

Lineer Regresyon : Normal Denklem

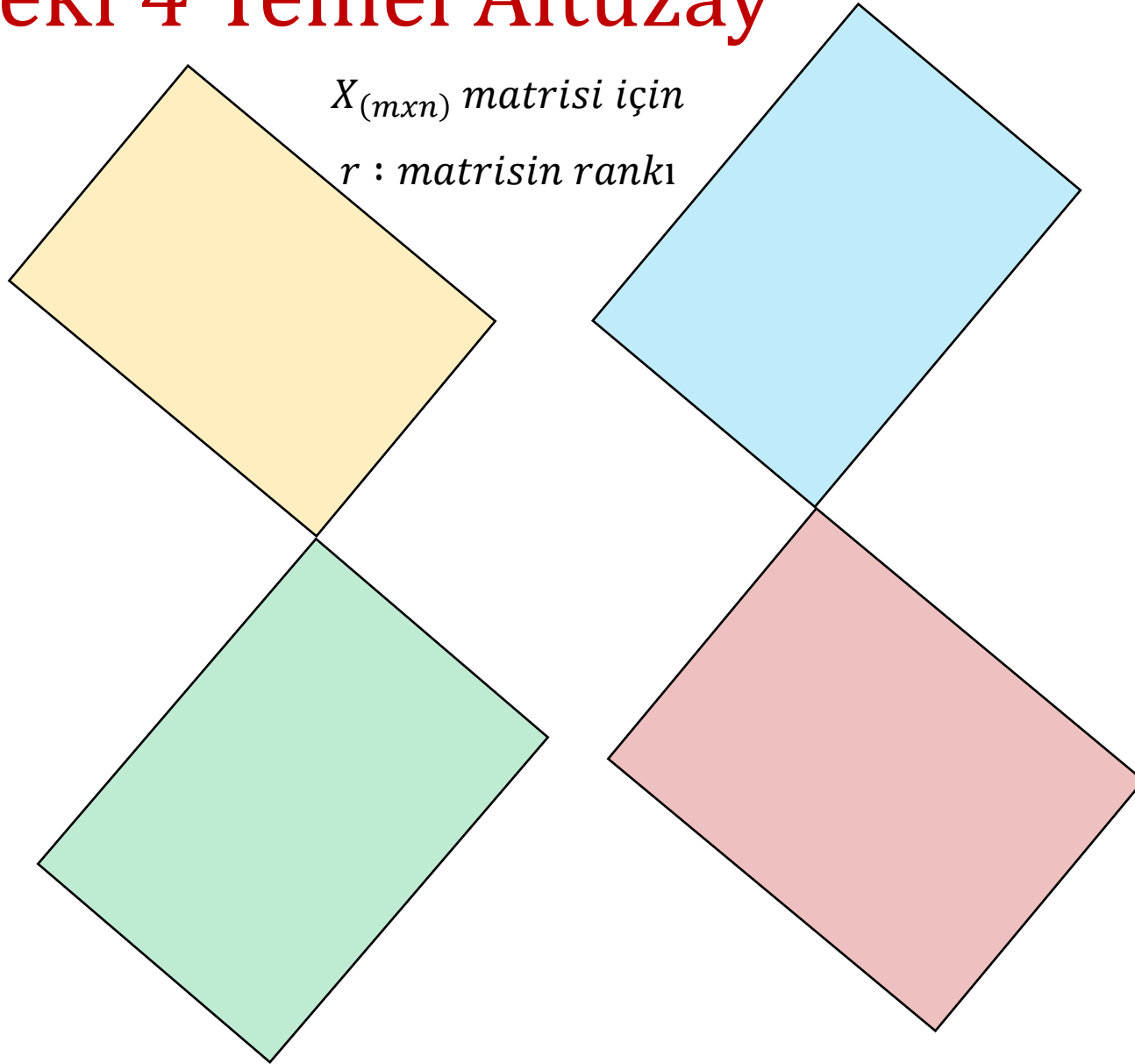
Lineer Cebirdeki 4 Temel Altuzay

$X_{(m \times n)}$ matrisi için

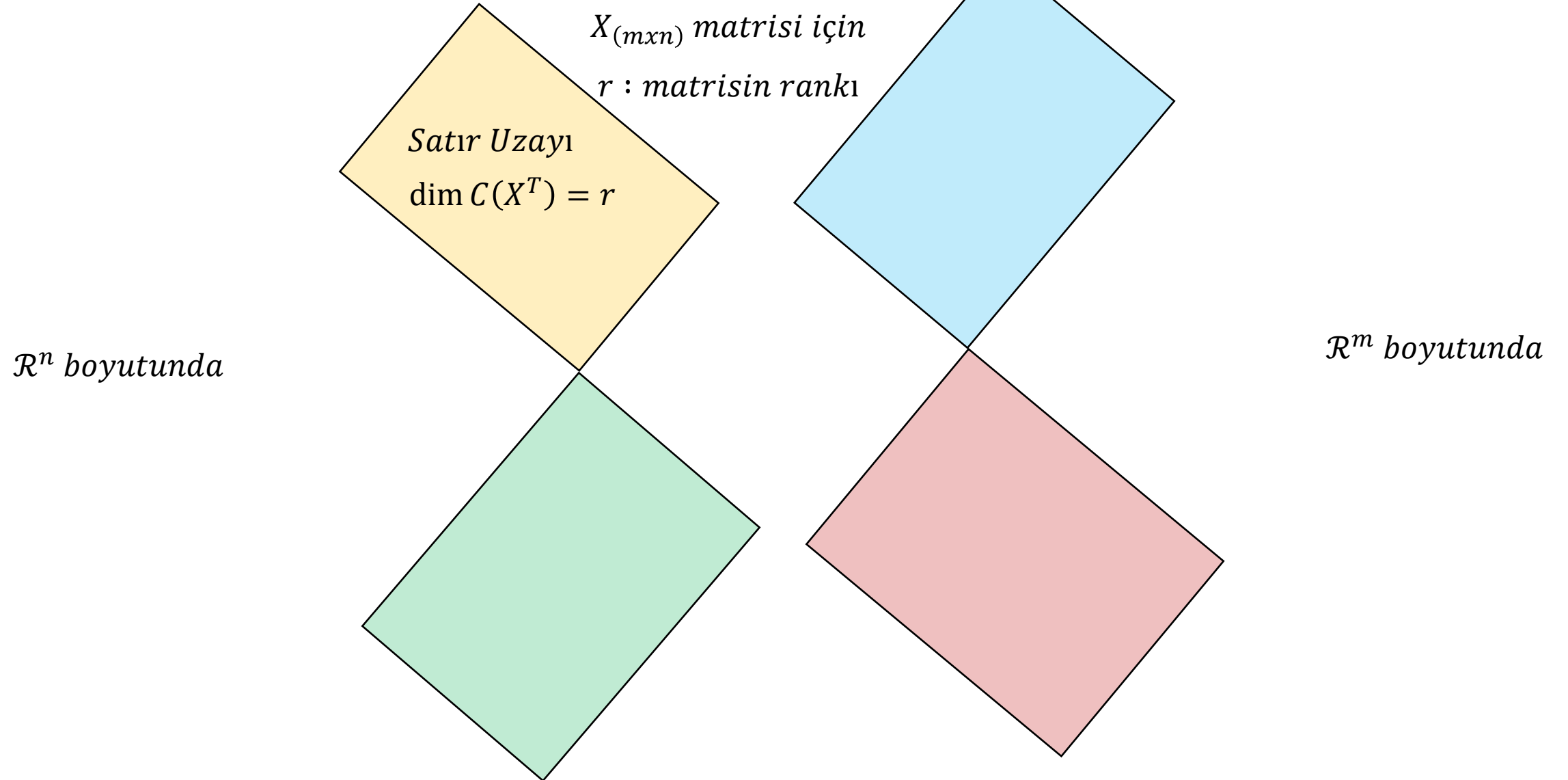
r : matrisin rankı

\mathcal{R}^n boyutunda

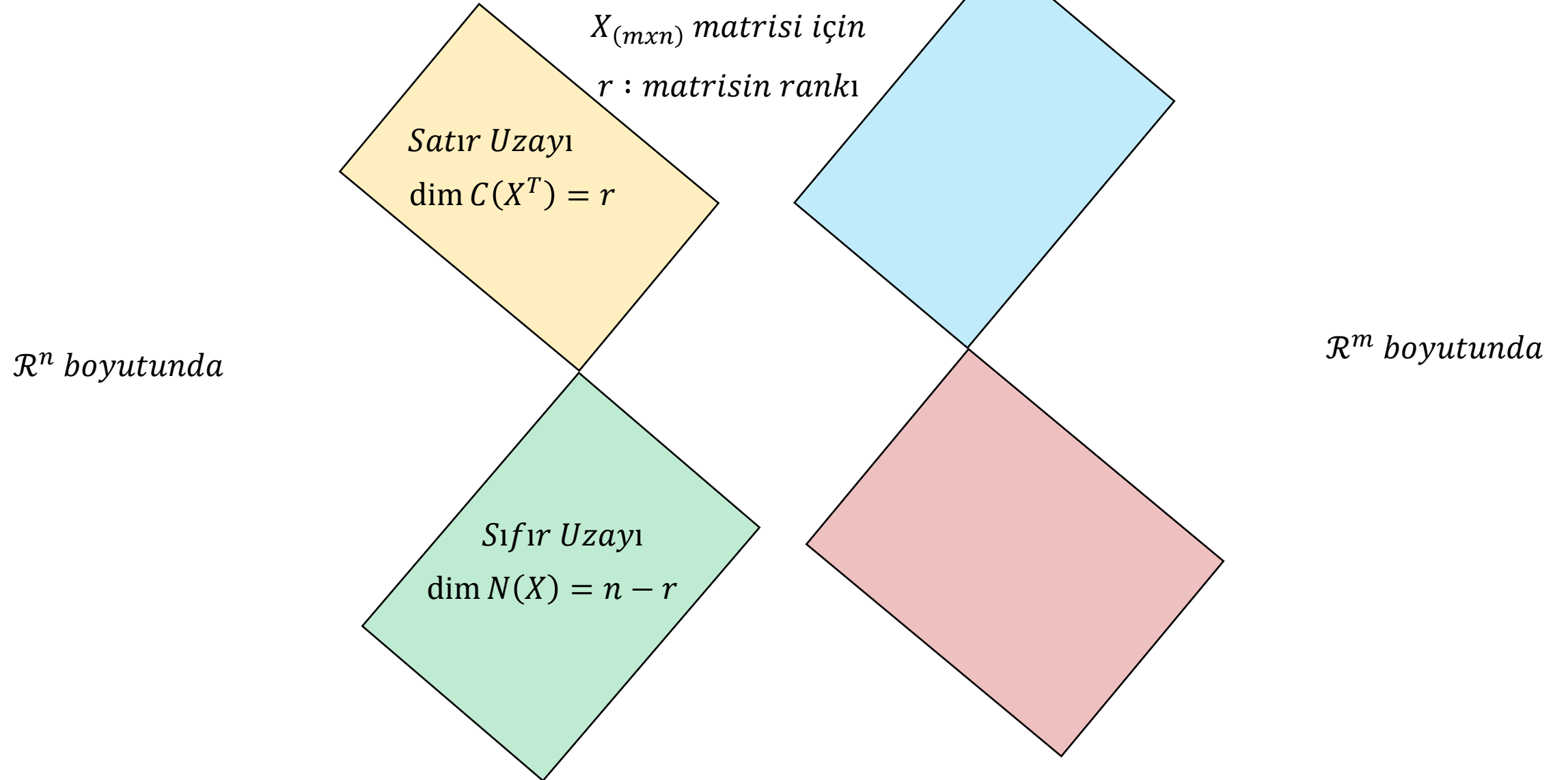
\mathcal{R}^m boyutunda



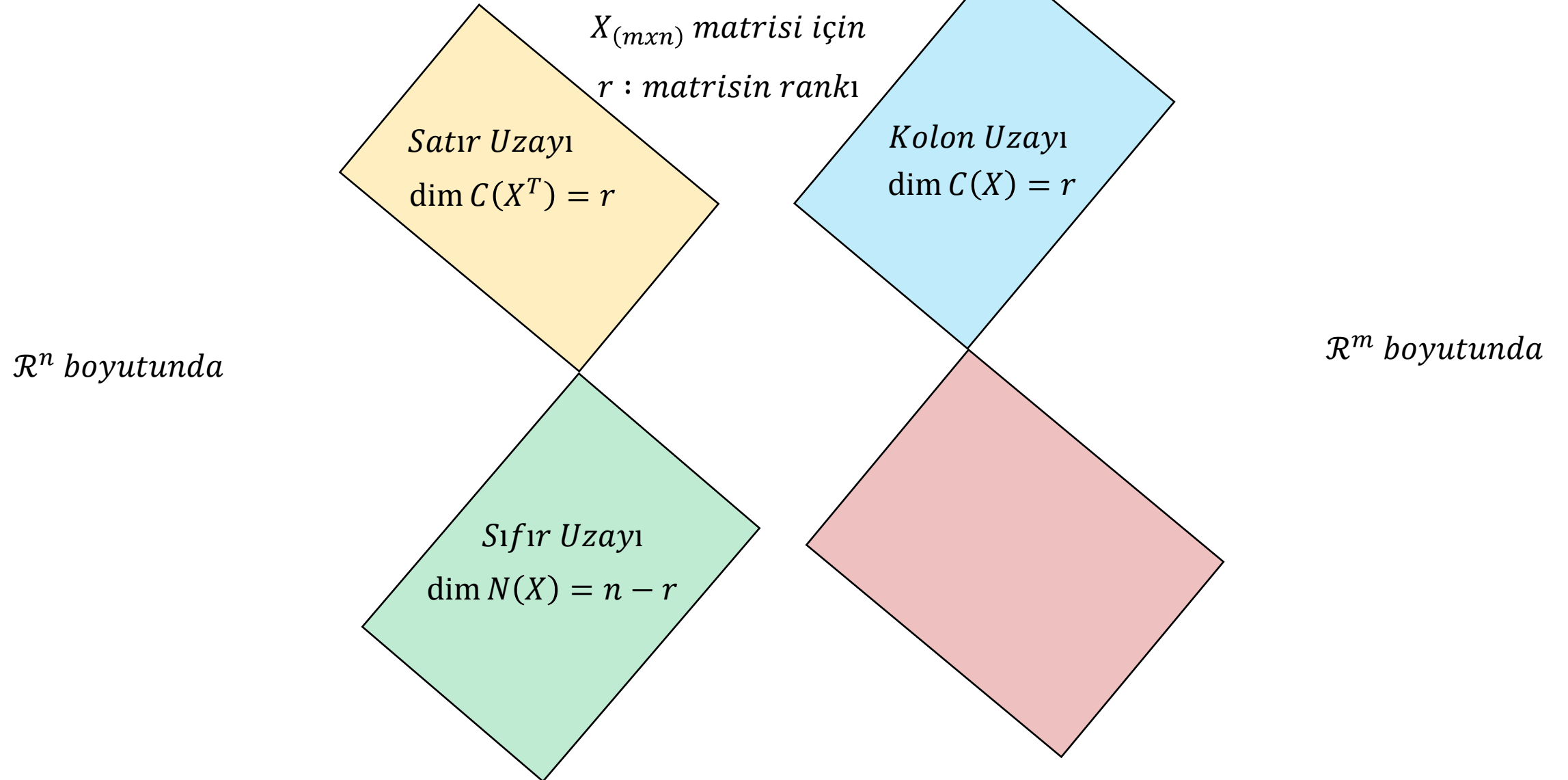
Lineer Cebirdeki 4 Temel Altuzay



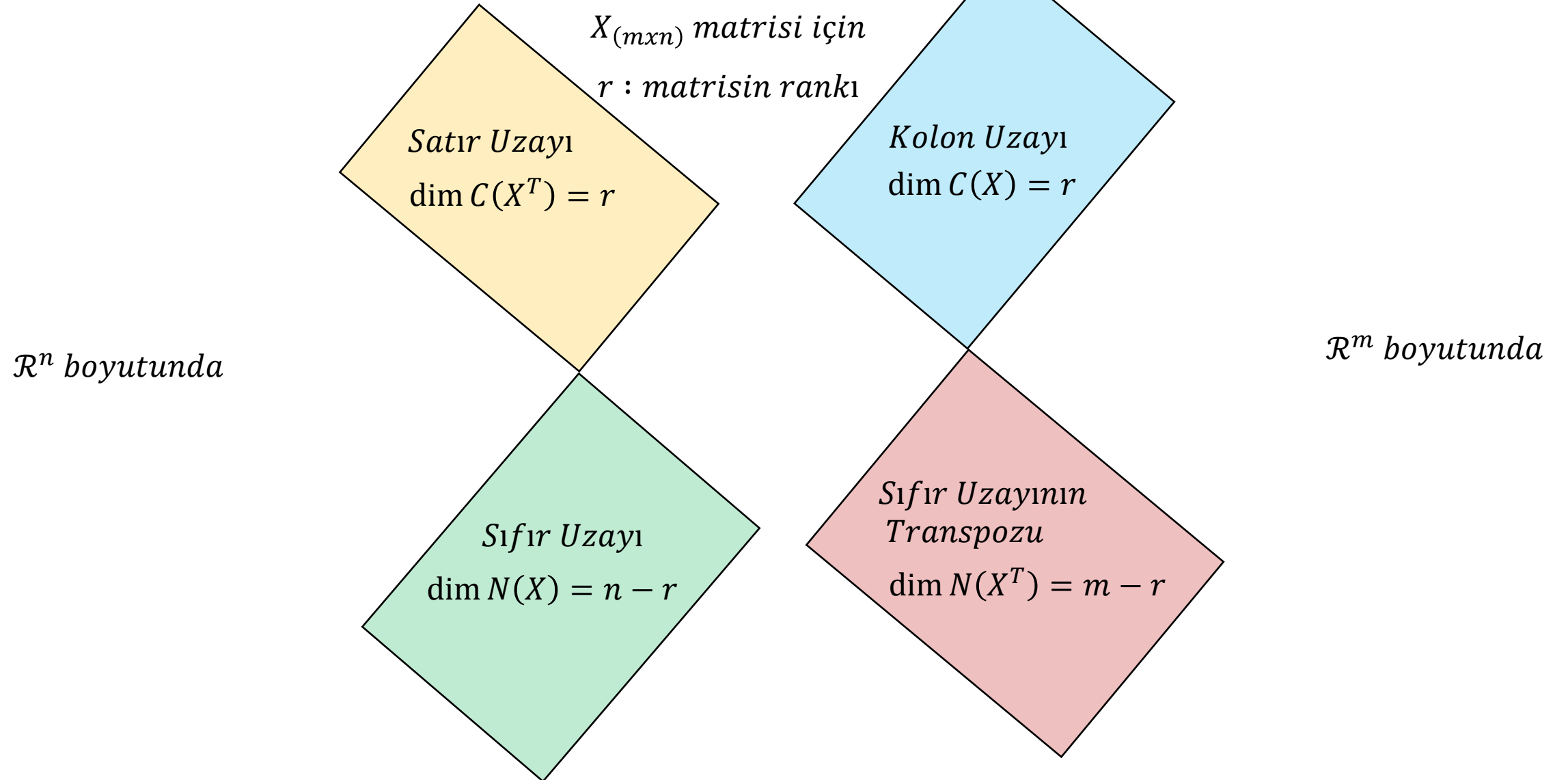
Lineer Cebirdeki 4 Temel Altuzay



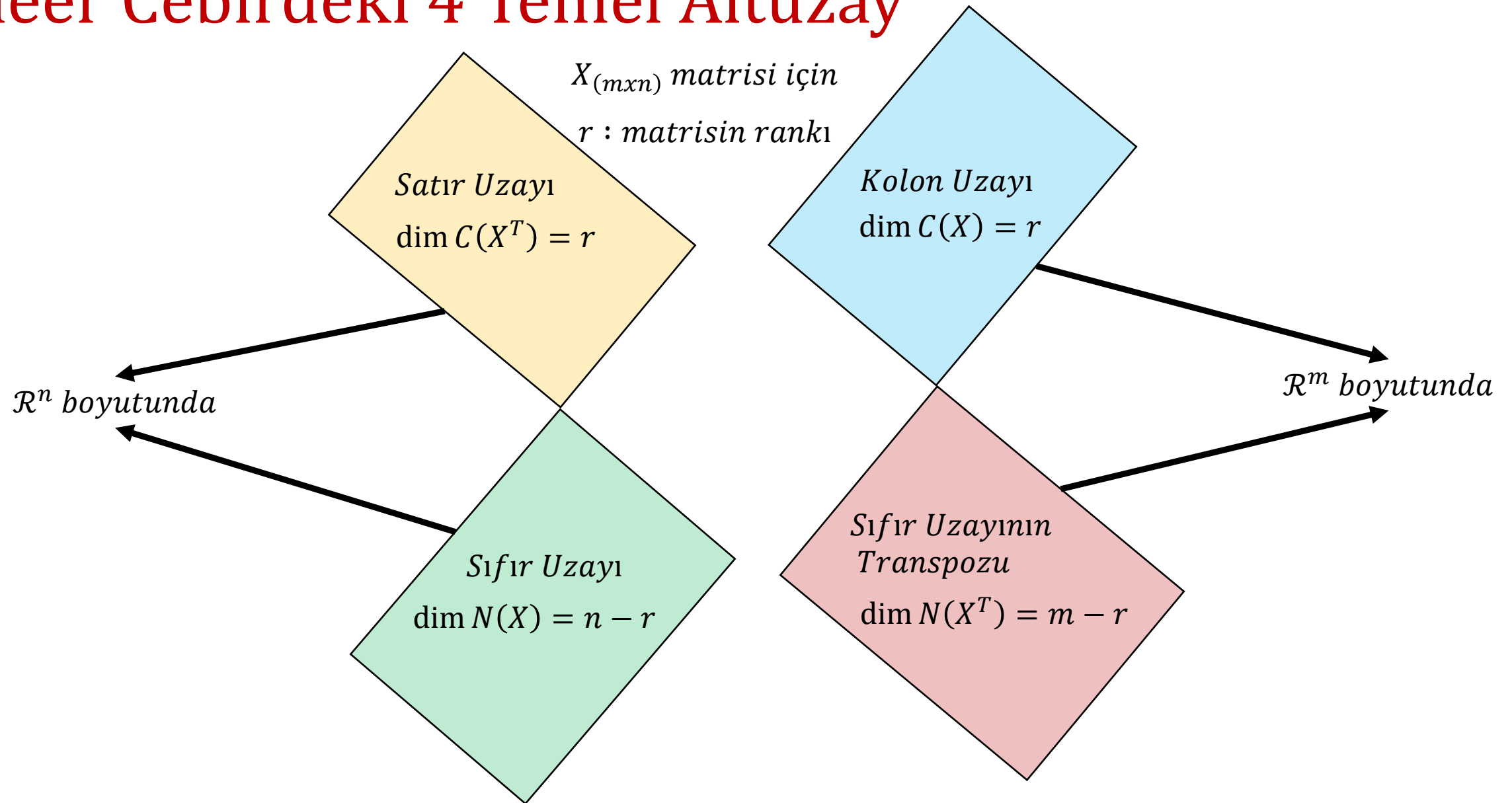
Lineer Cebirdeki 4 Temel Altuzay



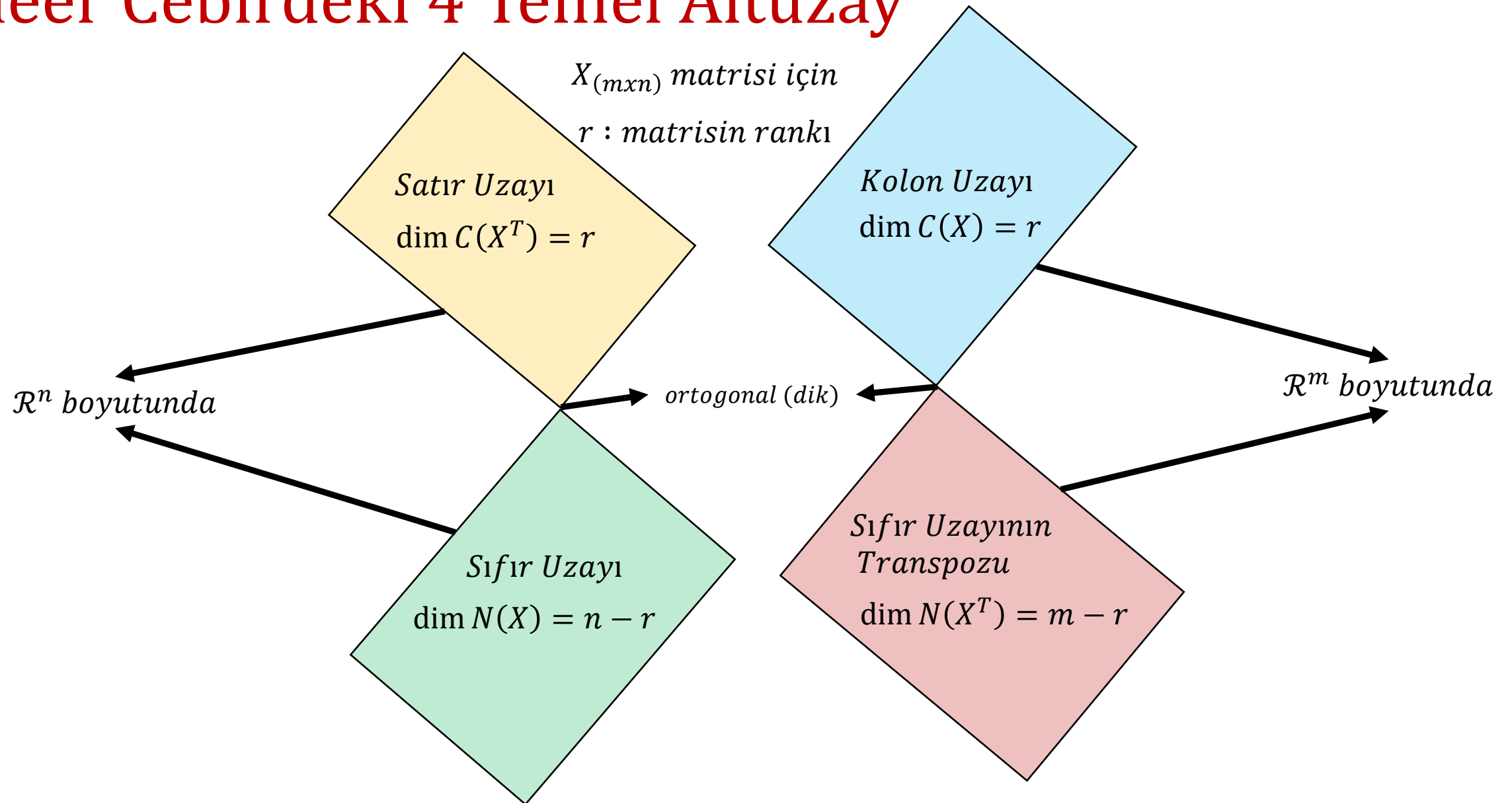
Lineer Cebirdeki 4 Temel Altuzay



Lineer Cebirdeki 4 Temel Altuzay



Lineer Cebirdeki 4 Temel Altuzay



Kolon Uzayı (Column Space)

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + w_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Sıfır Uzayı (Null Space)

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ & & \ddots & \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = w_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{m1} \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + w_n \begin{bmatrix} x_{1n} \\ x_{2n} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Satır Uzayı (Row Space)

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

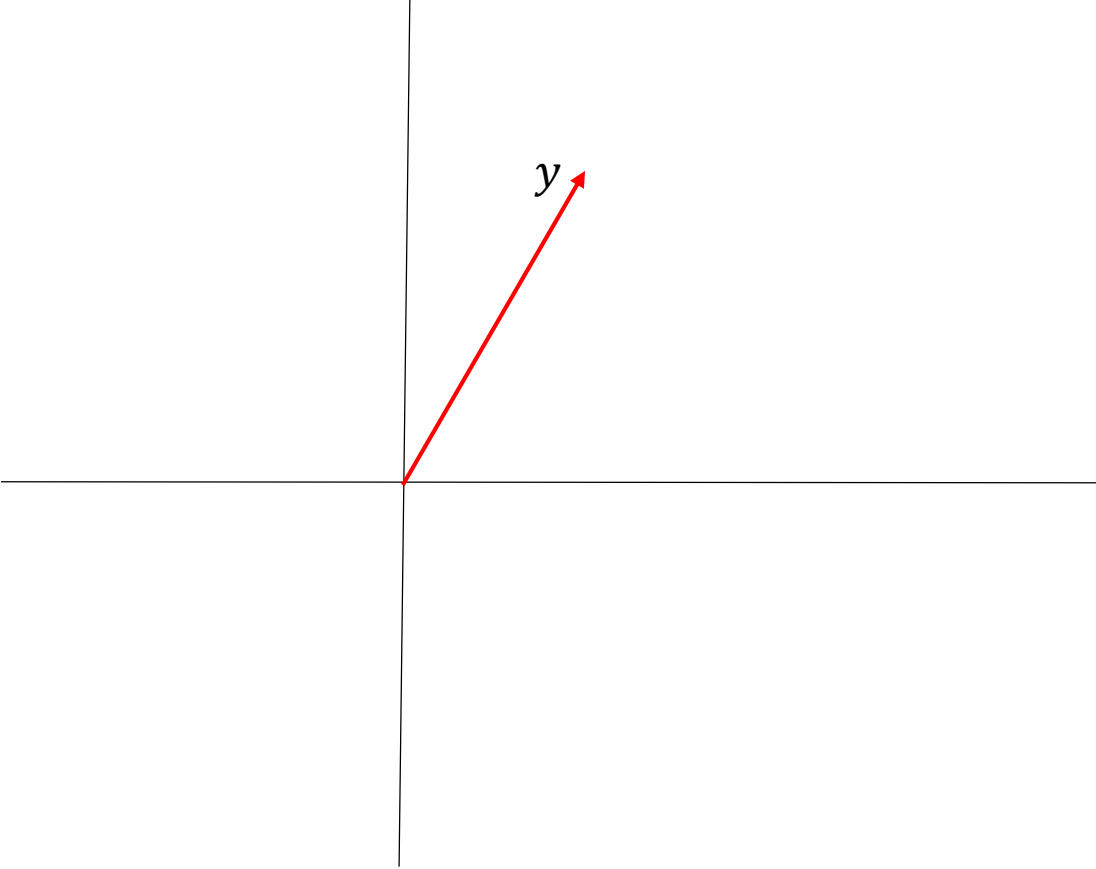
$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = w_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + w_m \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

X Transpozun Sıfır Uzayı

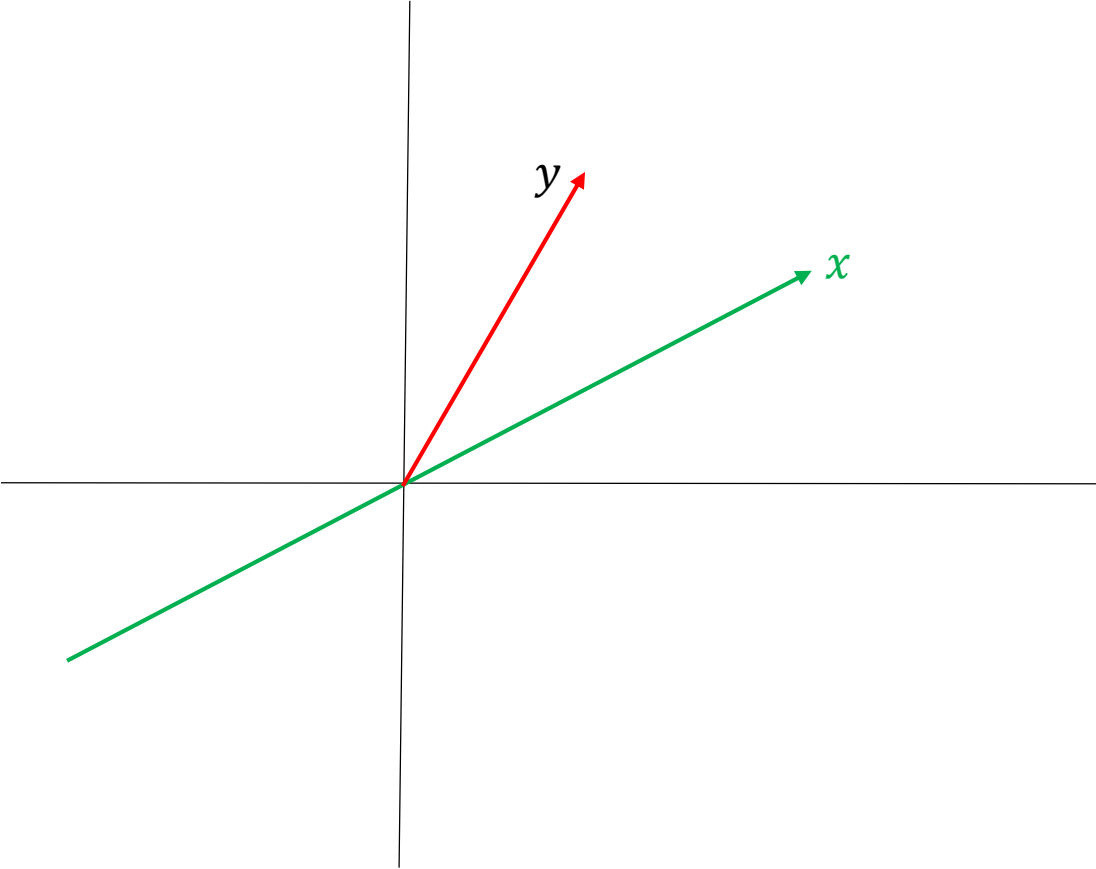
$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}_{n \times m}^T \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix}_{m \times 1} = w_1 \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix} + w_2 \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix} + \cdots + w_m \begin{bmatrix} x_{m1} \\ x_{m2} \\ \vdots \\ x_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

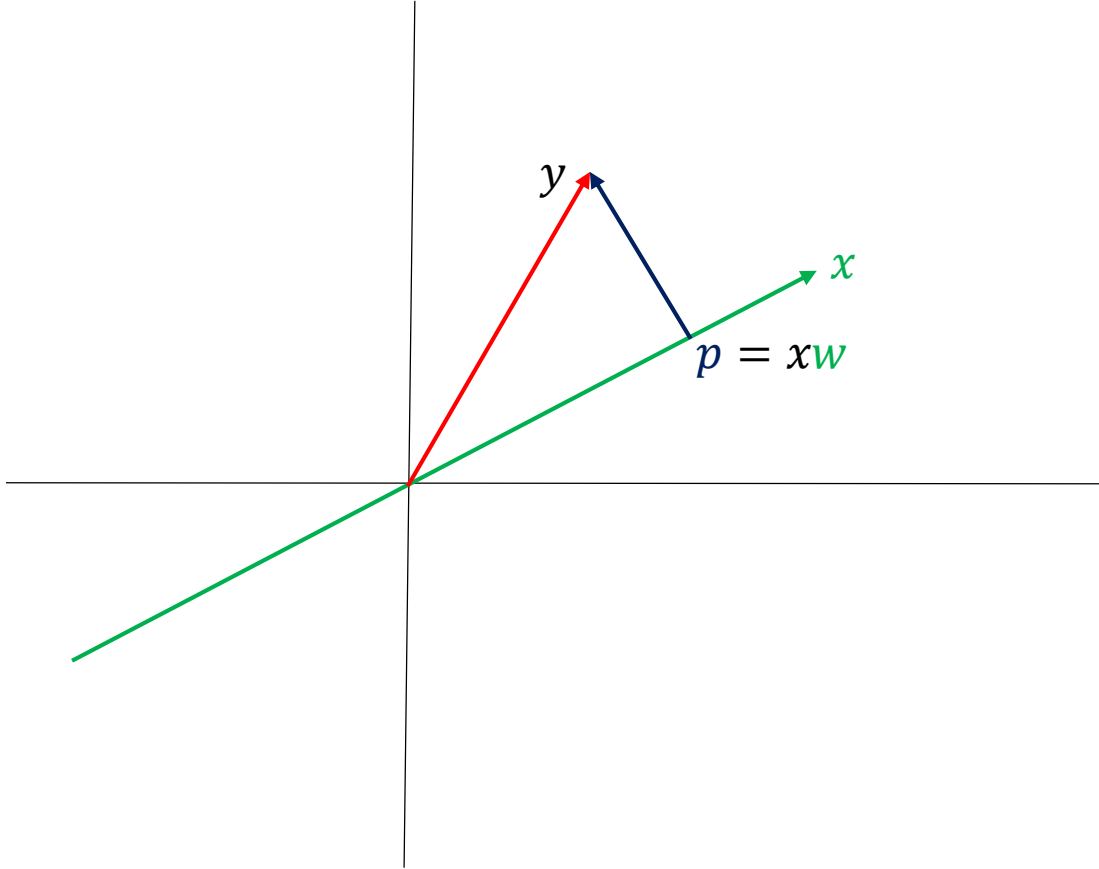
Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



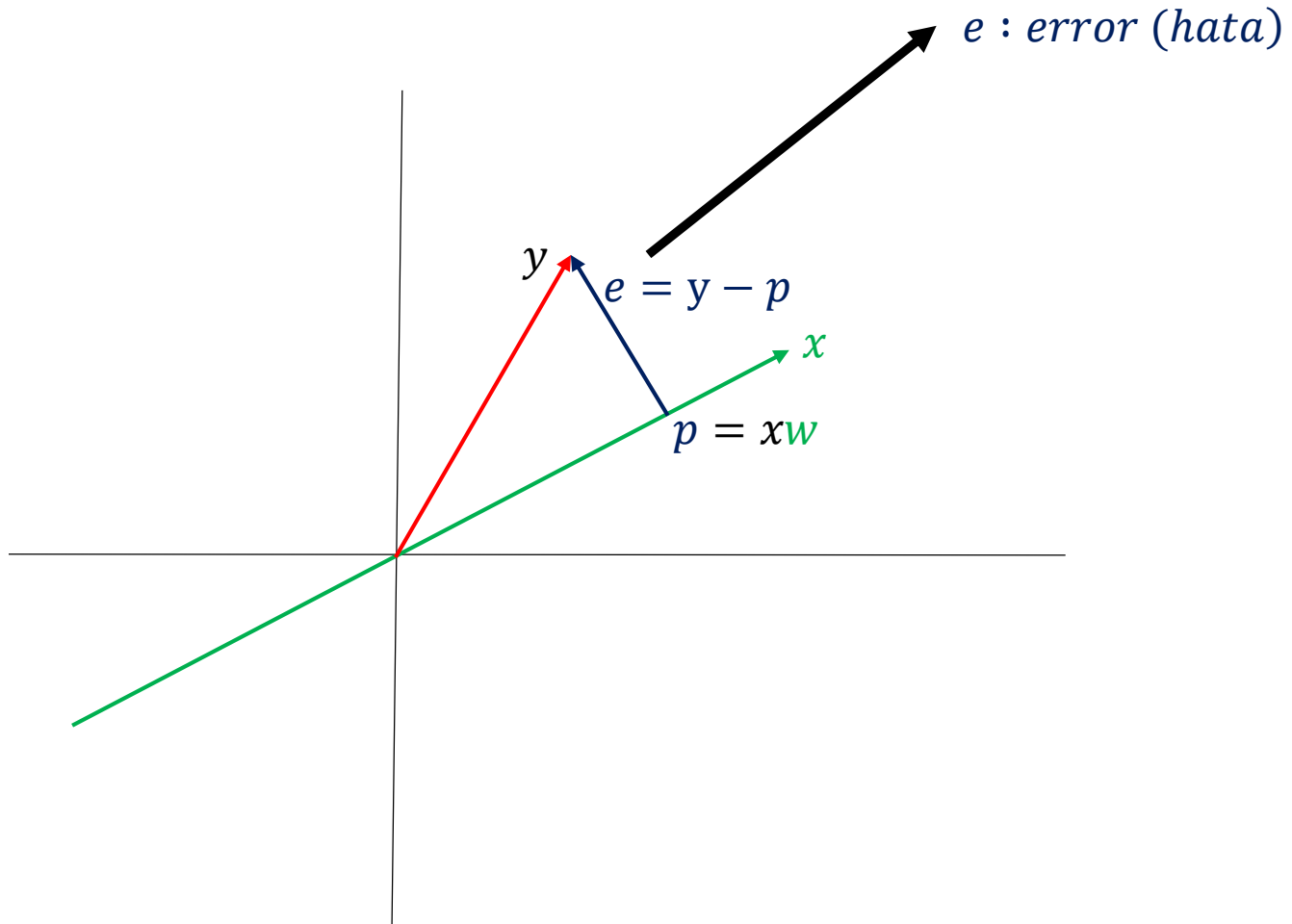
Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



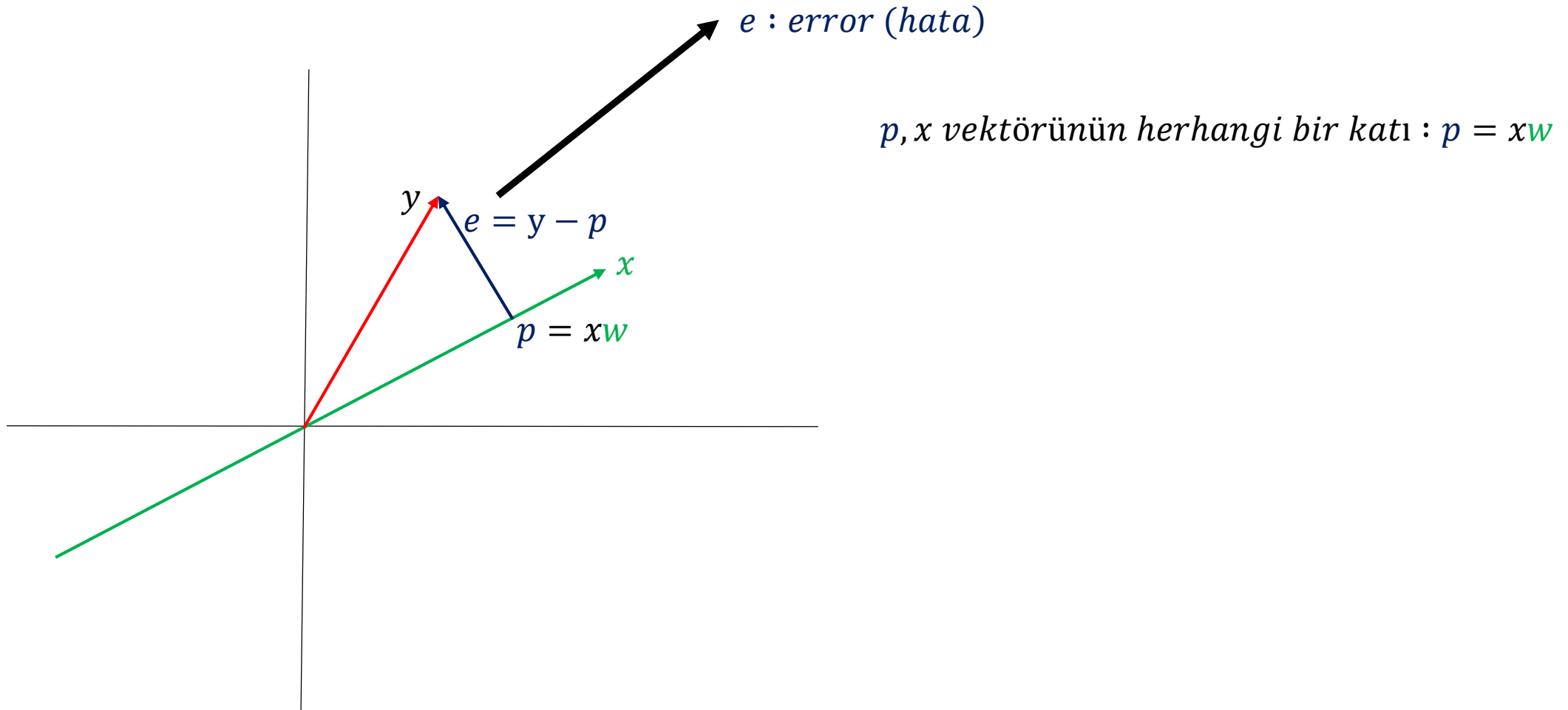
Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



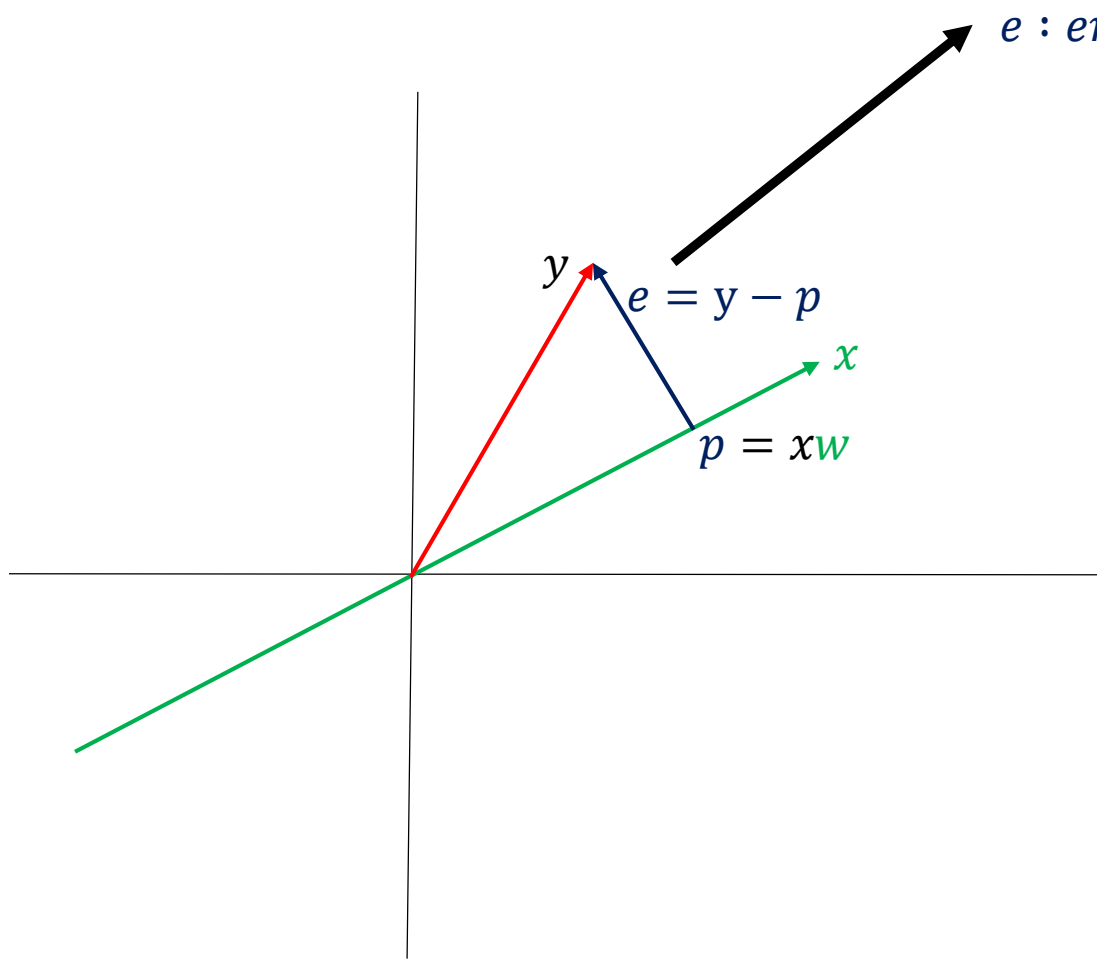
Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi

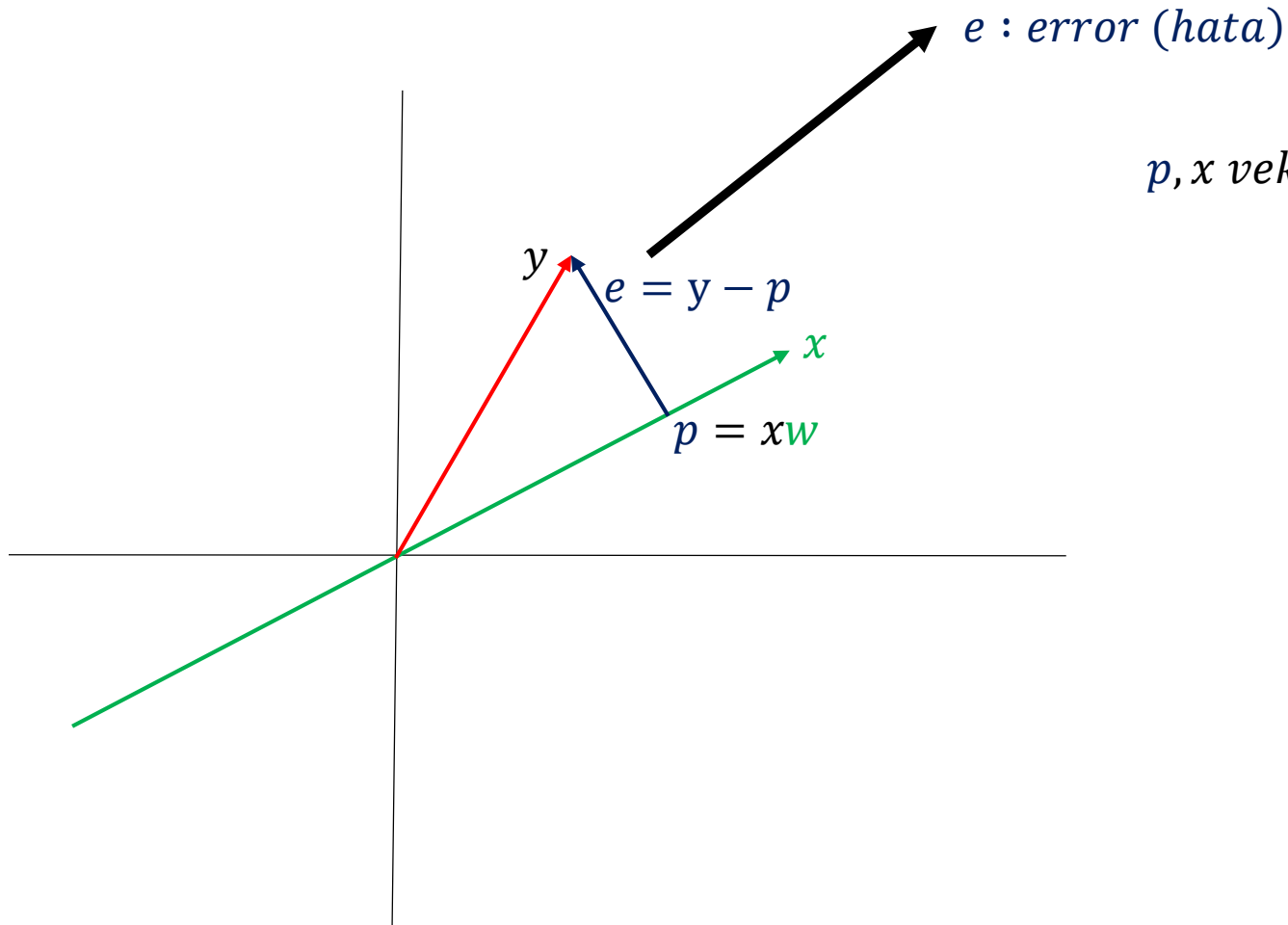


e : error (hata)

p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi

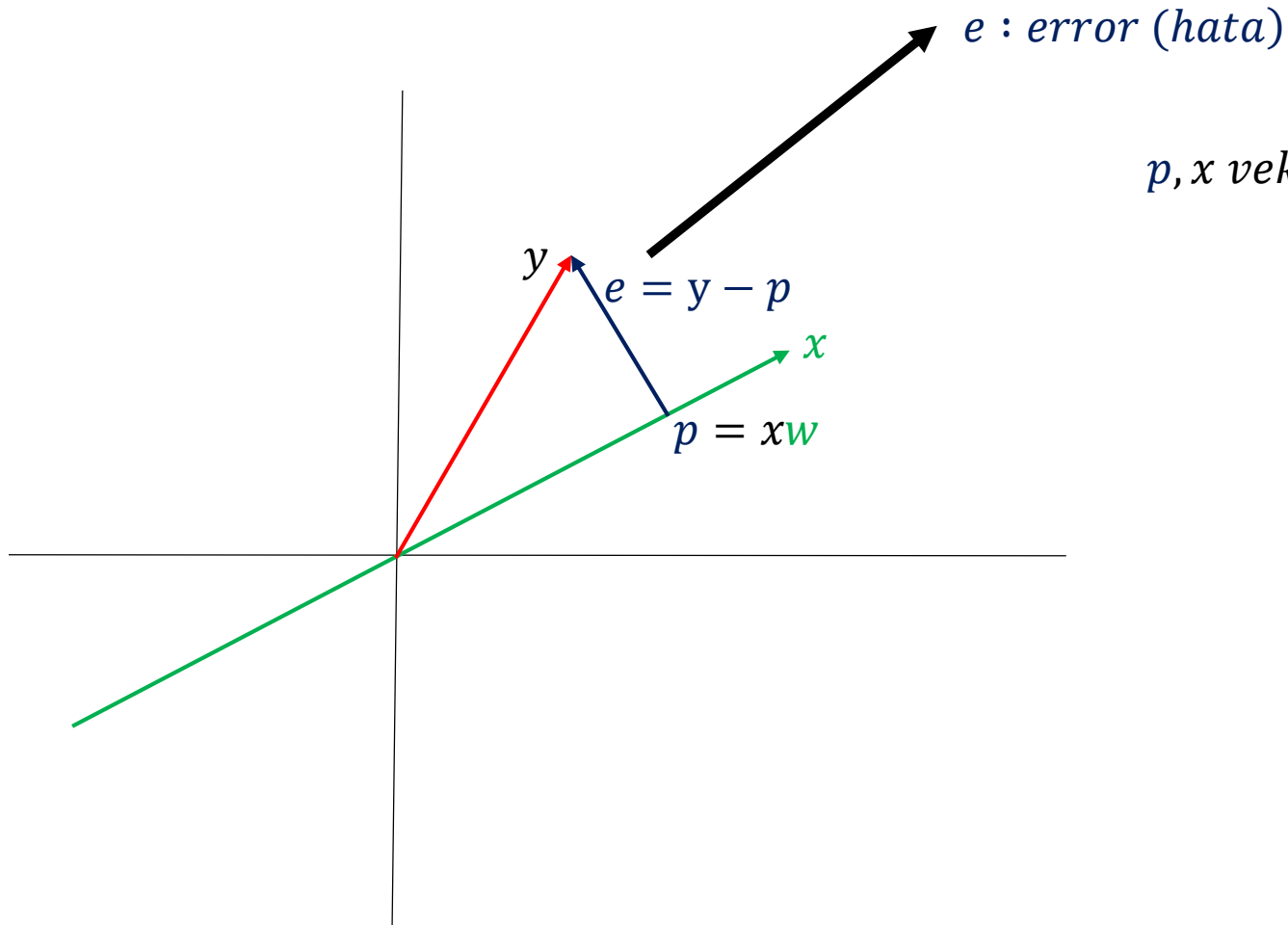


p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



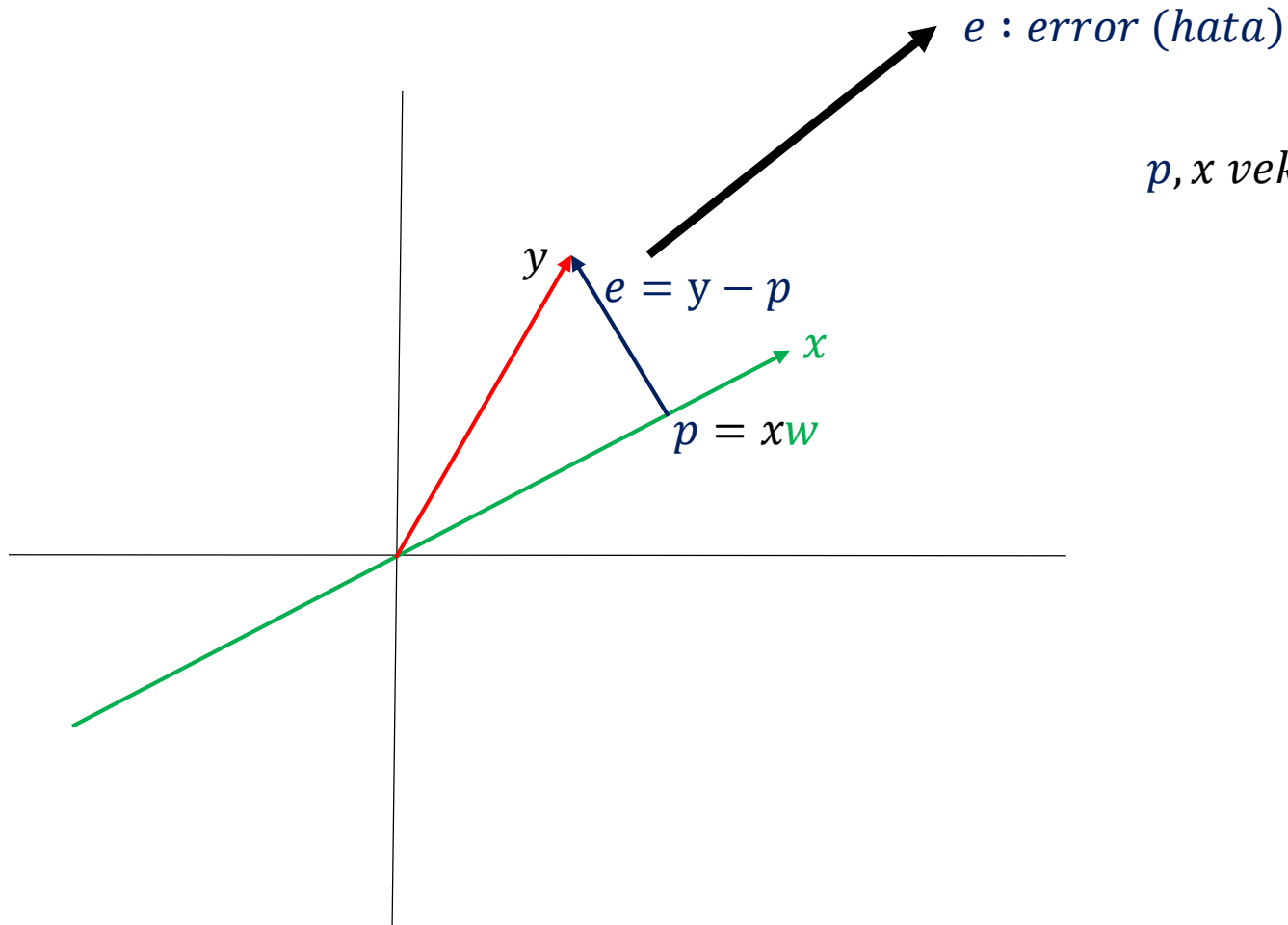
p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

$$x \perp (y - xw)$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

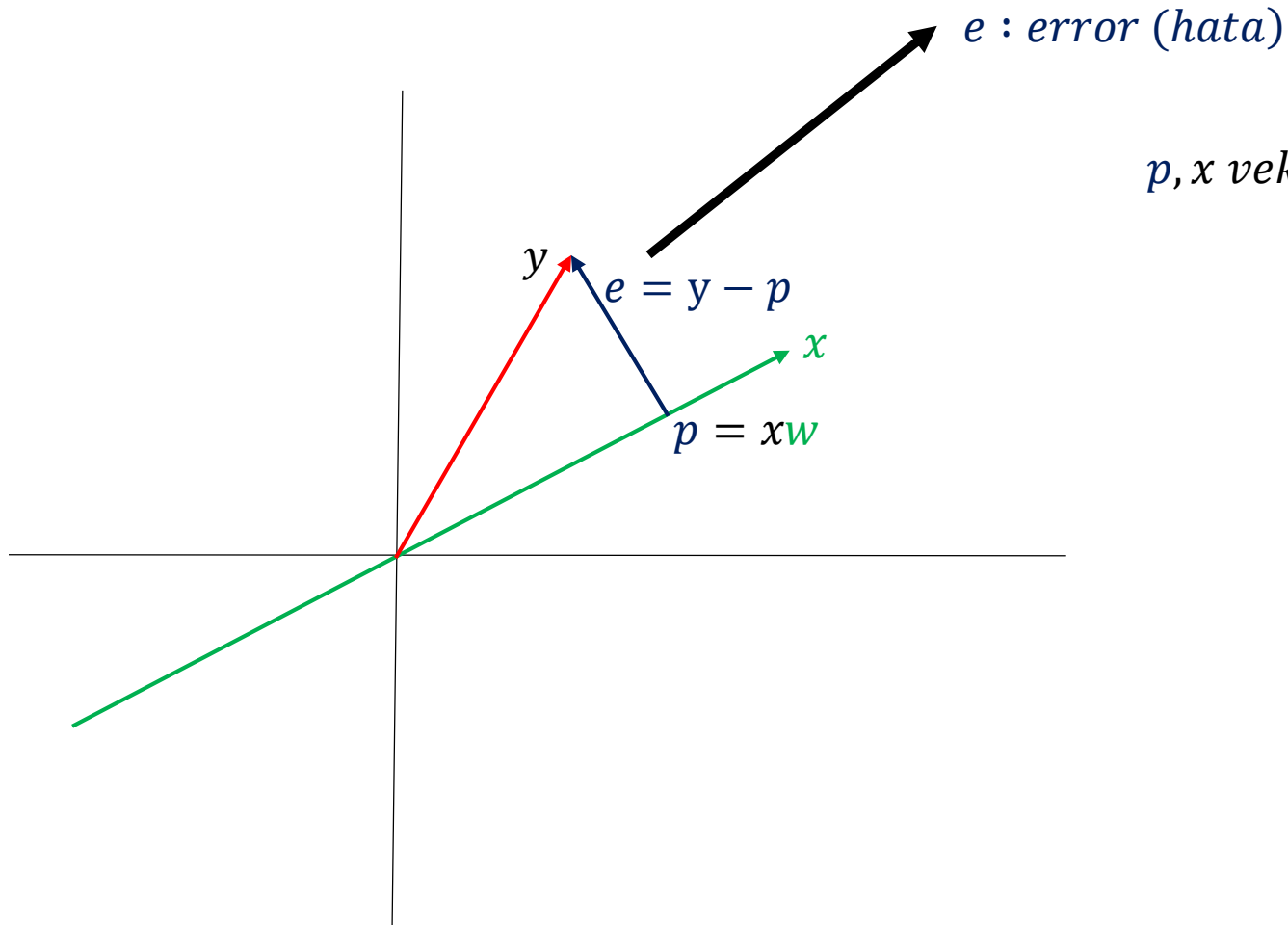
$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

$$x \perp (y - xw)$$

$$x^T (y - xw) = 0$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

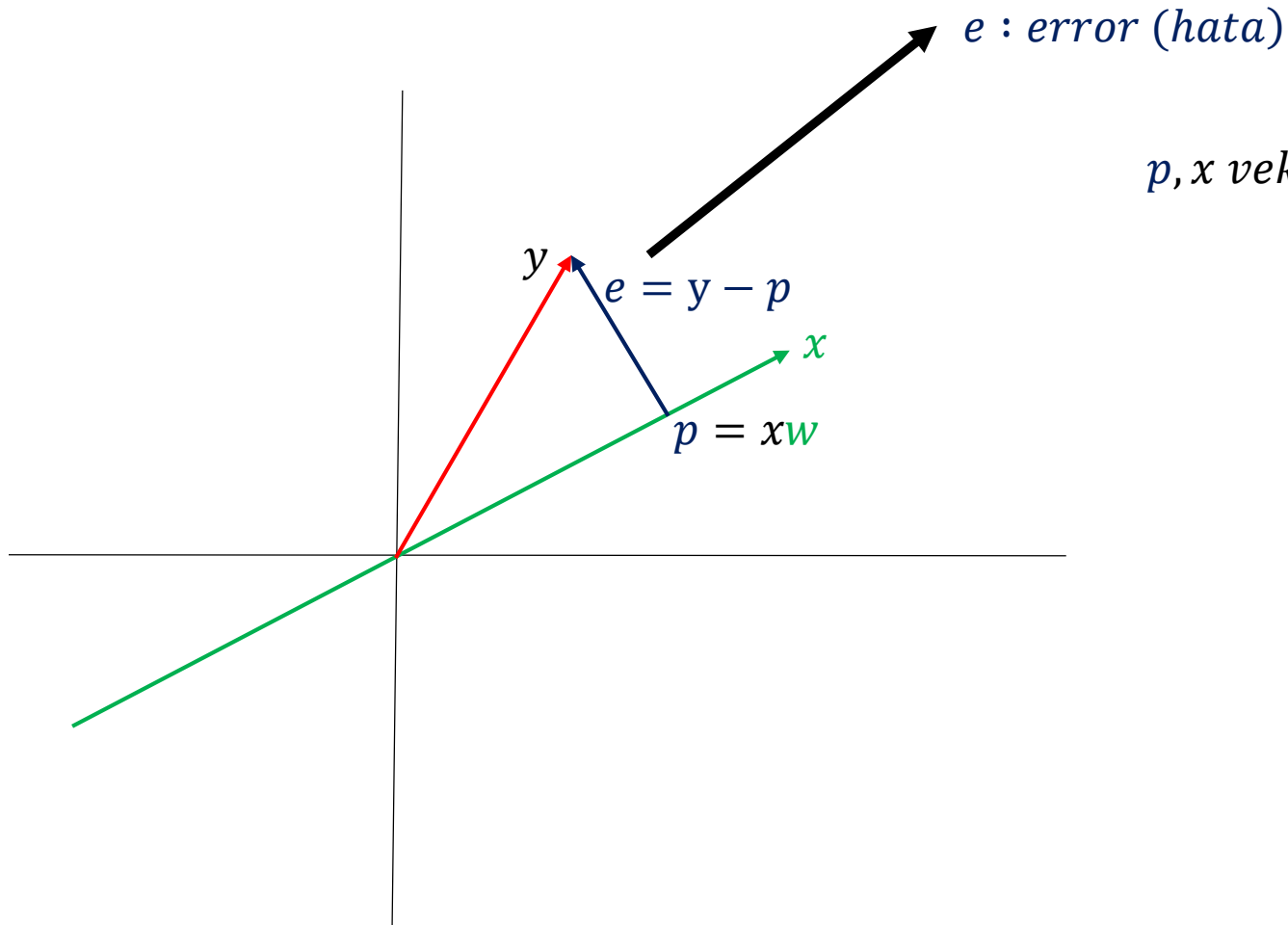
$$x \perp (y - p)$$

$$x \perp (y - xw)$$

$$x^T (y - xw) = 0$$

$$x^T y - x^T xw = 0$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

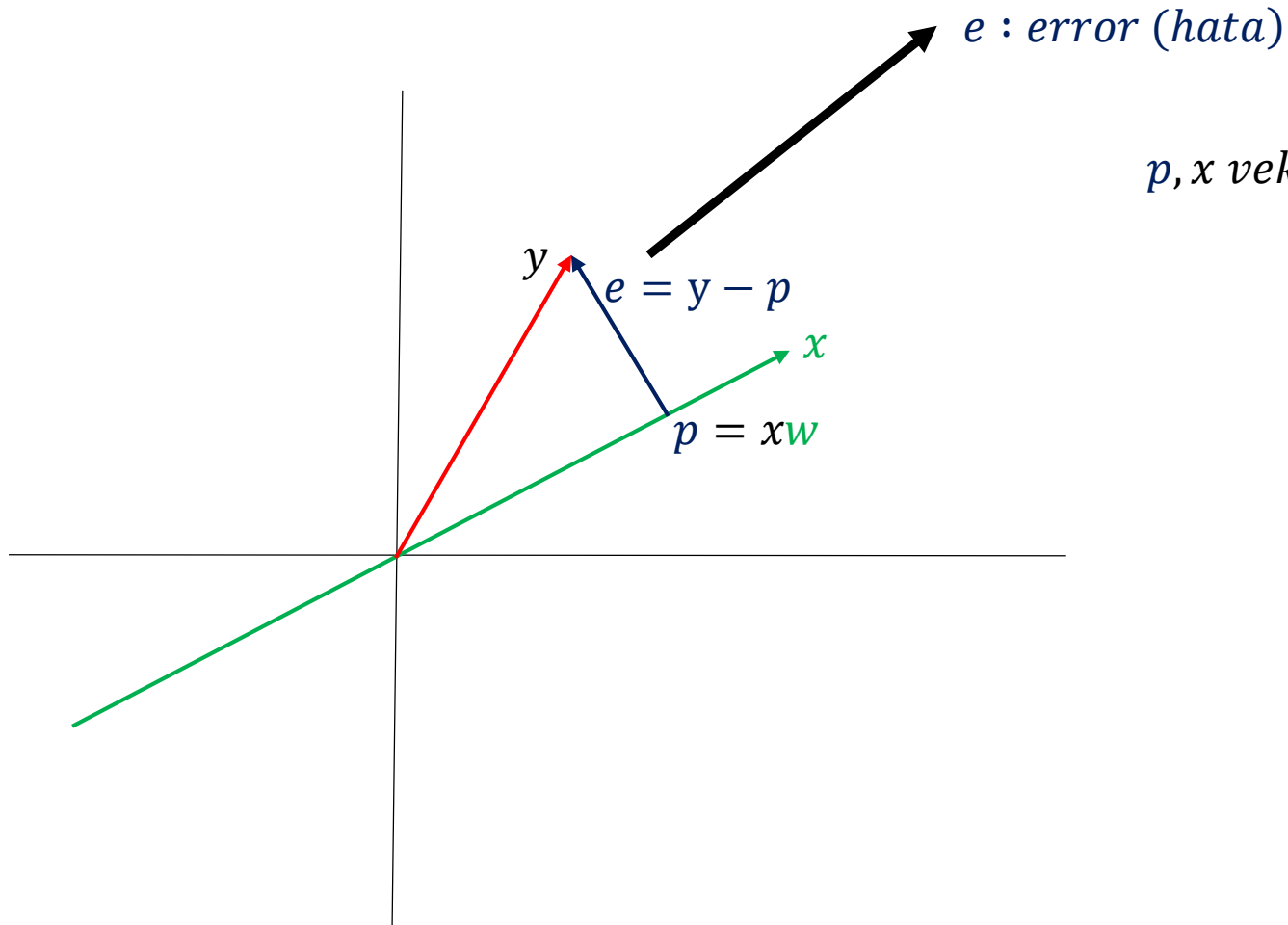
$$x \perp (y - xw)$$

$$x^T (y - xw) = 0$$

$$x^T y - x^T xw = 0$$

$$x^T xw = x^T y$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

$$x \perp (y - xw)$$

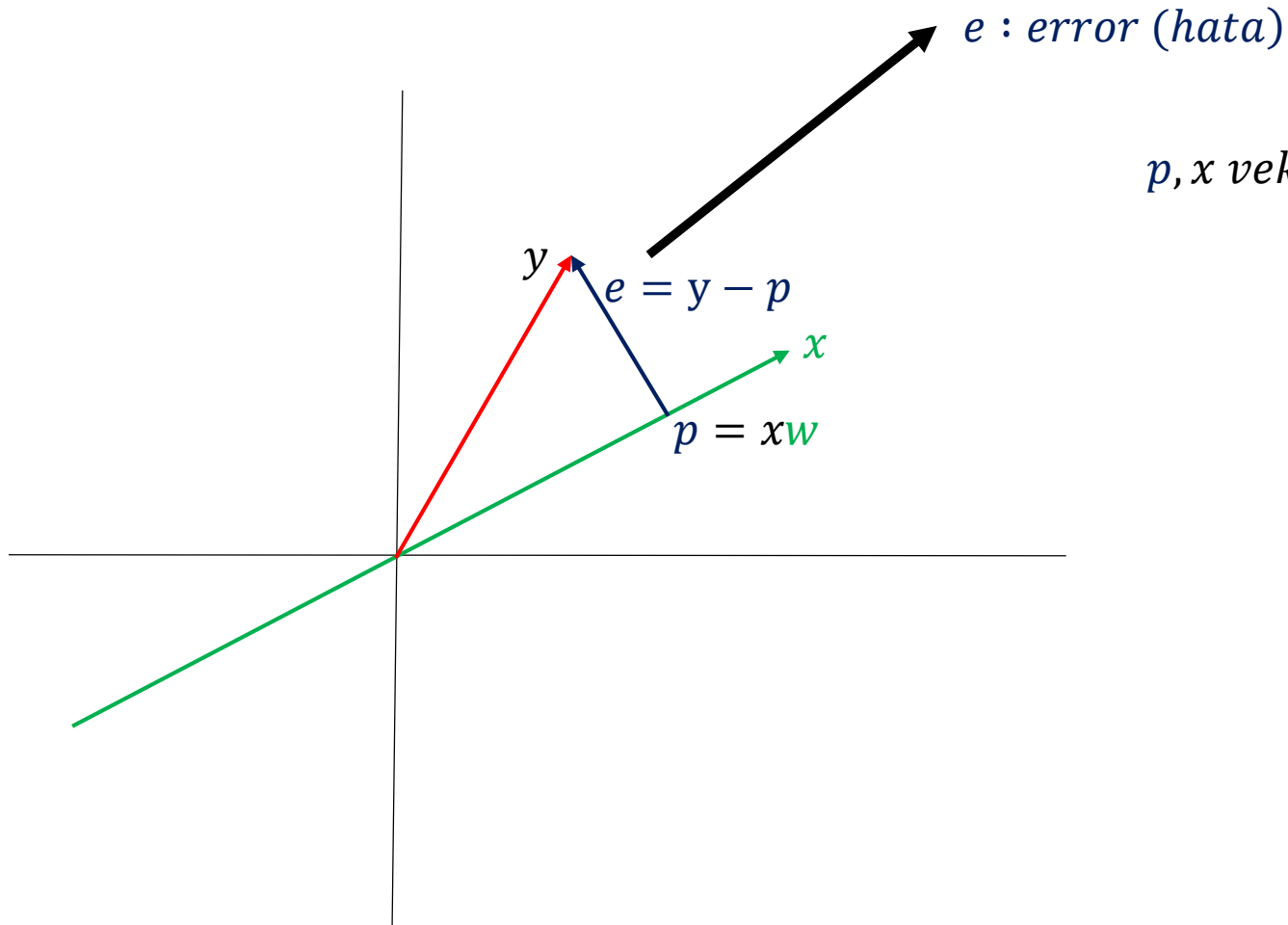
$$x^T (y - xw) = 0$$

$$x^T y - x^T xw = 0$$

$$x^T xw = x^T y$$

$$w = \frac{x^T y}{x^T x}$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

$$x \perp (y - xw)$$

$$x^T (y - xw) = 0$$

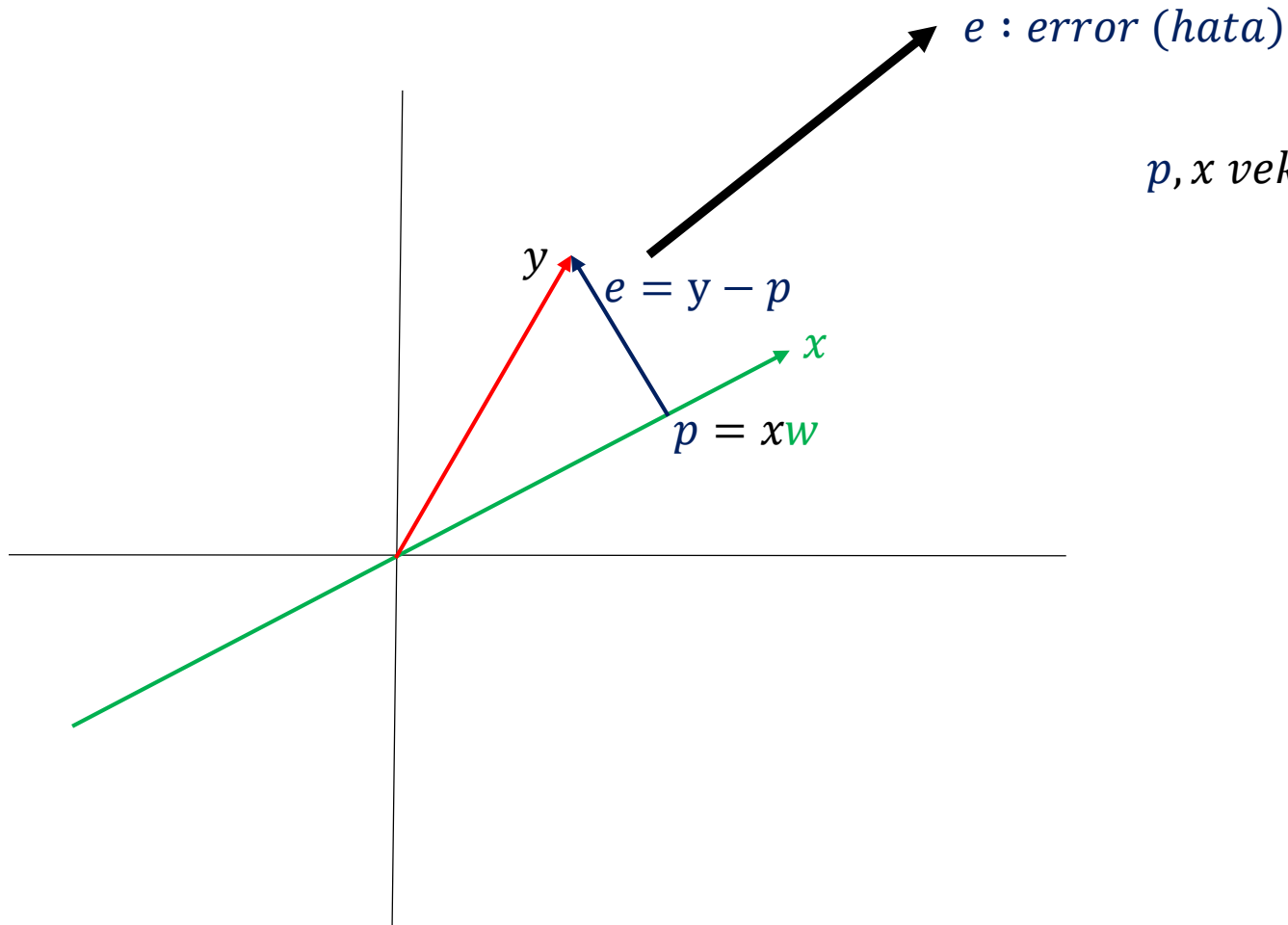
$$x^T y - x^T xw = 0$$

$$x^T xw = x^T y$$

$$w = \frac{x^T y}{x^T x}$$

$$p = xw$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

$$x \perp (y - xw)$$

$$x^T (y - xw) = 0$$

$$x^T y - x^T xw = 0$$

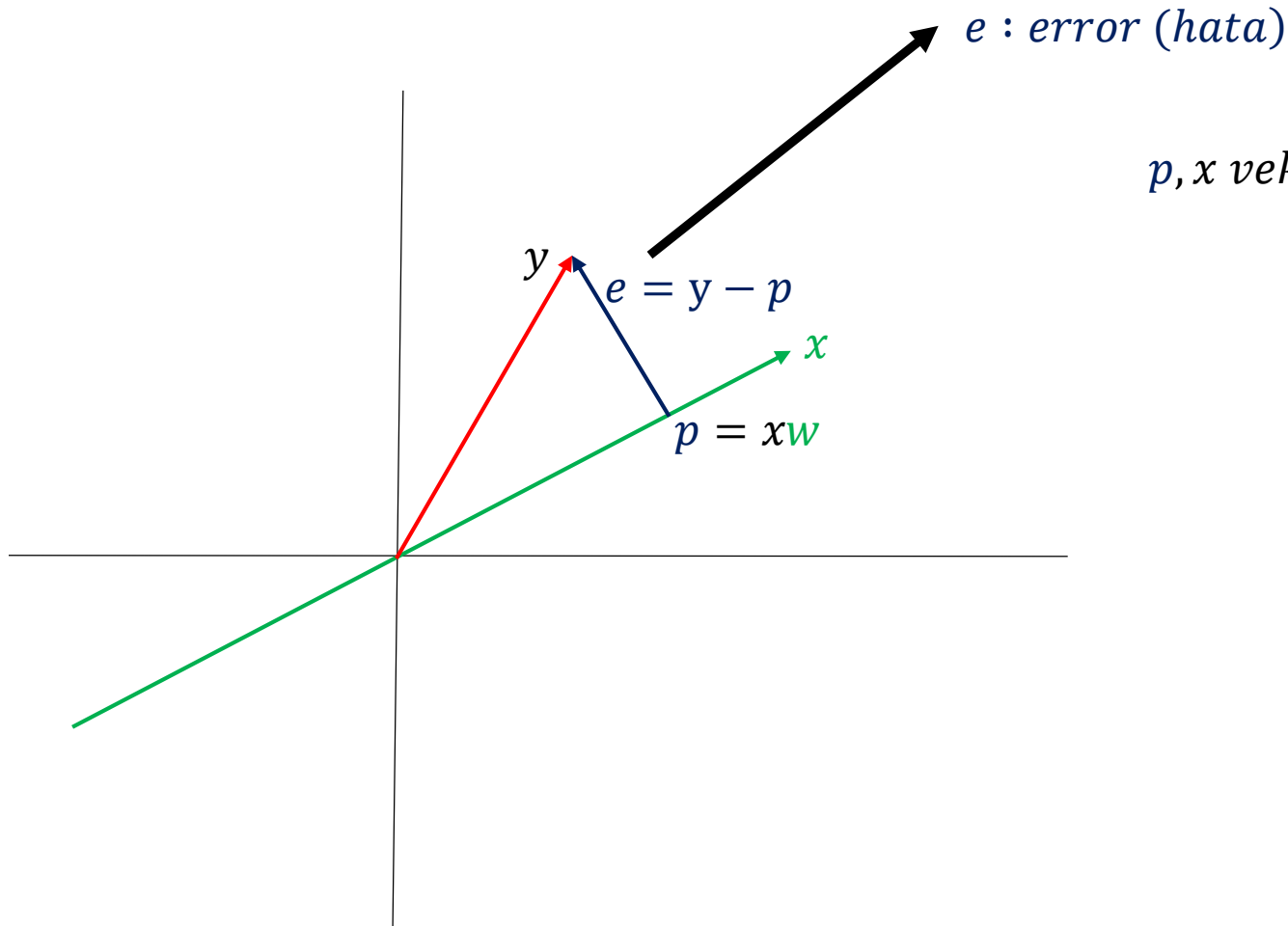
$$x^T xw = x^T y$$

$$w = \frac{x^T y}{x^T x}$$

$$p = xw \rightarrow \text{projeksiyon}$$

$$p = x \frac{x^T y}{x^T x} = Py$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



p, x vektörünün herhangi bir katı : $p = xw$

$$x \perp e$$

$$x \perp (y - p)$$

$$x \perp (y - xw)$$

$$x^T (y - xw) = 0$$

$$x^T y - x^T xw = 0$$

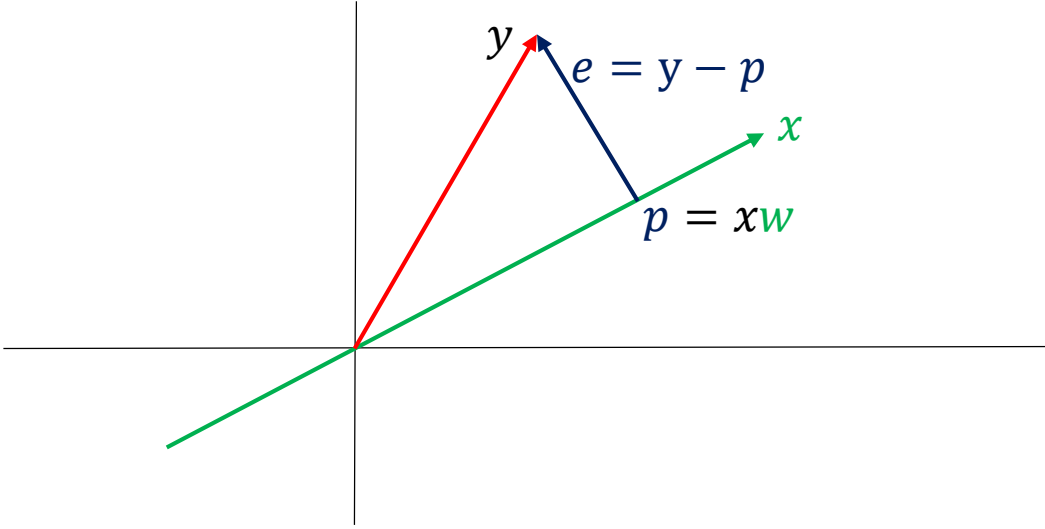
$$x^T xw = x^T y$$

$$w = \frac{x^T y}{x^T x}$$

$$p = xw \rightarrow \boxed{p = x \frac{x^T y}{x^T x} = Py} \xrightarrow{\text{projeksiyon matrisi}} \boxed{P = \frac{xx^T}{x^T x}}$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi

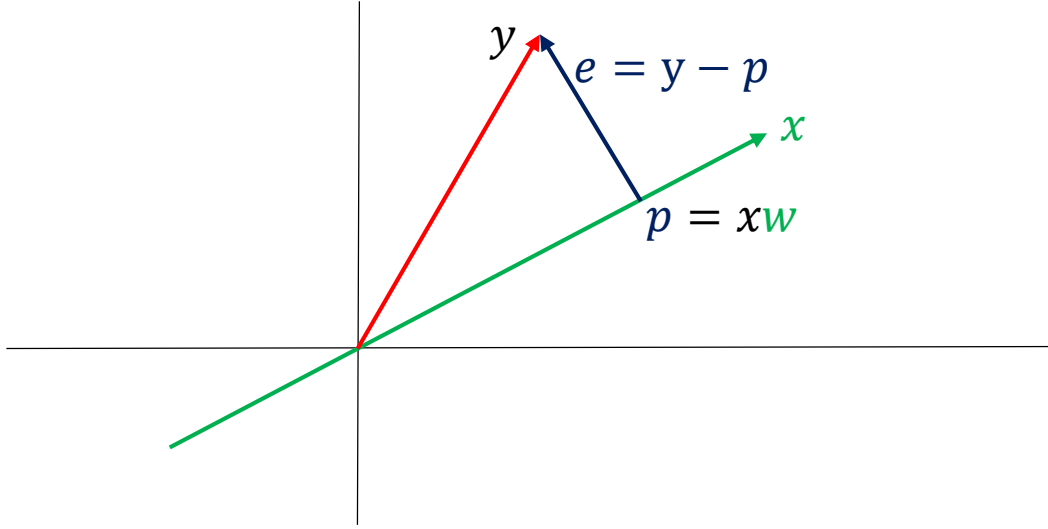
Önemli Özellikler;



Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi

Önemli Özellikler;

1) Projeksiyon matrisi simetriktr.

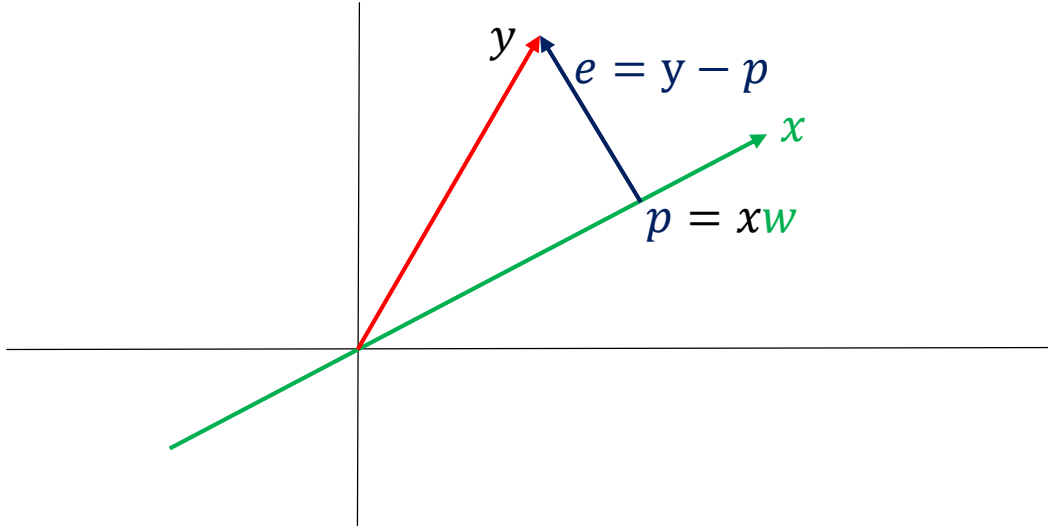


Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi

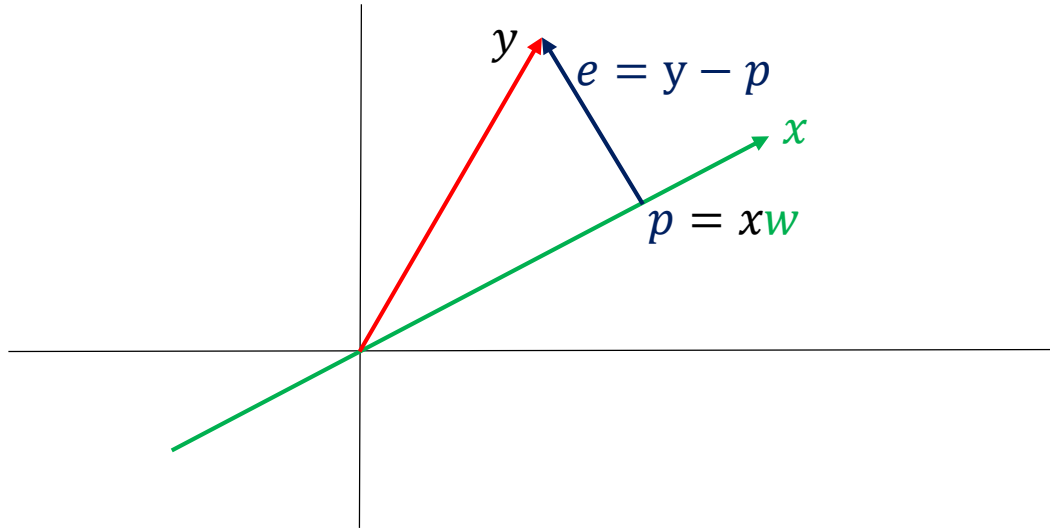
Önemli Özellikler;

1) Projeksiyon matrisi simetriktr.

$$P^T = \frac{xx^T}{x^Tx} = \frac{x^Tx^T}{x^Tx^Tx} = \frac{xx^T}{x^Tx} = P$$



Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



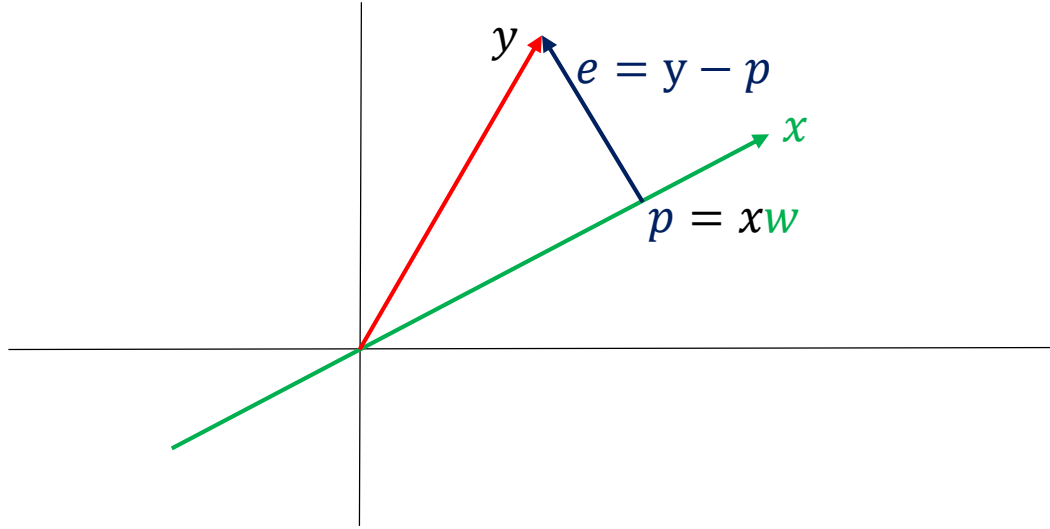
Önemli Özellikler;

1) Projeksiyon matrisi simetriktr.

$$P^T = \frac{xx^TT}{x^Tx} = \frac{x^{TT}x^T}{x^Tx^{TT}} = \frac{xx^T}{x^Tx} = P$$

2) Eğer iki kez projeksiyon yaparsam, aynı yerde kalmış olurum.

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



Önemli Özellikler;

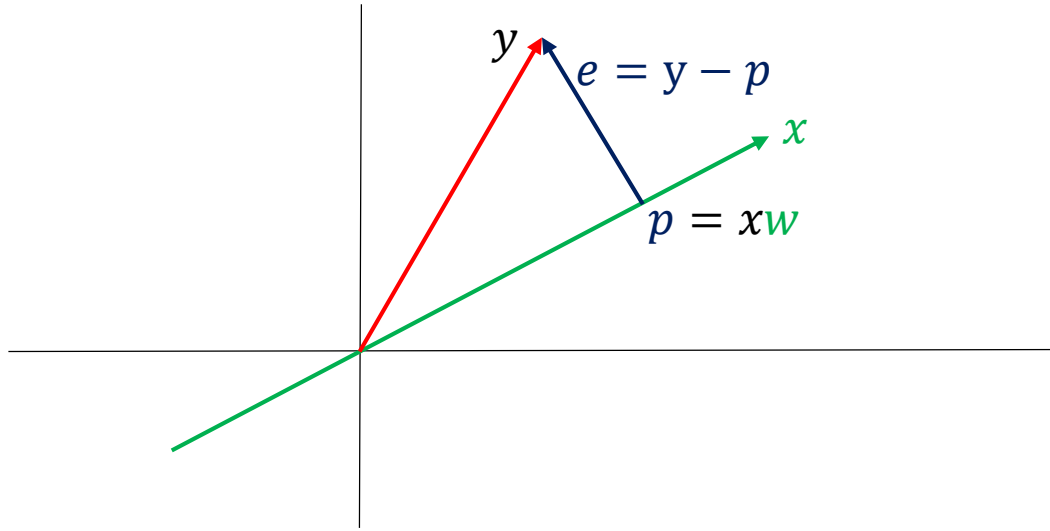
1) Projeksiyon matrisi simetriktr.

$$P^T = \frac{xx^T}{x^T x} = \frac{x^T x^T}{x^T x^T} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

2) Eğer iki kez projeksiyon yaparsam, aynı yerde kalmış olurum.

$$P^2 = \frac{xx^T xx^T}{x^T xx^T x} = \frac{(x)(x^T x)(x^T)}{(x^T x)(x^T x)} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



$$P = \frac{xx^T}{x^T x}$$

Önemli Özellikler;

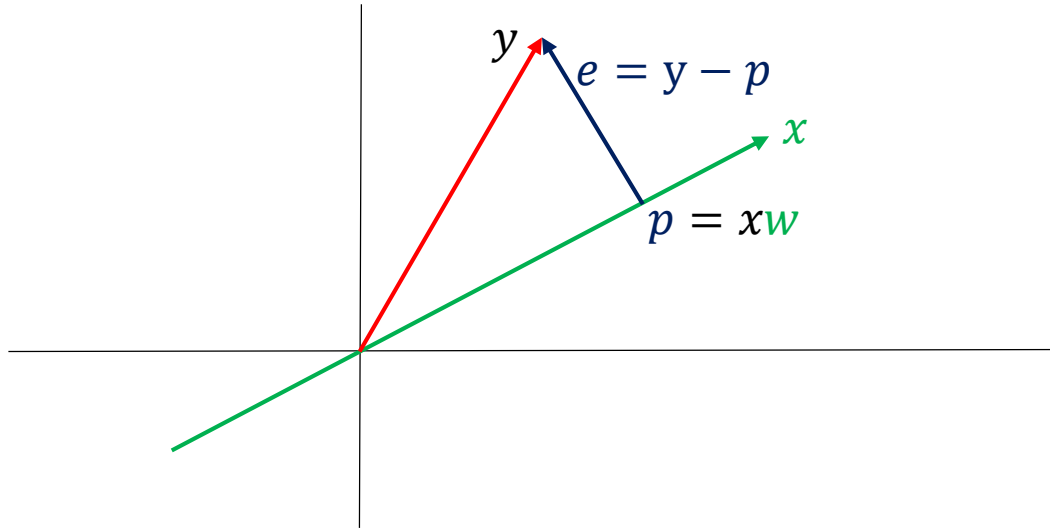
1) Projeksiyon matrisi simetriktr.

$$P^T = \frac{xx^T}{x^T x} = \frac{x^T x}{x^T x} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

2) Eğer iki kez projeksiyon yaparsam, aynı yerde kalmış olurum.

$$P^2 = \frac{xx^T xx^T}{x^T xx^T x} = \frac{(x)(x^T x)(x^T)}{(x^T x)(x^T x)} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



$$P = \frac{xx^T}{x^T x} \rightarrow \text{matris}$$

Önemli Özellikler;

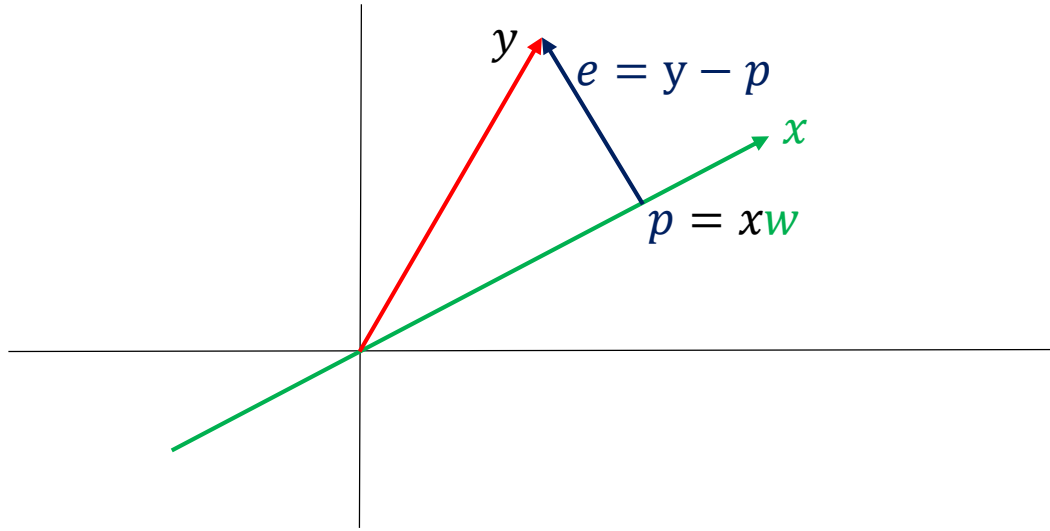
1) Projeksiyon matrisi simetriktr.

$$P^T = \frac{xx^T}{x^T x} = \frac{x^T x}{x^T x} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

2) Eğer iki kez projeksiyon yaparsam, aynı yerde kalmış olurum.

$$P^2 = \frac{xx^T xx^T}{x^T xx^T x} = \frac{(x)(x^T x)(x^T)}{(x^T x)(x^T x)} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

Projeksiyon ve Projeksiyon Matrisi



$$P = \frac{xx^T}{x^T x}$$

↗ matris

↘ dot product : iç çarpım ($\|x\|^2$)

Önemli Özellikler;

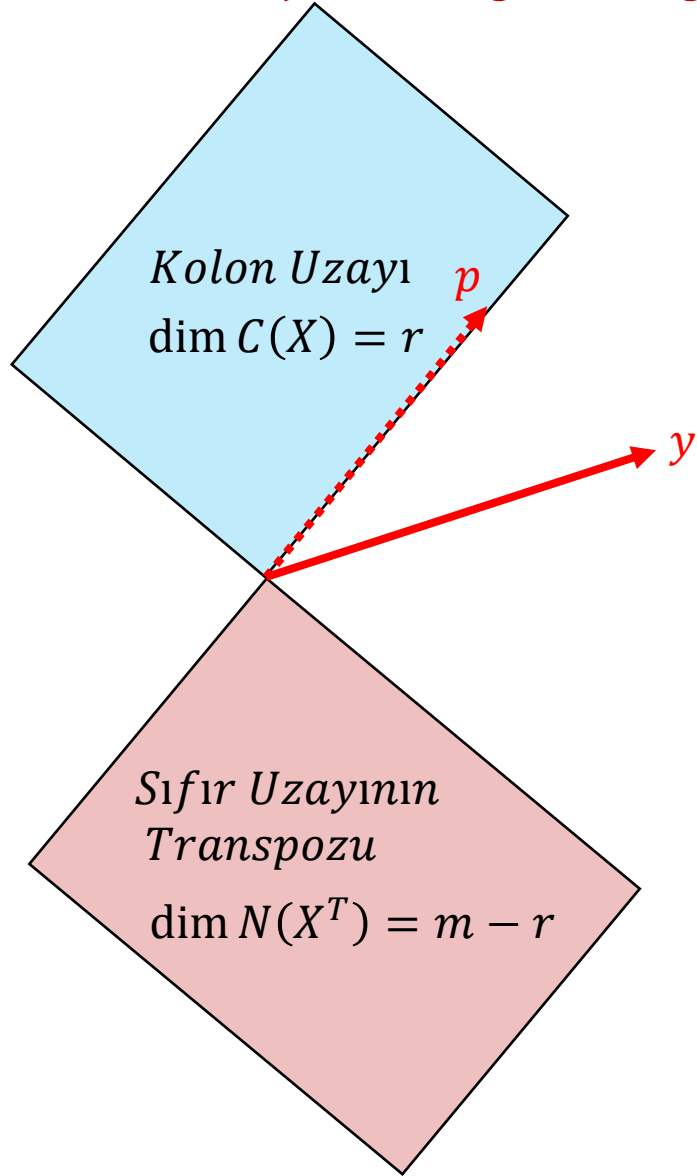
1) Projeksiyon matrisi simetriktr.

$$P^T = \frac{xx^T}{x^T x} = \frac{x^T x}{x^T x^T} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

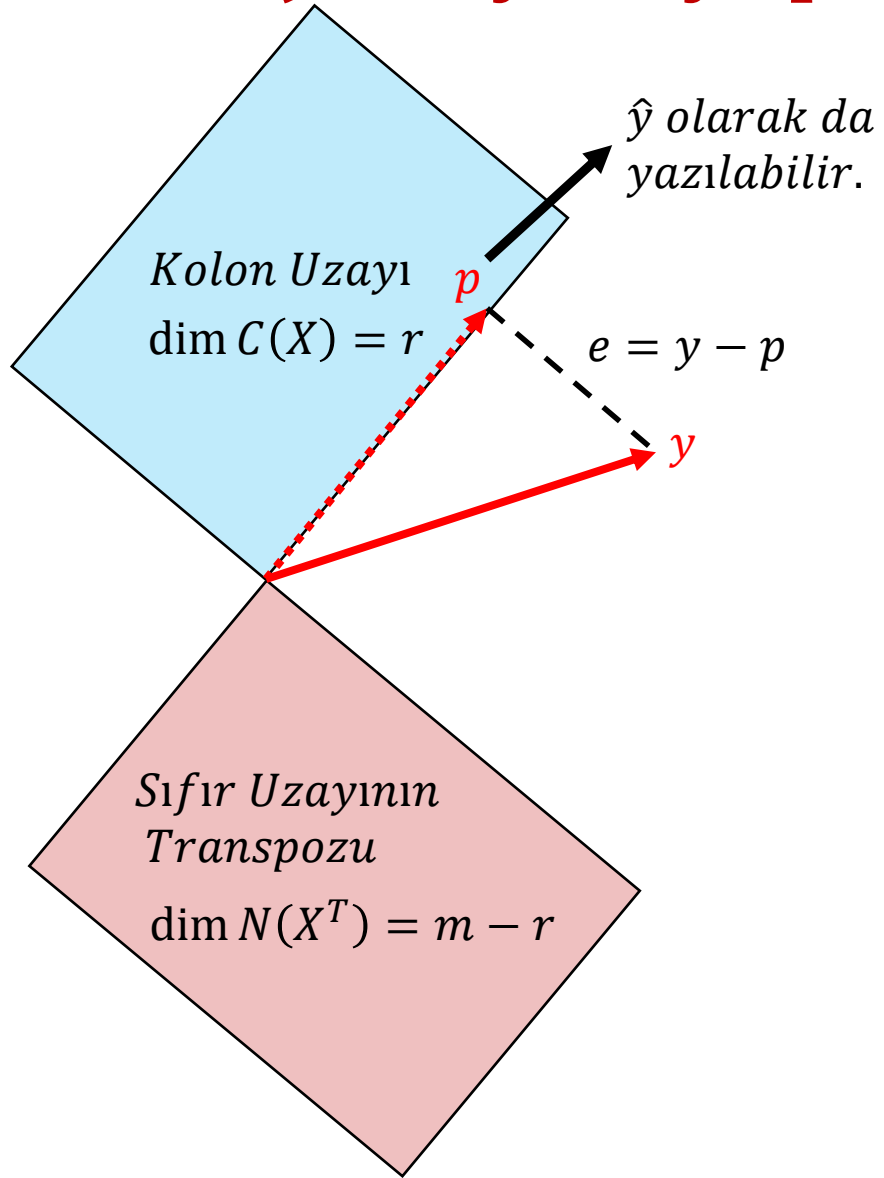
2) Eğer iki kez projeksiyon yaparsam, aynı yerde kalmış olurum.

$$P^2 = \frac{xx^T xx^T}{x^T xx^T x} = \frac{(x)(x^T x)(x^T)}{(x^T x)(x^T x)} = \frac{xx^T}{x^T x} = P$$

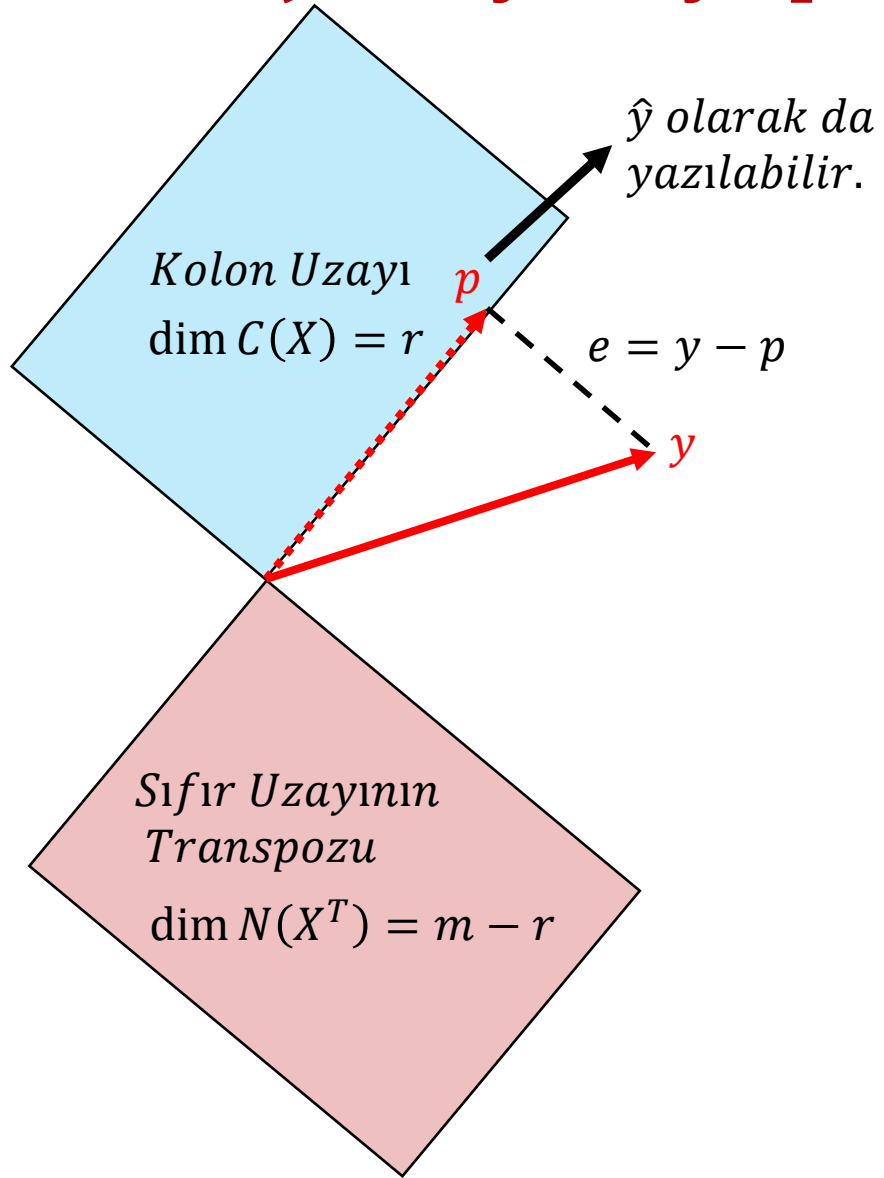
Neden Projeksiyon yaparız ?



Neden Projeksiyon yaparız ?

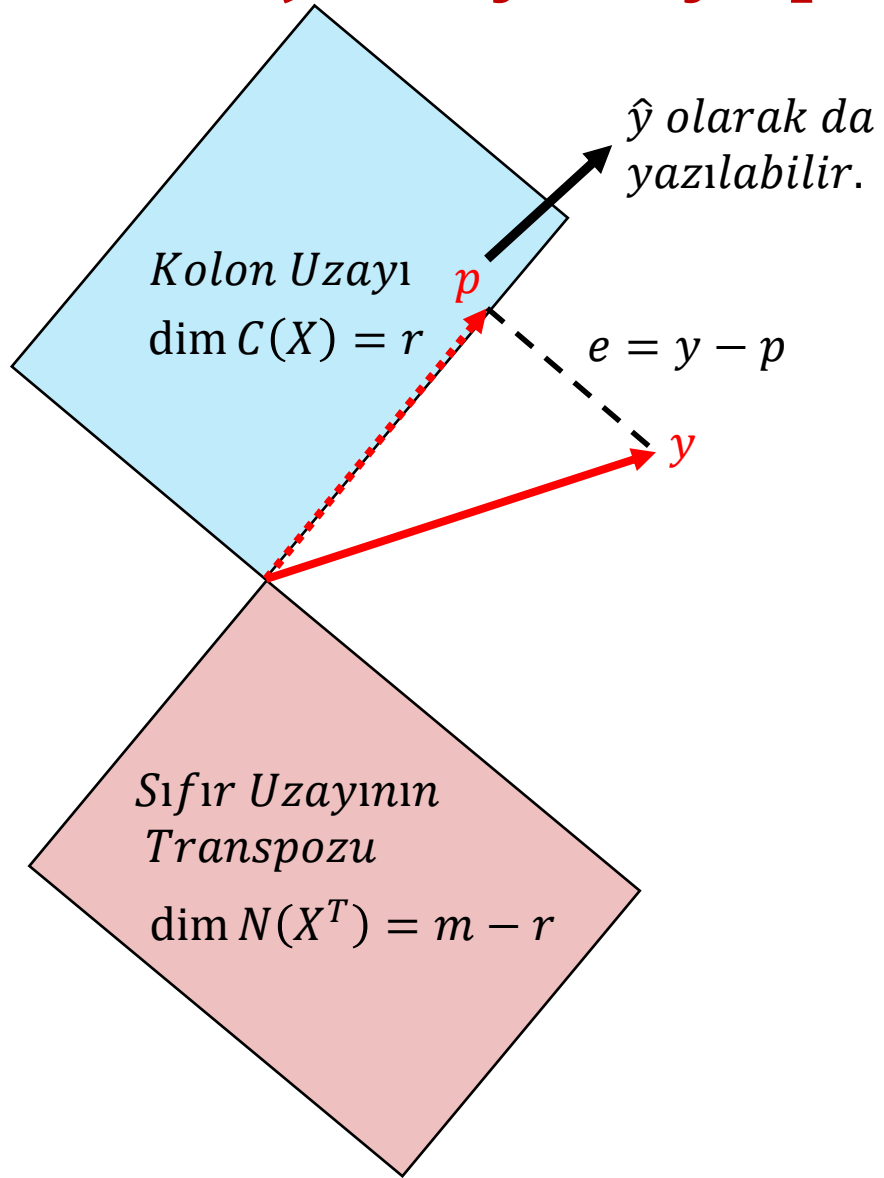


Neden Projeksiyon yaparız ?



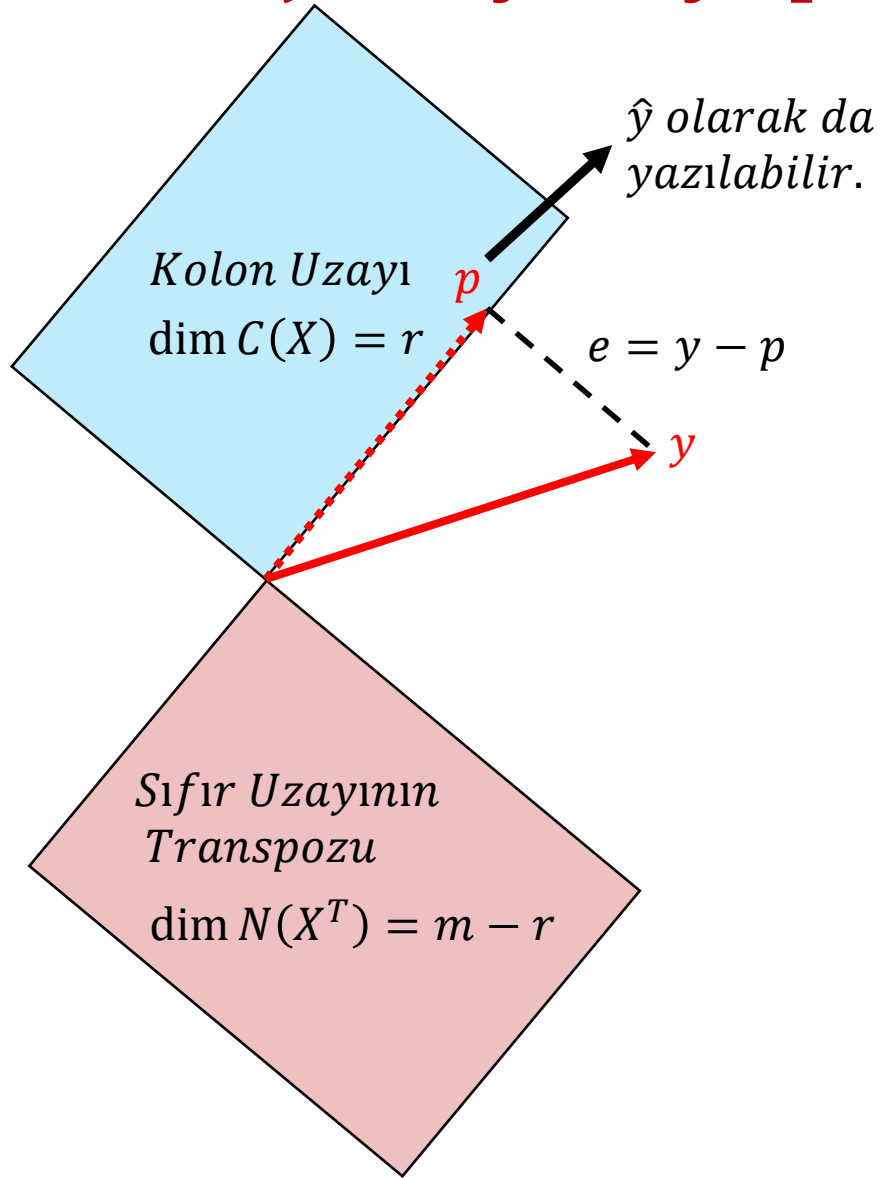
- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.

Neden Projeksiyon yaparız ?



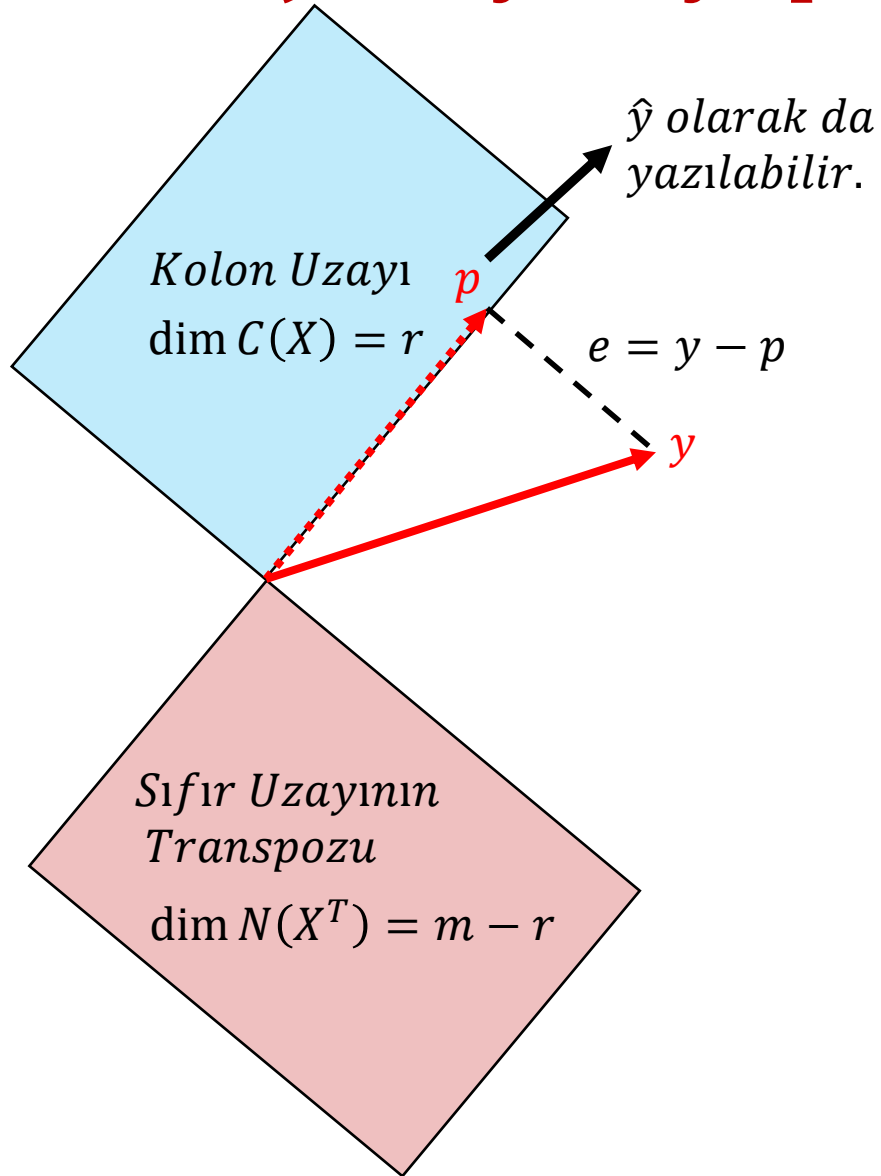
- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.
- yani uygun y değerlerini alamayabilirim.

Neden Projeksiyon yaparız ?



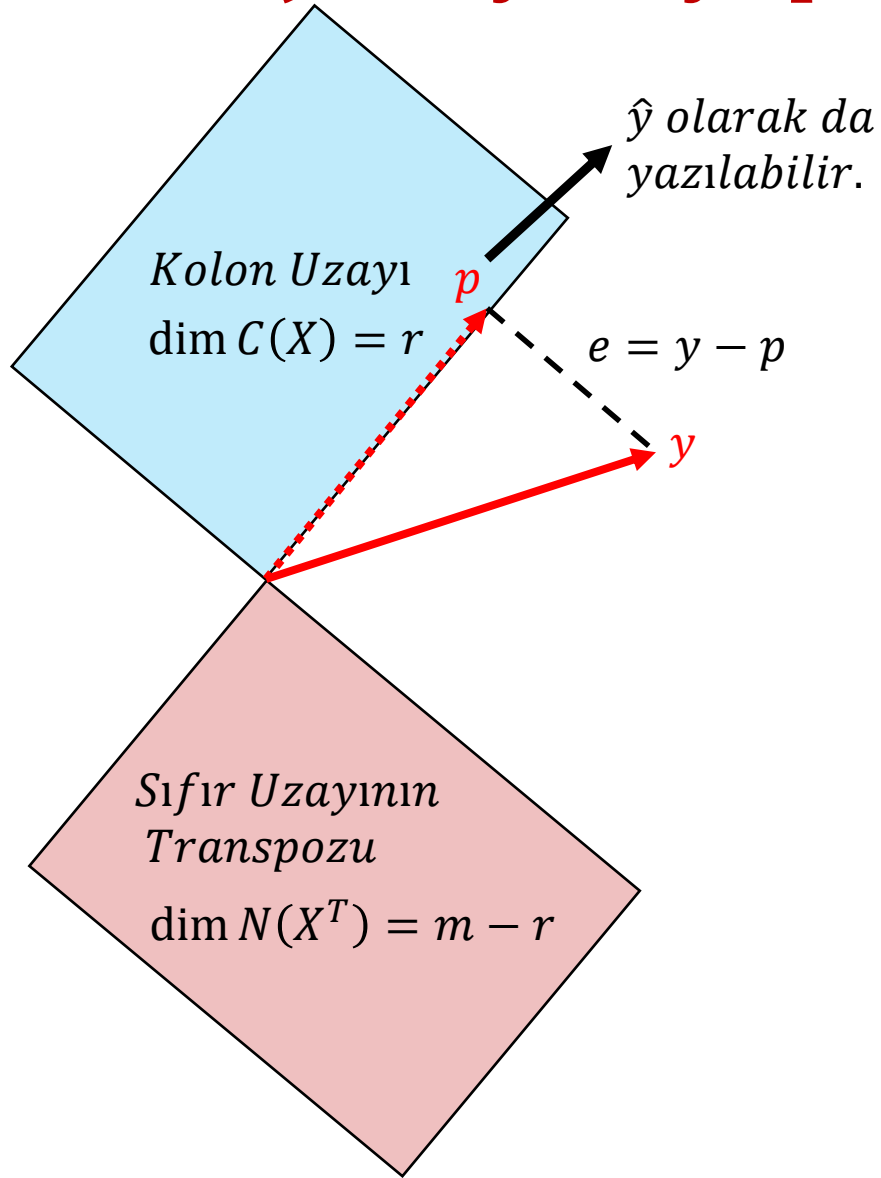
- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.
- yani uygun y değerlerini alamayabilirim.
- Kolon uzayında çalışmam gerekli.
Fakat kolon uzayında değilim.

Neden Projeksiyon yaparız ?



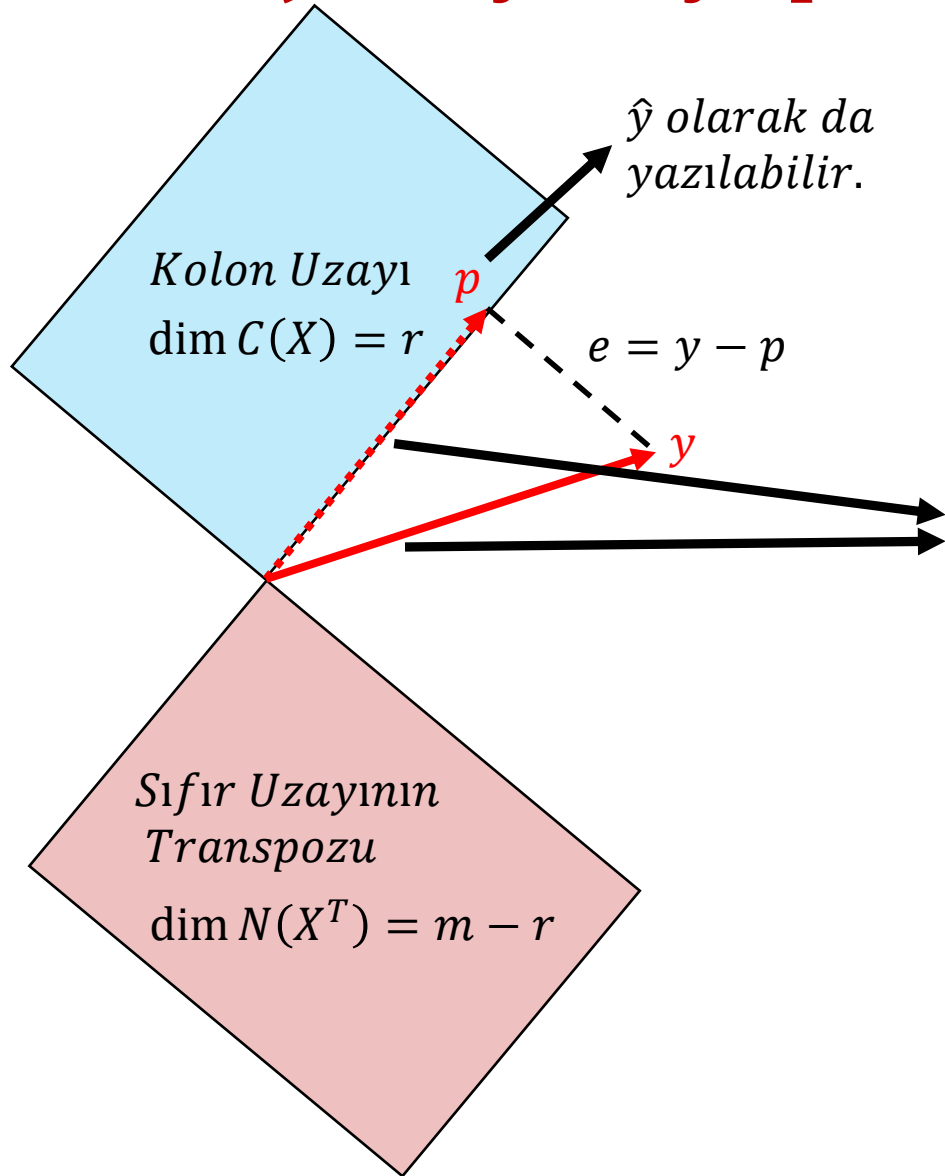
- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.
- yani uygun y değerlerini alamayabilirim.
- Kolon uzayında çalışmam gerekli.
Fakat kolon uzayında değilim.
- Transpozun sıfır uzayında da değilim.
İkisinin arasında bir yerdeyim.

Neden Projeksiyon yaparız ?



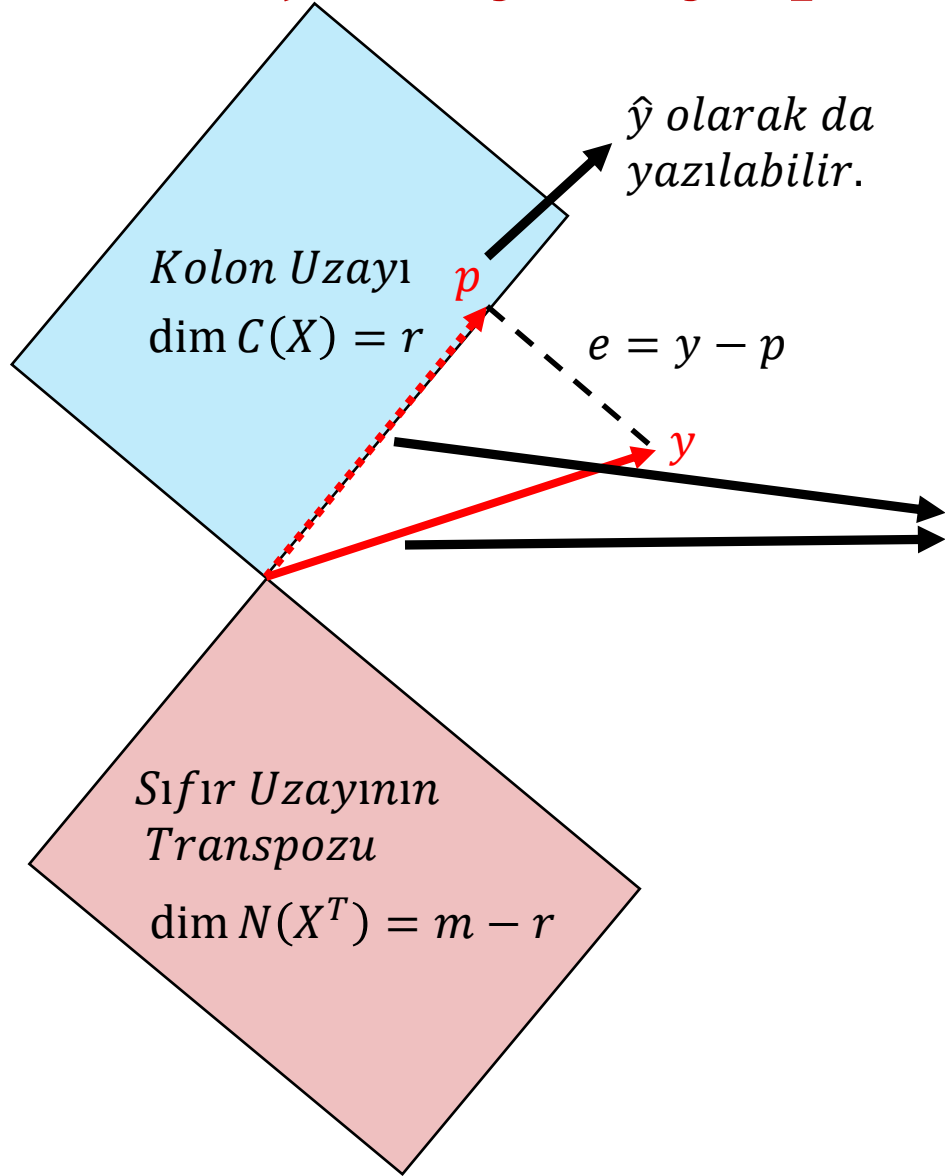
- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.
- yani uygun y değerlerini alamayabilirim.
- Kolon uzayında çalışmam gerekli.
Fakat kolon uzayında değilim.
- Transpozun sıfır uzayında da değilim.
İkisinin arasında bir yerdeyim.
- Dolayısı ile kolon uzayında çalışmam gerektiğinden,
kolon uzayına projeksiyon yapmalıyım.

Neden Projeksiyon yaparız ?



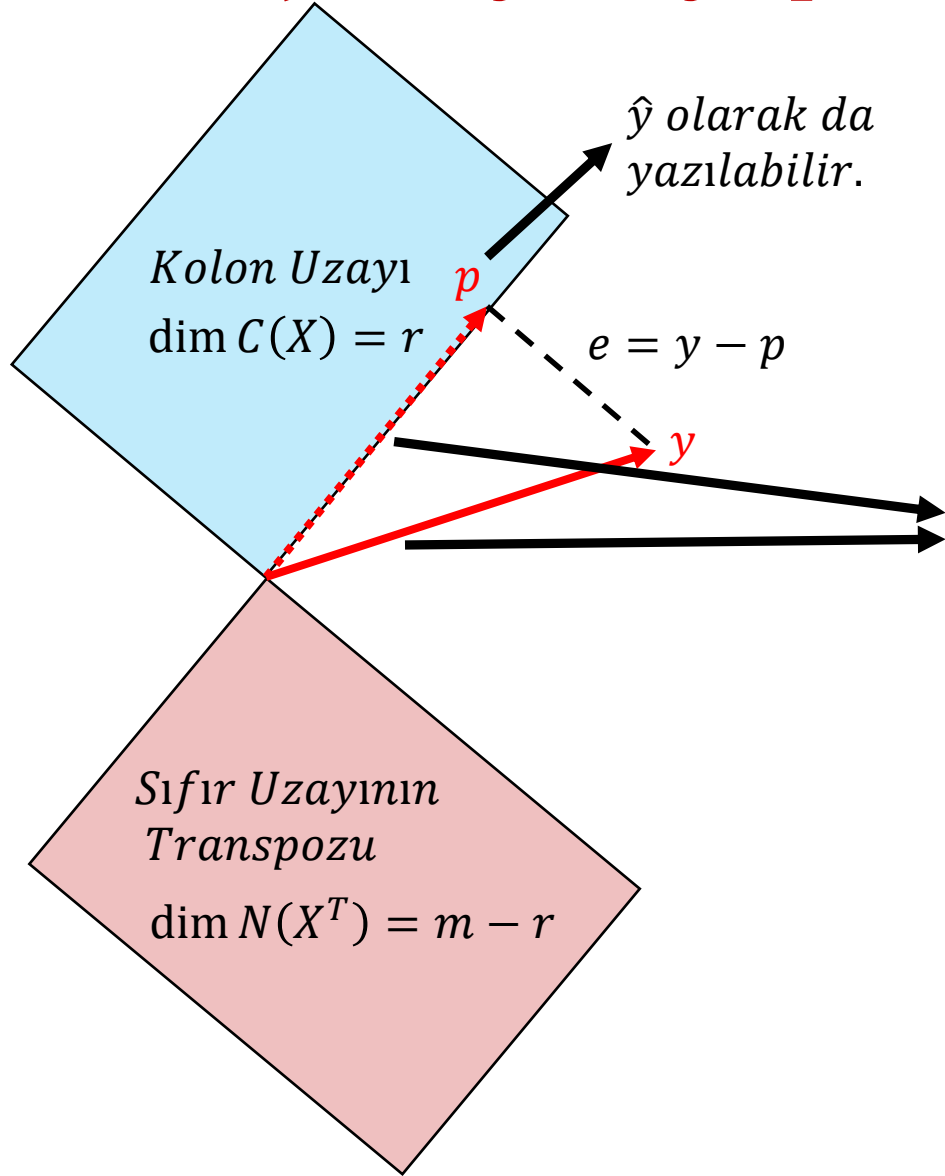
- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.
- yani uygun y değerlerini alamayabilirim.
- Kolon uzayında çalışmam gerekli.
Fakat kolon uzayında değilim.
- Transpozun sıfır uzayında da değilim.
İkisinin arasında bir yerdeyim.
- Dolayısı ile kolon uzayında çalışmam gerektiğinden,
kolon uzayına projeksiyon yapmalıyım.

Neden Projeksiyon yaparız ?



- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.
- yani uygun y değerlerini alamayabilirim.
- Kolon uzayında çalışmam gerekli. Fakat kolon uzayında değilim.
- Transpozun sıfır uzayında da değilim. İkisinin arasında bir yerdeyim.
- Dolayısı ile kolon uzayında çalışmam gerektiğinden, kolon uzayına projeksiyon yapmalıyım.
- Bundan dolayı bizde; $X\hat{w} = p$ denklemini çözeriz.

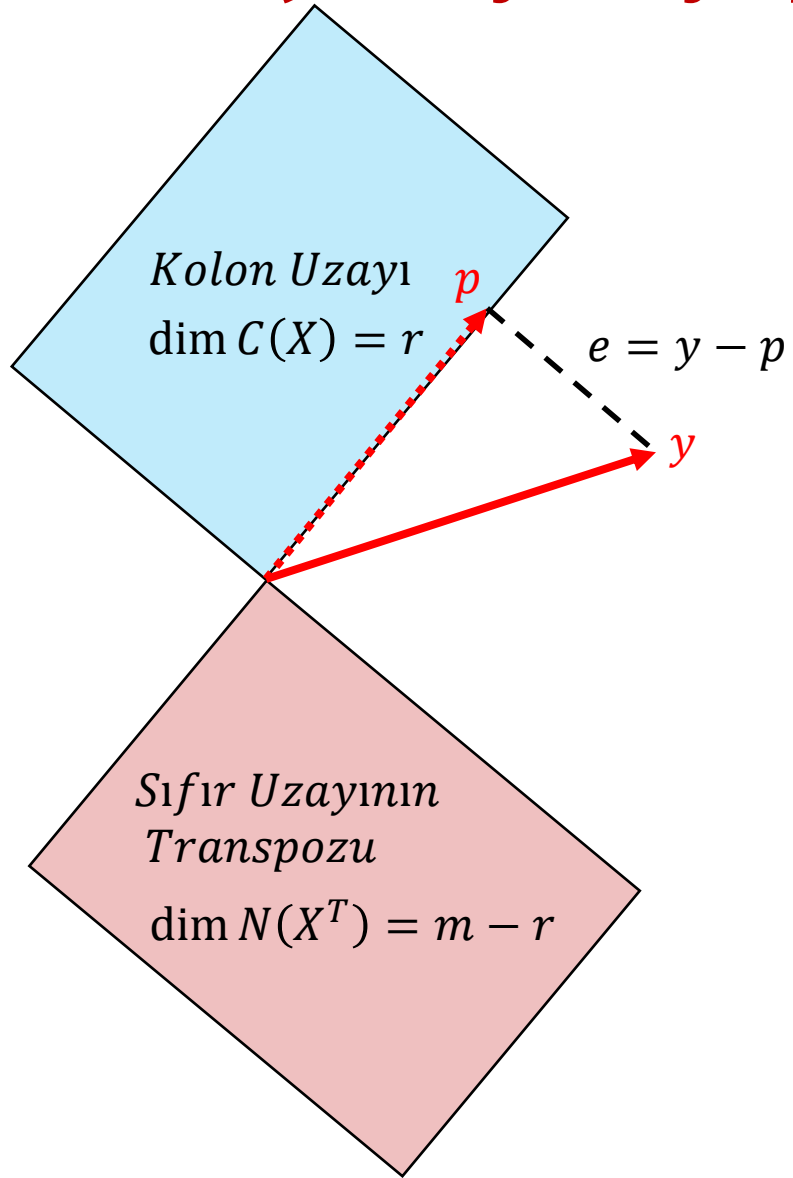
Neden Projeksiyon yaparız ?



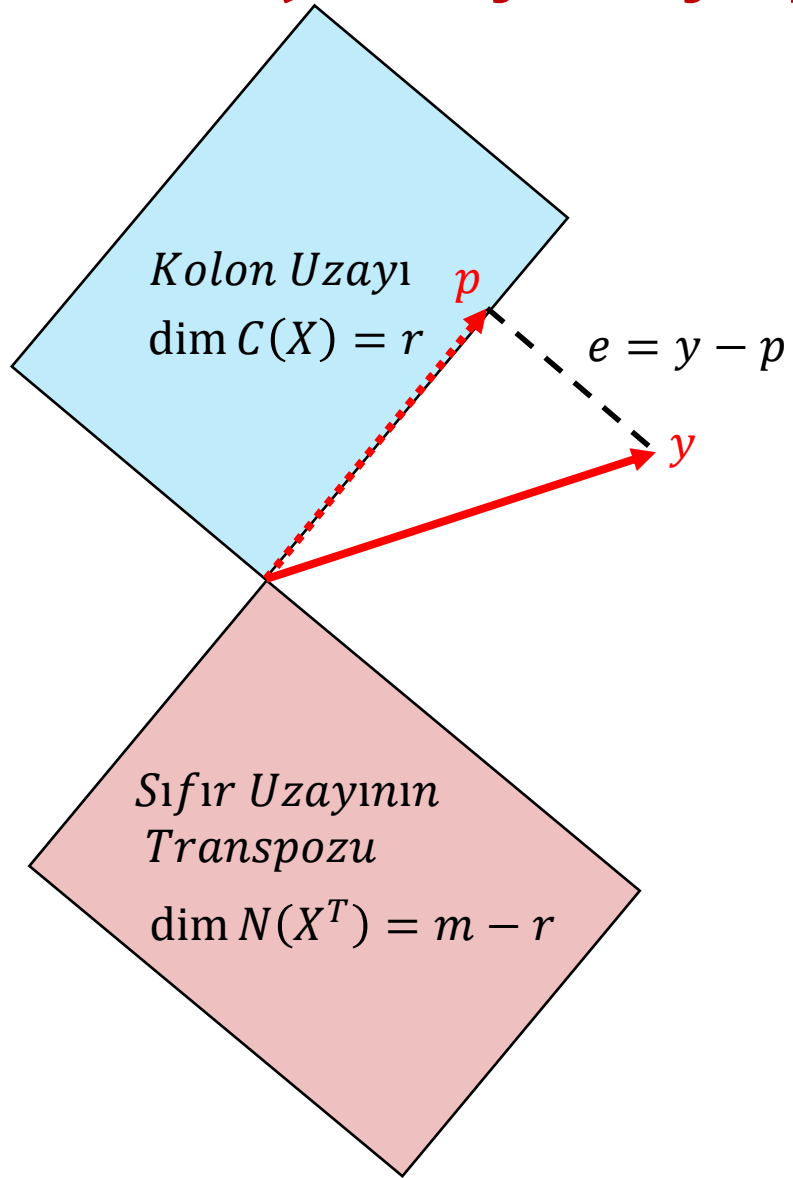
- Çünkü $Xw = y$ denkleminin çözümü olmayabilir.
- yani uygun y değerlerini alamayabilirim.
- Kolon uzayında çalışmam gerekli.
Fakat kolon uzayında değilim.
- Transpozun sıfır uzayında da değilim.
İkisinin arasında bir yerdeyim.
- Dolayısı ile kolon uzayında çalışmam gerektiğinden,
kolon uzayına projeksiyon yapmalıyım.
- Bundan dolayı bizde; $X\hat{w} = p$ denklemini çözeriz.
- $\hat{w} \neq w$, çünkü \hat{w} 'nin X matrisindeki kombinasyonları
bize bir sonuç verir.
(En iyi sonuç $\sim p = \hat{y}$)

Neden Projeksiyon yaparız ?

$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$



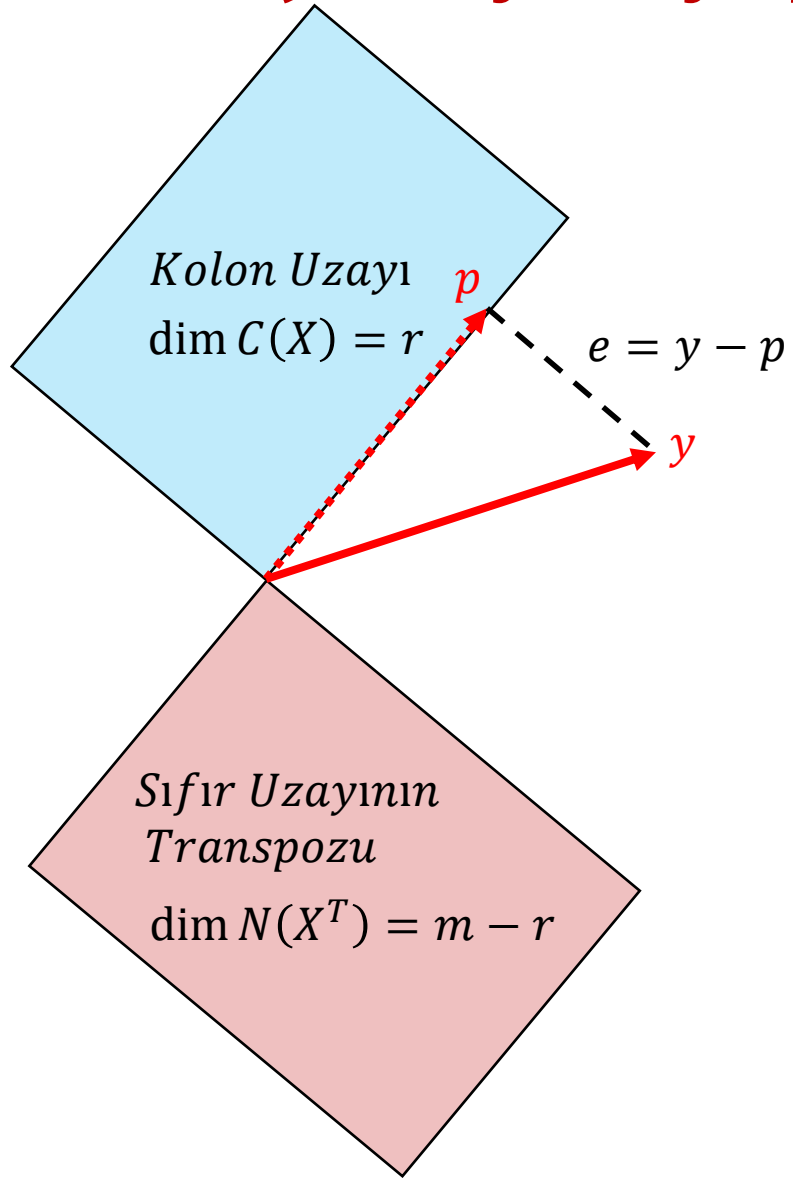
Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta ~ 1d

Neden Projeksiyon yaparız ?

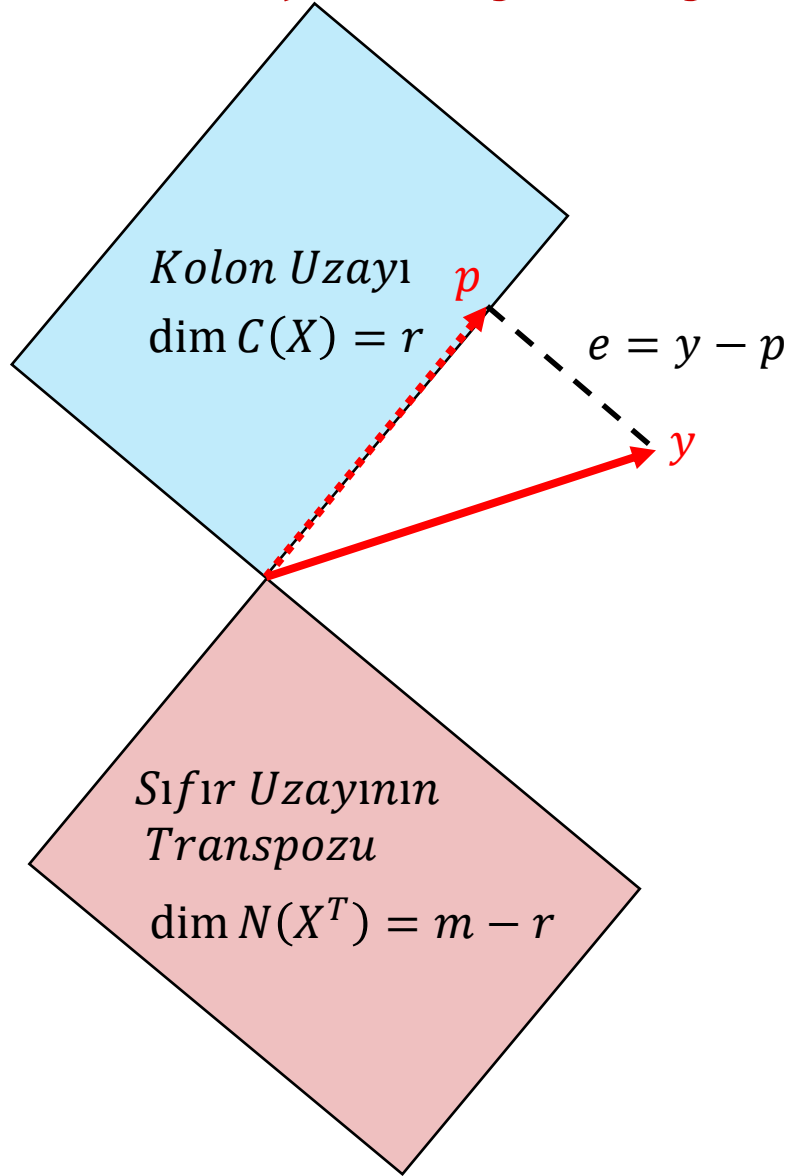


$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta $\sim 1d$

Çok boyuta geçildiğinde;

Neden Projeksiyon yaparız ?



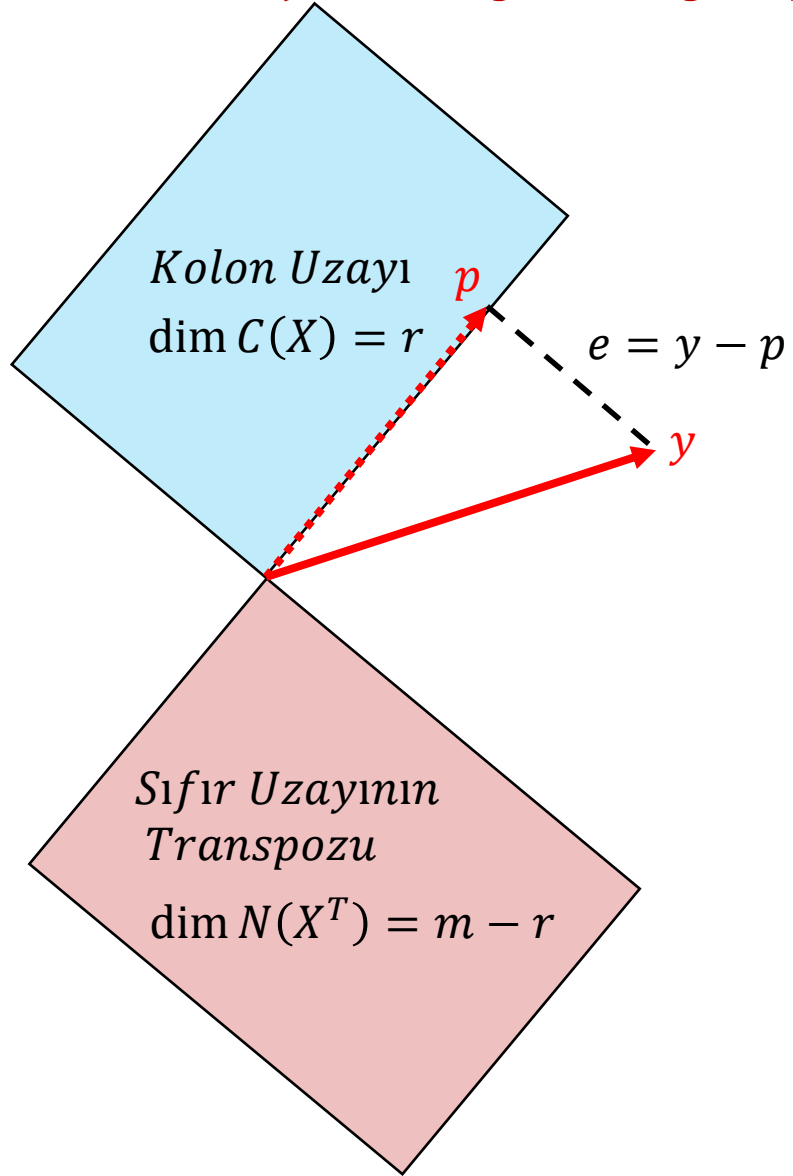
$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta $\sim 1d$

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

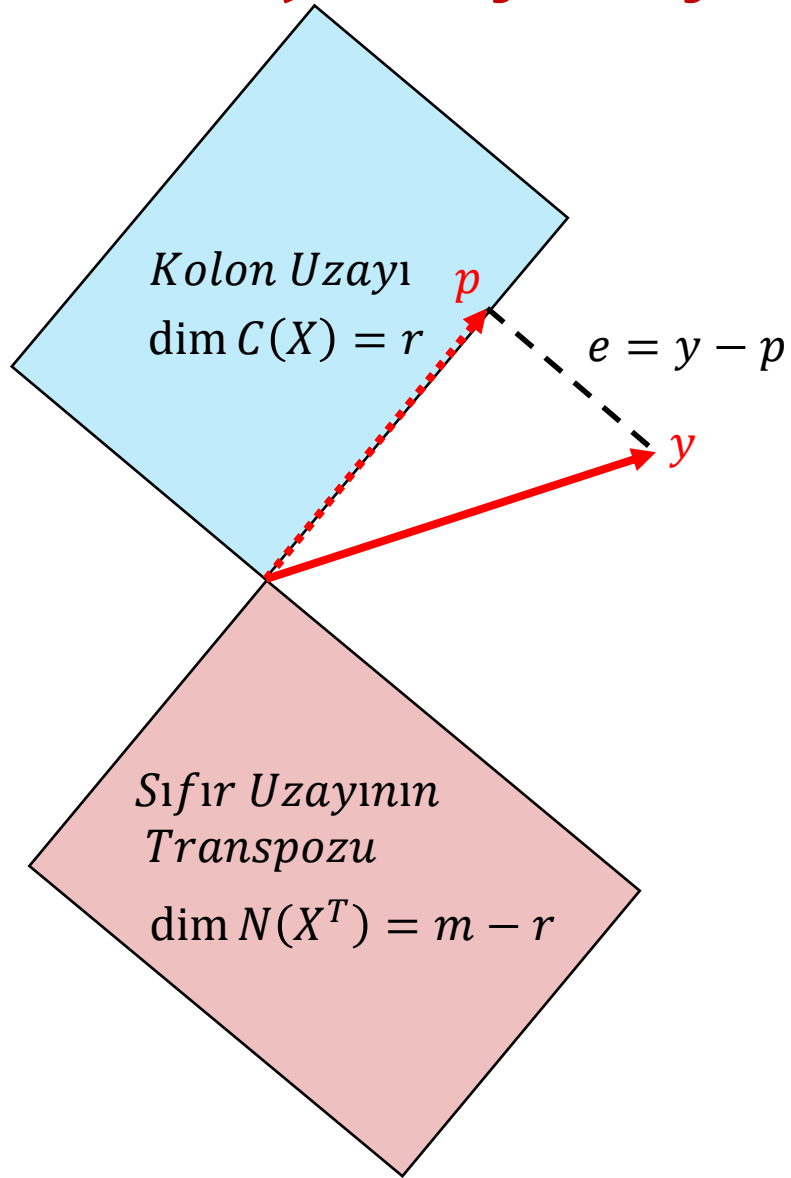
→ 1 boyutta ~ 1d

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta $\sim 1d$

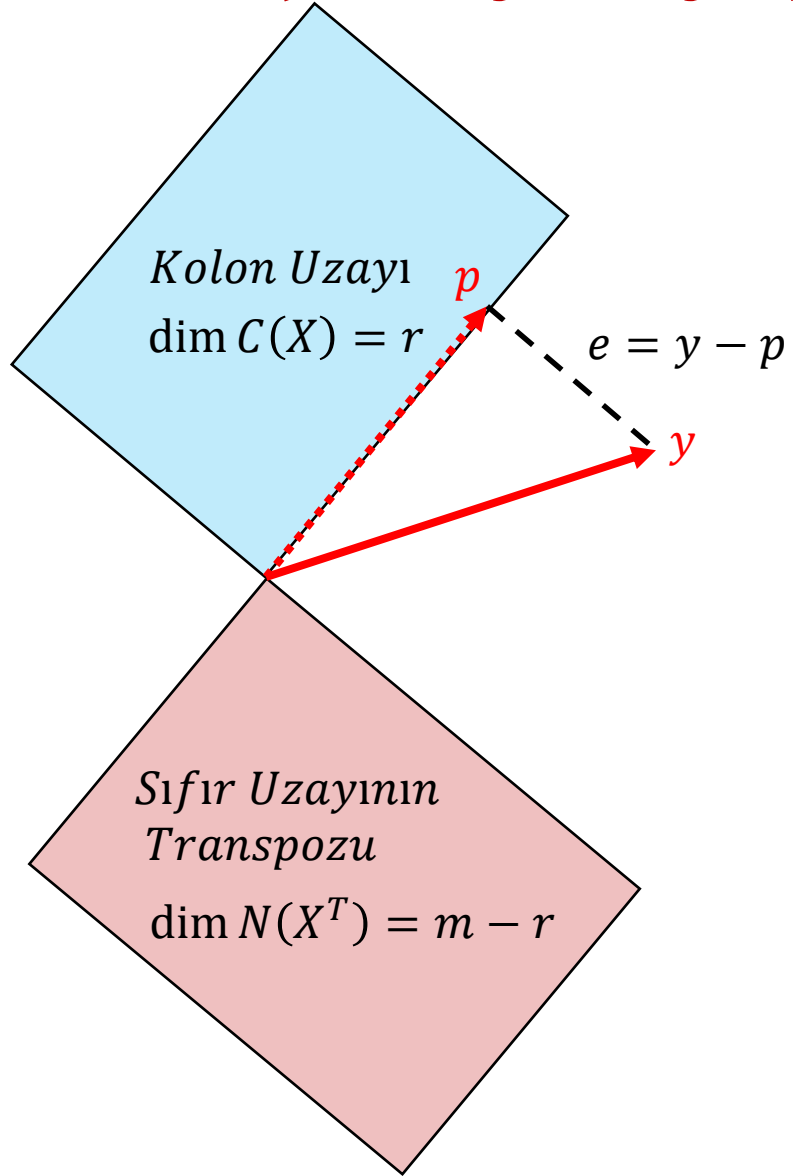
Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta $\sim 1d$

Çok boyuta geçildiğinde;

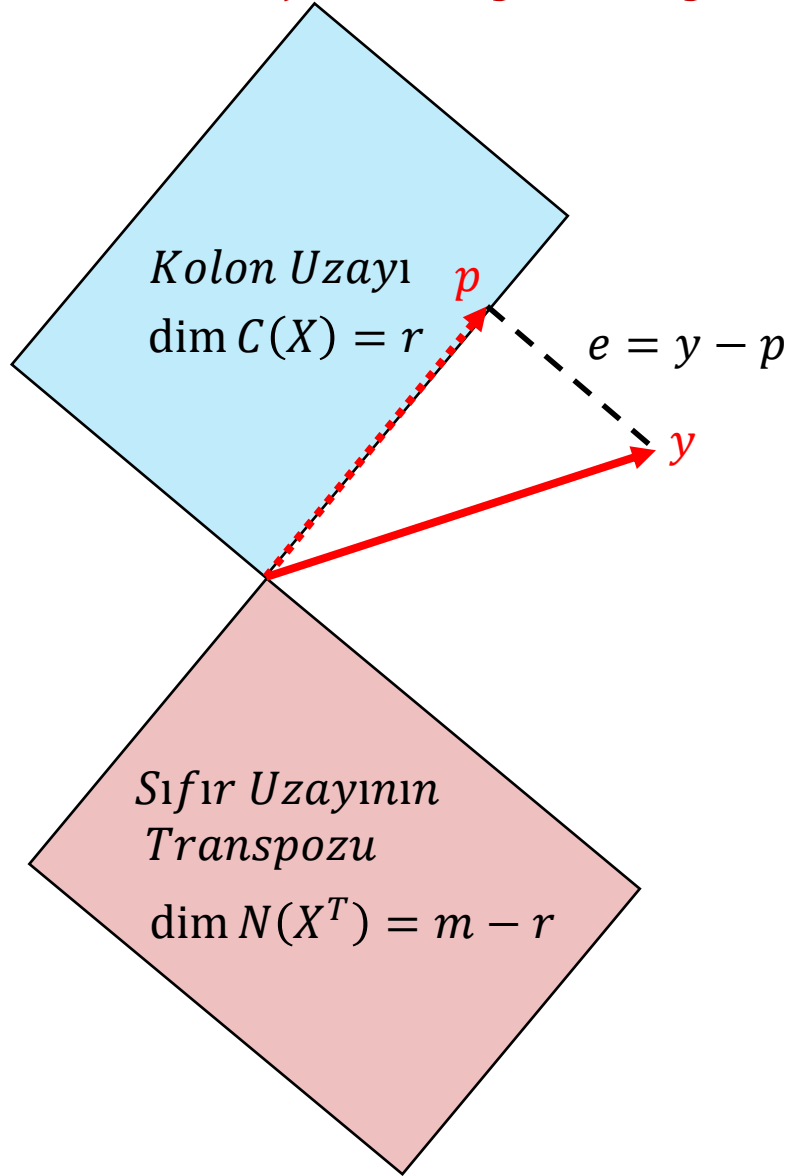
$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

$$X^Ty - X^TX\hat{w} = 0$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta ~ 1d

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

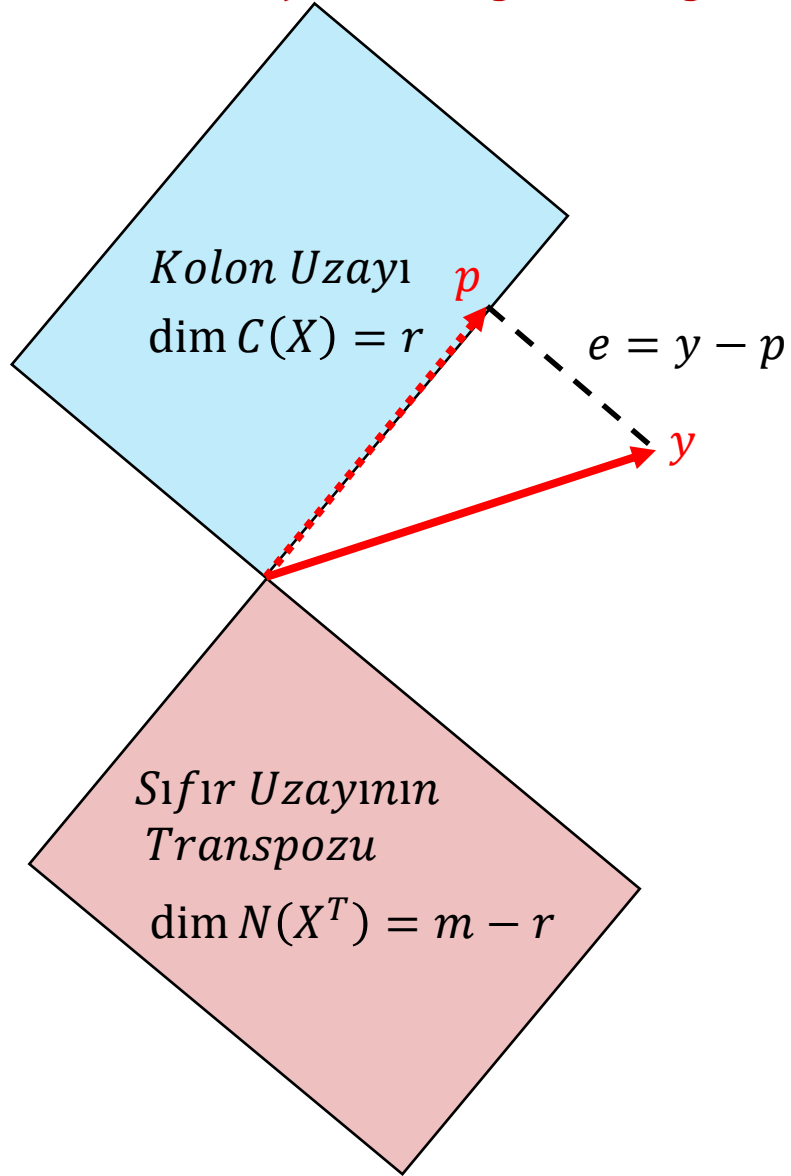
$$X \perp e$$

$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

$$X^Ty - X^TX\hat{w} = 0$$

$$X^TX\hat{w} = X^Ty$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta ~ 1d

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

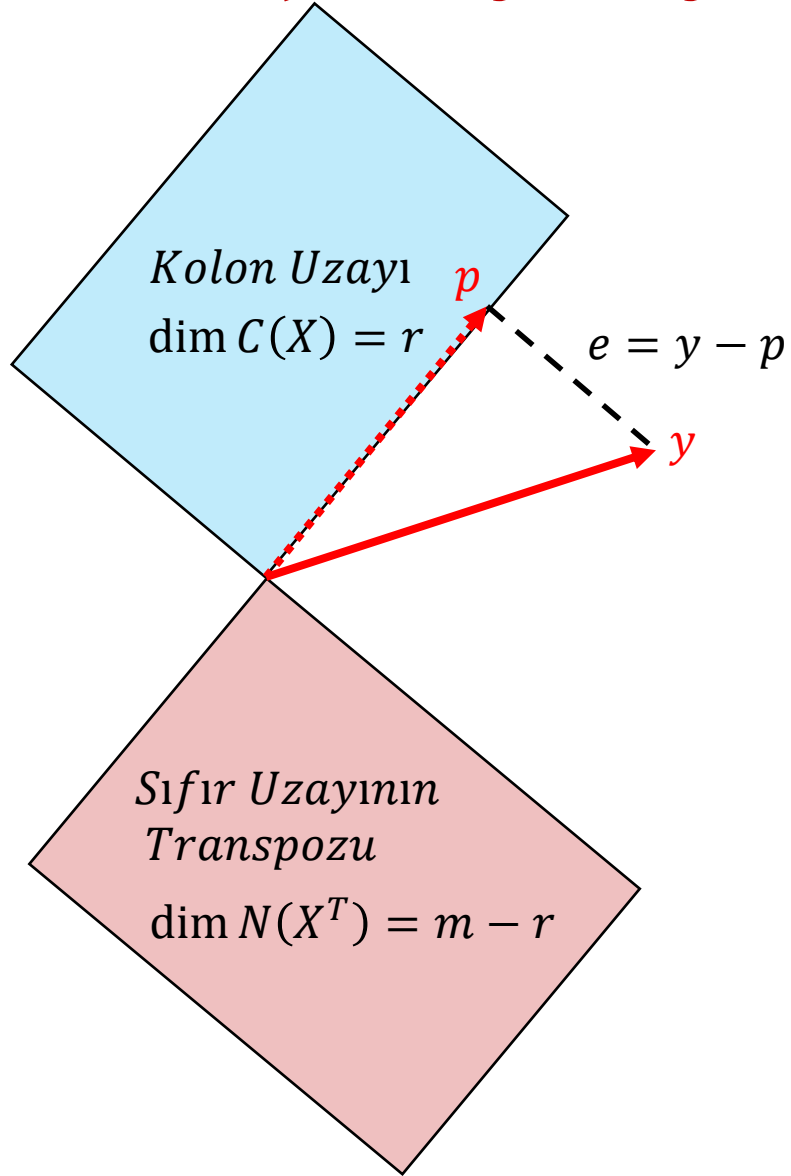
$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

$$X^Ty - X^TX\hat{w} = 0$$

$$X^TX\hat{w} = X^Ty$$

$$\hat{w} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta ~ 1d

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

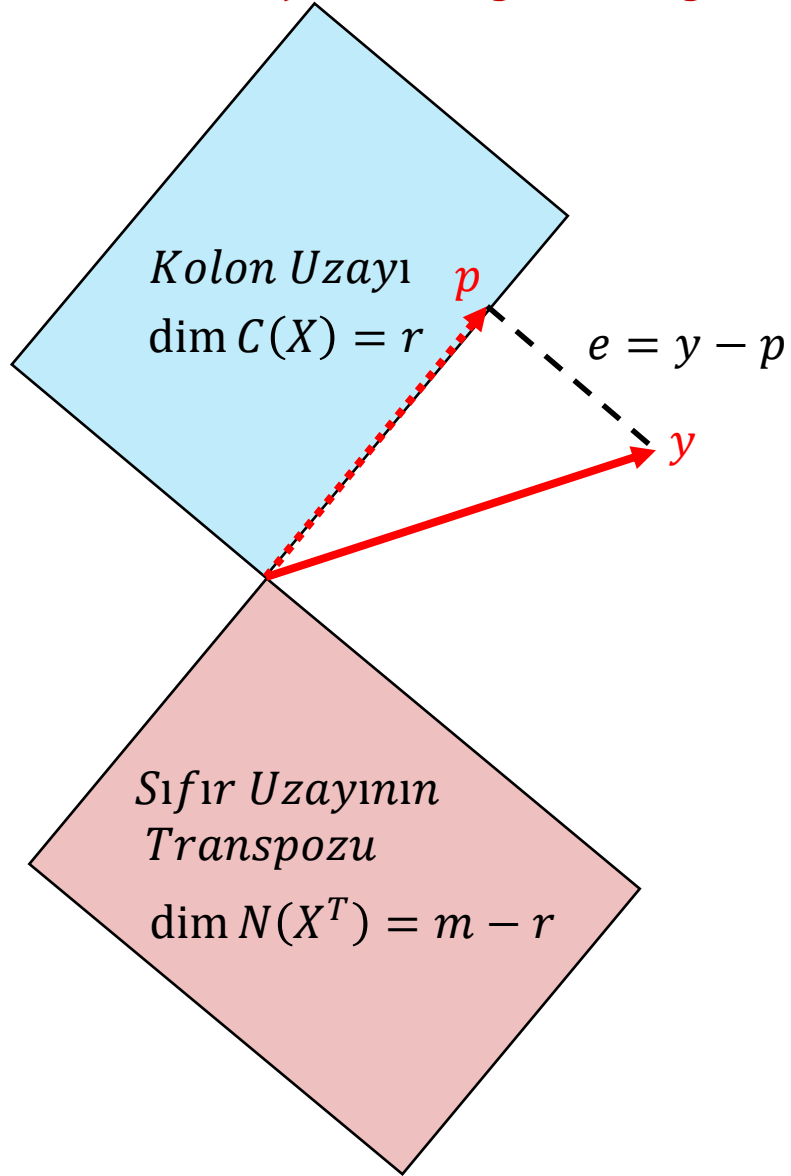
$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

$$X^Ty - X^TX\hat{w} = 0$$

$$X^TX\hat{w} = X^Ty$$

$$\hat{w} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta ~ 1d

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

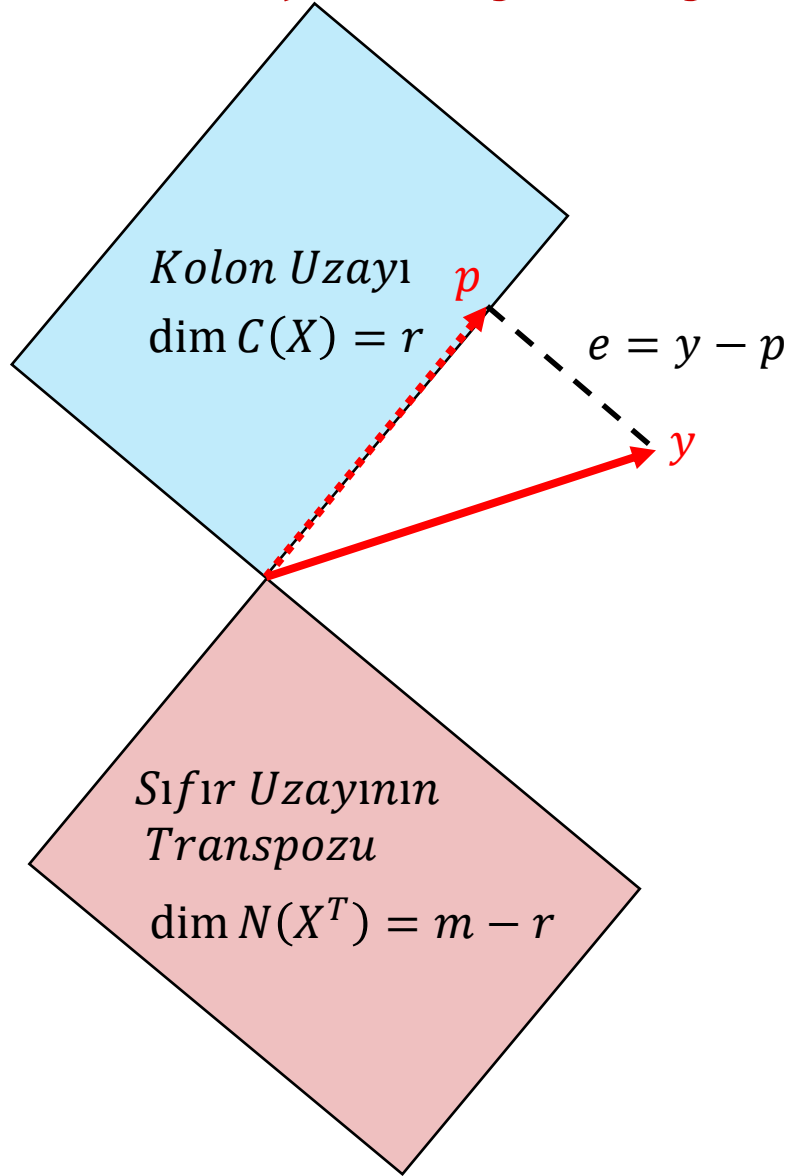
$$X^Ty - X^TX\hat{w} = 0$$

$$X^TX\hat{w} = X^Ty$$

$$\hat{w} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

→ Çok boyutta

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta ~ 1d

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

$$X^Ty - X^TX\hat{w} = 0$$

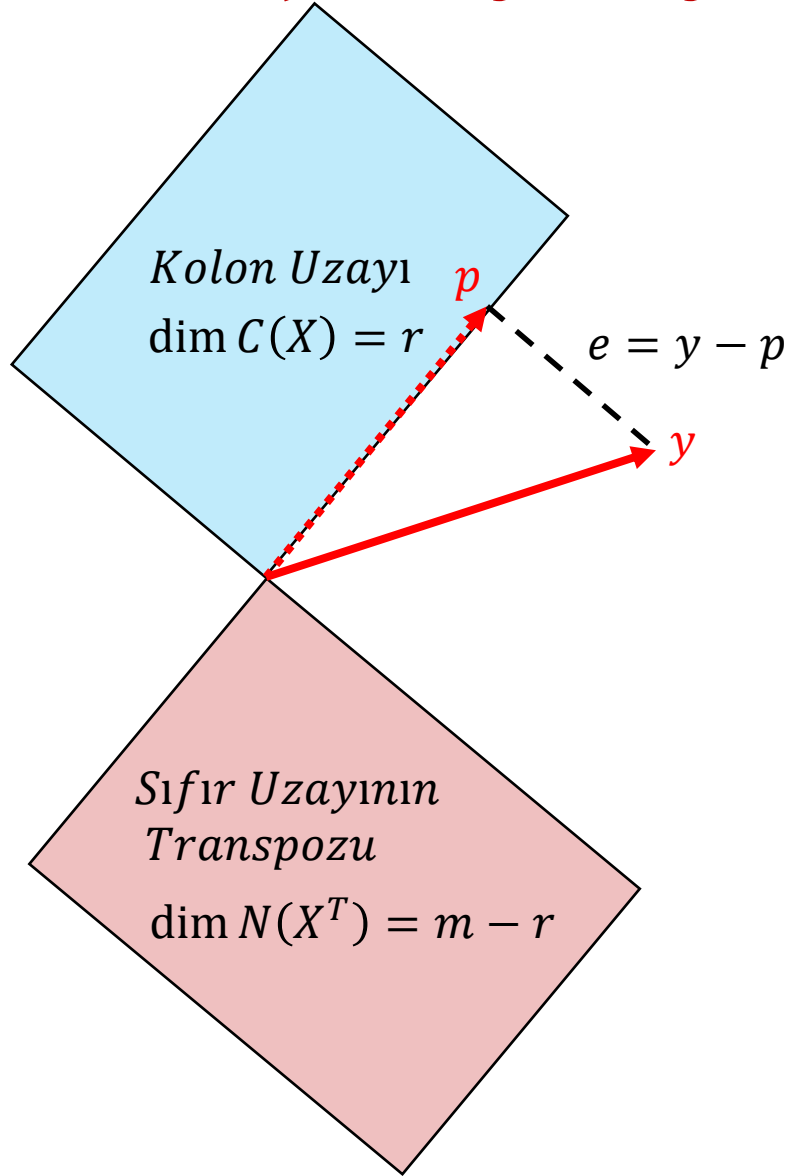
$$X^TX\hat{w} = X^Ty$$

$$\hat{w} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

→ Çok boyutta

$$p = X\hat{w} = X(X^TX)^{-1}X^Ty$$

Neden Projeksiyon yaparız ?



$$P = \frac{xx^T}{x^Tx}$$

→ 1 boyutta ~ 1d

Çok boyuta geçildiğinde;

$$e = y - p = y - \hat{y} = y - X\hat{w}$$

$$X \perp e$$

$$X^T(y - X\hat{w}) = 0$$

$$X^Ty - X^TX\hat{w} = 0$$

$$X^TX\hat{w} = X^Ty$$

$$\hat{w} = (X^TX)^{-1}X^Ty$$

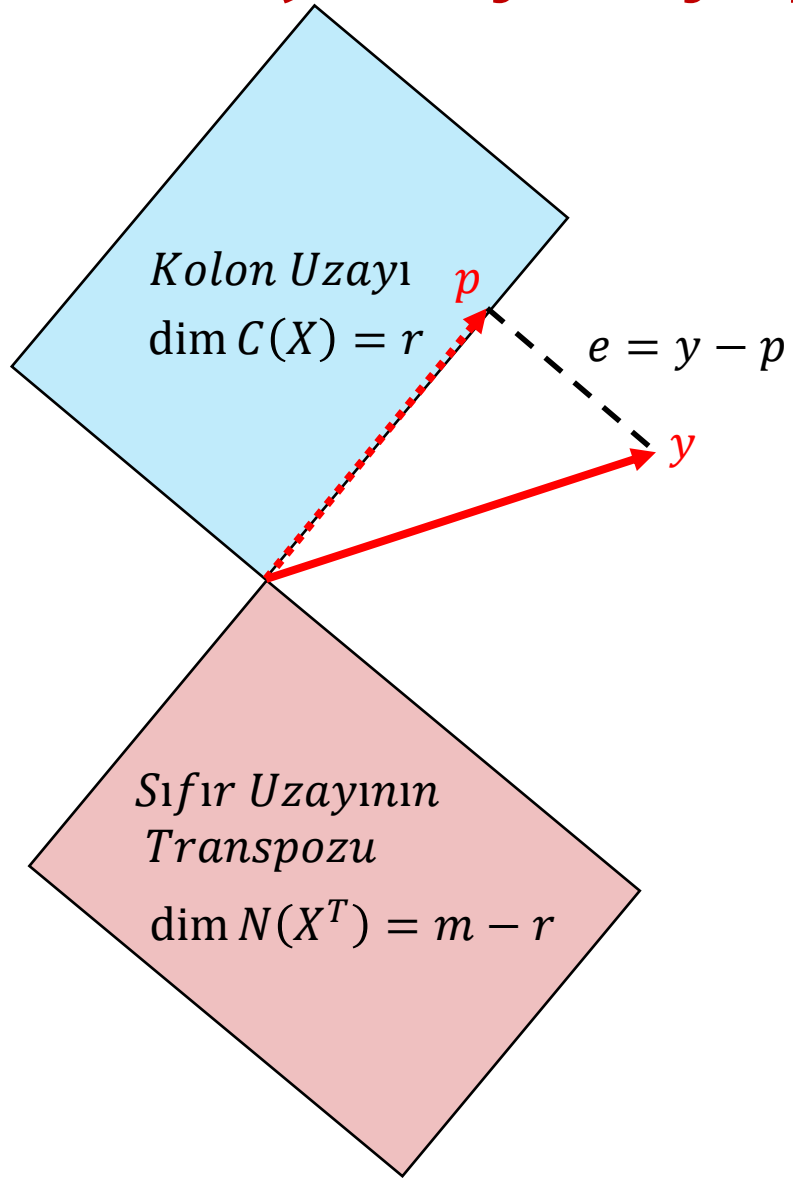
→ Çok boyutta

$$p = X\hat{w} = X(X^TX)^{-1}X^Ty$$

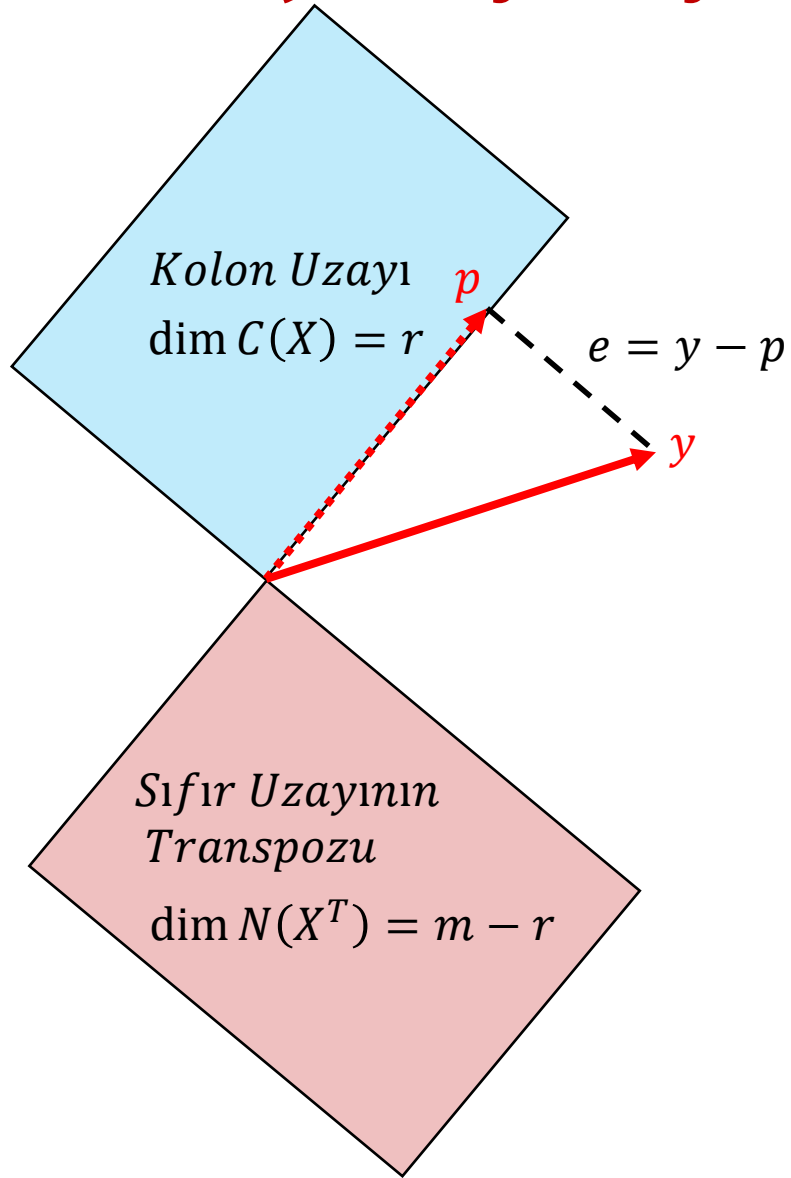
$$P = X(X^TX)^{-1}X^T$$

Neden Projeksiyon yaparız ?

- $P = X(X^T X)^{-1} X^T$



Neden Projeksiyon yaparız ?

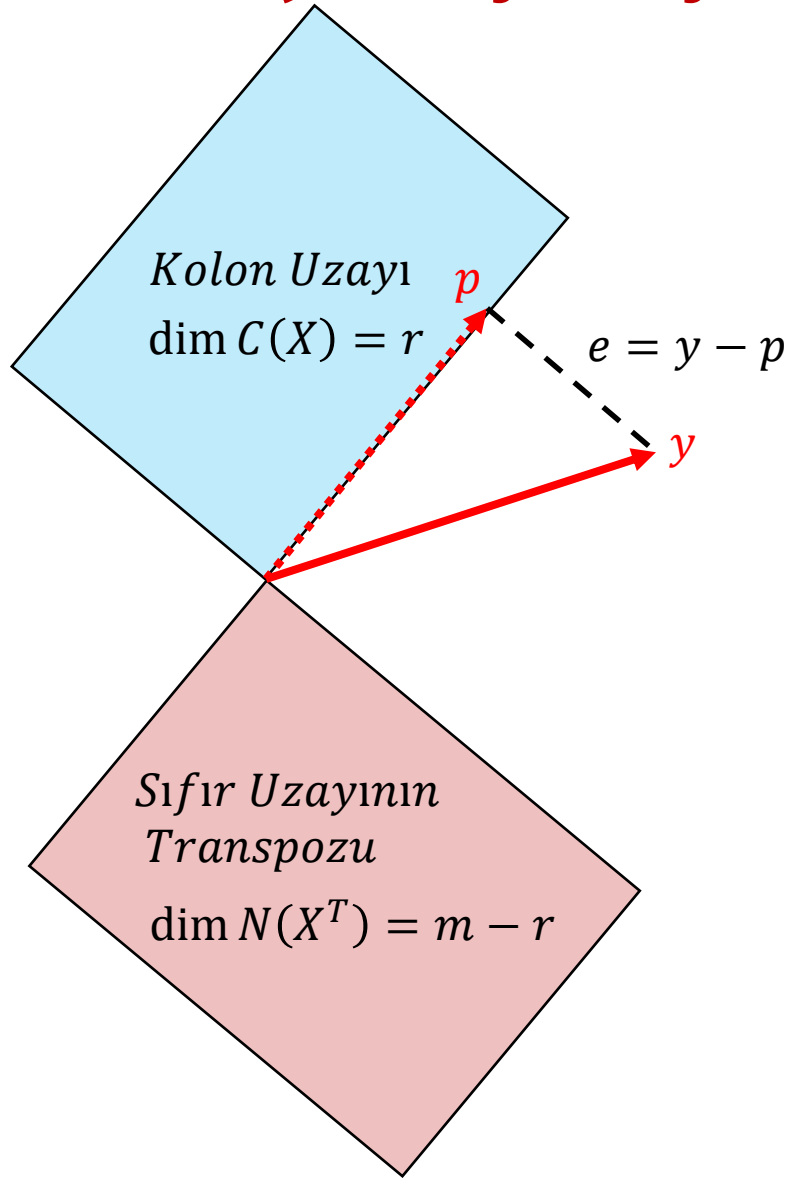


- $P = X(X^T X)^{-1} X^T$
- Eğer tersi alınan değerin içini dışarıya dağıtır isek,

$$P = X X^{-1} (X^T)^{-1} X^T = I$$

birim matrisini elde ederiz.

Neden Projeksiyon yaparız ?



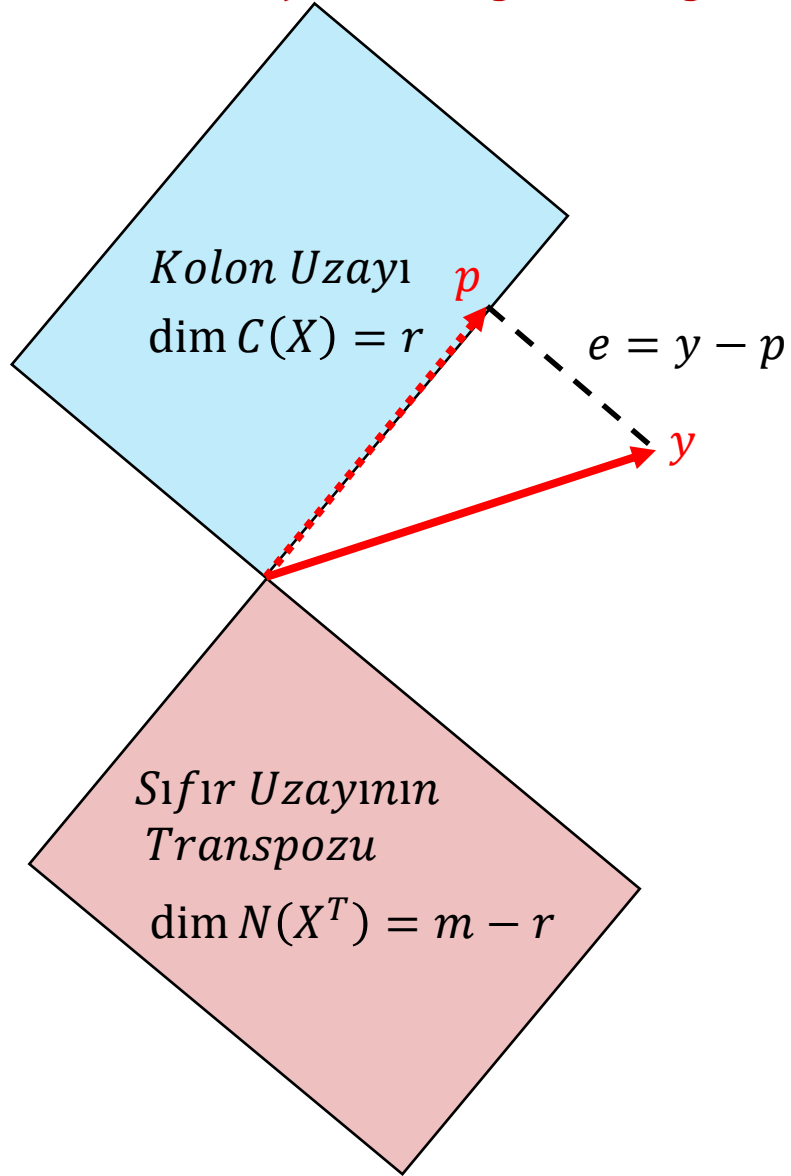
- $P = X(X^T X)^{-1} X^T$
- Eğer tersi alınan değerin içini dışarıya dağıtır isek,

$$P = X X^{-1} (X^T)^{-1} X^T = I$$

birim matrisini elde ederiz.

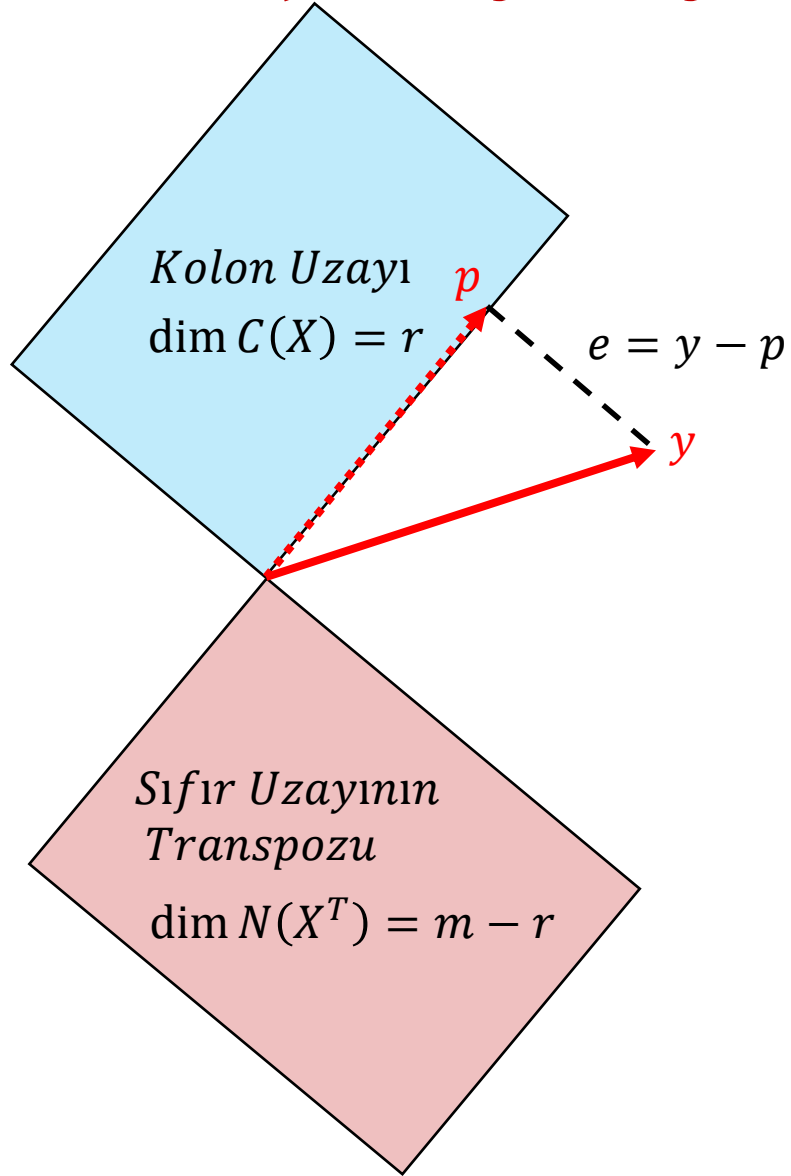
- Bu işlem kabul edilemez,
çünkü X matrisinin tersi alınamıyacak
bir durumda olması gereklidir.

Neden Projeksiyon yaparız ?



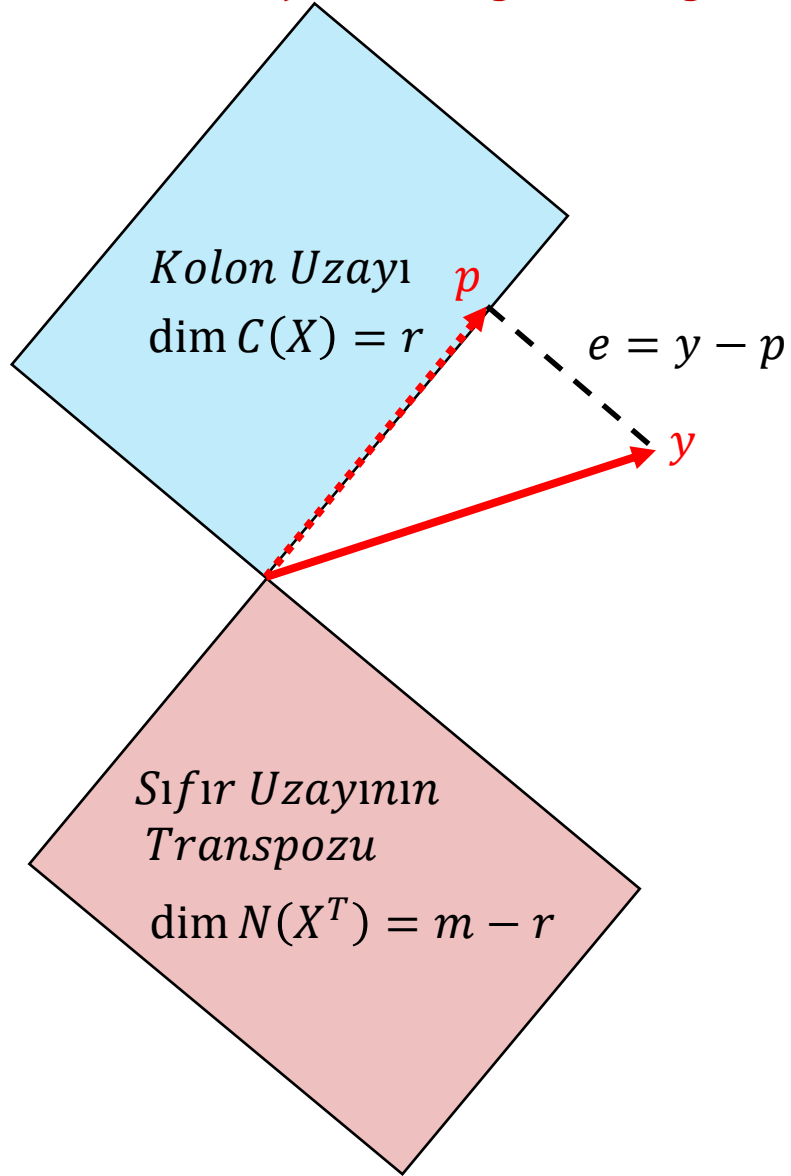
- $P = X(X^T X)^{-1} X^T$
- Eğer tersi alınan değerin içini dışarıya dağıtır isek,
$$P = X X^{-1} (X^T)^{-1} X^T = I$$
birim matrisini elde ederiz.
- Bu işlem kabul edilemez, çünkü X matrisinin tersi alınamıyacak bir durumda olması gereklidir.
- Eğer X matrisi kare ve terslenebilir bir matris olsaydı, o zaman Projeksiyon matrisi Birim matris olurdu.

Neden Projeksiyon yaparız ?



- $P = X(X^T X)^{-1} X^T$
- Eğer tersi alınan değerin içini dışarıya dağıtır isek,
$$P = X X^{-1} (X^T)^{-1} X^T = I$$
birim matrisini elde ederiz.
- Bu işlem kabul edilemez, çünkü X matrisinin tersi alınamıyacak bir durumda olması gereklidir.
- Eğer X matrisi kare ve terslenebilir bir matris olsaydı, o zaman Projeksiyon matrisi Birim matris olurdu.
- Çok boyutta projeksiyon matrisinin transpozu ve tekrar çarpımı yine kendisine eşittir.

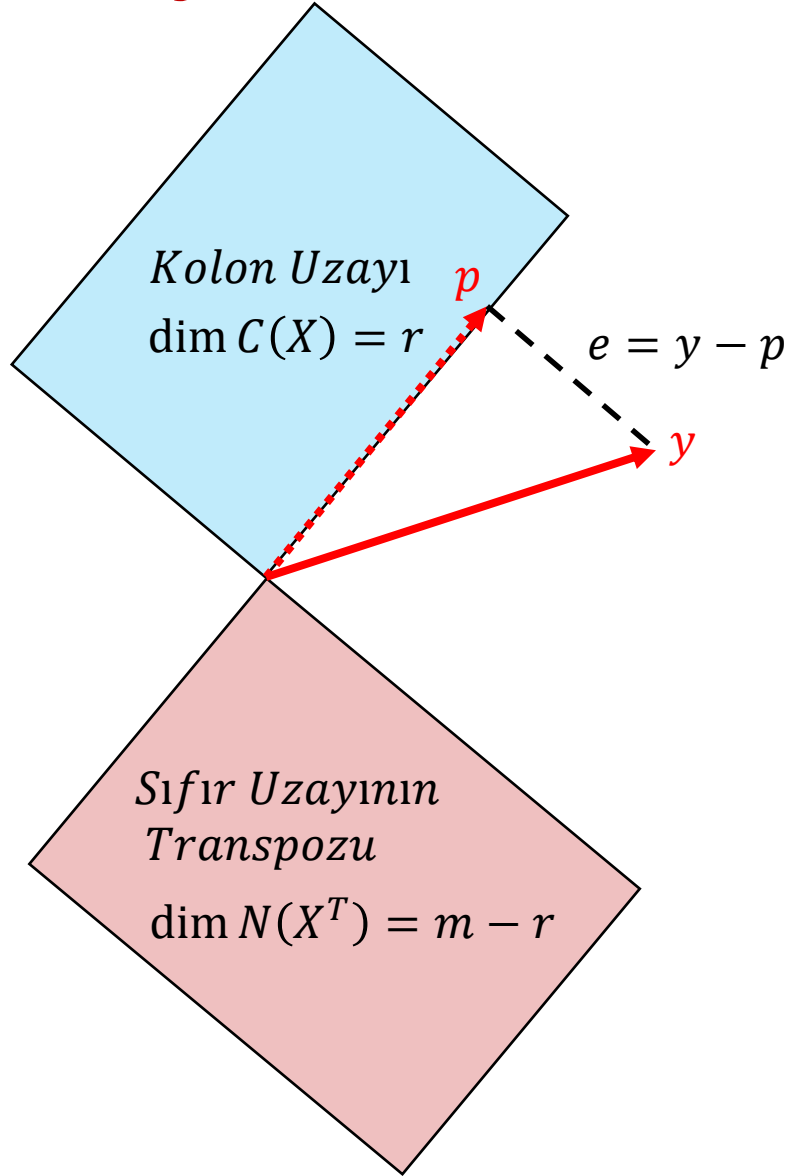
Neden Projeksiyon yaparız ?



- $P = X(X^T X)^{-1} X^T$
- Eğer tersi alınan değerin içini dışarıya dağıtır isek,
$$P = X X^{-1} (X^T)^{-1} X^T = I$$
birim matrisini elde ederiz.
- Bu işlem kabul edilemez, çünkü X matrisinin tersi alınamıyacak bir durumda olması gereklidir.
- Eğer X matrisi kare ve terslenebilir bir matris olsaydı, o zaman Projeksiyon matrisi Birim matris olurdu.
- Çok boyutta projeksiyon matrisinin transpozu ve tekrar çarpımı yine kendisine eşittir.

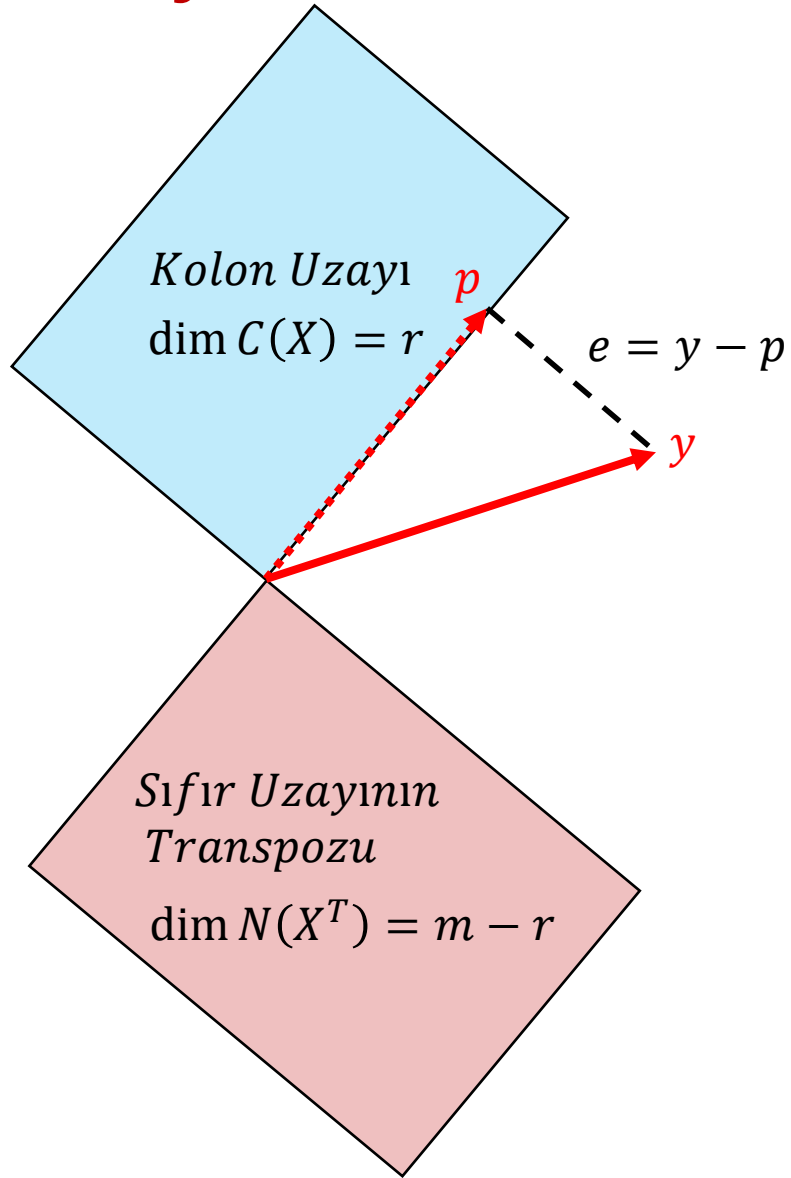
$$P^T = P, \quad P^2 = P$$

Projeksiyon formulleri



*Aradığımız, elde edebileceğimiz en iyi sonuçtur
(makine öğrenmesi için ağırlık değerleri).*

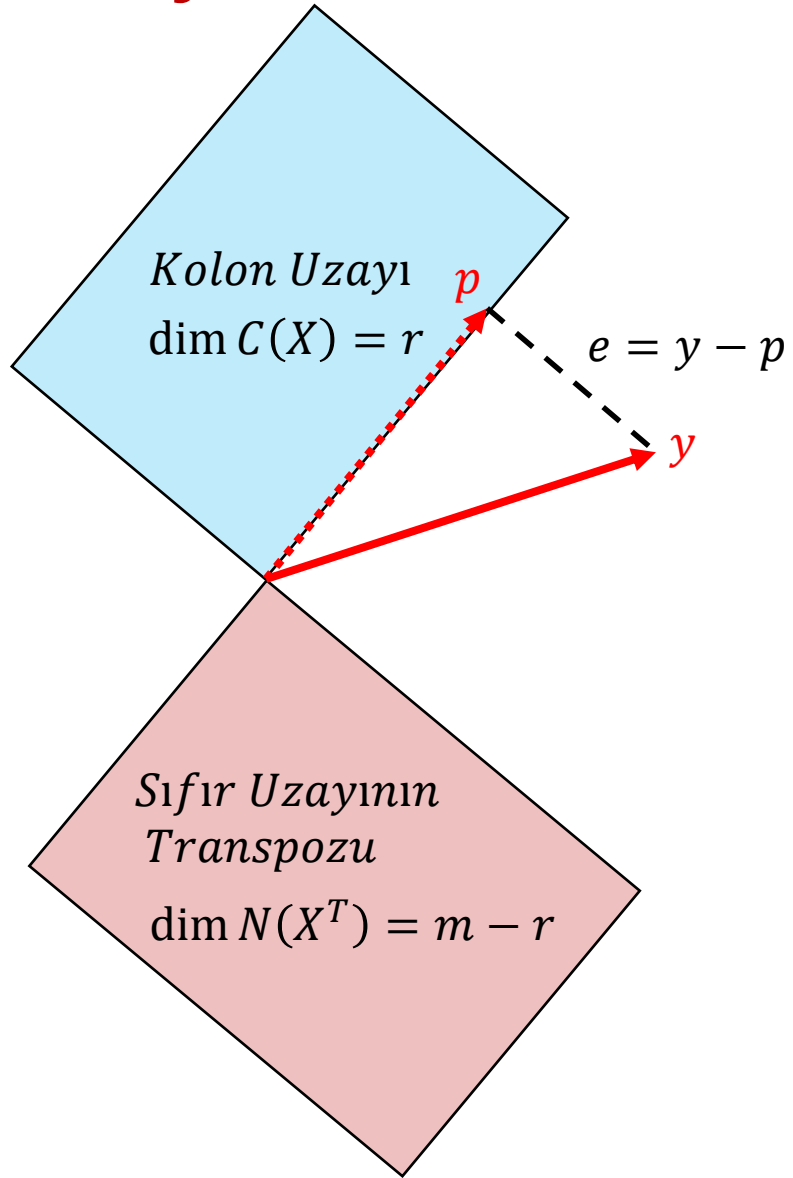
Projeksiyon formulleri



*Aradığımız, elde edebileceğimiz en iyi sonuçtur
(makine öğrenmesi için ağırlık değerleri).*

- $X^T X \hat{w} = X^T y$, çözebileceğim denklem

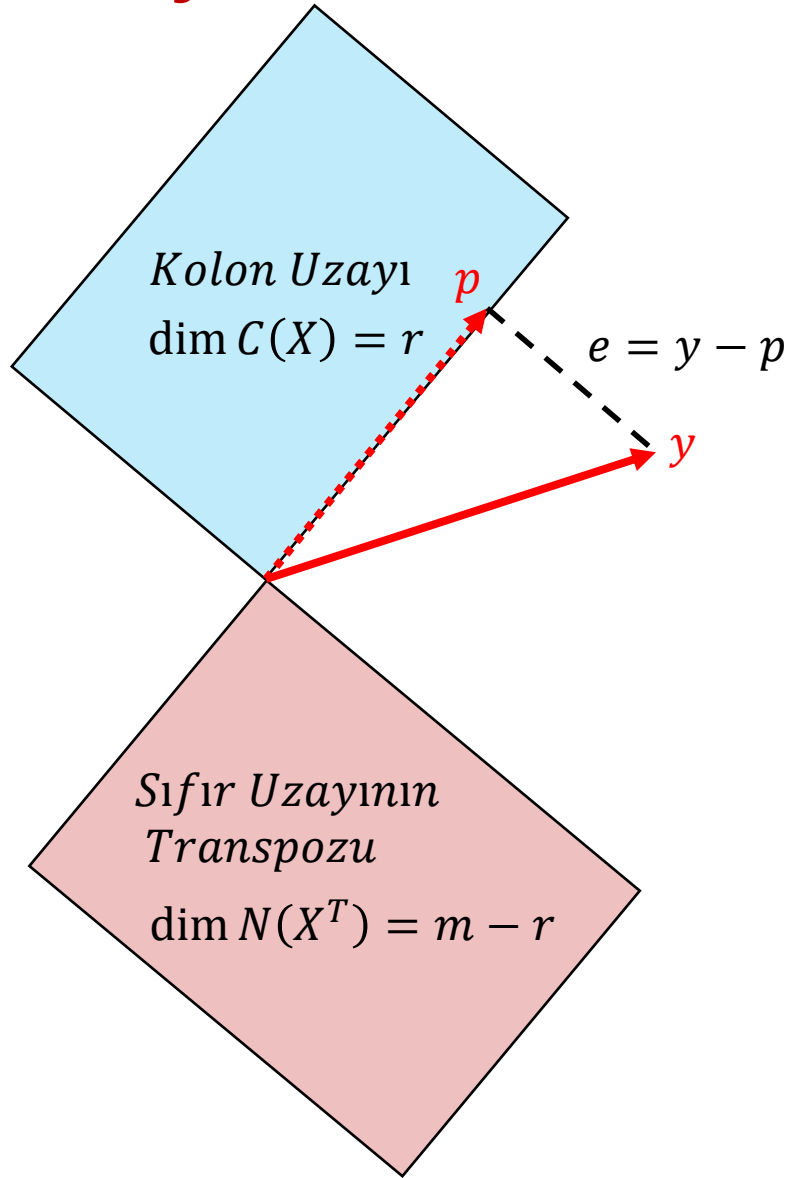
Projeksiyon formulleri



*Aradığımız, elde edebileceğimiz en iyi sonuçtur
(makine öğrenmesi için ağırlık değerleri).*

- $X^T X \hat{w} = X^T y$, çözebileceğim denklem
- $\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$, en iyi w (en yakın w)

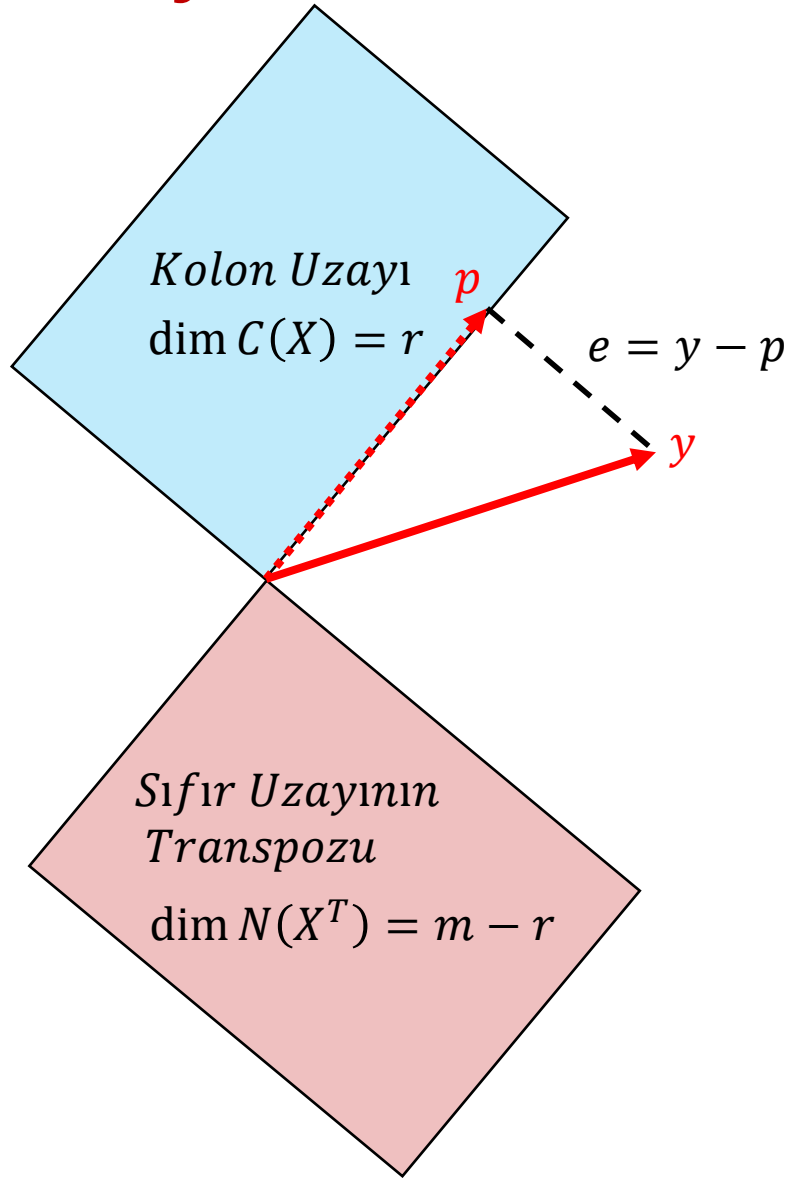
Projeksiyon formulleri



*Aradığımız, elde edebileceğimiz en iyi sonuçtur
(makine öğrenmesi için ağırlık değerleri).*

- $X^T X \hat{w} = X^T y$, çözebileceğim denklem
- $\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$, en iyi w (en yakın w)
- $p = X(X^T X)^{-1} X^T y$, en iyi projeksiyon

Projeksiyon formulleri



*Aradığımız, elde edebileceğimiz en iyi sonuçtur
(makine öğrenmesi için ağırlık değerleri).*

- $X^T X \hat{w} = X^T y$, çözebileceğim denklem
- $\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$, en iyi w (en yakın w)
- $p = X(X^T X)^{-1} X^T y$, en iyi projeksiyon
- $P = X(X^T X)^{-1} X^T$, en iyi projeksiyon matrisi

Pseudo inverse

Denklemimizde tersi alınamayan bir matris var ise $(X^T X)^{-1}$ "pseudoinverse" kullanılır.

https://en.wikipedia.org/wiki/Moore%E2%80%93Penrose_inverse



→ ilgili linkin QR kodu

<https://www.youtube.com/watch?v=Go2aLo7ZOIU>



→ ilgili linkin QR kodu

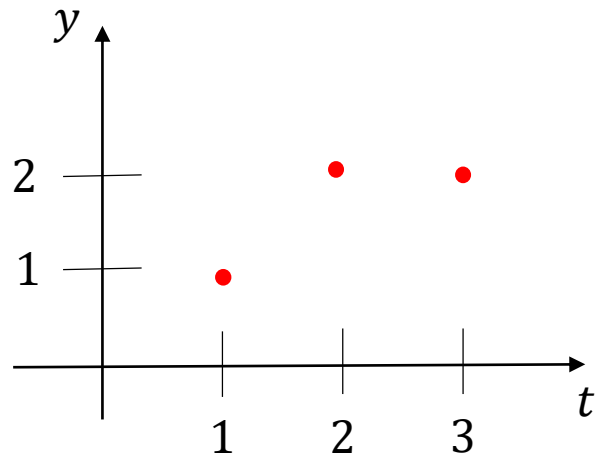
[https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.pinv.html#:~:text=pinv,-numpy.linalg.&text=Compute%20the%20\(Moore%2DPenrose\),including%20all%20large%20singular%20values.&text=Matrix%20or%20stack%20of%20matrices%20to%20be%20pseudo%2Dinverted.](https://docs.scipy.org/doc/numpy/reference/generated/numpy.linalg.pinv.html#:~:text=pinv,-numpy.linalg.&text=Compute%20the%20(Moore%2DPenrose),including%20all%20large%20singular%20values.&text=Matrix%20or%20stack%20of%20matrices%20to%20be%20pseudo%2Dinverted.)



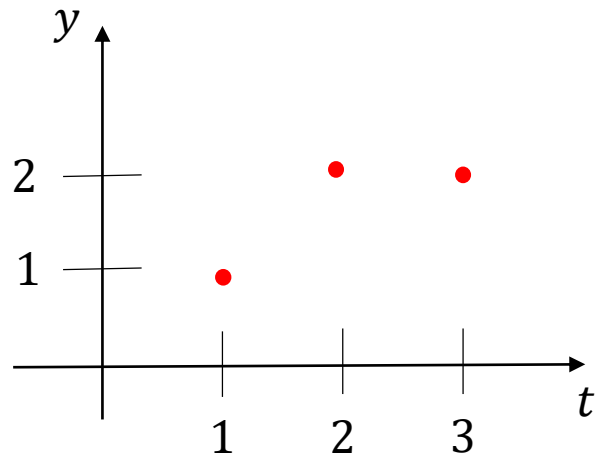
→ ilgili linkin QR kodu

$$\hat{w} = \text{pseudoinverse}(X^T X) X^T y$$

Örnek



Örnek

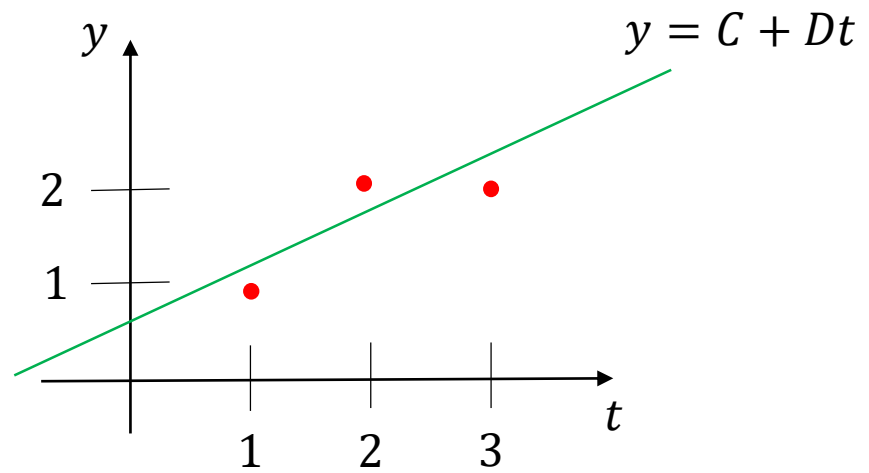


$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

Örnek

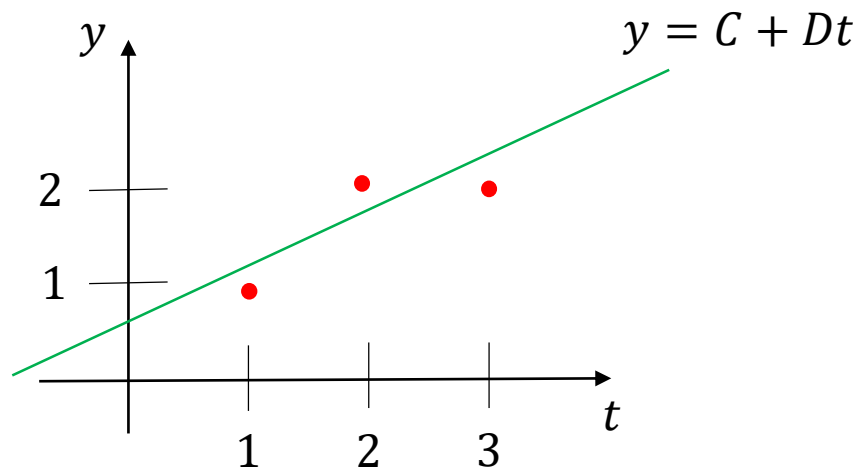


$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

Örnek



$$C + D = 1$$

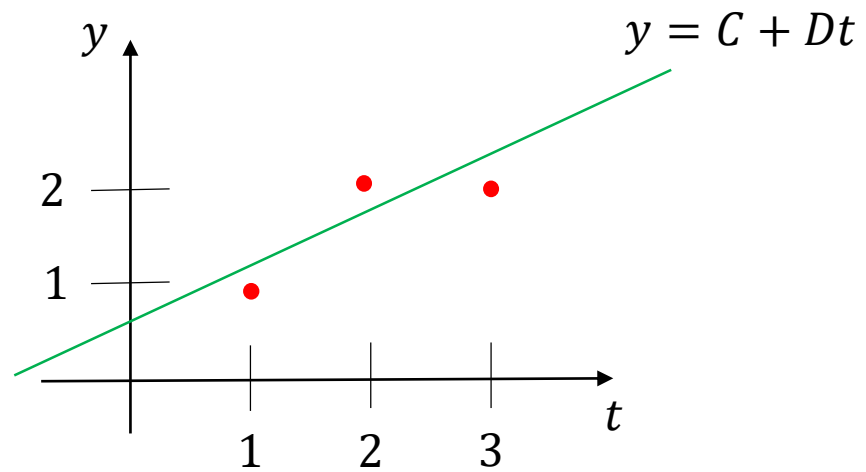
$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$X \quad w \quad y$

Örnek



$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

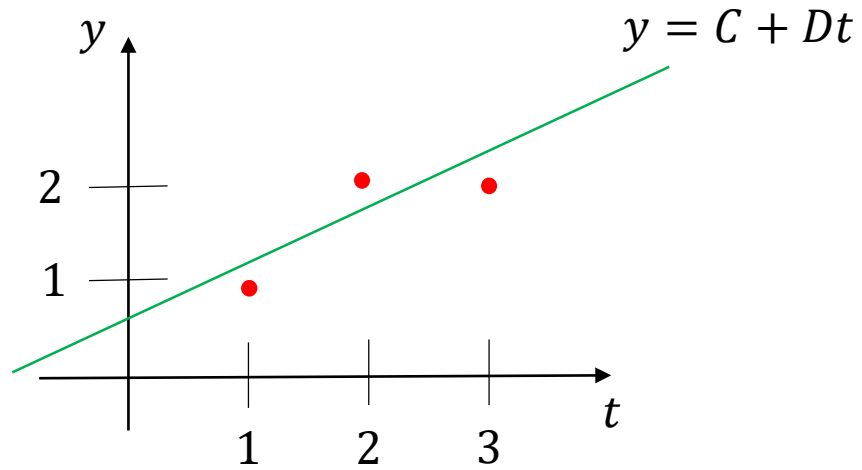
$$C + 3D = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$X \quad w \quad y$

$$\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

Örnek



$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

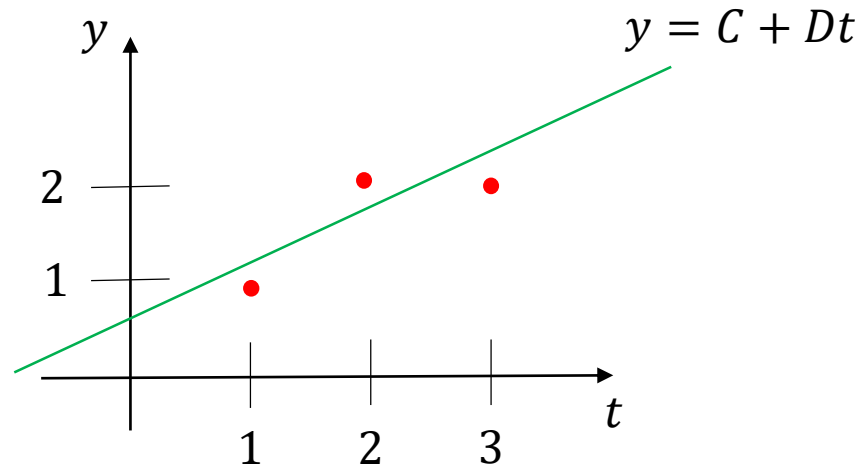
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$X \quad w \quad y$

$$\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Örnek



$$\hat{y} = C + Dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}t$$

$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

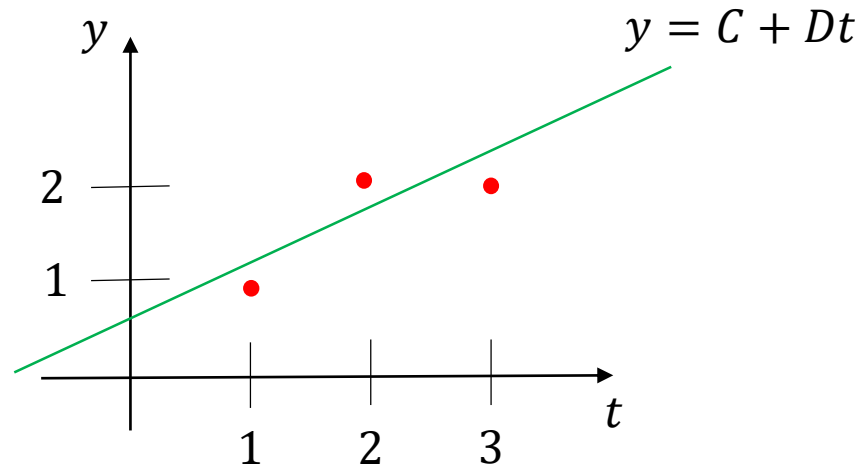
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$X \quad w \quad y$

$$\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

Örnek



$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$X \quad w \quad y$

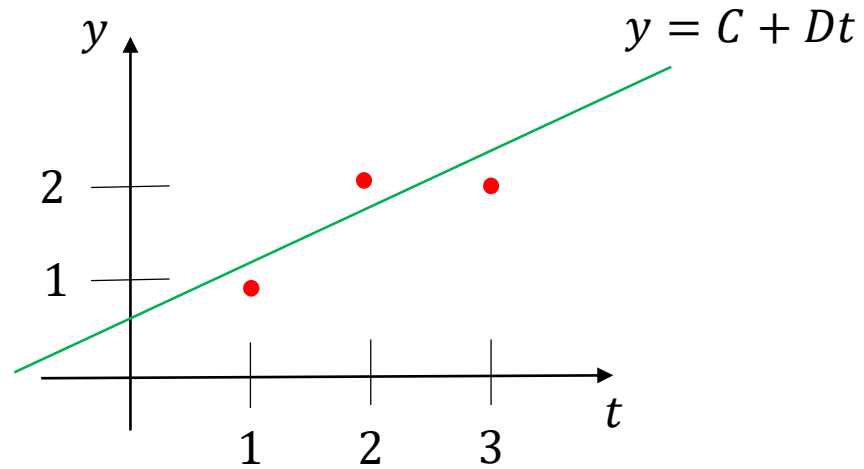
$$\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = C + Dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}t$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

Örnek



$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$X \quad w \quad y$

$$\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

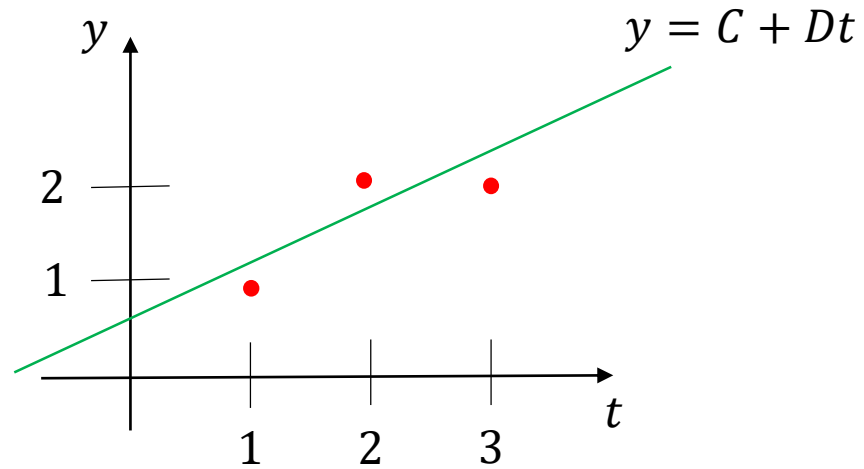
$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = C + Dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}t$$

$$e = y - \hat{y} = y - p$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + 1\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} + 2\frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} + 3\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

Örnek



$$C + D = 1$$

$$C + 2D = 2$$

$$C + 3D = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$X \quad w \quad y$

$$\hat{w} = (X^T X)^{-1} X^T y$$

$$\hat{w} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\hat{y} = C + Dt = \frac{2}{3} + \frac{1}{2}t$$

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} + 1 \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{13}{6} \end{bmatrix}$$

$$e = y - \hat{y} = y - p$$

$$e = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{7}{6} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{13}{6} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{6} \end{bmatrix}$$

Örnek

