අනුකලනය

* $+C$ දානවා එක පාරක් C_1, C_2, C_3 දානවා එපා නිවැරදියි ✗
* ආදේශයේ දී සීමාව වෙනස්කරනවා.

C_1, C_2 අභිමත නියතයක් කියලා ලියනවා.

$\int [f'(x) \pm g'(x)]dx = \int f'(x)dx \pm \int g'(x)dx + C$	ඒකට අවකලනය $f(x)$: $\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C$
$\int K f'(x)\,dx = K\int f'(x)\,dx + C$ නියතයක් නම් පමණි ගුණිත ශ්‍රිතය ✗	$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \ln\lvert f(x)\rvert + C$

* $\int \frac{x^n}{1}dx = \frac{x^{n+1}}{(n+1)} + C$, $n \neq -1$ $\longrightarrow$ * $\int (\overset{\text{ඒකජ බලයක්}}{a x + b})^n dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)\times a}$ අවකලනය $+C$

* ඒකජ නම් විතරයි: $\int \frac{1}{(ax+b)^n}dx = \frac{(ax+b)^{-n+1}}{(-n+1)(a)} + C$

අනුකලනය ආරම්භයෙන්

ත්‍රිකෝණමිතික අනුකලනය දී කෙසේ $\sin, \cos, \tan$ ව ① ප්‍රථම ප්‍රමාණය වෙනස්

$(-1) \Rightarrow \tan^{-1}\cancel{\frac{3\pi}{4}}$

$\tan^{-1}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$

$\cos x$	$\rightarrow \sin x$
$\sin x$	$\rightarrow -\cos x$
$\sec x \tan x$	$\rightarrow \sec x$
$\cot x \operatorname{cosec} x$	$\rightarrow -\operatorname{cosec} x$
$\sec^2 x$	$\rightarrow \tan x$
$\operatorname{cosec}^2 x$	$\rightarrow -\cot x$

eg: ① $\int \sin[f(x)]dx = \frac{-\cos[f(x)]}{f'(x)} + C$ නැවත නියතය අවකලනය අවකලනයක් ✓

② $\int \left.\begin{matrix}\sin^2 x \\ \cos^2 x\end{matrix}\right] dx \longrightarrow \cos 2x$ සූත්‍ර

$\left.\begin{matrix}\sin^3 x \\ \cos^3 x\end{matrix}\right] \longrightarrow 3\theta$ සූත්‍ර

$\sin^4 x \longrightarrow (\sin^2 x)(\sin^2 x)$

③ $\int \sin 6x \cos x \rightarrow \begin{matrix}\sin C \pm \sin D \\ \cos C \pm \cos D\end{matrix}$ සූත්‍ර

④ $\int \tan^2 x \longrightarrow \sec^2 - 1$

$\cot^2 x \longrightarrow \operatorname{cosec}^2 - 1$

$-\int \frac{\sin}{\cos}$

special

$\int \tan x\,dx = \ln\lvert\sec x\rvert + C$

$\int \cot x\,dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$

$\int \sec x\,dx = \ln\lvert\sec x + \tan x\rvert + C$ $\left(x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}\right)$

$\int \operatorname{cosec} x\,dx = \ln\lvert\operatorname{cosec} x - \cot x\rvert + C$

$\int \frac{p\cos x + q\sin x}{a\cos x + b\sin x}dx$ ආකාරයේ

eg: ① $\int \frac{\cos x + \sin x}{3\cos x + 4\sin x}dx$

$= \int \frac{\lambda(3\cos x + 4\sin x) + \mu(-3\sin x + 4\cos x)}{3\cos x + 4\sin x}$ අවකලනය

* සංගුණක සැසඳූ විසඳමයි λ, μ සොයනවා 2 සමීකරණ

② $= \int \frac{\cos x + 1}{3\cos x + 4\sin x + 5}$ නියතයක්

$= \int \frac{\lambda(3\cos x + 4\sin x + 5) + \mu(\text{--}) + \gamma}{3\cos x + 4\sin x + 5}$

λ, μ, γ සොයනවා

$\int \frac{dx}{a\cos x + b\sin x}$ ආකාරයේ

eg: $\int \frac{dx}{3\cos x + 4\sin x}$

$t = \tan\frac{x}{2}$

$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{2}\sec^2\frac{x}{2}$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ ආදේශ කරනවා

$\int \frac{dx}{a\cos^2 x + b\sin^2 x + c\sin x\cos x}$ ආකාරයේ

$\left.\begin{matrix}\cos^2 x \\ \sin^2 x\end{matrix}\right\}$ $\cos 2x$ සූත්‍ර $\longrightarrow$

$\sin x\cos x \longrightarrow \sin 2x$ සූත්‍ර

$t = \tan x$ දෙකම ආකාරයට

$\int \frac{dx}{px^2+qx+r}$ ආකාරය → පූර්ණ වර්ගයට

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$1+x^2$ ($\tan^{-1}x$) ආකාර

* x වෙනුවට $(cx+d)$ තිබේනම්

$$\int \frac{dx}{a^2+(cx+d)^2} = \frac{1}{a\times c}\tan^{-1}\left(\frac{cx+d}{a}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c$$

* x^2-a^2 ආකාරයේනම් $-[a^2-x^2]$ කරගන්න

eg: ① $\int \frac{(ax+b)\,dx}{px^2+qx+c}$ → eg: $\int \frac{2-x}{4x^2+4x-3}dx = \int \frac{-\frac{1}{8}(8x+4)+\frac{1}{2}+2}{4x^2+4x-3}$

② පරිමේය ශ්‍රිත → නියම පරිමේය ශ්‍රිත — භින්න භාග දාලා +, − වලට කඩන්න

$f(x) = \frac{(x^2-1)+2x}{(x-1)(x-2)}$ භින්න භාගවලට කඩද්දී ආදේශයෙන් $x=1, x=2$ ආදේශ කර සංගුණක සොයන්න.

විෂම පරිමේය ශ්‍රිත — දීර්ඝ බෙදීම — eg: $\int \frac{x^3}{x^2+1}dx$

$x^2+1 \overline{)\,x^3}$; x ; x^3+x ; $-x$

$x - \frac{x}{x^2+1}$

$\int \frac{dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

$\sqrt{1-x^2}$ ($\sin^{-1}x$ ආකාරයට)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+c$$

* $\int \frac{(ax+b)\,dx}{\sqrt{px^2+qx+r}}$ → eg: $\int \frac{2x-3}{\sqrt{8-2x-x^2}}dx = \int \frac{-(-2-2x)-5}{\sqrt{8-2x-x^2}} = -\int (8-2x-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2-2x)dx - 5\int \frac{dx}{\sqrt{8-2x-x^2}}$

$f(x)^n f'(x)$ ආකාරයේ ; පූර්ණ වර්ගය

* $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{cx+d}}$ → $t=\sqrt{cx+d}$; $x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{1}{5}}=t$ ආදේශ කරන්න.

* $\int \frac{dx}{(ax+b)\sqrt{px^2+qx+r}}$ eg: $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{8x^2+10x+5}}$

* $x+1$ තනි පදයක් ලෙස ලියන්න

$y=x+1$

$x=y-1$

$= 8(y-1)^2+10(y-1)+5 = 8y^2-6y+3$

$y = x+1 = \frac{1}{t}$ ආදේශය කරන්න

* $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-a^2}}$ — $x=a\sec\theta$

$\sqrt{x^2+a^2}$ — $x=a\tan\theta$

$\sqrt{a^2-x^2}$ — $x=a\sin\theta$

ProMate

කොටස් වශයෙන් අනුකලනය

u, v යනු x හි ශ්‍රිතවල $I = \int uv$ න

$$\boxed{I = uv - \int v\left(\frac{du}{dx}\right)dx}$$

u තෝරාගැනීම

I L A T E

- Inverse: $\tan^{-1}$, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$
- Logarithm: $\ln x$, $\ln x^2$
- Algebric: x^2, x^3
- Trignometric: tan, sin, cos, sec, cosec
- exponential: e^x, e^{x^2}

eg: $\int_0^1 \underset{\text{hidden}}{1}\tan^{-1}x\,dx = I$

$u = \tan^{-1}x$ $\frac{dv}{dx} = 1$

$\frac{du}{dx} = \frac{1}{1+x^2}$ $v = x$

$I = [uv]_0^1 - \underbrace{\int v\frac{du}{dx}dx}_{J}$

J කියලා අරන් ආයෙ uv දාන්න

නිශ්චිත අනුකලනය

$$\int_b^a f'(x)\,dx = [f(x)]_b^a = f(a) - f(b) \;//$$

eg: $\int_0^1 f(x) + \int_0^1 g(x) = \int_0^1 f(x) + g(x)$

* සීමාවන් සමාන නම් නිශ්චිත අනුකලනය එකතු කරයි ✓

* පරිමේය ශ්‍රිතවලදී sin, cos වලදී, e^x වලදී හරය සමාන කරගන්න බලන්න රටාව බලා I + J දාන්න.

* sin, cos, tan වල ප්‍රස්තාර ආකාර සලකයි $\int_{\pi/4}^{-\pi/4}$

* $\int_0^1 (-)\tan$ ඇතුලේ (−) තිබ්බොත් සීමාව මාරු කරන්න

$= \int_1^0 \tan\theta$

$$\boxed{\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx} \text{ සාධනය}$$

LHS $= \int_0^a f(x)\,dx$

$a - x = X$

$-\frac{dx}{dX} = 1$

$dx = -dX$

$= \int_a^0 f(a-X)(-dX)$

$= \int_0^a f(a-X)\,dX$

නිශ්චිත අනුකලනය විචල්‍යයෙන් ස්වායත්ත නිසා

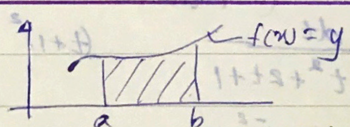
$= \int_0^a f(a-x)\,dx = R.H.S \;//$

එලෙස $\boxed{\int_b^a f(x)\,dx = \int_b^a f[a+b-x]\,dx}$

විශේෂයෙන් පාවිච්චි කරන ස්ථාන

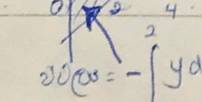
eg: $I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}dx \Longrightarrow J = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x}dx$

$I + J = 2\boxed{I}$? ($\because I = J$ නිසා)



a → b x අක්ෂය සමග වර්ගඵලය $= \int_a^b y\,dx$

f(x) x අක්ෂය වටා 2π භ්‍රමණය කළවිට පරිමාව $= \int_a^b \pi y^2\,dx$



වර්ගඵලය $= -\int_0^2 y\,dx + \int_2^4 y\,dx$

ProMate

සීමාව ∞

දුරක ගුමිතින්

$$I = \int_0^{\pi} \frac{x}{1+\sin x}\,dx \Rightarrow J = \int_0^{\pi} \frac{\pi - x}{1+\sin x}\,dx$$

$$2I = I + J$$

$$= \pi \int_0^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x}$$

$t = \tan\frac{x}{2}$

$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$

$\boxed{\begin{matrix} x = \pi \text{ වට} \\ t = \infty \end{matrix}}$

සීමා කඩන්න

$$= \pi \left[\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{dx}{1+\sin x} \right]$$

x වෙනුවට $\boxed{\pi - x}$

$\frac{\pi}{2} - x$

$2\pi - x$

ආදේශ ආදේශය කර බලන්න

$$= \pi \left[\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} + \int_{\pi/2}^{0} \frac{-dX}{1+\sin X} \right]$$

$X = \pi - x$

$\frac{dX}{dx} = -1$

$$= \pi \left[\underbrace{\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x} + \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}}_{} \right]$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1+\sin x}$$

$$= 2\pi \int_0^{1} \frac{2dt}{(1+t^2)\left(1+\frac{2t}{1+t^2}\right)}$$

$$= 4\pi \int_0^{1} \frac{dt}{t^2+2t+1}$$

$(t+1)^2$

$$= 4\pi \int_0^{1} (t+1)^{-2}\,dt$$

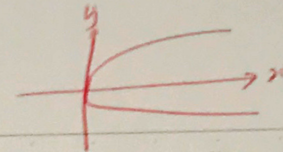
$$= 4\pi \left[\frac{-2}{(t+1)} \right]_0^1$$

$$= 8\pi \left[\frac{1}{2} - 1 \right]$$

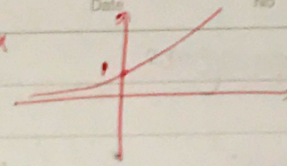
$$2I = \frac{8\pi}{2}$$

$$I = 2\pi$$

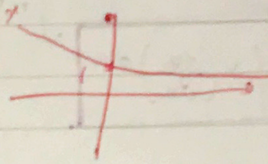
$y^2 = 4ax$



$y = e^x$



$y = e^{-x}$



ProMate