\mathbb{D}^n} \rightarrow \sigma, \quad x \mapsto \begin{cases} 0, & x = 0. \\ \|g(\frac{x}{\|x\|})\| \cdot x, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Diese Abbildung erfüllt die gewünschten Eigenschaften. ■

Bemerkung 1.9: Für eine beliebige Indexmenge J ist der Raum der Funktionen \mathbb{R}^J ein \mathbb{R} -Vektorraum, dessen Elemente als Tupel $(x_j)_{j \in J}$ geschrieben werden. Betrachte

den Untervektorraum $E^J := \bigoplus_{j \in J} \mathbb{R}$ der Elemente, die bis auf endlich viele von Null verschieden sind. Definiere für zwei Elemente $x, y \in E^J$ eine Metrik

$$|x - y| := \sup\{|x_j - y_j| \mid j \in J\}.$$

Die obigen Definitionen und Aussagen funktionieren ebenso falls man die Simpliziale in dem Raum E^J betrachtet. Somit ist sind auch geometrische Simpliziale der Kardinalität größer als der von \mathbb{R} möglich.

2 Geometrische Simplizialkomplexe

Die geometrischen Simplexe alleine reichen nicht aus, um einen komplizierten topologischen Raum zu beschreiben bzw. modellieren. Denn ein σ^n ist nach Satz 1.8 isomorph zum D^n . Mithilfe von Komplexen von Simplexen können nun kompliziertere topologische Räume modelliert werden.

Definition 2.1 (Geometrischer Simplizialkomplex): Wir nennen eine nicht leere Menge Δ von (geometrischen) Simplizialen einen **geometrischen Simplizialkomplex** oder einfach geometrischer Komplex, falls er folgende Bedingungen (K1) – (K3) erfüllt.

(K1) $\emptyset \in \Delta$

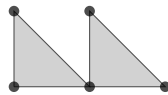
(K2) Für jeden Simplex $\sigma \in \Delta$ ist auch jede Seite τ von σ in Δ enthalten.

(K3) Mit allen Simplexen $\sigma, \sigma' \in \Delta$ ist auch ihr Schnitt $\sigma \cap \sigma'$ in Δ enthalten.

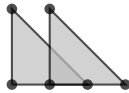
(K4) Für zwei verschiedene Simplexe $\sigma, \tau \in \Delta$ gilt $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) = \emptyset$.

Beispiel 2.2: (1) Sei $\sigma^n := e_0 \dots e_n$ der Standardsimplex. Die Menge aller Seiten von σ^n bildet einen geometrischen Simplizialkomplex.

(2) Hier ist ein Standardbeispiel eines Komplexes abgebildet



und eine Menge von Simplizialen die keinen Komplex bilden.



- (3) Ein Komplex muss weder endlich noch beschränkt sein.

$$\text{---} = \mathbb{R}$$



Der zweite Komplex füllt die reelle Achse vollkommen aus. Dieses Ausfüllen wird nun durch folgende Definition näher erläutert.

Definition 2.3 (Unterkomplex, k -Skelett, Dimension, Polyeder): Sei Δ ein geometrischer Komplex, so definieren wir:

- (a) Eine Teilmenge Δ' von Δ heißt **Unterkomplex**, falls Δ' wiederum einen Simplicialkomplex bildet.
- (b) Die Dimension eines Simplicialkomplexes ist wie folgt definiert:

$$\dim(\Delta) := \sup\{\dim(\sigma) \mid \sigma \in \Delta\}$$

- (c) Das k -**Skelett** $\Delta^{(k)}$ ist der Unterkomplex aller Simplexes mit der Dimension kleiner gleich k . Der Spezialfall $\Delta^{(0)}$ bezeichnet die **Eckenmenge** von Δ .
- (d) Der **Polyeder** von Δ ist wie folgt definiert

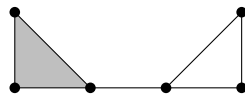
$$|\Delta| := \bigcup\{\sigma \mid \sigma \in \Delta\} \subset \mathbb{R}^{\dim(\Delta)}.$$

Dies entspricht dem Komplex zugrundeliegenden Raum.

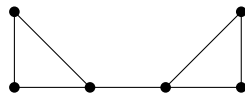
- (e) Ein topologischer Raum heißt **triangulierbar**, falls dieser homöomorph zu einem Polyeder eines geometrischen Komplexes ist.

Zur Veranschaulichung der vorher definierten Begriffe ein Beispiel.

Beispiel 2.4: Skelette: Wir betrachten den folgenden Komplex Δ mit $\dim(\Delta) = 2$



Dann gibt es zu diesem Komplex folgende k -Skelette

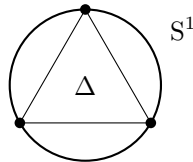


$\Delta^{(1)}$



$\Delta^{(0)}$

Triangulierung: Betrachte den folgenden geometrischen Komplex $\Delta := (\Delta^2)^{(1)}$. Also besitzt der Komplex von einem Dreieck die Seiten und Ecken. Das Polyeder von Δ ist homöomorph zur S^1 . Betrachte hierzu die stetige Normierungsabbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S^1, x \mapsto \frac{x}{\|x\|}$. Eingeschränkt auf den Polyeder von σ erhält man eine stetige bijektive Abbildung und da die beiden Räume hausdorffsch und kompakt sind, muss die eingeschränkte Abbildung schon ein Homöomorphismus sein.



Anschaulich biegt man die Seiten nach außen auf den Kreisbogen. Somit ist S^1 triangulierbar.

Lemma 2.5: Es gilt für eine Menge Δ folgende Äquivalenz von Aussagen:

- (i) (K1), (K2) und (K3)
- (ii) (K1), (K2) und (K4)

Für eine Menge, die eine der obigen äquivalenten Aussagen erfüllt, gilt, dass für jeden Punkt $x \in |\Delta|$ es genau ein $\sigma \in \Delta$ gibt, sodass $x \in \text{Int}(\sigma)$ gilt.

Beweis:

i) \Rightarrow ii) Sei zunächst (K3) gegeben. Dann betrachte zu zwei verschiedenen Simplexen $\sigma, \tau \in \Delta$ ihren Schnitt. Dieser ist nach Voraussetzung wieder ein Simplex aus Δ . Setze $s := \sigma \cap \tau$ und zeige, dass falls $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau)$ nicht leer ist, die beiden Simplexe übereinstimmen müssen. Sei $x \in \text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) \subset s$. Nun gilt, dass s eine echte Seite von σ oder τ sein muss. Es muss also gelten $s \subset \partial\sigma, \partial\tau$. Nach der vorherigen Wahl von x aus den Inneren, kann dieser Punkt nun nicht im Rand liegen, also muss $\text{Int}(\sigma) \cap \text{Int}(\tau) = \emptyset$ gelten.

ii) \Rightarrow i) Übung.

Sei nun Δ ein geometrischer Komplex und $x \in |\Delta|$, dann existiert offensichtlich ein Simplex σ aus Δ , sodass der Punkt aus diesem Simplex ist. Es kann nun aber auch stets das Innere von einem Simplex aus dem Komplex gewählt werden, denn falls für einen gewählten Simplex σ der Punkt am Rand liegt, muss der Punkt nun auch in einer echten Seite enthalten sein. Für einen endlichen Komplex kann man nun stets einen Simplex finden, sodass der Punkt im Inneren liegt, sonst steige zu einer echten Seite ab. ■

Wir wollen nun auf dem zugrunde liegenden Raum eines Simplicialkomplexes eine Topologie definieren.

Definition 2.6 (schwache Topologie): Sei Δ ein Simplicialkomplex, dann definiere die **schwache Topologie** auf dem Polyeder $|\Delta|$ durch folgende Charakterisierung der abgeschlossenen Mengen.

$$A \subset |\Delta| \text{ abgeschlossen} :\Leftrightarrow A \cap \sigma \text{ abgeschlossen für alle } \sigma \in \Delta$$

Wobei auf der rechten Seite die Menge abgeschlossen bezüglich der Standardtopologie auf dem $\mathbb{R}^{\dim(\Delta)}$ ist.

Lemma 2.7: Für einen geometrischen Komplex Δ ist die schwache Topologie feiner als die Standardtopologie². Falls Δ endlich ist, stimmen Standardtopologie und schwache Topologie auf $|\Delta|$ überein.

Beweis:

Sei $\emptyset \neq |\Delta| \subset \mathbb{R}^N$ und $A \subset |\Delta|$ eine abgeschlossene Menge, so existiert ein $B \subset \mathbb{R}^N$ abgeschlossen, sodass $A = B \cap |\Delta|$ gilt. Nun gilt für jeden Simplex $\sigma \in \Delta$ folgende Gleichheit: $A \cap \sigma = B \cap |\Delta| \cap \sigma = B \cap \sigma$ und somit ist $A \cap \sigma$ abgeschlossen bezüglich σ , also abgeschlossen bezüglich der schwachen Topologie.

Falls nun Δ eine endliche Menge von Simplizes ist, gilt für eine abgeschlossene Menge A bezüglich $|\Delta|$, dass $A \cap \sigma$ abgeschlossen in σ ist, für alle $\sigma \in \Delta$. Durch Vereinigung über die endlichen vielen Simplizes erreichen wir die Abgeschlossenheit bezüglich der Standardtopologie. ■

Bemerkung 2.8: Die schwache Topologie ist im allgemeinen echt feiner als die Unterraumtopologie auf $|\Delta|$ bezüglich dem \mathbb{R}^N . Betrachte hierzu den folgenden Simplicialkomplex, $\Delta := \{\{t\} \mid t \in \mathbb{R}\}$. Hierbei ist das Polyeder gleich zu \mathbb{R} , aber die schwache Topologie entspricht der Diskreten. Für eine Teilmenge von $A \subset \mathbb{R}$ ist der Schnitt $A \cap \{t\}$ mit einem 0-Simplex aus Δ gleich dem Simplex selbst oder die leere Menge, somit stets abgeschlossen, also ist jede Teilmenge abgeschlossen und damit die schwache Topologie auf dem Polyeder der Diskreten und damit ungleich der Standardtopologie auf \mathbb{R} .

Wir betrachten nun stets die schwache Topologie auf dem Polyeder, außer es wird explizit die Unterraumtopologie von dem \mathbb{R}^N auf dem Polyeder verwendet.

Wir beweisen nun einige Aussagen über die schwache Topologie.

Satz 2.9: Sei Δ ein Simplicialkomplex. Dann gelten folgende Aussagen:

(a) Die schwache Topologie ist hausdorffsch.

²Hierbei ist die Standardtopologie, die von $|\Delta| \subset \mathbb{R}^{\dim(\Delta)}$ induzierte Unterraumtopologie gemeint.

- (b) Sei $A \subset |\Delta|$ eine kompakte Teilmenge, dann existiert ein endlicher Unterkomplex Δ' in dessen Polyeder A enthalten ist. Insbesondere ist ein endlicher Komplex kompakt.
- (c) Eine Abbildung $f : |\Delta| \rightarrow X$ ist genau dann stetig, wenn $f|_{\sigma}$ für alle $\sigma \in \Delta$ stetig ist.

Beweis:

- (a) Sei $v \in \Delta^{(0)}$ ein Knoten, dann definiere folgende Abbildung. Nach Lemma 2.5 existiert für jeden Punkt x genau ein Simplex $\sigma \in \Delta$ mit $x \in \text{Int}(\sigma)$. Falls nun x in einem von v aufgespannten Simplex liegt, ist $t_v = t_i$ mit der baryzentrischen Darstellung $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i$ für $v = a_i$ und sonst $t_v = 0$. Die Abbildung t_v ist nun stetig, da die baryzentrischen Koordinaten stetig sind. Für zwei verschiedene Punkte $x_0, x_1 \in |\Delta|$ existiert ein $r \in \mathbb{R}$ mit $t_v(x_0) < r < t_v(x_1)$, denn sonst würde durch die Eindeutigkeit der baryzentrischen Darstellung und der Verschiedenheit der Punkte ein Widerspruch folgen. Wir definieren folgende offene, disjunkte Umgebungen $U_1 := \{x \mid t_v(x) < r\}$ und $U_2 := \{x \mid t_v(x) > r\}$, so sind für je zwei Punkte disjunkte, offene Umgebungen konstruiert und der Raum ist hausdorffsch.
- (b) Sei A eine kompakte Teilmenge des Polyeders $|\Delta|$, die in keinem endlichen Unterkomplex von Δ enthalten ist. Wähle je einen Punkt $x_\sigma \in A \cap \text{Int}(\sigma)$, für alle σ mit nichtleeren Schnitt mit A . Die Menge $\Sigma \subset |\Delta|$ all dieser Punkte ist nicht endlich und besitzt als induzierte Topologie die Diskrete. Denn eine Teilmenge von Σ hat stets endlichen Schnitt mit allen $\sigma \in \Delta$ und ist in der schwachen Topologie stets abgeschlossen, also sind alle Teilmengen abgeschlossen und die Menge Σ somit diskret. Es ergibt sich nun ein Widerspruch dadurch, dass eine kompakte und nicht endliche Menge stets einen Häufungspunkt besitzt, die diskrete Menge Σ aber keinen Häufungspunkt besitzen kann. Somit muss die Menge A in einem endlichen Unterkomplex enthalten sein. Es folgt nun unmittelbar, dass ein endlicher Komplex als endliche Vereinigung der kompakten Komplexe wiederum kompakt ist.
- (c) „ \Rightarrow “ Falls die Abbildung bezüglich $|\Delta|$ stetig ist, dann auch die Restriktion auf einem Unterraum $\sigma \subset |\Delta|$.
- „ \Leftarrow “ Sei $U \subset X$ offen. Dann ist $f^{-1}(U) \cap \sigma$ für alle $\sigma \in \Delta$ nach Voraussetzung wieder offen. Dann gilt aber, dass

$$\begin{aligned} f^{-1}(U) &= f^{-1}(U) \cap |\Delta| \\ &= f^{-1}(U) \cap \bigcup \{\sigma \mid \sigma \in \Delta\} \\ &= \bigcup \{f^{-1}(U) \cap \sigma \mid \sigma \in \Delta\} \end{aligned}$$

Somit ist $f^{-1}(U)$ als Vereinigung offener Mengen wieder offen. ■

Definition 2.10 (Simpliziale Abbildung): Seien zwei Simplicialkomplexe Δ, Δ' gegeben, dann heißt eine Abbildung $f : \Delta^{(0)} \rightarrow \Delta'^{(0)}$ zwischen den Eckmengen eine **Simpliziale Abbildung**, falls für jeden Simplex $a_0 \dots a_n$ aus Δ die Ecken auf einen Simplex $f(a_0) \dots f(a_n)$ aus Δ' abgebildet werden. Man schreibt dann $f : \Delta \rightarrow \Delta'$.

Satz 2.11: Seien Δ, Δ' zwei Simplicialkomplexe und $f : \Delta \rightarrow \Delta'$ eine simpliciale Abbildung. Dann gelten folgende Aussagen

- (a) $f(\Delta)$ ist ein Unterkomplex und das Urbild eines Unterkomplexes ist wieder ein Unterkomplex.
- (b) Es gibt eine stetige Abbildung $|f| : |\Delta| \rightarrow |\Delta'|$ die durch f induziert wird und folgende Bedingung erfüllt:

$$x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \Rightarrow |f|(x) = \sum_{i=0}^n t_i f(a_i)$$

Wobei $x \in |\Delta|$ mit der baryzentrischen Darstellung gegeben ist und die a_i die Eckenmenge von dem Simplex ist aus dem x ist. Man nennt $|f|$ die induzierte simpliciale Abbildung von f .

- (c) Die Verkettung von induzierten simplicialen Abbildung ist wieder eine induzierte simpliciale Abbildung.
- (d) Falls f eine bijektive simpliciale Abbildung ist, deren Umkehrfunktion wiederum simplicial ist, dann ist die induzierte Abbildung $|f|$ ein Homöomorphismus. Wir nennen dann $|f|$ oder auch f einen simplicialen Homöomorphismus, bzw. Isomorphismus.
- (e) Sei Δ ein endlicher simplicialer Komplex. Dann existiert eine natürliche Zahl N , sodass Δ isomorph zu einem Unterkomplex von Δ^N ist.

Beweis:

- (a) Wir prüfen die Axiome (K1) – (K3) nach. (K1) ist klar als Bild der leeren Menge. Sei $\sigma \in f(\Delta)$. Dann existiert $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \Delta^{(0)}$, sodass $\sigma = f(a_0) \dots f(a_n)$. Nun wird jede Seite von σ durch eine Teilmenge von $\{a_1, \dots, a_n\}$ aufgespannt und ist aufgrund der Eigenschaft der simplicialen Abbildung wiederum aus $f(\Delta)$.

Für das Urbild eines Unterkomplexes ist nur (K4) zu zeigen. Dies folgt aber unmittelbar daraus, dass der Urbildoperator f^{-1} mit Int, Vereinigungen und Schnitten von Mengen vertauscht.

- (b) Die Eindeutigkeit solch einer Abbildung ist klar, da sie linear auf den Punkten a_i vorgegeben ist.

Die Abbildung ist zudem wohldefiniert, da die Koeffizienten von $|f|(x)$ wieder in $[0, 1]$ liegen und als Summe die 1 ergeben. Zudem liegt der Punkt $|f|(x)$ in $|\Delta'|$, denn die simpliciale Abbildung f bildet Simplexe auf Simplexe ab.

Die Abbildung ist stetig eingeschränkt auf jedem Simplex. Nun nach Satz 2.9 c) ist die Abbildung auch auf dem Polyeder stetig.

- (c) Wir betrachten die Abbildungen $f : \Delta \rightarrow \Delta', g : \Delta' \rightarrow \Delta''$. Dann ist die Verkettung $|g| \circ |f|$ für den Punkt $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \sigma \in |\Delta|$, mit $\sigma = a_0 \dots a_n$ ein Simplex gegeben durch ein geometrisch unabhängiges System:

$$(|g| \circ |f|)(x) = |g| \left(\sum_{i=0}^n t_i f(a_i) \right) = \sum_{i=0}^n t_i g(f(a_i))$$

Die Verkettung ist also wieder eine simpliziale Abbildung, diese wird von $g \circ f$ induziert.

- (d) Die induzierten Abbildungen $|f|, |f^{-1}|$ sind stetig nach (b). Es ist nur zu zeigen, dass diese zueinander inverse Abbildungen sind. Dies sieht man sofort aufgrund der Linearität ein bzw. für einen Punkt $x = \sum_{i=0}^n t_i a_i \in \sigma \subset |\Delta|$, mit $\sigma = a_0 \dots a_n$:

$$(|f^{-1}| \circ |f|)(x) = |f^{-1}| \left(\sum_{i=0}^n t_i f(a_i) \right) = \sum_{i=0}^n t_i f^{-1}(f(a_i)) = x$$

Ebenso die andere Richtung.

- (e) Da der Komplex Δ endlich ist, besteht die Eckmenge $\Delta^{(0)} = \{a_0, \dots, a_n\}$ aus $n+1$ unterschiedlichen Punkten, die nicht geometrisch unabhängig sein müssen. Sei nun zudem der Standardkomplex Δ^n mit $n+1$ geometrisch unabhängigen Punkten $\{b_0, \dots, b_n\}$ als Eckmenge dieses Komplexes gegeben.

Betrachte nun zu den gegebenen Daten die folgende simpliziale Abbildung $f : \Delta \rightarrow \Delta^n, a_i \mapsto b_i$. Die Abbildung f

ist nach Konstruktion injektiv (also bijektiv, wegen den endlichen Mengen) und simplizial, falls man nun den Bildbereich noch auf den Komplex $f(\Delta)$ einschränkt, wird die Umkehrabbildung simplizial und nach (d) ein Isomorphismus.

■

Bemerkung 2.12: Nach Satz 2.11 e) ist Δ^n das essentielle Beispiel für geometrische Komplexe, denn jeder endliche Komplex ist als ein isomorpher Unterkomplex in Δ^n enthalten.

3 Abstrakte Simplicialkomplexe

Für topologische Anwendungen ist der \mathbb{R}^N in vielen Fällen zu konkret und unnötiger gedanklicher Ballast. Deshalb sollte man die Simplicialkomplexe unabhängig vom euklidischen Raum definieren. Diese abstrakten Simplicialkomplexe werden in diesem Abschnitt behandelt. Die zunächst stark erscheinende Vereinfachung stellt sich als eine äquivalente Darstellung zu den geometrischen Komplexen heraus.

Definition 3.1: Eine nicht leere Menge Δ heißt **abstrakter Simplicialkomplex** oder auch nur abstrakter Komplex, falls mit jedem Element aus Δ auch jede Teilmenge aus diesem Element in Δ enthalten ist und jedes Element eine endliche Menge ist. Oder in Formeln geschrieben

$$\begin{aligned} \sigma \in \Delta \text{ und } \tau \subset \sigma &\Rightarrow \tau \in \Delta. \\ \forall \sigma \in \Delta : \sigma &\text{ ist endliche Menge.} \end{aligned} \quad (\bullet)$$

Für einen abstrakten Komplex werden folgende Begriffe benötigt:

- (A1) Ein Element des Komplexes heißt **Simplex**. Die Teilmenge aller Simplexe der Mächtigkeit kleiner gleich k heißt das k -**Skelett**, insbesondere für $k = 1$ ist dies die **Knotenmenge**.
- (A2) Die **Dimension** des Komplexes ist das Supremum über die Mächtigkeit der Seiten von Δ . Für den leeren Komplex \emptyset ist die Dimension -1 .
- (A3) Eine Teilmenge vom Komplex, die (\bullet) erfüllt, heißt **Unterkomplex**.
- (A4) Eine Abbildung zwischen den Knotenmengen zweier abstrakten Komplexe heißt **simpliciale Abbildung**, falls Seiten auf Seiten abgebildet werden.
- (A5) Zwei abstrakte Komplexe heißen **isomorph**, falls es eine bijektive simpliciale Abbildung gibt, deren Inverses auch simplicial ist.
- (A6) Sei Δ ein geometrischer Komplex, so bezeichnet die Menge

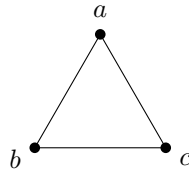
$$V(\Delta) := \{ \{a_0 \dots a_n\} \subset \Delta^{(0)} \mid a_0 \dots a_n \in \Delta \}$$

das **Knotenschema** von Δ .

- (A7) Ist ein abstrakter Komplex Δ isomorph zum Knotenschema eines geometrischen Komplexes Δ' , so nennen wir Δ' eine **geometrische Realisierung** von Δ .

Beispiel 3.2: • Für einen geometrischen Komplex σ ist die Menge aller Knotenschemata zu jeder Seite von σ ein abstrakter Simplicialkomplex und das Knotenschema wird auf triviale Art und Weise geometrisch durch σ realisiert.

- Die Menge $\Delta = \{ \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset \}$ ist ein abstrakter Komplex und seine geometrische Realisierung sieht wie folgt aus.



- Betrachte die Menge $\{ \{i, i+1\}, \{i\} \mid i \in \mathbb{Z} \} \cup \{ \emptyset \}$, dann ist der Polyeder zu einer geometrischen Realisierung homöomorph zu \mathbb{R} .

- Für eine Menge M , deren Elemente endliche Mengen sind, lässt sich stets ein abstrakter Komplex bilden, indem man alle Teilmengen der Elemente hinzu nimmt. Wir schreiben dies als $P^*(M)$.
- Die Von-Neumann-Zahlen liefern als Menge einen nicht endlichen abstrakten Komplex. Diese Menge erhält man wie folgt. Definiere rekursiv $V_0 := \emptyset$ und $V_{n+1} := \{V_n\} \cup V_n$, dann ist $V := \bigcup_{n \geq 0} V_n$ ein nicht endlicher Komplex. Um einzusehen dass die Menge wirklich einen abstrakten Komplex bildet sind nur die Regeln (•) nachzuweisen. Die unendliche Dimension ergibt sich daraus, dass man zu jeder natürlichen Zahl ein Element aus Komplex findet, das diese Dimension besitzt.
- Ein ungerichteter Graph $G = (V, K)$ mit V die Eckmenge und K die Kanten ist ein abstrakter Simplicialkomplex.
- Das Knotenschema von einem geometrischen Komplex ist ein abstrakter Komplex.

Der folgende Satz hat als Aussage, dass das letzte Beispiel das Entscheidende ist. Der Zusammenhang zwischen geometrischen und abstrakten Komplexen ergibt sich aus dem folgenden Satz.

Satz 3.3: Es gelten folgende Aussagen:

- (1) Für jeden abstrakten Komplex existiert ein geometrischer Komplex, dessen Knotenschema (abstrakt) isomorph zu diesem Komplex ist.
- (2) Zwei geometrische Komplexe sind (linear) isomorph, genau dann wenn die dazugehörigen Knotenschemata (abstrakt) isomorph sind.

Beweis:

- (1) Nach Satz 2.11 (e) existiert für einen endlichen geometrischen Komplex stets ein Standardkomplex Δ^n , sodass dieser als ein isomorpher Teilkomplex darin enthalten ist. Verallgemeinere nun diesen Standardkomplex auf einen unendlich dimensional im Raum E^J . Hierzu wird Δ^J von all den Einheitsvektoren im E^J aufgespannt. Dies bildet wiederum einen geometrischen Komplex.

Sei nun ein abstrakter Komplex Δ und seine Knotenmenge $\Delta^{(0)}$ gegeben, dann betrachte die Einbettung $f : \Delta^{(0)} \rightarrow J$. Es ist nun klar, dass die Simplexe, die von den Einheitsvektoren e_j aus dem Bild von f aufgespannt werden, einen geometrischen Komplex bilden, der nach Konstruktion ein Knotenschema besitzt, das isomorph zu Δ ist.

- (2) Seien zwei geometrischen Komplexe Δ, Δ' mit ihren Knotenschemata $V(\Delta), V(\Delta')$ gegeben. Falls nun ein Isomorphismus zwischen Δ, Δ' existiert dann erfüllt er eingeschränkt auf die Knotenmenge genau die Eigenschaft der abstrakten simplizialen Abbildung zwischen den Knotenschemata als abstrakte Komplexe und somit entsprechen sich diese Isomorphismen gegenseitig.

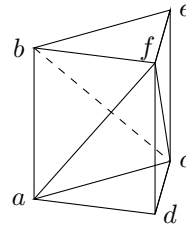
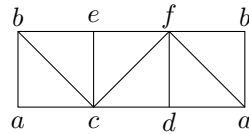
■

Beispiel 3.4 (Triangulierung): Es werden nun Triangulierungen für Sphäre, Zylinder und Torus angegeben durch abstrakte Komplexe, deren Geometrische Realisierungen eine Triangulierung der entsprechenden Flächen im \mathbb{R}^3 sind.

Zylinder: Wir betrachten die Menge

$$\Delta := \{\{a, b, c\}, \{b, c, e\}, \{c, e, f\}, \{c, d, f\}, \{a, d, f\}, \{a, b, f\}\}$$

Dann ist $P^*(\Delta)$ ein abstrakter Komplex. Durch identifizieren der Punkte gleichen Labels wird durch zusammenfalten im dreidimensionalen daraus eine Fläche, die homöomorph zur Zylinderoberfläche ist. Dies sieht man unmittelbar ein, indem man zunächst annimmt, dass die Kante $\{a, b\}$ parallel zur z -Achse im \mathbb{R}^3 ist und dann eine Normierungsabbildung in der $x-y$ -Ebene als Abbildung verwendet.

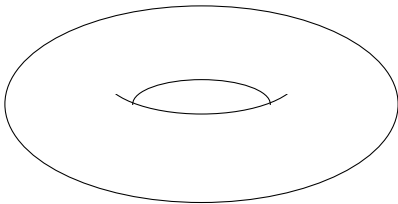


Torus: Zur Triangulierung des Torus ($S^1 \times S^1$) ist ein wesentlich komplizierterer abstrakter Komplex vonnöten.

Betrachte hierzu die Menge

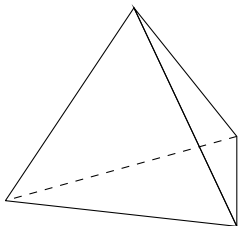
$$\begin{aligned} \Delta := & \{\{a, c, i\}, \{a, d, i\}, \\ & \{b, c, f\}, \{c, f, i\}, \{a, b, d\}, \{b, d, f\}, \\ & \{d, h, i\}, \{d, e, h\}, \{i, g, h\}, \{i, g, f\}, \\ & \{d, e, f\}, \{e, f, g\}, \{a, c, e\}, \{c, e, h\}, \\ & \{b, c, h\}, \{b, g, h\}, \{a, b, g\}, \{a, e, g\}\} \end{aligned}$$

Dann ist $P^*(\Delta)$ ein abstrakter Komplex.



Sphäre: Betrachte den Komplex

und alle Teilmengen der Elemente oder kürzer geschrieben durch $P(\{a, b, c, d\}) \setminus \{a, b, c, d\}$. Dann ist hierdurch eine Triangulierung der S^2 gegeben.



22

Literatur

- [1] A. Björner, G.M. Ziegler und J. Matousek. *Using the Borsuk-Ulam Theorem: Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry*. Universitext. Springer Berlin Heidelberg, 2008.
- [2] Michael Eisermann. *Grundlagen der Topologie*. Skript. URL: <https://www.igt.uni-stuttgart.de/eiserm>.
- [3] G. Laures und M. Szymik. *Grundkurs Topologie*. Spektrum Akademischer Verlag, 2009.
- [4] J.R. Munkres. *Elements of Algebraic Topology*. Advanced book classics. Perseus Books, 1984.
- [5] Jie Wu. *Lecture Notes on MA5209 Algebraic Topology-2008/2009 Semester 1*. Skript. URL: <https://www.math.nus.edu.sg/~matwujie>.
- [6] Prof. Günter M. Ziegler. *Topologie*. Institut für Mathematik, MA 6-2 TU Berlin, 10623 Berlin. URL: <http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS05/Topologie/>.