

Аннотация

Конспект конспекта лекций курса Теории Вероятностей онлайн-магистратуры МФТИ по современной комбинаторике.
Лекторы: Райгородский Андрей Михайлович, Жуковский Максим Евгеньевич.

Содержание

1	Условные обозначения	2
2	Комбинаторика	3
3	Классическая вероятность	4
3.1	Случайное событие, вероятность	4
3.2	Условная вероятность	5
3.2.1	Теорема умножения и независимость событий	5
3.2.2	Формула полной вероятности	5
3.2.3	Формула Байеса	5
4	Схема испытаний Бернулли	6
5	Случайные величины	7
5.1	Вероятностные пространства в классическом случае и в схеме испытаний Бернулли	7
5.2	Определение случайной величины	7
5.3	Функция распределения случайной величины	7
6	Математическое ожидание и дисперсия	9
6.1	Математическое ожидание	9
6.2	Неравенство Маркова	9
6.3	Дисперсия	9
6.4	Неравенство Чебышёва	10
7	Распределения случайных величин	11
7.1	Абсолютно непрерывные случайные величины	11
7.2	Распределения дискретных случайных величин	11
7.3	Распределения а.н.с.в.	11
7.4	Сингулярные распределения	11
8	Независимые случайные величины и закон больших чисел	12
9	Предельные теоремы	13
10	Геометрическая вероятность	13
11	Колмогоровская аксиоматика	13

1 Условные обозначения

2 Комбинаторика

3 Классическая вероятность

Для классической вероятности характерны следующие свойства:

1. исходы образуют полную группу событий, т.е. хотя бы один из возможных элементарных исходов произойдет;
2. события попарно несовместны — может произойти только одно из них, например, может выпасть только 1 из граней кубика;
3. все исходы равновероятны.

3.1 Случайное событие, вероятность

Определение 1 - Вероятность.

Вероятность — отношение числа благоприятствующих исследуемому событию исходов к числу всех возможных исходов.

Определение 2 - Событие.

Событие A — подмножество множества элементарных исходов, из которых складывается исковое.

Определение 3 - Пространство элементарных исходов.

Пространство элементарных исходов Ω — пространство всех возможных исходов эксперимента.

Свойства вероятности:

1. $P(\Omega) = 1$ — вероятность того, что произойдет любой из возможных исходов равна 1 по св-ву классической вероятности;
2. $P(\emptyset) = 0$, $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$;
3. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$ — сигма-аддитивность, распространяется и на случай конечного объединения событий;
4. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
5. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - \dots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \dots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \dots \cap A_n)$ — формула включений-исключений;
6. $\bar{A} := \Omega \setminus A$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ — отрицание события;
7. $P(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)$;
8. для $A_{i+1} \subseteq A_i$ таких, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, то $\lim_{k \rightarrow \infty} P(A_i) = 0$ — свойство непрерывности.

3.2 Условная вероятность

Определение 4 - Условная вероятность.

Условная вероятность — это вероятность того, что событие А произойдет, при условии, что событие В уже произошло.

Обозначается $P(A|B)$ — «вероятность А при условии В».

$$P(A|B) = \frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (1)$$

3.2.1 Теорема умножения и независимость событий

Теорема умножения позволяет избавиться от нуля в знаменателе, в формуле условной вероятности.

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cap B) \quad (2)$$

Событие А не зависит от события В, если $P(A|B) = P(A)$, т.е. наступление события В никак не влияет на вероятность наступления события А. Если событие А независимо от события В, то имеет место равенство:

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A) \quad (3)$$

Отсюда, при $P(A) > 0$ находим, что

$$P(B|A) = P(B) \quad (4)$$

т.е. событие В также независимо от А. Т.о. свойство независимости событий взаимно.

События A_1, \dots, A_n могут быть независимыми в совокупности и попарно.

3.2.2 Формула полной вероятности

Разделим множество Ω на непересекающиеся подмножества B_1, \dots, B_k .

3.2.3 Формула Байеса

4 Схема испытаний Бернулли

5 Случайные величины

5.1 Вероятностные пространства в классическом случае и в схеме испытаний Бернулли

Обобщим вероятностные пространства для классической вероятности и схемы испытаний Бернулли.

Вероятность элементарного исхода ω_i будем обозначать через p_i .

Очевидно, что $p_i \in [0, 1]$, и $p_1 + \dots + p_n = 1$.

Остальные свойства вероятности так же выполнены для обобщенного понятия вероятности.

Понятие	Классическая вероятность	Сх. испытаний Бернулли	Обобщение
Пространство элементарных исходов	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_{2^n}\}$	$\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$
Элементарный исход	$\omega_i - 1$ из возможных исходов	$\omega_i = (x_1, \dots, x_n)$, где $x_i = \{0, 1\}$	$\omega_i - \text{элементарный исход}$
Вероятность элементарного исхода	$P(\omega_i) = \frac{1}{n}$	$P(\omega_i) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$	$P(\omega_i) = p_i$, где $p_i \in [0, 1]$
Вероятность события	$P(A) = \frac{ A }{n}$	$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$	$P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$

5.2 Определение случайной величины

Пусть дано Пространство элементарных исходов Ω , и вероятностная мера P на нём.

Определение 5 - Случайная величина.

Случайной величиной называется любая функция $\xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Например, для игральной кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, зададим ξ как $\xi(\omega) = \omega^2$.

Случайная величина ставит в соответствие каждому элементарному исходу какое-либо конкретное число из множества действительных чисел.

Таким образом, "выпадение"какого-то из исходов случайно, но значение случайной величины уже конкретно.

Пример. $\xi = \#$ треугольников в случайном графе.

Количество событий, когда на имеющихся вершинах появился треугольник случайно, но, зная количество таких событий, мы можем получить конкретное ξ .

5.3 Функция распределения случайной величины

Существует важная задача создания методов изучения случайных величин.

Случайная величина под влиянием случайных обстоятельств может принимать различные значения. Заранее предсказать, какое значение примет величина невозможно, т.к. оно меняется случайным образом от испытания к испытанию.

Для того, чтобы задавать вероятности значений случайных величин вводится понятие **функции распределения случайной величины**.

Определение 6 - Распределение случайной величины.

Распределением случайной величины называется вероятность того, что случайная величина ξ принимает конкретное значение y_i :

$$P(\xi = y_i) = P(\{\omega_j : \xi(\omega_j) = y_i\}) \quad (5)$$

Т. е. это вероятность всех элементарных исходов, при которых случайная величина принимает значение y_i .

Определение 7 - Функция распределения случайной величины.

Пусть ξ — случайная величина, $x \in \mathbb{R}$ — произвольное действительное число. Вероятность того, что ξ примет значение, меньшее, чем x называется *функцией распределения случайной величины*.

$$F_\xi(x) := P(\xi \leq x) = \sum_{i : y_i \leq x} P(\xi = y_i) \quad (6)$$

6 Математическое ожидание и дисперсия

6.1 Математическое ожидание

Математическое ожидание даёт оценку случайной величины «в среднем», что часто бывает нужно в реальных задачах.

Определение 8 - Математическое ожидание.

Пусть $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ — возможные значения случайной величины ξ , а $p_1, p_2, \dots, p_n, \dots$ — соответствующие им вероятности.

Если ряд

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \quad (7)$$

сходится абсолютно, то его сумма называется *математическим ожиданием дискретной случайной величины*.

Для непрерывных с.в.:

$$\mathbb{E}\xi = \int x \cdot p(x) dx = \int x \cdot dF(x) \quad (8)$$

Мат. ожидание линейно:

$$\mathbb{E}(c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2) = c_1 \mathbb{E}\xi_1 + c_2 \mathbb{E}\xi_2 \quad (9)$$

6.2 Неравенство Маркова

Теорема 1 - (Маркова).

Пусть ξ принимает только неотрицательные значения. Пусть $a > 0$, тогда

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{a} \quad (10)$$

6.3 Дисперсия

Важное значение имеет то, насколько сильно случайные величины могут отличаться от своего математического ожидания. Для такой оценки можно использовать дисперсию и некоторые другие числовые характеристики.

Определение 9 - Дисперсия.

Дисперсия случайной величины:

$$\mathbb{D}\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E})^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 \quad (11)$$

6.4 Неравенство Чебышёва

Теорема 2 - Неравенство Чебышёва.

Пусть η — любая случайная величина. Пусть $b > 0$. Тогда:

$$P(|\eta - \mathbb{E}\eta| \geq b) \leq \frac{\mathbb{D}\eta}{b^2} \quad (12)$$

7 Распределения случайных величин

В разделе 5 речь шла только о дискретных с.в. Для дальнейшего рассмотрения видов распределений случайных величин введём понятие абсолютно непрерывной случайной величины.

7.1 Абсолютно непрерывные случайные величины

Для а.н.с.в. характерна непрерывная функция распределения. Пусть $p(x)$ — плотность распределения, тогда она обладает свойствами:

1. $\forall x \ p(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$;

В а.н. случае функция распределения представляется в виде:

$$F_{\xi}(x) = \int_{-\infty}^x p(t)dt \quad (13)$$

7.2 Распределения дискретных случайных величин

Примеры распределений и их функции распределения можно найти на этом сайте.

7.3 Распределения а.н.с.в.

Примеры распределений и их функции распределения можно найти на этом сайте.

7.4 Сингулярные распределения

8 Независимые случайные величины и закон больших чисел

- 9 **Предельные теоремы**
- 10 **Геометрическая вероятность**
- 11 **Колмогоровская аксиоматика**