Аннотация

Конспект конспекта лекций курса Теории Вероятностей онлайн-магистратуры МФТИ по современной комбинаторике.
Лектор: Райгородский Андрей Михайлович, Жуковский Максим Евгеньевич.

Содержание

1 Комбинаторика

2 Классическая вероятность

Для классической вероятности характерны следующие свойства:

1. исходы образуют полную группу событий, т.е. хотя бы один из возможных элементарных исходов произойдет;
2. события попарно несовместны — может произойти только одно из них, например, может выпасть только 1 из граней кубика;
3. все исходы равновероятны.

2.1 Случайное событие, вероятность

Определение 1 - Вероятность.

Вероятность — отношение числа благоприятствующих исследуемому событию исходов к числу всех возможных исходов.

Определение 2 - Событие.

Событие А — подмножество множества элементарных исходов, из которых складывается искомое.

Определение 3 - Пространство элементарных исходов.

Пространство элементарных исходов Ω — пространство всех возможных исходов эксперимента.

Свойства вероятности:

1. $P(\Omega) = 1$ — вероятность того, что произойдет любой из возможных исходов равна 1 по св-ву классической вероятности;
2. $P(\emptyset) = 0$, $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$;
3. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$ — сигма-аддитивность, распространяется и на случай конечного объединения событий;
4. $P(A \cup B) = P(A) + B(B) - P(A \cup B)$;
5. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ — формула включений-исключений;
6. $\bar{A} := \Omega \setminus A$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ — отрицание события;

7. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n)$;

8. для $A_{i+1} \subseteq A_i$ таких, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, то $\lim_{k \to \infty} P(A_i) = 0$ — свойство непрерывности.

2.2 Условная вероятность

Определение 4 - Условная вероятность.

Условная вероятность — это вероятность того, что событие А произойдет, при условии, что событие В уже произошло.
Обозначается $P(A|B)$ — «вероятность А при условии В».

$$P(A|B) = \frac{|A \cup B|}{|B|} = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} \tag{1}$$

2.2.1 Теорема умножения и независимость событий

Теорема умножения позволяет избавиться от нуля в знаменателе, в формуле условной вероятности.

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cup B) \tag{2}$$

Событие А не зависит от события В, если $P(A|B) = P(A)$, т.е. наступление события В никак не влияет на вероятность наступления события А. Если событие А независимо от события В, то имеет место равенство:

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A) \tag{3}$$

Отсюда, при $P(A) > 0$ находим, что

$$P(A|B) = P(B) \tag{4}$$

т.е. событие В также независимо от А. Т.о. свойство независимости событий взаимно.

События $A_1, \ldots, A_n$ могут быть независимыми в совокупности и попарно.

2.2.2 Формула полной вероятности

Разделим множество Ω на непересекающиеся подмножества $B_1, \ldots, B_k$.

2.2.3 Формула Байеса

3 Схема испытаний Бернулли

4 Случайные величины

4.1 Вероятностные пространства в классическом случае и в схеме испытаний Бернулли

Обобщим вероятностные пространства для классической вероятности и схемы испытаний Бернулли.
Вероятность элементарного исхода ω_i будем обозначать через p_i.
Очевидно, что $p_i \in [0, 1]$, и $p_1 + \ldots + p_n = 1$.
Остальные свойства вероятности так же выполнены для обобщенного понятия вероятности.

Понятие	Классическая вероятность	Сх. испытаний Бернулли	Обобщение
Пространство элементарных исходов	$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$	$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{2^n}\}$	$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$
Элементарный исход	ω_i – 1 из возможных исходов	$\omega_i = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = \{0, 1\}$	ω_i – элементарный исход
Вероятность элементарного исхода	$P(\omega_i) = \frac{1}{n}$	$P(\omega_i) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$	$P(\omega_i) = p_i$, где $p_i \in [0, 1]$
Вероятность события	$P(A) = \frac{\vert A\vert}{n}$	$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$	$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

4.2 Определение случайной величины

Пусть дано Пространство элементарных исходов Ω, и вероятностная мера P на нём.

Определение 5 - Случайная величина.

Случайной величиной называется любая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.
Например, для игральной кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, зададим ξ как $\xi(\omega) = \omega^2$.

Случайная величина ставит в соответствие каждому элементарному исходу какое-либо конкретное число из множества действительных чисел.
Таким образом, "выпадение"какого-то из исходов случайно, но значение случайной величины уже конкретно.

Пример. $\xi = \#$ треугольников в случайном графе.
Количество событий, когда на имеющихся вершинах появился треугольник случайно, но, зная количество таких событий, мы можем получить конкретное ξ.

4.3 Распределение случайной величины

4.4 Функция распределения случайной величины