# Оглавление

## 0.1 Условные обозначения

Нужно проверить обозначения в документе, везде ли они совпадают.

# Глава 1

# Комбинаторика

Когда-нибудь потом. В целом, базовые вещи итак в голове.

# Глава 2

# Теория вероятностей

## 2.1 Классическая вероятность

Если идти последовательно, как в лекции и книгах, то этот раздел должен присутствовать. Но нужен ли он в конспекте??

Для классической вероятности характерны следующие свойства:

1. исходы образуют полную группу событий, т.е. хотя бы один из возможных элементарных исходов произойдет;
2. события попарно несовместны — может произойти только одно из них, например, может выпасть только 1 из граней кубика;
3. все исходы равновероятны.

### 2.1.1 Случайное событие, вероятность

Определение 1 - Вероятность.

Вероятность — отношение числа благоприятствующих исследуемому событию исходов к числу всех возможных исходов.

Определение 2 - Событие.

Событие A — подмножество множества элементарных исходов, из которых складывается искомое.

Определение 3 - Пространство элементарных исходов.

Пространство элементарных исходов $\Omega$ — пространство всех возможных исходов эксперимента.

**Свойства вероятности**:

1. $P(\Omega) = 1$ — вероятность того, что произойдет любой из возможных исходов равна 1 по св-ву классической вероятности;

2. $P(\emptyset) = 0$, $P(A) = 0 \Leftrightarrow A = \emptyset$;
3. $P(A \sqcup B) = P(A) + P(B)$ — сигма-аддитивность, распространяется и на случай конечного объединения событий;
4. $P(A \cup B) = P(A) + B(B) - P(A \cup B)$;
5. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) - P(A_1 \cap A_2) - \ldots - P(A_{n-1} \cap A_n) + \ldots + (-1)^{n-1} P(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$ — формула включений-исключений;
6. $\bar{A} := \Omega \setminus A$; $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ — отрицание события;
7. $P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots A_n) \leq P(A_1) + \ldots + P(A_n)$;
8. для $A_{i+1} \subseteq A_i$ таких, что $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \emptyset$, то $\lim_{k\to\infty} P(A_i) = 0$ — свойство непрерывности.

### 2.1.2 Условная вероятность

---

Определение 4 - Условная вероятность.

---

Условная вероятность — это вероятность того, что событие A произойдет, при условии, что событие B уже произошло.
Обозначается $P(A|B)$ — «вероятность A при условии B».

$$P(A|B) = \frac{|A \cup B|}{|B|} = \frac{P(A \cup B)}{P(B)} \tag{2.1}$$

#### Теорема умножения и независимость событий

Теорема умножения позволяет избавиться от нуля в знаменателе, в формуле условной вероятности.

$$P(A|B) \cdot P(B) = P(A \cup B) \tag{2.2}$$

Событие A не зависит от события B, если $P(A|B) = P(A)$, т.е. наступление события B никак не влияет на вероятность наступления события A. Если событие A независимо от события B, то имеет место равенство:

$$P(A) \cdot P(B|A) = P(B) \cdot P(A) \tag{2.3}$$

Отсюда, при $P(A) > 0$ находим, что

$$P(A|B) = P(B) \tag{2.4}$$

т.е. событие B также независимо от A. Т.о. свойство независимости событий взаимно.

События $A_1, \ldots, A_n$ могут быть независимыми в совокупности и попарно.

### Формула полной вероятности

Разделим множество $\Omega$ на непересекающиеся подмножества $B_1, \ldots, B_k$.

### Формула Байеса

## 2.2 Схема испытаний Бернулли

Когда-нибудь потом. В целом, базовые вещи итак в голове.

## 2.3 Случайные величины

### 2.3.1 Вероятностные пространства в классическом случае и в схеме испытаний Бернулли

Обобщим вероятностные пространства для классической вероятности и схемы испытаний Бернулли.
Вероятность элементарного исхода $\omega_i$ будем обозначать через $p_i$.
Очевидно, что $p_i \in [0, 1]$, и $p_1 + \ldots + p_n = 1$.
Остальные свойства вероятности так же выполнены для обобщенного понятия вероятности.

| Понятие | Классическая вероятность | Сх. испытаний Бернулли | Обобщение |
|---|---|---|---|
| Пространство элементарных исходов | $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ | $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_{2^n}\}$ | $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ |
| Элементарный исход | $\omega_i$ – 1 из возможных исходов | $\omega_i = (x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = \{0, 1\}$ | $\omega_i$ – элементарный исход |
| Вероятность элементарного исхода | $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$ | $P(\omega_i) = p^{\sum_{i=1}^n x_i} \cdot (1-p)^{n-\sum_{i=1}^n x_i}$ | $P(\omega_i) = p_i$, где $p_i \in [0, 1]$ |
| Вероятность события | $P(A) = \frac{\lvert A \rvert}{n}$ | $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} P(\omega_i)$ | $P(A) = \sum_{\omega_i \in A} p_i$ |

### 2.3.2 Определение случайной величины

Пусть дано Пространство элементарных исходов $\Omega$, и вероятностная мера $P$ на нём.

---

Определение 5 - Случайная величина.

---

Случайной величиной называется любая функция $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$.
Например, для игральной кости $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, зададим $\xi$ как $\xi(\omega) = \omega^2$.

Случайная величина ставит в соответствие каждому элементарному исходу какое-либо конкретное число из множества действительных чисел.
Таким образом, "выпадение"какого-то из исходов случайно, но значение случайной величины уже конкретно.

**Пример.** $\xi = \#$ треугольников в случайном графе.
Количество событий, когда на имеющихся вершинах появился треугольник случайно, но, зная количество таких событий, мы можем получить конкретное $\xi$.

### 2.3.3 Функция распределения случайной величины

Существует важная задача создания методов изучения случайных величин.

Случайная величина под влиянием случайных обстоятельств может принимать различные значения. Заранее предсказать, какое значение примет величина невозможно, т.к. оно меняется случайным образом от испытания к испытанию.
Для того, чтобы задавать вероятности значений случайных величин вводится понятие **функции распределения случайной величины**.

---

Определение 6 - Распределение случайной величины.

---

Распределением случайной величины называется вероятность того, что случайная величина $\xi$ принимает конкретное значение $y_i$:

$$P(\xi = y_i) = P(\{\omega_j \ : \ \xi(\omega_j) = y_i\}) \tag{2.5}$$

Т. е. это вероятность всех элементарных исходов, при которых случайная величина принимает значение $y_i$.

---

Определение 7 - Функция распределения случайной величины.

---

Пусть $\xi$ — случайная величина, $x \in \mathbb{R}$ — произвольное действительное число. Вероятность того, что $\xi$ примет значение, меньшее, чем $x$ называется *функцией распределения случайной величины*.

$$F_\xi(x) := P(\xi \leq x) = \sum_{i \,:\, y_i \leq x} P(\xi = y_i) \tag{2.6}$$

### 2.3.4 Абсолютно непрерывные случайные величины

Для а.н.с.в. характерна непрерывная функция распределения. Пусть $p(x)$ — полотность распределения, тогда она обладает свойствами:

1. $\forall x \; p(x) \geq 0$;
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)d(x) = 1$;

В а.н. случае функция распределения представляется в виде:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)dt \tag{2.7}$$

### 2.3.5 Сингулярные распределения

## 2.4 Математическое ожидание и дисперсия

### 2.4.1 Математическое ожидание

Математическое ожидание даёт оценку случайной величины «в среднем», что часто бывает нужно в реальных задачах.

---

Определение 8 - Математическое ожидание.

---

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ — возможные значения случайной величины $\xi$, а $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ — соответствующие им вероятности.
Если ряд

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n=1}^{\infty} x_n p_n \tag{2.8}$$

сходится абсолютно, то его сумма называется *математическим ожиданием дискретной случайной величины.*

Для непрерывных с.в.:

$$\mathbb{E}\xi = \int x \cdot p(x)dx = \int x \cdot dF(x) \tag{2.9}$$

**Мат. ожидание линейно:**

$$\mathbb{E}(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) = c_1\mathbb{E}\xi_1 + c_2\mathbb{E}\xi_2 \tag{2.10}$$

### 2.4.2 Неравенство Маркова

---

**Теорема 1 - (Маркова).**

---

Пусть $\xi$ принимает только неотрицательные значения. Пусть $a > 0$, тогда

$$P(\xi \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{a} \tag{2.11}$$

### 2.4.3 Дисперсия

Важное значение имеет то, насколько сильно случайные величины могут отличаться от своего математического ожидания. Для такой оценки можно использовать дисперсию и некоторые другие числовые характеристики.

---

Определение 9 - Дисперсия.

---

Дисперсия случайной величины:

$$\mathbb{D}\xi := \mathbb{E}(\xi - \mathbb{E})^2 = \mathbb{E}\xi^2 - (\mathbb{E}\xi)^2 \tag{2.12}$$

### 2.4.4 Неравенство Чебышёва

**Теорема 2 - Неравенство Чебышёва.**

Пусть $\eta$ — любая случайная величина. Пусть $b > 0$. Тогда:

$$P(|\eta - \mathbb{E}\eta| \geq b) \leq \frac{\mathbb{D}\eta}{b^2} \tag{2.13}$$

## 2.5 Распределения случайных величин

Одна из важнейших частей лекций. Нужно собрать всё вместе!

### 2.5.1 Распределения дискретных случайных величин

Примеры распределений и их функции распределения можно найти на этом сайте.

### 2.5.2 Распределения а.н.с.в.

Примеры распределений и их функции распределения можно найти на этом сайте.

## 2.6 Предельные теоремы

## 2.7 Независимые случайные величины и закон больших чисел

### 2.7.1 Независимые случайные величины

Определение 10.

Случайные величины $\xi$, $\eta$ называются независимыми, если

$$\forall x, y\ P(\xi \le x, \eta \le y) = P(\xi \le x)P(\eta \le y)$$

Аналогично событиям, случайные величины могут быть попарно независимыми, независимыми в совокупности.

## 2.8 Геометрическая вероятность

## 2.9 Колмогоровская аксиоматика

## 2.10 Случайные векторы

### 2.10.1 Определение случайного вектора

Можно дать два эквивалентных определения случайному вектору. Первое определение:

---

Определение 11 - случайый вектор.

---

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — случайные величины, тогда $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ — случайный вектор.

Для введения второго определения рассмотрим понятие измеримости функций.

---

Определение 12 - борелевская $\sigma$-алгебра (борелеское множество).

---

Это множества на числовой прямой (лучи, отрезки, точки), принадлежащие минимальной $\sigma$-алгебре над совокупностью всех сегментов $[a, b]$.

Про сигма-алгебры можно почитать здесь.

---

Определение 13 - измеримость.

---

Функция является $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(R))$-измеримой, если $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\ f^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.

Второе определение:

---

Определение 14 - случайный вектор.

---

Если $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^k$ является $(\mathcal{F}|\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$-измеримой функцией, то $\xi$ называется случайным вектором.

### 2.10.2 Функции от случайного вектора

---

Определение 15 - борелевская функция.

---

Числовая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$, заданная на прямой, называется *борелевской*, если прообраз каждого борелевского множества есть борелевское множество, т. е. $f$ — $(\mathcal{B}(\mathbb{R}^n|\mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$-измеримая.

Любая непрерывная функция является борелевской.

Следствие: $\xi + \eta$, $\xi \cdot \eta$, $\xi - \eta$, $\frac{\xi}{\eta}$ — случайные величины.

### 2.10.3 Функция распределения случайного вектора

---

Определение 16 - распределение случайного вектора.

---

Распределением случайного вектора $\xi$ называется функция

$$P_\xi : \mathcal{B}(\mathbb{R}^n) \to [0, 1] \tag{2.14}$$

### 2.10.4 Характеристическая функция

### 2.10.5 Гауссовский вектор

### 2.10.6 Многомерная ЦПТ

## 2.11 Условное математическое ожидание

## 2.12 Условное распределение

## 2.13 Марковские цепи

## 2.14 Олимпиадные задачи по теории вероятностей

Здесь размещены задачи и решения всех олимпиад по ТВ.

# Глава 3

# Математическая статистика