



පළමු වාර පරීක්ෂණය - 12 ගේනිය - 2019

First Term Test - Grade 12 - 2019

විභාග අංකය .....

සංශෝධන ගණිතය I

කාලය පැය ක්‍රියාව්‍ය

**උපදෙස්**

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සමන්විත වේ.  
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
- A කොටස
 

සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා මෙම පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩිහි ලියන්න.  
වැඩිපුරු ඉඩි අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩ්දායි හාවිත කළ හැකිය.
- B කොටස
 

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.  
නියමිත කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උචින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ගාලාධිපතිට හාර දෙන්න.
- ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ගාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝගනය සඳහා පමණි

සංශෝධන ගණිතය I		
කොටස	ප්‍රශ්න අංකය	ලක්ෂණ
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
එකතුව		
මුළු එකතුව		
ප්‍රතිග්‍රන්ථය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලක්ෂණ	

**අවසාන ලක්ෂණ**

ඉලක්කමෙන්	
අකුරෙන්	

ලත්තර පත්‍ර පරීක්ෂක	
පරීක්ෂා කළේ	1
	2
අධිකාරීය	

## සංයුත්ත ගණිතය 12 - I (A කොටස)

$$01) \quad 4^{x+1} + 2^{4x+2} = 80 \quad \text{දැඩ්ඟක සමිකරණය විසඳුන්න.}$$

02)  $\frac{12}{x-3} < x+1$  අසමානතාව විසඳා විසඳුම් කුලකය ලබා ගන්න.

- 03)  $\log_2 x = \log_4(x + 6)$  සමිකරණය විසඳන්න.

- 04)  $(-2,4)$  ලක්ෂයේ සිංහ ඒකක  $4\sqrt{2}$  දුරින් පිහිටියා වූ ද,  $x$  අක්ෂය මත පිහිටියා වූ ද ලක්ෂය දෙක සොයා, මෙම ලක්ෂ දෙක අතර දුර ලබා ගන්න.

- 05)  $2x^4 + x^3 - x^2 + ax + b$  යන්හා  $(x^2 - 1)$  න් බෙදීමෙන් ශේෂය  $2x + 3$  වේ නම්  $a$  හා  $b$  සොයන්න.

- 06)  $\frac{3x^2 - 7}{x^3 + 2x^2 - 8x}$  පරිමෝය ශ්‍රීතය හින්න භාග වෙන් කර දක්වන්න.

07)  $|3 - 2x| \leq |4 + x|$  විසඳුම් කළකය ඝොයන්න.

$$08) \quad y = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x \leq 0 \\ x + 3 & ; \quad 0 < x < 5 \\ -x + 1 & ; \quad x \geq 5 \end{cases} \quad \text{කචමනින් ලිතයේ දුල සටහනක් අදින්න.}$$

$$09) \quad a \cos(\lambda + \theta) = b \cos(\lambda - \theta) \quad \text{නම්} \quad \tan \lambda = \left( \frac{a-b}{a+b} \right) \cot \theta \quad \text{වල} \quad \text{පෙන්වන්න.}$$

10)  $\sin 7\theta - \sqrt{3} \cos 4\theta = \sin \theta$  සමිකරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.

## සංයුත්ත ගණිතය 12 - I (B කොටස)

ප්‍රශ්න හතෙන් පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

- 11) a) ගේෂ ප්‍රමේයය ප්‍රකාශ කර සාධනය කරන්න.

$f(x)$  යනු මාත්‍රය 3 ට වැඩි බහු පද ලිතයක් වන අතර  $a, b$  හා  $c$  තාත්වික ප්‍රසින්න වේ.

$f(1) = a, f(-1) = b$  හා  $f(0) = c$  බව දී ඇතේ.  $f(x)$  ලිතය  $(x^2 - 1)$  න් බෙදා විට ගේෂය  $\frac{1}{2}(a - b)x + \frac{1}{2}(a + b)$  බව පෙන්වන්න.

තවද  $f(x)$  ලිතය  $(x^3 - x)$  න් බෙදා විටද ගේෂය ලබා ගන්න.

- b)  $\frac{2.3 \times 1.21}{1.27}$  ප්‍රකාශනය  $\frac{p}{q}$  ආකාරයට දක්වන්න.  $p$  හා  $q \in \mathbb{Z}^+$  වේ. (පූල කිරීමට අවශ්‍ය නැතු.)

- 12) a)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$ ;  $x \neq 2$  යැයි ගනිමු.

i.  $f(x)$  හි වසම හා පරාසය සොයන්න.

ii.  $f(x)$  ලිතය එකට එක හා මතට බව පෙන්වන්න.

iii.  $f^{-1}(x)$  ලිතය (ප්‍රතිලෝම ලිතය) සොයන්න.

iv.  $f^{-1}(f(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$  බව පෙන්වන්න.

- b)  $g(x) = \log_a \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$  නම්,

$g\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = 2g(x)$  බව ලබා ගන්න.

- 13)  $(x_1, y_1)$  හා  $(x_2, y_2)$  ලක්ෂය යා කරන රේඛා  $m:n$  අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව බෙදෙන ලක්ෂයේ ක්ෂේඩාංක ලබා ගන්න.

A හා B යනු පිළිවෙළින්  $(-3,0)$  හා  $(7,5)$  වූ ලක්ෂය 2 කි.

i. AB රේඛාව 3:2 අනුපාතයට අභ්‍යන්තරව හා භාහිරව බෙදෙන P හා Q ලක්ෂය සොයන්න. එනයින් PQ දිග ලබා ගන්න.

ii. AB රේඛාව සමාන කොටස් 3 කට බෙදෙන ලක්ෂය 2 ක දු සොයන්න.

iii. AB රේඛාව Y අක්ෂයෙන් කුමන අනුපාතයකට බෙදේද? Y අක්ෂය මත වූ එම ලක්ෂය සොයන්න.

- 14) a)  $a, b$  තාත්වික දන සංඛ්‍යා වන අතර  $a, b \neq 1$  විට  $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$  බව පෙන්වන්න.

$$\log_x 2 \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2 \quad \text{සම්කරණය විසඳුන්න.}$$

- b) එකම බණ්ඩාංක තලයක  $|x - 2|$  හා  $|1 + 2x|$  ලිතවල ප්‍රස්ථාර අදින්න. එම ප්‍රස්ථාර ඇසුරින්  $|x - 2| < 1 + |1 + 2x|$  අසමානතාව සපුරාලන අය කුලකය ලබා ගන්න.

- 15) a)  $x^2 - 3x + 1 \equiv A(x+1)^2 + \{B(x+1) + C\}(x-2)$  වන පරිදි වූ A, B හා C තාත්වික නියත ලබා ගන්න. එනයින්,  
 $\frac{x^2-3x+1}{(x-2)(x+1)^2}$  හි හින්න හාග වෙන් කර දක්වන්න.
- b)  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x + c$  යැයි ගතිමු.  $f(x)$  යන්න  $(x^2 + x)$  මගින් බෙදා විට ගේෂය  $6(x+1)$  ද  $(x-1)$  යනු  $f(x)$  හි සාධකයක් ද නම් a, b හා c නියත වල අගයන් සොයන්න. එමගින්  $f(x)$  හි ඉතිරි සාධක ද ලබා ගන්න.
- 16) a)  $A, B$  හා  $C$  යනු ත්‍රිකෝණයක කේත්ත නම්,  
 $\sin^2\left(\frac{A}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{B}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{C}{2}\right) = 1 - 2 \cos\left(\frac{A}{2}\right) \cos\left(\frac{B}{2}\right) \sin\left(\frac{C}{2}\right)$  බව පෙන්වන්න.
- b)  $\sec x + \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$  බව පෙන්වා  $\sec x - \tan x$  සඳහා එවැනිම ප්‍රකාශනයක් අප්‍රේහනය කරන්න. එනයින්  $\tan\left(\frac{7\pi}{12}\right)$  හා  $\tan\left(\frac{\pi}{12}\right)$  හි අගයන් කරණී ආකාරයෙන් සොයන්න.
- c)  $2 \sin \theta \sin 3\theta - 1 = 0$  සම්කරණයේ සාධාරණ විසඳුම් සොයන්න.
- 17) a)  $\sin(A+B)$  ප්‍රසාරණය හාවිතයෙන්  $\sin 3\theta$  සඳහා ප්‍රකාශනයක්  $\sin \theta$  ඇසුරින් ලබා ගන්න.  
 $\sin A \sin(60-A) \sin(60+A) = \frac{1}{4} \sin 3A$  බව පෙන්වන්න. එනයින්  
 $\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ$  හි අගය  $\frac{\sqrt{3}}{8}$  බව අප්‍රේහනය කරන්න.
- b)  $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$  යන්න  $R \cos(2x - \alpha)$  ආකාරයෙන් දක්වන්න.  $R$  සහ  $\alpha$  නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.  
මෙහි  $R > 0$  හා  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$  වේ.  $f(x)$  හි උපරිම, අවම අගයන් දක්වමින්  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$  පරාසය තුළ  $f(x)$  හි දළ ප්‍රස්ථාරයක් අදින්න.
- c)  $a \sec \theta = 1 - b \tan \theta$  හා  $a^2 \sec^2 \theta = 5 + b^2 \tan^2 \theta$  නම්  $a^2 b^2 + 4a^2 = 9b^2$  බව පෙන්වන්න.



பலம் வார பரிசுத்தனய - 12 ஜேனைய - 2019

## **First Term Test - Grade 12 - 2019**

විභාග අංකය .....

## සංයුත්ත ගණිතය II

කාලය පැය තුනයි

୧୮୮୯

- මෙම ප්‍රශ්න පත්‍රය කොටස් දෙකකින් සම්බන්ධ වේ.  
A කොටස (ප්‍රශ්න 1-10) දක්වා B කොටස (ප්‍රශ්න 11-17)
  - A කොටස  
සියලුම ප්‍රශ්නවලට පිළිතුරු සපයන්න. එක් එක් ප්‍රශ්නය සඳහා ඔබේ පිළිතුරු සපයා ඇති ඉඩහි ලියන්න.  
වැඩිපුරු ඉඩ අවශ්‍ය වේ නම් ඔබට අමතර ලියන කඩායි හාවිත කළ හැකිය.
  - B කොටස  
ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.
  - තීයෙන් කාලය අවසන් වූ පසු A කොටස B කොටසට උඩින් සිටින පරිදි කොටස් දෙක අමුණා විභාග ගාලාධිපතිව හාර දෙන්න.
  - ප්‍රශ්න පත්‍රයෙහි B කොටස පමණක් විභාග ගාලාවෙන් පිටතට ගෙනයාමට ඔබට අවසර ඇත.

පරීක්ෂකගේ ප්‍රයෝගනය සඳහා පමණි

සංඛ්‍යක්ත ගණිතය II		
ලොටිය	ප්‍රශ්න අංකය	ලකුණු
A	1	
	2	
	3	
	4	
	5	
	6	
	7	
	8	
	9	
	10	
B	එකතුව	
	11	
	12	
	13	
	14	
	15	
	16	
	17	
	එකතුව	
	මුළු එකතුව	
ප්‍රතිගෙය		

පත්‍රය I	
පත්‍රය II	
එකතුව	
අවසාන ලක්ෂණ	

අවසාන ලකුණු

ඉලක්කමෙන්	
අභ්‍යරෙන්	

උත්තර පතු පරිශක	
පරිශක කළේ	1
	2
අධිකාරීය	

(A කොටස)

- 1) ලක්ෂණයක් මත ක්‍රියා කරන විශාලත්වය  $P$  හා  $2P$  බල දෙකක් එකිනෙකට  $60^\circ$  ක කේතුයකින් ආනන්වත ක්‍රියා කරයි. සම්පූරුණක්ත බලයේ විශාලත්වය සොයෙන්න. තවද සම්පූරුණක්ත බලය හා  $2P$  බලය අතර කේතුය  $\alpha$  නම්  $\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{5}$  බව ද පෙන්වන්න.

- 2)  $ABCDEF$  යනු සවිධ ඡඩයකි.  $O$  යනු එහි කේත්දය වේ.  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \underline{\underline{0}}$  බව පෙන්වන්න.

- 3)  $\underline{a} = i - 2j$  හා  $\underline{b} = -3i + j$  යැයි ගනිමු.  $\underline{a} + \lambda \underline{b}$  දෙකිකය  $-i - 3j$  දෙකිකයට සමාන්තර වන පරිදි වේ නම්  $\lambda$  හි අගය සෞයන්න.

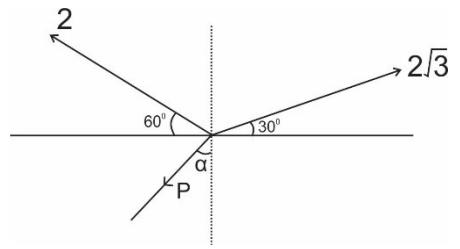
- 4)  $a = i + \sqrt{3}j$  හා  $b$  යනු විශාලත්වය  $\sqrt{3}$  වන පරිදි වූ දෙකිකයක් ද යැයි ගනිමු.  $a$  හා  $b$  අතර කේත්තය  $\frac{\pi}{3}$  නම්  $b$  යන්න  $x + iy$  ආකාරයෙන් ප්‍රකාශ කරන්න. මෙහි  $x < 0$  වන අතර  $x$  හා  $y$  යනු නිර්ණය කළ යුතු නියත වේ.

- 5)  $O$  අවල ලක්ෂායක් අනුබද්ධයෙන්  $ABC$  ක්‍රිකේරුයේ  $A, B$  හා  $C$  සිරුත් වල පිහිටුම් දෙකික පිළිවෙළින්  $a, b$ ,  $b$  හා  $c$  වෙයි.  $D$  හා  $E$  යනු පිළිවෙළින්  $AB$  හා  $AC$  පාද වල මධ්‍ය ලක්ෂා වේ.  $D$  හා  $E$  හි පිහිටුම් දෙකික සොයන්න.

எனகின்,  $DE = \frac{1}{2} BC$  என கூ  $DE // BC$  என பெற்றுவந்து.

6) එකිනෙකට  $\theta$  ( $\theta < \frac{\pi}{2}$ ) කෝණයකින් ආනත  $P$  හා  $Q$  බල දෙකක සම්පූරුක්තය  $\sqrt{3} Q$  වේ. සම්පූරුක්තය නිව්ච්චන්  $P$  බලයත් සමග  $30^\circ$  ක කෝණයක් සාදයි නම්  $\theta$  අගය සොයන්න.  $P = 2Q$  බව ද පෙන්වන්න.

- 7) විශාලත්වය නිවිතන්  $2$ ,  $2\sqrt{3}$  හා  $P$  වූ බල පහත පරිදි අංශුවක් මත ක්‍රියා කරයි. අංශුව සම්බුද්ධිතතාවයේ පවතී නම්  
 $\alpha = \frac{\pi}{6}$  බව පෙන්වන්න.  $P$  හි අගයද සොයන්න.



- 8) අංශුවක් මත නිවිතන්  $P$ ,  $2P$ ,  $3\sqrt{3}P$  හා  $4P$  වූ බල පද්ධතියක් ක්‍රියා කරයි. පළමු බලය තිරස් වන අතර එක් එක් බලය අනෙක් බලයට පිළිවෙළින්  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $150^\circ$  කෝණ වලින් ආනත වේ. සම්පූර්ණ බලයේ විශාලත්වය හා දිගාව සොයන්න.

- 9)  $O$  ලක්ෂණයක් අනුබද්ධයෙන්  $A, B, C$  ලක්ෂණ වල පිහිටුම් දෙනීක පිළිවෙළත්  $60i + 3j$ ,  $40i - 8j$  හා  $a i - 52 j$  ලෙස වේ.  $A, B$  හා  $C$  ඒකරේවිය වන පරිදි  $a$  හි අගය සොයන්න. මෙහි  $a \in R$  වේ.

- 10) විශාලත්වය  $P + Q$  හා  $P - Q$  බල දෙකක සම්පූර්ණක්ත බලය  $\sqrt{P^2 + 3Q^2}$  වේ. මෙහි  $P \neq Q$  වේ. බල දෙක අතර කෝරෝනය සොයන්න.

## සංග්‍රහීත ගණිතය 12 - II (B කොටස)

ප්‍රශ්න පහකට පමණක් පිළිතුරු සපයන්න.

- 11) a)  $OXY$  බණ්ඩාක අක්ෂ පද්ධතිය අනුබද්ධයෙන්  $P$  ලක්ෂායේ බණ්ඩාක  $(a, b)$  යැයි ගනිමු.  $O$  මූලය අනුබද්ධයෙන්  $P$  හි පිහිටුම දෙශිකය ලබා ගන්න. එනයින්  $|\overline{OP}|$  සඳහා ප්‍රකාශනයක් ලියා දක්වන්න.
- O මූලය අනුබද්ධයෙන් A හා B හි කණ්ඩාක පිළිවෙළින්  $(-2, -\sqrt{2})$  හා  $(3, 4\sqrt{2})$  වේ.
- $\overrightarrow{OA}$  හා  $\overrightarrow{OB}$  සොයන්න. එනයින්  $\overrightarrow{AB}$  සොයන්න.
  - $|\overrightarrow{AB}|$  සොයන්න.
  - $C$  යනු  $AB$  හි මධ්‍ය ලක්ෂාය විට  $\overrightarrow{OC}$  සොයන්න.
  - $\overrightarrow{OC}$  දිගාවේ ඒකක දෙශිකය හා  $\overrightarrow{OC}$  දිගාව ඔස්සේ වූ විශාලත්වය ඒකක  $\sqrt{19}$  ක් වන දෙශිකය සොයන්න.
  - $OC$  හා  $OD$  ලම්භක වන පරිදි හා  $|OD| = \sqrt{19}$  වන පරිදි  $D$  ලක්ෂාය දෙකක් පවතින බව පෙන්වා ඒවායේ බණ්ඩාක සොයන්න.
- b) අංගුවක් මත ක්‍රියා කරන  $2\underline{i} - 3\underline{j}$ ,  $7\underline{i} + 4\underline{j}$ ,  $-5\underline{i} - 9\underline{j}$ ,  $P\underline{i} + 2\underline{j}$  හා  $\underline{i} - Q\underline{j}$  යන බල සමත්ලිතතාවයේ පවති නම් P හා Q බලවල විශාලත්ව සොයන්න. මෙහි  $\underline{i}$  හා  $\underline{j}$  යනු එකිනෙකට ලම්භක  $OX$  හා  $OY$  අක්ෂ ඔස්සේ වූ ඒකක දෙශික වේ.
- 12) a)  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  යනු එකිනෙකට සමාන්තර නොවන නිශ්චිත දෙකක් දෙකක්.  $\lambda$  හා  $\mu$  යනු දී ඇති අදිය දෙකක් වන විට  $\lambda\underline{a} + \mu\underline{b} = \underline{0}$  වනුයේ  $\lambda = \mu = 0$  ම නම් පමණක් බව පෙන්වන්න.
- b) i.  $OACB$  සමාන්තරාපයකි.  $AC$  පාදයේ මධ්‍ය ලක්ෂාය  $D$  දී,  $AB$  විකර්ණයෙන්  $OD$  රේඛාවේත් තේඳුන ලක්ෂාය  $E$  දී වෙයි.  $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$  දී  $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$  දී නම්  $\overrightarrow{OD} = \underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}$  බව පෙන්වන්න.
- ii.  $\overrightarrow{OE} = \lambda \left( \underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b} \right)$  බව පෙන්වන්න.  $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AB}$  ලෙස ලිවීමෙන්,  
 $\overrightarrow{OE} = (1 - \mu)\underline{a} + \mu\underline{b}$  යැයි ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න. මෙහි  $\lambda$  හා  $\mu$  අදිය වේ.  
එනයින්  $\mu = \frac{1}{3}$  හා  $\lambda = \frac{2}{3}$  බව සාධනය කරන්න.
- iii.  $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$  බව හා  $AE:AB = 1:3$  බවත් පෙන්වන්න.
- 13) a)  $OACB$  සමාන්තරාපයේ  $BC$  පාදය  $BD = 3BC$  වන සේ  $D$  තෙක් දික් කර ඇත.  $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$  හා  $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$  ලෙස ගෙන  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  ඇසුරින්  $\overrightarrow{OD}$  ප්‍රකාශ කරන්න.  
 $\overrightarrow{OE} = \lambda \overrightarrow{OD}$  දී,  $\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AC}$  දී, වන පරිදි  $\lambda$  හා  $\mu$  නියත සොයන්න. මෙහි  $E$  යනු  $OD$  හා  $AC$  රේඛාවල තේඳුන ලක්ෂාය වේ.

b)  $Q$  යනු  $OAB$  ත්‍රිකෝණයේ  $AB$  පාදය  $4:1$  අනුපාතයට බෙදන  $B$  ට ආසන්නව පිහිටි  $AB$  මත වූ ලක්ෂයයයි.  $P$  යනු  $OP:OQ = 1:2$  වන පරිදි  $OQ$  මත වූ ලක්ෂයය යි. දීක් කරන ලද  $AP$  රේඛාවට  $R$  හි මත  $OB$  පාදය හමුවෙයි.  $O$  ලක්ෂය අනුබද්ධයෙන්  $A$  හා  $B$  හි පිහිටුම් දෙකින්  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  ලෙස වේ.

- $\overrightarrow{OQ}$  සොයා  $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{15}(\underline{a} + 4\underline{b})$  බව පෙන්වන්න.
- $\overrightarrow{AP}$  දෙකින්  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.
- $\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AP}$  ලිවිය හැකි බව පෙන්වා  $\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AP}$  යන්න  $\underline{a}$  ගෙන් ස්වායක්ත වන පරිදි  $\lambda$  අදිගයට ගත හැකි අගය සොයන්න.
- එනැයින්  $R$  හි පිහිටුම් දෙකින්  $\underline{b}$  ඇසුරින් ප්‍රකාශ කිරීමෙන්  $OR:OB = 2:7$  වන බවද පෙන්වන්න.

14) a)  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  දෙකින් දෙකක තිත් ගුණීතය හා කතිර ගුණීතය අර්ථ දක්වන්න.

$OAB$  ත්‍රිකෝණයේ  $\overrightarrow{OA} = \underline{a}$  හා  $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$  නම්  $OAB$  ත්‍රිකෝණයේ වර්ගජලය  $\frac{1}{2} |\underline{a} \times \underline{b}|$  මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

b)  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  යනු  $\underline{a} + \underline{b}$  හා  $\underline{a} - \underline{b}$  තිත් ගුණීතය ඉනා වන දෙකක් යැයි ගනිමු.  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  දෙකින් විශාලත්වය සමාන බව පෙන්වන්න.

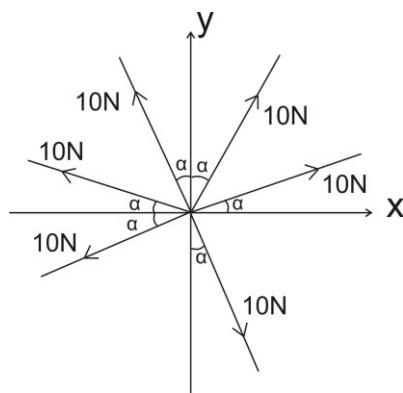
c)  $O$  අවල ලක්ෂයකට සාපේශ්චව  $A$  හා  $B$  ලක්ෂවල පිහිටුම් දෙකින් පිළිවෙළින්  $\underline{a} + 2\underline{b}$  හා  $3\underline{a} - \underline{b}$  ලෙස අර්ථ දැක්වේ.  $OA$  සහ  $OB$  එකිනෙකට ලම්බකවේ නම්  $\underline{a} \cdot \underline{b}$  සොයන්න.

$|\underline{a}| = 2$  හා  $|\underline{b}| = 1$  නම්  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  අතර කෝණය සොයන්න.

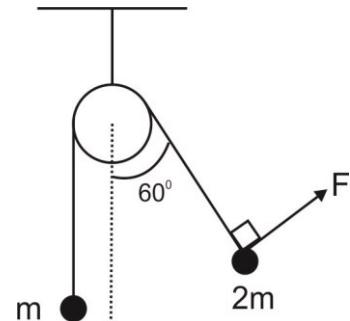
d)  $\underline{a} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$  ද,  $\underline{b} = \lambda \underline{i} + \mu \underline{j}$  ලෙස වූ ඒකක දෙකින් යැයි චැබුවේ.  $\lambda$  හා  $\mu$  යනු තාත්වික නියත ද  $\mu > 0$  ද,  $i$  හා  $j$  යනු සුපුරුදු ඒකක දෙකින් යැයි චැබුවේ.  $\underline{a}$  හා  $\underline{b}$  එකිනෙක ලම්භකනම්  $\lambda$  හා  $\mu$  සොයන්න.

15) a)  $ABCDEF$  යනු සවිධ ප්‍රාසාදයකි. ලක්ෂයක් මත ක්‍රියා කරක නිවිතන්  $2, P, 5, Q, 3$  වූ බල පිළිවෙළින්  $AB, CA, AD, AE$  හා  $AF$  පාද ඔස්සේ ක්‍රියා කරයි. අංගුව සමතුලිතතාවයේ පවතින පරිදි  $P$  හා  $Q$  අගයන් සොයන්න.

b) පහත සඳහන් අංගුව මත ක්‍රියා කරන බලවල සම්පූරුක්ත බලයේ විශාලත්වය  $10\sqrt{2} N$  හා එහි දිගාව  $X$  අක්ෂය සමග සාදන කෝණය  $\frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1}$  බව ද පෙන්වන්න.



- c) විශාලත්ව නීවිටන්  $6, 2\sqrt{3}$  හා  $8$  වූ ඒකතල බල තුනක්  $O$  ලක්ෂයක් මත ක්‍රියා කරන්නේ පිළිවෙළින්  $OA$ ,  $OB$  හා  $OC$  දිගා ඔස්සේය.  $A\hat{O}B = 30^\circ$ ,  $B\hat{O}C = 90^\circ$  නම් බල පද්ධතියේ සම්පූර්ණයේ විශාලත්වය ද එය  $OA$  සමග සාදන කොළය ද සොයන්න.
- 16) a) අංශුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒක තල බල පද්ධතියක සමතුලිතතාවය සඳහා අවශ්‍යතාවය බල විශේෂීනය ඇසුරින් ලියා දක්වන්න.
- b) ලුණු අවිතනා තන්තුවක එක් කෙළවරක් අවල  $A$  ලක්ෂයකට සවිකර තන්තුව මත වූ  $B$  ලක්ෂයේ දී බර  $2w$  අංශුවක් ද තන්තුවේ අනෙක් කෙළවර වූ  $C$  හි දී බර  $w$  වූ අංශුවක් ද අමුණා ඇත.  $C$  හිදී යෙදු තිරස  $3w$  බලයක ක්‍රියාව නිසා තන්තු කොටස් නොබුරුල්ව තන්තුවේ  $AB$  සහ  $BC$  කොටස් පිළිවෙළින් තිරස සමග  $\alpha$  හා  $\beta$  සුළු කොළය සාදමින් සමතුලිතතාවයේ ඇත. තන්තු කොටස්වල ආතති හා  $\alpha$  හා  $\beta$  කොළවල විශාලත්වයන් සොයන්න.
- c) රැප සටහනේ දැක්වෙන පරිදි සැහැල්පු අවිතනා තන්තුවක එක් කෙළවරකට  $m$  ස්කන්ධයක් අමුණා තන්තුව සුමත සැහැල්පු ක්ෂේපියක් මගින් දමා අනෙක් කෙළවරට  $2m$  ස්කන්ධයක් අමුණා  $F$  බලයක ක්‍රියාව යටතේ සමතුලිතව ඇත. තන්තුවේ ආතතිය හා  $F$  බලයේ විශාලත්වය සොයන්න.



- 17) a) එකිනෙකට  $\theta$  කොළයකින් ආනතව ලක්ෂයක දී ක්‍රියා කරන  $P$  හා  $Q$  බල දෙකක සම්පූර්ණයේ හා එම සම්පූර්ණයේ බලය  $P$  සමග සාදන කොළය සඳහා ප්‍රකාශන ලබා ගත්තා.
- එනයින්, බලදෙක එකිනෙකට සමානවන විට සම්පූර්ණයේ බලය මගින් බල දෙක අතර කොළය සම්විෂේද කරන බව පෙන්වන්න.
- b) විශාලත්වයෙන් එක හා සමාන බල දෙකක් එකිනෙකට ආනතව අංශුවක් මත ක්‍රියා කරයි. එම බල දෙකේ සම්පූර්ණයේ විශාලත්වයේ වර්ගය, බල දෙකේ ගුණීතය මෙන් දෙගුණයක් වේ නම්, බල දෙක අතර කොළය සොයන්න. ඉහත ප්‍රතිඵලය හාවිතයෙන් සම්පූර්ණයේ බලය හා එක් බලයක් අතර කොළයයේ විශාලත්වය අපෝහනය කරන්න.
- c) විශාලත්වයෙන් සමාන බල දෙකක් එකිනෙකට  $2\alpha$  කොළයකින් ආනතව ක්‍රියා කරන විට ඒවායේ සම්පූර්ණයේ එම බල දෙක  $2\beta$  කොළයකින් ආනතව ක්‍රියා කරන විට ඒවායේ සම්පූර්ණයේ මෙන් දෙගුණයක් වේ.  $\cos \alpha = 2 \cos \beta$  බව පෙන්වන්න.

# First Term Test - 2019

## Combined Mathematics I - Part A - Grade 12

---

$$1). \quad 4^{x+1} + 2^{4x+2} = 80$$

$$4 \cdot 2^{2x} + 4(2^{2x})^2 - 80 = 0 \quad (5)$$

Let

$$2^{2x} = t$$

$$(5) \quad 4t^2 + 4t - 80 = 0$$

$$t^2 + t - 20 = 0 \quad (5)$$

$$(t+5)(t-4) = 0$$

$$t = -5 \quad \text{or} \quad t = 4$$

$$2^{2x} = -5 \quad \text{or} \quad 2^{2x} = 4$$

(no sol<sup>n</sup>)

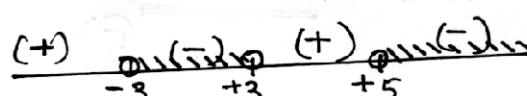
$$\underline{x = 1} \quad (5)$$

 25

$$2). \quad \frac{12}{x-3} < x+1$$

$$\frac{12}{x-3} - x-1 < 0 \quad (5)$$

$$\frac{12 - (x+1)(x-3)}{(x-3)} = \frac{(x-5)(x+3)}{(x-3)} < 0 \quad (5)$$



$$x \in (-3, 3) \cup (5, \infty) \quad (5)$$

 25

$$3). \log_2 x = \log_4 (x+6)$$

$$\log_2 x = \frac{1}{2 \log 2} = \frac{1}{2} \log_2 (x+6) \quad (5)$$

$$\log_2 x^2 = \log_2 (x+6) \quad (5)$$

$$x^2 = x+6$$

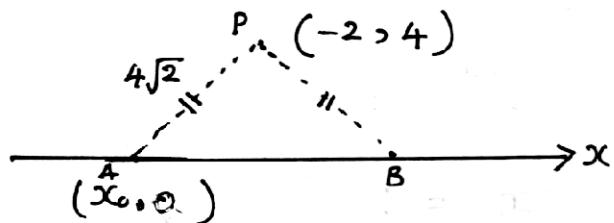
$$x^2 - x - 6 = 0 \quad (5)$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

$$\underline{x=3} \quad \text{or} \quad \underline{x=-2} \quad (5)$$

25

4).



$$(x_0 + 2)^2 + 16 = 32 \quad (5)$$

$$(5) x_0 + 2 = \pm 4$$

$$x_0 = 2 \quad x_0 = -6$$

$$\underline{A(2,0)} \quad \underline{B(-6,0)} \quad (5)$$

$$\therefore AB \text{ distance} = \underline{8 \text{ units}} \quad (5)$$

25

$$5). \quad 2x^4 + x^3 - x^2 + ax + b \equiv (x^2 - 1) \phi(x) + \underline{\underline{2x+3}} \quad (10)$$

$$x=1 \rightarrow a+b+2 = 5 \quad (1)$$

$$x=-1 \rightarrow b-a = 1 \quad (2) \quad (5)$$

$$(5) \underline{\underline{a=1}} \quad \underline{\underline{b=2}} \quad (5)$$

25

$$6). \quad \frac{3x^2-7}{x^3+2x^2-8x} = \frac{3x^2-7}{x(x^2+2x-8)} = \frac{3x^2-7}{x(x+4)(x-2)} \quad (5)$$

$$\frac{3x^2-7}{x(x+4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x+4)} + \frac{C}{(x-2)} \quad (5)$$

$$3x^2-7 \equiv A(x^2+2x-8) + B(x-2)x + C(x+4)x$$

$$x^2 \rightarrow 3 = A+B+C \quad (1)$$

$$x \rightarrow 0 = 2A - 2B + 4C$$

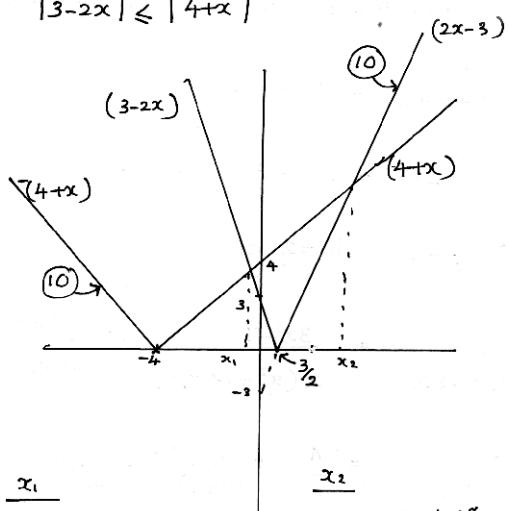
$$0 = A - B + 2C \quad (2)$$

$$x^0 \rightarrow -7 = -8A \quad (3) \quad (10)$$

$$A = \underline{\underline{\frac{7}{8}}} \quad B = \underline{\underline{\frac{41}{24}}} \quad C = \underline{\underline{\frac{5}{12}}} \quad (25)$$

$$\frac{3x^2-7}{x^3+2x^2-8x} = \frac{7}{8x} + \frac{41}{24(x+4)} + \frac{5}{12(x-2)} \quad (5)$$

$$7). \quad |3-2x| \leq |4+x|$$



$$4+x = 3-2x$$

$$\underline{\underline{2x-3 = 4+x}}$$

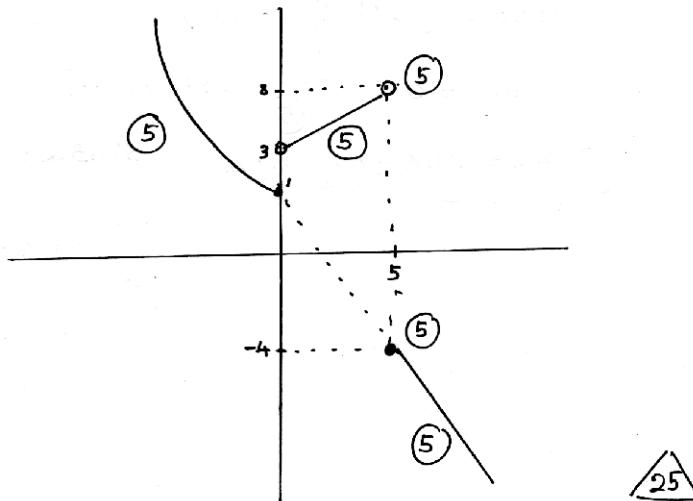
$$3x = -1$$

$$x = -\frac{1}{3}$$

$$\therefore \underline{\underline{x \in [-\frac{1}{3}, 7]}} \quad (5)$$

25

$$08) \quad y = \begin{cases} x^2 + 1 & ; \quad x \leq 0 \\ x + 3 & ; \quad 0 < x < 5 \\ -x + 1 & ; \quad x \geq 5 \end{cases}$$



$$09) \quad a \cos(\lambda+\alpha) = b \cos(\lambda-\alpha)$$

$$a(\cos\lambda\cos\alpha - \sin\lambda\sin\alpha) = b(\cos\lambda\cos\alpha + \sin\lambda\sin\alpha)$$

$$\cos\lambda(a\cos\alpha - b\cos\alpha) = \sin\lambda(b\sin\alpha + a\sin\alpha)$$

$$\underline{\underline{\tan\lambda = \frac{\cos\alpha(a-b)}{\sin\alpha(b+a)}}}$$

$$\underline{\underline{\tan\lambda = \left(\frac{a-b}{a+b}\right) \cot\alpha}}$$

25

$$10). \quad \sin 7\alpha - \sqrt{3} \cos 4\alpha = \sin\alpha$$

$$\sin 7\alpha - \sin\alpha = \sqrt{3} \cos 4\alpha$$

$$\underline{\underline{5) \quad 2 \cos 4\alpha \sin 3\alpha - \sqrt{3} \cos 4\alpha = 0}}$$

$$\cos 4\alpha (2\sin 3\alpha - \sqrt{3}) = 0 \quad (5)$$

$$\cos 4\alpha = 0 \quad \text{or} \quad \underline{\underline{2\sin 3\alpha - \sqrt{3} = 0}}$$

$$\underline{\underline{5) \quad 4\alpha = 2n\pi \pm \pi/2 ; n \in \mathbb{Z}} \quad \sin 3\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$\underline{\underline{3\alpha = m\pi + (-1)^m \left(\frac{\pi}{3}\right)}}$$

$$\underline{\underline{(5) \quad ; m \in \mathbb{Z}}}$$

25

14) Prove - Remainder Theorem.

15

$$f(x) \equiv (x^2 - 1) \phi(x) + (Ax + B) \quad (10)$$

$$f(x) = (x-1)(x+1) \phi(x) + (Ax + B) \quad (5)$$

$$x=1 \rightarrow$$

$$f(1) = A + B \quad (1) \quad (5)$$

$$x=-1 \rightarrow$$

$$f(-1) = B - A \quad (2) \quad (5)$$

$$A = \frac{1}{2} \{ f(1) - f(-1) \}$$

$$\text{But, } f(1) = a, \quad f(-1) = b, \quad f(0) = c$$

Therefore,  $A = \frac{1}{2} (a - b) \quad (5)$

$$B = \frac{1}{2} (a + b) \quad (5)$$

$$\therefore \text{Remainder} = (Ax + B)$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{2}(a-b)x + \frac{1}{2}(a+b)}}$$

45

$$f(x) = (x^3 - x) h(x) + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0) \quad (10)$$

$$f(x) = x(x-1)(x+1) h(x) + (a_0 x^2 + b_0 x + c_0) \quad (5)$$

$$f(0) = c = c_0 \quad (1) \quad (5)$$

$$f(1) = a_0 + b_0 + c_0 \quad (2) \quad (5)$$

$$f(-1) = a_0 - b_0 + c_0 \quad (3) \quad (5)$$

$$b_0 = \frac{1}{2} \{ f(1) - f(-1) \}$$

$$b_0 = \frac{1}{2}(a - b) \quad (5)$$

From (2)

$$a = a_0 + b_0 + c_0$$

$$a_0 = a - \frac{1}{2}(a - b) - c$$

$$a_0 = \frac{1}{2}(a + b - 2c) \quad (5)$$

$$\therefore \text{Remainder} ; \quad \underbrace{\frac{1}{2}(a+b-2c)x^2 + \frac{1}{2}(a-b)x + c}_{\text{---}} \quad (5)$$

50

$$b) \frac{2.\dot{3} \times 1.\dot{2}\dot{1}}{1.\dot{2}\dot{7}} = N$$

$$\text{Let } x = 2.\dot{3}$$

$$\begin{aligned} x &= 2.3333\ldots \\ 10x &= 23.333\ldots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 9x &= 21 \\ x &= \underline{\underline{\frac{21}{9}}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Let } y = 1.\dot{2}\dot{1}$$

$$\begin{aligned} 10y &= 12.1111\ldots \\ 100y &= 121.1111\ldots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 90y &= 109 \\ y &= \underline{\underline{\frac{109}{90}}} \end{aligned} \quad (10)$$

$$\text{Let, } z = 1.\dot{2}\dot{7}$$

$$\begin{aligned} z &= 1.27272727\ldots \\ 100z &= 127.272727\ldots \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \begin{aligned} 99z &= 126 \\ z &= \underline{\underline{\frac{126}{99}}} = \frac{42}{33} \end{aligned}$$

$$z = \underline{\underline{\frac{14}{11}}} \quad (10)$$

$$\therefore N = \frac{21}{9} \times \frac{109}{90} \times \frac{11}{14} = \frac{33 \times 109}{6 \times 90} \quad (10) \quad \cancel{(40)}$$

(12)

$$(a). f(x) = \frac{x+1}{x-2} ; x \neq 2$$

(i).

$$\text{Domain of } f \quad (D_f) = \underline{\mathbb{R} \setminus \{2\}} \quad (5)$$

$$\text{Range of } f \quad (R_f)$$

Let

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

$$\therefore R_f = \underline{\mathbb{R} \setminus \{1\}} \quad (10)$$

15

ii). Let, any  $x_1, x_2 \in D_f$

$$f(x_1) = f(x_2) \quad (5)$$

$$\frac{x_1+1}{x_1-2} = \frac{x_2+1}{x_2-2} \quad (10)$$

$$(x_1+1)(x_2-2) = (x_2+1)(x_1-2)$$

$$x_1x_2 - 2x_1 + x_2 - 2 = x_1x_2 - 2x_2 + x_1 - 2$$

$$\underline{x_1 = x_2} \quad (5)$$

$\therefore f$  is one-one function.

(5)

25

Let  $y \in C_f$ , we want to get  $x \in D_f$  (6)  
such that  $f(x) = y$  (10)

$$\frac{x+1}{x-2} = y \Rightarrow x = \frac{2y+1}{y-1} \in D_f \quad (10)$$

Hence,

$f$  is onto - function. (5)

25

iii).  $f(x) = \frac{x+1}{x-2} = y$ .

$$x = \frac{2y+1}{y-1}$$

$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}; \quad x \neq 1$$

15

iv).  $f^{-1}f(x) = f(f^{-1}(x))$

$$f^{-1}f(x) = f^{-1}\left(\frac{x+1}{x-2}\right) \quad (5)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 1}{\frac{x+1}{x-2} - 1} \quad (5)$$

$$= \frac{2x+2+x-2}{x+1-x+2} = \frac{3x}{3} \quad (5)$$

$$f^{-1}f(x) = x \quad \text{--- (A)} \quad (5)$$

$$ff(x) = f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) \quad (5)$$

$$= \frac{2x+1}{x-1} + 1$$


---


$$\frac{2x+1}{x-1} - 2 \quad (5)$$

$$= \frac{2x+1+x-1}{2x+1-2x+2} \quad (5)$$

$$= \frac{3x}{3}$$

$$ff^{-1}(x) = x \quad \text{--- (B)} \quad (5)$$

40

From (A) and (B)

$$\underline{f^{-1}f(x) = ff^{-1}(x) = x}$$

b).  $g(x) = \log_a \left( \frac{1+x}{1-x} \right)$

$$g\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log_a \left( \frac{1+\frac{2x}{1+x^2}}{1-\frac{2x}{1+x^2}} \right) \quad (10)$$

$$g\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = \log_a \left( \frac{1+x^2+2x}{1+x^2-2x} \right) \quad (5)$$

$$= \log_a \left( \frac{1+x}{1-x} \right)^2 \quad (5)$$

$$= 2 \log_a \left( \frac{1+x}{1-x} \right) \quad (5)$$

$$\underline{\underline{g\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)}} = 2g(x) \quad (5)$$

30

3). To Proof -

35

i).

$$P \left( \frac{3 \times 7 - 2 \times (-3)}{5}, \frac{3 \times 5 + 2 \times 0}{5} \right) \quad (10)$$

$$\underline{\underline{P(3,3)}} \quad (5)$$

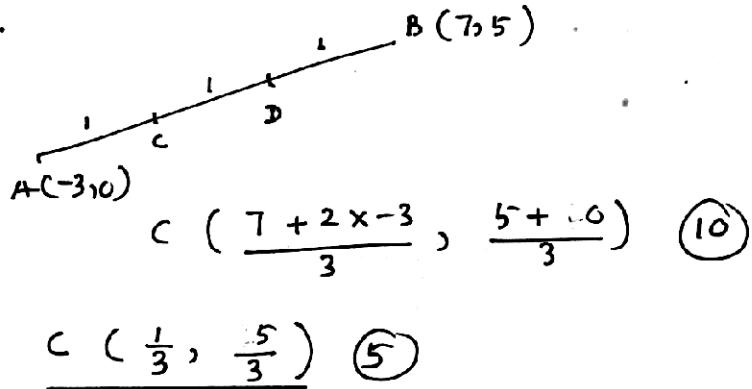
$$Q \left( \frac{(3 \times 7 - 2 \times (-3))}{3-2}, \frac{3 \times 5 - 2 \times 0}{3-2} \right) \quad (10)$$

$$\underline{\underline{Q(27,15)}} \quad (5)$$

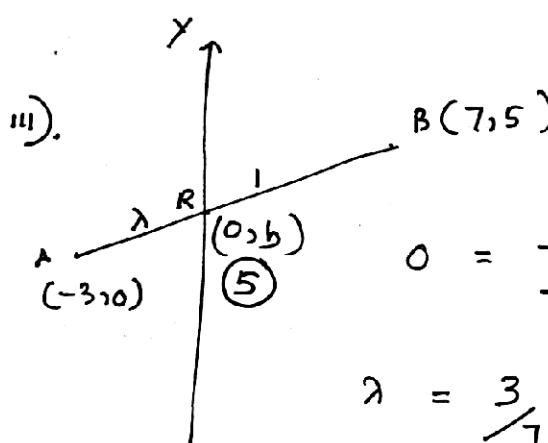
$$\therefore PQ = \sqrt{(27-3)^2 + (15-3)^2} = \sqrt{24^2 + 12^2}$$

$$\quad \quad \quad (10) \quad = \frac{12\sqrt{5}}{5} \text{ units} \quad (45)$$

ii).



$$\underline{D \left( \frac{11}{3}, \frac{10}{3} \right) \quad (5)}$$



$$\underline{\frac{AR}{RB} = \frac{3}{7} \quad (5)}$$

$$b = \frac{5\lambda - 0}{1 + \lambda} \quad (5) = \frac{\cancel{5} \times 3}{\cancel{7} \times 1} \times \cancel{7} \quad (5)$$

$$b = \frac{3}{2} \quad (5)$$

$$\therefore \text{Point } R \equiv \left( 0, \frac{3}{2} \right) \quad (5)$$

30

40

4). To prove

30

$$\log_x 2 \times \log_{\frac{x}{16}} 2 = \log_{\frac{x}{64}} 2$$

$$\frac{\log_2 x}{x} \times \frac{1}{\log_2 \left(\frac{x}{16}\right)} = \frac{1}{\log_2 \left(\frac{x}{64}\right)} \quad (10)$$

$$\frac{\log_2 x}{x} \times \frac{1}{(\log_2 x - 4)} = \frac{1}{(\log_2 x - 6)} \quad (10)$$

Let,

$$\log_2 x = t \quad (5)$$

$$\frac{1}{t}(t-4) = \frac{1}{(t-6)}$$

$$t^2 - 4t - t + 6 = 0 \quad (10)$$

$$t^2 - 5t + 6 = 0$$

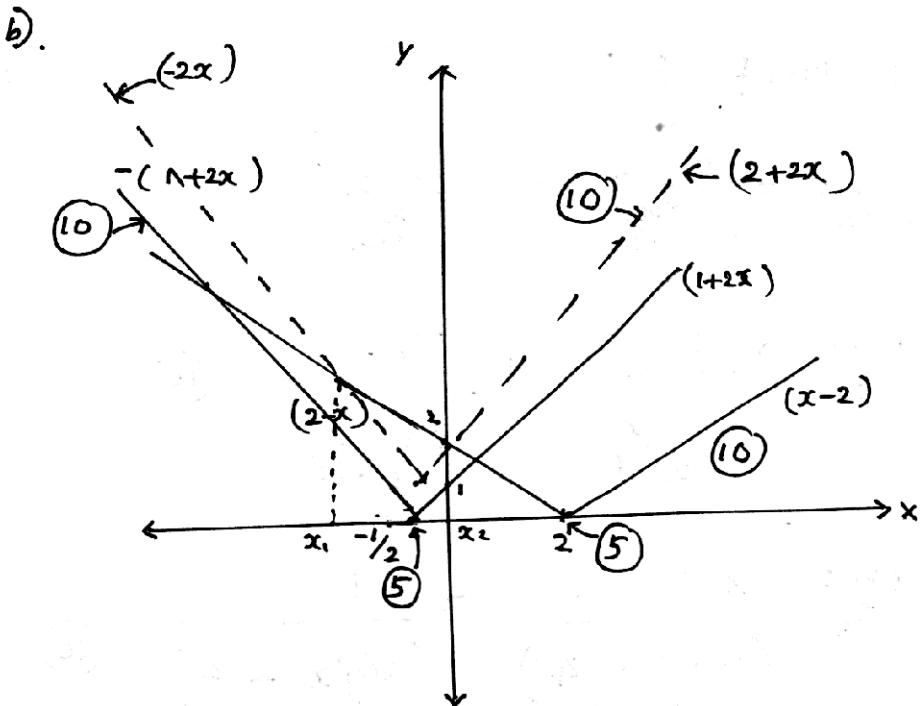
$$(t-3)(t-2) = 0 \quad (5)$$

$$t = 3 \quad \text{or} \quad t = 2 \quad (5)$$

$$\therefore \log_2 x = 3 \quad \text{or} \quad \log_2 x = 2$$

$$\frac{x = 8}{(5)} \quad \text{or} \quad \underline{\underline{x = 4}} \quad (5)$$

60



$$x_1 \rightarrow$$

$$2-x = -2x \quad (5)$$

$$x = -2$$

$$x_1 = -2, \quad x_2 = 0 \quad (5)$$

$\therefore$  solution  $x < -2 \quad \text{or} \quad \underline{\underline{x > 0}} \quad (10)$

60

$$(15)(a). \quad x^2 - 3x + 1 = A(x+1)^2 + \{B(x+1) + C\}(x-2)$$

$$x^2 \rightarrow 1 = A + B \quad (1) \quad (5)$$

$$\begin{aligned} x^1 \rightarrow -3 &= 2A - 2B + (C + B) \\ -3 &= 2A - B + C \quad (2) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x^0 \rightarrow 1 &= A - 2(C + B) \\ 1 &= A - 2C - 2B \quad (3) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{A = -\frac{1}{9}}} \quad \underline{\underline{B = \frac{10}{9}}} \quad \underline{\underline{C = -\frac{15}{9}}} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\frac{x^2 - 3x + 1}{(x-2)(x+1)^2} = \frac{-\frac{1}{9}(x+1)^2 + \left\{ \frac{10}{9}(x+1) + \frac{15}{9} \right\}(x-2)}{(x-2)(x+1)^2} \quad (20)$$

$$= \frac{-\frac{1}{9}(x-2) + \frac{10}{9}(x+1) - \frac{15}{9}(x+1)^2}{(x-2)(x+1)^2} \quad (20)$$

70

b)  $f(x) = ax^3 + bx^2 - 2x + c$

From the division Algorithm,

$$ax^3 + bx^2 - 2x + c = (x^2 + x) \phi(x) + 6(x+1) \quad (10)$$

$$ax^3 + bx^2 - 2x + c \equiv x(x+1) \phi(x) + 6(x+1) \quad (10)$$

$x=0$

$$c = 6 \quad (1) \quad (5)$$

$x=-1$

$$-a+b+2+6 = 0$$

$$b-a = -8 \quad (2) \quad (5)$$

$(x-1)$ , factor of the Function  $f(x)$ ,

$$f(1) = 0 \quad (5)$$

$$a+b-2+c = 0$$

$$a+b = -4 \quad (3) \quad (5)$$

$x=1 \rightarrow a+b-2+c = 0$

$$\therefore \underline{\underline{a = 2}} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{b = -6}} \quad (5)$$

$$\underline{\underline{c = 6}} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x^3 - 6x^2 - 2x + 6 = (x-1)(2x^2 - 4x - 6) \quad (10) \\
 &= (x-1)(x-3)2(x+1) \\
 &= \underline{\underline{2(x-1)(x+1)(x-3)}} \quad (10)
 \end{aligned}$$

△ 80

16)

$$a). \sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} = 1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}$$

L.H.S. →

$$\begin{aligned}
 &\sin^2 \frac{A}{2} + \sin^2 \frac{B}{2} - \sin^2 \frac{C}{2} \\
 &= 1 - \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) - \sin^2 \frac{C}{2} \quad (5) \\
 &\stackrel{(5)}{=} 1 - \sin \frac{C}{2} \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) - \sin^2 \frac{C}{2} \quad (\because A+B+C=\pi) \\
 &\stackrel{(10)}{=} 1 - \sin \frac{C}{2} \left\{ \cos \left( \frac{A-B}{2} \right) + \cos \left( \frac{A+B}{2} \right) \right\}^2 \quad (5) \\
 &= 1 - \sin \frac{C}{2} \times 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \quad (5) \\
 &= \underline{\underline{1 - 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}} \quad (5)
 \end{aligned}$$

△ 40

$$b). \sec x + \tan x = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

R.H.S.

$$\begin{aligned}
 &\tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \\
 &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan \frac{x}{2}} \quad (10) \\
 &= \frac{1 + \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan \frac{x}{2}} \quad (5) = \frac{\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2}} \\
 &= \frac{\left( \cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)^2}{\cos x} \quad (5) \\
 &= \frac{1 + \sin x}{\cos x} = \frac{\sec x + \tan x}{\sec x} \quad (5) \\
 &\therefore \underline{\underline{\sec x + \tan x}} = \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) \quad (30)
 \end{aligned}$$

Hence,

$$\sec x + \tan x = \tan(\pi/4 + x/2) \quad (A)$$

If,  $x = -\alpha \quad (5)$

$$\sec x - \tan x = \tan(\pi/4 - x/2) \quad (B)$$

$$(A) \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \quad (5)$$

$$\tan(\pi/4 + \frac{2\pi}{3}) = \tan(\frac{7\pi}{12}) \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan(\frac{7\pi}{12}) &= \sec(\frac{2\pi}{3}) + \tan(\frac{2\pi}{3}) \quad (5) \\ &= \sec(\pi - \frac{\pi}{3}) + \tan(\pi - \pi/3) \\ &= -\sec \pi/3 - \tan \pi/3 \\ &= -2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\tan(\frac{7\pi}{12}) = - (2 + \sqrt{3}) \quad (5)$$

$$(B) \overline{x = \frac{\pi}{3}} \quad (5)$$

$$\tan(\pi/4 - \pi/6) = \tan(\pi/12) \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\therefore \tan(\pi/12) &= \sec \pi/3 - \tan \pi/3 \quad (5) \\ &= 2 - \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\underline{\tan(\pi/12)} = 2 - \sqrt{3} \quad (5) \quad \triangle 55$$

$$c) 2\sin\alpha \sin 3\alpha - 1 = 0$$

$$(5) \cos 2\alpha - \cos 4\alpha - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha - 2\cos^2 2\alpha + 1 - 1 &= 0 \\ \cos 2\alpha (1 - 2\cos 2\alpha) &= 0 \quad (5)\end{aligned}$$

$$\cos 2\alpha = 0 \quad \text{or} \quad \cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos \pi/2 \quad (5)$$

$$\underline{2\alpha = 2n\pi \pm \pi/2; n \in \mathbb{Z} \quad \text{or}}$$

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$$

$$\cos 2\alpha = \cos(\pi/3) \quad (5)$$

$$\underline{2\alpha = 2m\pi \pm \pi/3; m \in \mathbb{Z}}$$

25

$$17) \sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B \quad (5)$$

$$\sin(\alpha+2\alpha) = \sin \alpha \cos 2\alpha + \cos \alpha \sin 2\alpha \quad (5)$$

$$\sin 3\alpha = \sin \alpha (1 - 2\sin^2 \alpha) + 2\sin \alpha (1 - \sin^2 \alpha) \quad (5)$$

$$\underline{\underline{\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha}} \quad (5)$$

20

$$\sin A \sin(60-A) \sin(60+A) = \frac{1}{4} \sin 3A$$

L.H.S  $\rightarrow$

$$= \sin A \sin(60-A) \sin(60+A)$$

$$= \sin A \cdot \frac{1}{2} \{ \cos 2A - \cos 120 \} \quad (5)$$

$$= \sin A \times \frac{1}{2} \left( \cos 2A + \frac{1}{2} \right) \quad (5)$$

$$= \sin A \times \frac{1}{4} (2 \cos 2A + 1) \quad (5)$$

$$= \sin A \times \frac{1}{4} \{ 2(1 - 2\sin^2 A) + 1 \} \quad (5)$$

$$= \frac{\sin A}{4} (3 - 4\sin^2 A)$$

$$= \frac{(3\sin A - 4\sin^3 A)}{4} \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4} \sin 3A \quad (5)$$

35

$$\sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 80^\circ = \frac{1}{4} \sin (3 \times 20^\circ) \quad (5)$$

$$= \frac{1}{4} \sin 60^\circ$$

$$= \frac{1}{4} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{8} \quad (5)$$

10

b).  $f(x) = \sqrt{3} \cos 2x + \sin 2x$

$$= 2 \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 2x + \frac{1}{2} \sin 2x \right) \quad (10)$$

$$= 2 \left( \cos \frac{\pi}{6} \cos 2x + \sin \frac{\pi}{6} \sin 2x \right)$$

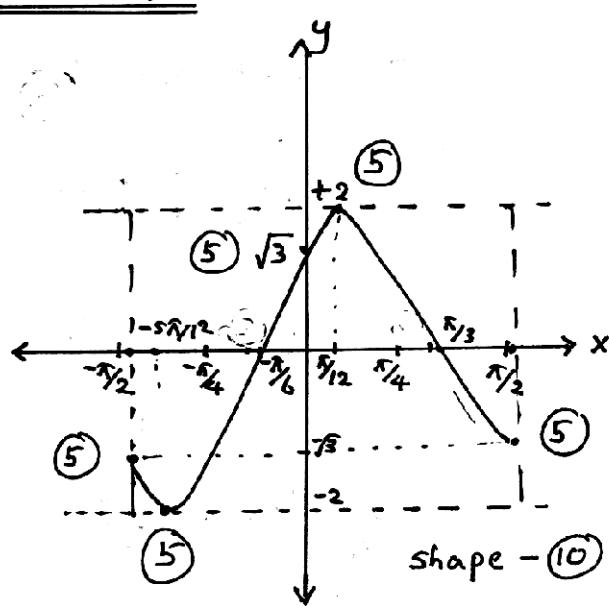
$$f(x) = 2 \cos(2x - \frac{\pi}{6}) \quad (5)$$

$$(5) R = 2 \quad \underline{\alpha = \frac{\pi}{6}} \quad (5)$$

25

$$f(x)_{\max} = 2$$

$$f(x)_{\min} = -2$$



35

17).

c).  $a \sec \alpha = 1 - b \tan \alpha \quad \text{--- (1)}$

$$a^2 \sec^2 \alpha = 5 + b^2 \tan^2 \alpha \quad \text{--- (2)}$$

$$(2) - (1)^2$$

$$a^2 \sec^2 \alpha - a^2 \sec^2 \alpha = 5 + b^2 \tan^2 \alpha - (1 - b \tan \alpha)^2$$

$$0 = 5 - 1 + 2b \tan \alpha \quad \text{--- (10)}$$

$$\tan \alpha = -\frac{2}{b} \quad \text{--- (5)}$$

$$\sec \alpha = \frac{3}{a}$$

But,

$$\sec^2 \alpha - \tan^2 \alpha = 1 \quad \text{--- (5)}$$

$$\left(\frac{3}{a}\right)^2 - \left(-\frac{2}{b}\right)^2 = 1$$

$$\frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1$$

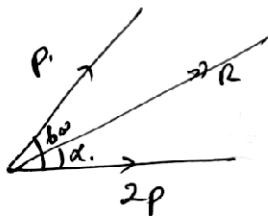
$$\underline{\underline{a^2 b^2 + 4a^2 = 9b^2}} \quad \text{--- (5)}$$

25

# First Term Test - 2019

## Combined Mathematics II - Part A - Grade 12

①.

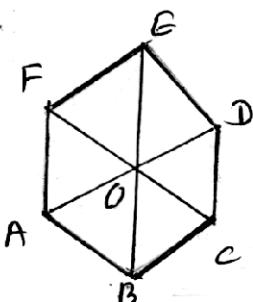


$$\begin{aligned} R^2 &= p^2 + (2p)^2 + 2(p)(2p) \cos(60^\circ) \quad (10) \\ &= p^2 + 4p^2 + 4p^2 \times \frac{1}{2} \\ R^2 &= 7p^2 \\ R &= \sqrt{7}p. \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{p \sin 60^\circ}{2p + p \cos 60^\circ} = \frac{p \times \frac{\sqrt{3}}{2}}{2p + \frac{p}{2}} = \\ \tan \alpha &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}p}{\frac{5}{2}p}. \quad (5) \end{aligned}$$

25

②.



$$\begin{aligned} \vec{OD} &= -\vec{OA} \quad (5) \\ \vec{OG} &= -\vec{OB} \quad (5) \\ \vec{OF} &= -\vec{OC} \quad (5) \\ \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} + \vec{OD} + \vec{OE} + \vec{OF} &= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} \\ &\quad - \vec{OA} - \vec{OB} - \vec{OC} \\ &= \underline{0}. \quad (5) \end{aligned}$$

25

③.

$$q = \underline{i} - 2\underline{j}$$

$$b = -3\underline{i} + \underline{j}$$

$$q + \lambda b = (\underline{i} - 2\underline{j}) + \lambda(-3\underline{i} + \underline{j}) \quad (5)$$

$$\Rightarrow \text{since } q \perp b \rightarrow q + \lambda b = k(-\underline{i} - 3\underline{j}) \quad (5)$$

$$(\underline{i} - 2\underline{j}) + \lambda(-3\underline{i} + \underline{j}) = k(-\underline{i} - 3\underline{j}).$$

$$(1 - 3\lambda) \underline{i} + (-2 + \lambda + 3k) \underline{j} = \underline{0} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \therefore 1 - 3\lambda + 3k &= 0 \quad \rightarrow 3\lambda - k = 1 \quad (5) \quad (1) \\ -2 + \lambda + 3k &= 0 \quad \rightarrow \lambda + 3k = 2 \quad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (1) \times 3 + (2) \cdot \quad 9\lambda + \lambda &= 5 \\ \underline{\underline{\lambda = \frac{1}{2}}} \quad (5) \end{aligned}$$

25

$$④ \quad \underline{a} = \underline{i} + \sqrt{3} \underline{j} \quad |\underline{b}| = \sqrt{3} \quad \underline{b} = x\underline{i} + y\underline{j}$$

$$|\underline{a}| = 2 \quad \therefore \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3} \\ x^2 + y^2 = 3. \quad ⑤ \quad ①$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \theta. \quad ⑥$$

$$(\underline{i} + \sqrt{3} \underline{j}) \cdot (x\underline{i} + y\underline{j}) = 2 \times \sqrt{3} \times \frac{1}{2}$$

$$x + \sqrt{3}y = \sqrt{3}. \\ x = \sqrt{3}(1-y) \quad ⑦$$

$$\text{from } ①. \quad 3(1-y)^2 + y^2 = 3.$$

$$4y^2 - 6y + 3 = 3 \quad ⑧$$

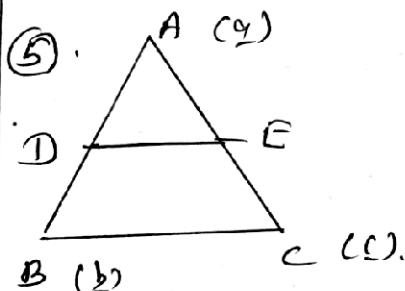
$$y(4y-6) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ or } y = \frac{3}{2}$$

$$\text{when } y = 0, \quad x = \sqrt{3}. \quad x.$$

$$\text{when } y = \frac{3}{2}, \quad x = \sqrt{3}\left(1-\frac{3}{2}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Since } x < 0 \quad \underline{b} = \underline{-\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{3}{2}j} \quad ⑨$$

25



$$\overrightarrow{OA} = \underline{a} \\ \overrightarrow{OB} = \underline{b} \\ \overrightarrow{OC} = \underline{c}.$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \\ = \underline{a} + \frac{1}{2} (\underline{b} - \underline{a}). \\ \overrightarrow{OD} = \left( \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} \right) \quad ⑩$$

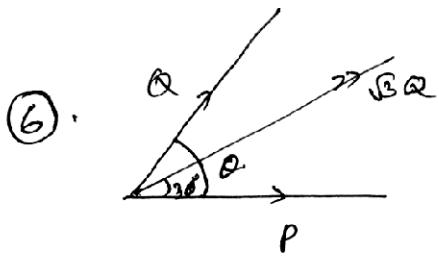
$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \\ = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} (\overrightarrow{AC}) \\ = \underline{a} + \frac{1}{2} (\underline{c} - \underline{a}) \\ = \left( \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2} \right) \quad ⑪$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} \quad ⑫ \\ = \left( \frac{\underline{a} + \underline{b}}{2} \right) + \left( \frac{\underline{a} + \underline{c}}{2} \right) \\ = \frac{1}{2} (\underline{b} + \underline{c}). \\ \overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} \quad ⑬$$

$\therefore DE \parallel BC$  and

$$⑭ \quad DE = \frac{1}{2} BC.$$

25



(6)

$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta$$

$$3Q^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha \quad \text{--- (1)} \quad (5)$$

(1)  $\Rightarrow$

$$2PQ \cos \theta = 3Q^2 - P^2 - Q^2$$

$$\tan 3\theta = \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta} \quad (5)$$

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{Q \sin \theta}{P + Q \cos \theta}$$

$$P + Q \cos \theta = \sqrt{3} Q \sin \theta \quad \text{--- (2)}$$

$$P^2 + Q^2 \cos^2 \theta + 2PQ \cos \theta = 3Q^2 \sin^2 \theta$$

$$P^2 + Q^2 \cos^2 \theta + 3Q^2 \overline{P^2 - Q^2} = 3Q^2 \sin^2 \theta \quad (5)$$

$$Q^2 \cos^2 \theta + 2Q^2 - 3Q^2 \sin^2 \theta = 0$$

$$\cos^2 \theta + 2 - 3 \sin^2 \theta = 0$$

$$4 \sin^2 \theta - 3 = 0$$

$$\sin^2 \theta = \frac{3}{4}$$

$$\sin \theta = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Since } \theta < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \quad (5)$$

from (2);

$$P + \frac{Q}{2} = \sqrt{3} Q \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$P + \frac{Q}{2} = \frac{3Q}{2} \quad (5)$$

$$\underline{P = 2Q}$$

25

(7)

$$\rightarrow x = 2\sqrt{3} \cos 30^\circ - 2 \cos 60^\circ + P \sin \alpha = 0 \quad (5)$$

$$2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \times \frac{1}{2} + P \sin \alpha = 0$$

$$P \sin \alpha = 2 \quad \text{--- (1)}$$

$$\uparrow y = 2 \sin 60^\circ + 2\sqrt{3} \sin 30^\circ - P \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

$$2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} - P \cos \alpha = 0$$

$$P \cos \alpha = 2\sqrt{3} \quad \text{--- (2)}$$

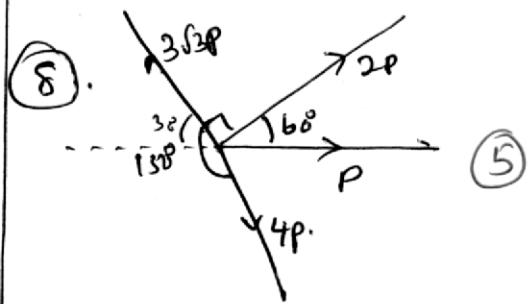
(1)  
(2)

$$\tan \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad (5)$$

$$\text{from (1); } P = \frac{2}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin 60^\circ} = \frac{4N}{\sqrt{3}} \quad (5)$$

25



$$\begin{aligned}\vec{x} &= P + 2P \cos 60^\circ - 3\sqrt{3}P \cos 30^\circ + 4P \cos 60^\circ \quad (5) \\ &= P + P - \frac{9}{2}P + 2P \\ x &= 4P - \frac{9}{2}P = -\frac{1}{2}P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y &= 2P \sin 60^\circ + 3\sqrt{3}P \sin 30^\circ - 4P \sin 60^\circ \quad (5) \\ &= 2P \times \frac{\sqrt{3}}{2} + 3\sqrt{3}P \times \frac{1}{2} - 4P \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y &= \frac{\sqrt{3}}{2}P\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R^2 &= \frac{3P^2}{4} + \frac{P^2}{4} = P^2 \quad \text{Radius } r = \frac{\sqrt{3}P/2}{P/2} \\ R &= P \quad (5) \quad \alpha \approx 60^\circ \quad (5)\end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned}\vec{AB} &= \underline{b} - \underline{a} \\ &= (40i - 8j) - (60i + 3j) \\ &= -20i - 11j \quad (5)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{BC} &= \underline{c} - \underline{b} \\ &= (a_i - 52j) - (40i - 8j) \quad (5) \\ \vec{BC} &= (a - 40)i - 44j\end{aligned}$$

If points A, B, C are collinear,

$$\overrightarrow{AB} = k \overrightarrow{BC} \quad (5)$$

$$-20i - 11j = k [(a-40)i - 44j] \quad (5)$$

$$-11 = -44k$$

$$-20 = k(a-40)$$

$$k = \frac{1}{4}$$

$$-20 = \frac{1}{4}(a-40)$$

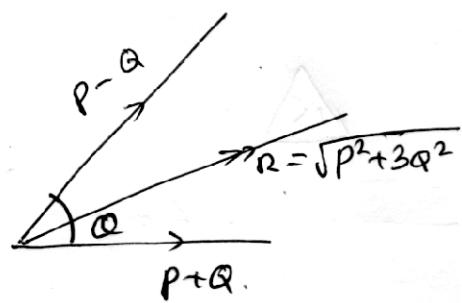
$$-80 = a-40$$

$$-40 = a$$

$$\underline{a = -40} \quad (5)$$

25

(10)



$$R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \theta$$

$$P^2 + 3Q^2 = (P+Q)^2 + (P-Q)^2 + 2(P+Q)(P-Q) \cos \theta \quad (5)$$

$$P^2 + 3Q^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ + P^2 + Q^2 - 2PQ + 2(P^2 - Q^2) \cos \theta$$

$$P^2 + 3Q^2 = 2P^2 + 2Q^2 + 2(P^2 - Q^2) \cos \theta$$

$$Q^2 = P^2 + 2(P^2 - Q^2) \cos \theta \quad (5)$$

$$2(P^2 - Q^2) \cos \theta = (Q^2 - P^2) \quad (5)$$

$$\cos \theta = \frac{-(P^2 - Q^2)}{2(P^2 - Q^2)}$$

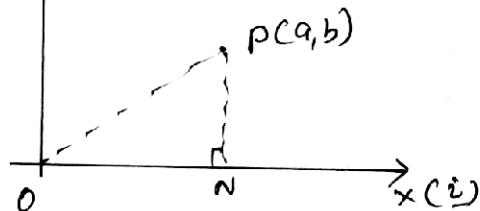
$$\cos \theta = -\frac{1}{2} \quad (5)$$

$$\underline{\theta = 120^\circ} \quad (5)$$

25

part B.

(ii) (a)



$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{ON} + \overrightarrow{NP} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OP} = a\hat{i} + b\hat{j} \quad (5)$$

$$|\overrightarrow{OP}| = OP = \sqrt{a^2 + b^2}. \quad (5)$$

△

$$(i) \overrightarrow{OA} = -2\hat{i} - \sqrt{2}\hat{j} \quad (5)$$

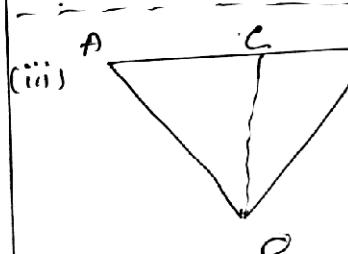
$$\overrightarrow{OB} = 3\hat{i} + 4\sqrt{2}\hat{j} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = 2\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} + 3\hat{i} + 4\sqrt{2}\hat{j}$$

$$\overrightarrow{AB} = 5\hat{i} + 5\sqrt{2}\hat{j} \quad (5)$$

△

$$(ii) |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{5^2 + (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{3}. \quad (5)$$



$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \quad (10)$$

$$= (-2\hat{i} - \sqrt{2}\hat{j}) + \frac{1}{2}(5\hat{i} + 5\sqrt{2}\hat{j})$$

$$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\hat{j} \quad (5)$$

$$(iv) |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{18}{4}} = \frac{\sqrt{19}}{2}. \quad (5)$$

$$\text{Unit vector along } \overrightarrow{OC} \text{ (u)} = \frac{\overrightarrow{OC}}{|\overrightarrow{OC}|} = \frac{1}{\left(\frac{\sqrt{19}}{2}\right)} \left( \frac{1}{2}\hat{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\hat{j} \right)$$

$$\underline{u} = \frac{1}{\sqrt{19}} \left[ \hat{i} + 3\sqrt{2}\hat{j} \right] \quad (5)$$

Vector with magnitude  $\sqrt{19}$ ;  $\Rightarrow \sqrt{19} \text{ i}^{\underline{j}}$

$$= \underline{i} + 3\sqrt{2} \underline{j} \quad (5)$$

35

(V).  $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$

Let  $\overrightarrow{OD} = x\underline{i} + y\underline{j} \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{19}$

$$|\overrightarrow{OD}| = \sqrt{19}$$

$$x^2 + y^2 = 19 - (1) \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = 0$$

$$(\frac{1}{2}\underline{i} + \frac{3\sqrt{2}}{2}\underline{j}) \cdot (x\underline{i} + y\underline{j}) = 0 \quad (10)$$

$$\frac{x}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{2}y = 0 \quad (5)$$

$$x + 3\sqrt{2}y = 0.$$

$$x = -3\sqrt{2}y. \quad (5)$$

From (1);  $(-3\sqrt{2}y)^2 + y^2 = 19.$

$$18y^2 + y^2 = 19$$

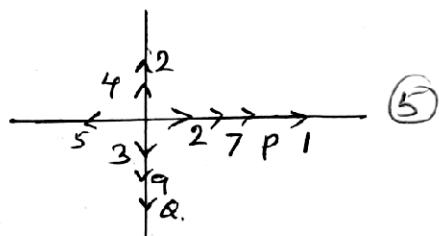
$$y^2 = 1 \quad (5)$$

$$y = \pm 1 \quad (5)$$

When  $y = -1$ ;  $x = 3\sqrt{2} \quad (5) \therefore \overrightarrow{OD} = (3\sqrt{2}\underline{i} - \underline{j}) \quad (5)$

When  $y = +1$ ;  $x = -3\sqrt{2} \quad (5) \quad \overrightarrow{OD} = (-3\sqrt{2}\underline{i} + \underline{j}) \quad (5) \quad 55$

(b).



$$\overrightarrow{x} = 0.$$

$$2 + 7 + P + -5 = 0 \quad (5)$$

$$\underline{P = -5} \quad (5)$$

$$4y = 0.$$

$$4 + 2 - 9 - 3 - Q = 0 \quad (5)$$

$$\underline{Q = -6} \quad (5)$$

25

$$(12) \text{ (a)} \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0}$$

$$\text{let } \lambda \neq 0, \text{ then } \underline{a} = -\frac{\mu}{\lambda} \underline{b}$$

This is of the form  $\underline{a} = k \underline{b} \Rightarrow \underline{a} \parallel \underline{b}$

But  $\underline{a}$  and  $\underline{b}$  are non-parallel vectors.

This is impossible. That is if  $\lambda \neq 0$  then  $\underline{a} \perp \underline{b}$ .

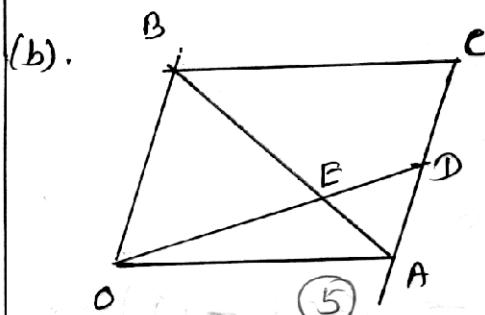
$$\text{but } \underline{b} \neq 0 \Rightarrow \mu = 0 \quad \therefore \lambda = \mu = 0$$

Conversely, let  $\lambda = 0$  and  $\mu = 0$ .

$$\Rightarrow \text{Then } \lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = 0 + 0 = \underline{0}$$

That is if  $\lambda \underline{a} + \mu \underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \lambda = 0$  and  $\mu = 0$ .

 30



$$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$$

$$\text{(i)} \quad \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \quad (10)$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad (5)$$

$$= \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2} \overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{OD} = \underline{a} + \frac{1}{2} \underline{b} \quad (5)$$

 25

$$\text{(ii)} \quad \overrightarrow{OE} = \lambda \overrightarrow{OD} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OE} = \lambda \left[ \underline{a} + \frac{1}{2} \underline{b} \right] \quad (5)$$

$$\overrightarrow{AE} = \mu \cdot \overrightarrow{AB} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{AE} = \mu (\underline{b} - \underline{a}) \quad (5)$$

$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} \quad (10)$$

$$= \underline{a} + \mu (\underline{b} - \underline{a})$$

$$\overrightarrow{DE} = (1 - \mu) \underline{a} + \mu \underline{b} \quad (5)$$

 35

$$\lambda\left(\underline{a} + \frac{1}{2}\underline{b}\right) = (1-\mu)\underline{a} + \mu\underline{b} \quad (10)$$

$$(\lambda - 1 + \mu)\underline{a} + \left(\frac{1}{2} - \mu\right)\underline{b} = \underline{0} \quad (10)$$

$$\therefore \lambda + \mu = 1 \quad (10)$$

$$\frac{\lambda}{2} = \mu \quad (10)$$

$$\therefore \lambda = 2\mu.$$

$$\therefore 3\mu = 1$$

$$\underline{M} = \frac{1}{3}, \quad \underline{\lambda} = \frac{2}{3}$$

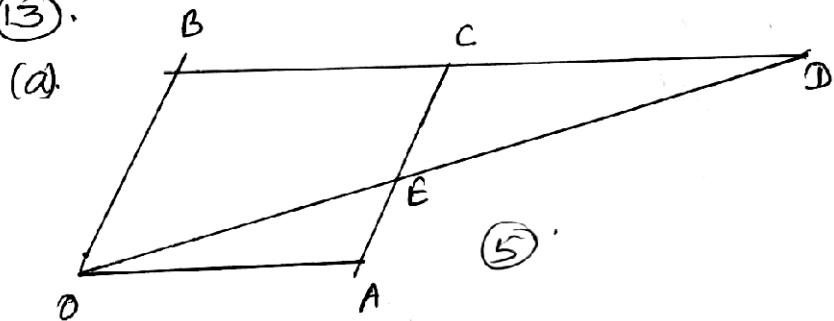

---

$$\therefore \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB} \quad (5)$$

$$\underline{AE} : \underline{AB} = 1 : 3 \quad (5)$$

160

(13).



$$\overrightarrow{OA} = \underline{a} \quad \overrightarrow{OB} = \underline{b} \quad \overrightarrow{BD} = 3\overrightarrow{BC} = 3\underline{a} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BD} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OD} = \underline{b} + 3\underline{a} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OE} = \lambda \overrightarrow{OD}$$

$$\overrightarrow{OE} = \lambda (\underline{b} + 3\underline{a}) \quad (5)$$

$$\overrightarrow{AE} = \mu \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{AE} = \mu [\underline{b}]$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \\ \overrightarrow{OE} &= \underline{a} + \mu \underline{b} \quad (5) \end{aligned}$$

$$\underline{q} + M\underline{b} = 3\underline{a}\underline{q} + \underline{a}\underline{b}, \textcircled{10}$$

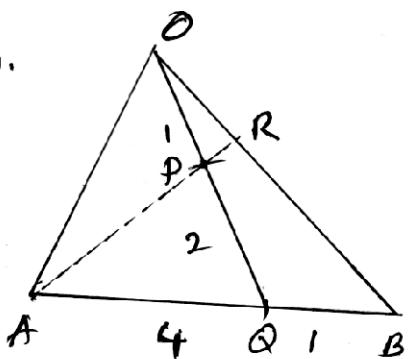
$$\therefore 3\underline{a} = 1 \textcircled{5} \quad M = \underline{a} \textcircled{5}$$

$$\underline{a} = \frac{1}{3} \textcircled{5}$$

$$\therefore \lambda = M = \frac{1}{3} \textcircled{5}$$

$\triangle 60$

(b).



$$\overrightarrow{OA} = \underline{a}$$

$$\overrightarrow{OB} = \underline{b}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AQ} \textcircled{5}$$

$$= \underline{a} + \frac{4}{5} \overrightarrow{AB}$$

$$= \underline{a} + \frac{4}{5} (\underline{b} - \underline{a}) \textcircled{5}$$

$$\overrightarrow{OQ} = \frac{1}{5} (\underline{a} + 4\underline{b}) \textcircled{5}$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OQ} \textcircled{5} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{5} (\underline{a} + 4\underline{b})$$

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{15} (\underline{a} + 4\underline{b}) \textcircled{5}$$

$$(ii) \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OP} \textcircled{5}$$

$$= -\underline{a} + \frac{1}{15} (\underline{a} + 4\underline{b}) \textcircled{5}$$

$$= \frac{1}{15} [\underline{a} + 4\underline{b} - 15\underline{a}]$$

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{15} (4\underline{b} - 14\underline{a}) \textcircled{5}$$

$\triangle 40$

$$\overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AP} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AP} = \underline{a} + \frac{1}{15}\lambda [4\underline{b} - 14\underline{a}] \quad (5)$$

$$= \frac{1}{15}[15 - 14\lambda]\underline{a} + \frac{4\lambda}{15}\underline{b} \quad (5)$$

for independence from  $\underline{a}$ :

$$15 - 14\lambda = 0 \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{15}{14}. \quad (5)$$

$$(iv). \overrightarrow{OR} = \overrightarrow{OA} + \lambda \overrightarrow{AP} = \frac{4\lambda}{15}\underline{b}. \quad (5)$$

$$= \frac{4 \times 15}{15} \frac{\underline{b}}{14} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{7}\underline{b} \quad (5)$$

$$\overrightarrow{OR} = \frac{2}{7}\overrightarrow{OB} \quad (5)$$

$$\therefore \underline{OR} : \underline{OB} = 2 : 7. \quad (5)$$

50

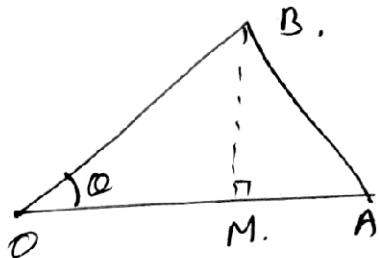
$$(14) (a). \text{dot product} \Rightarrow \underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \cos \theta. \quad (5)$$

$\theta$  is the angle between two vectors.

$$\text{cross product} \Rightarrow \underline{a} \times \underline{b} = |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \theta \underline{n}. \quad (5)$$

where  $\theta$  is the angle between two vectors and  $\underline{n}$  is the unit vector which obey right handed screw law in the direction perpendicular to both  $\underline{a}$  and  $\underline{b}$ .

10



$$\vec{OA} = \underline{a}$$

$$\vec{OB} = \underline{b}$$

$$\begin{aligned}\text{Area of the triangle } OAB &= \frac{1}{2} \times OA \times BM. \quad (5) \\ &= \frac{1}{2} \times |\underline{a}| \times |\underline{b}| \sin \alpha \quad (5) \\ &= \frac{1}{2} \times |\underline{a}| |\underline{b}| \sin \alpha \quad (5)\end{aligned}$$

$$\Delta OAB = \frac{1}{2} |\underline{a} \times \underline{b}|. \quad (5)$$

20

$$(b). (\underline{a} + \underline{b}) \cdot (\underline{a} - \underline{b}) = 0 \quad (10)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{a} - \underline{a} \cdot \underline{b} + \underline{a} \cdot \underline{b} - \underline{b} \cdot \underline{b} = 0. \quad (10)$$

$$|\underline{a}|^2 - |\underline{b}|^2 = 0$$

$$\underline{a} = \underline{b} \quad (10)$$

30

$$(c). \vec{OA} = \underline{a} + 2\underline{b}$$

$$\vec{OB} = 3\underline{a} - \underline{b} \quad (5)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 0. \quad (5)$$

$$(\underline{a} + 2\underline{b}) \cdot (3\underline{a} - \underline{b}) = 0.$$

$$3\underline{a} \cdot \underline{a} - \underline{a} \cdot \underline{b} + 6\underline{a} \cdot \underline{b} - 2\underline{b} \cdot \underline{b} = 0.$$

$$3|\underline{a}|^2 + 5\underline{a} \cdot \underline{b} - 2|\underline{b}|^2 = 0. \quad (5)$$

$$\therefore \underline{a} \cdot \underline{b} = \frac{2}{5} |\underline{b}|^2 - \frac{3}{5} |\underline{a}|^2 \quad (5)$$

$|a| = 2$      $|b| = 1$ . Let  $\alpha$  be the angle between vectors.

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = |a||b|\cos\alpha = \frac{2}{3}|b|^2 - \frac{3}{5}|a|^2 \quad (5)$$

$$= 2 \times 1 \cos\alpha = \frac{2}{5}|a|^2 - \frac{3}{5}|b|^2$$

$$2\cos\alpha = \frac{2}{5} - \frac{12}{5} \quad (5)$$

$$2\cos\alpha = -2$$

$$\cos\alpha = -1 \quad (3)$$

$$\underline{\alpha = \pi} \quad (5)$$



$$(6) \quad \underline{a} = 3\underline{i} + 4\underline{j}$$

$$\underline{b} = \lambda \underline{i} + \mu \underline{j} \quad |b| = 1.$$

$$\lambda^2 + \mu^2 = 1. \quad (1)$$

$$\underline{a} \cdot \underline{b} = 0. \quad (5)$$

$$(3\underline{i} + 4\underline{j}) \cdot (\lambda \underline{i} + \mu \underline{j}) = 0. \quad (10)$$

$$3\lambda + 4\mu = 0. \quad (2)$$

$$\lambda = -\frac{4\mu}{3}. \quad (5)$$

$$\text{from (1), } \frac{16\mu^2}{9} + \mu^2 = 1. \quad (5)$$

$$25\mu^2 = 9. \quad (3)$$

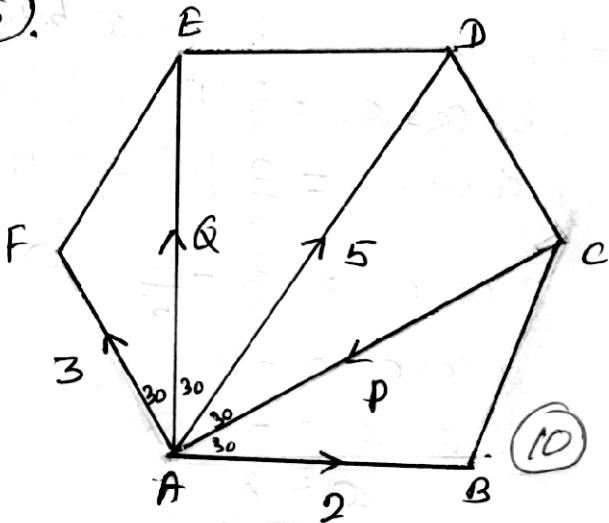
$$\mu = \frac{3}{5} \quad (\mu > 0).$$

$$\therefore \underline{\lambda = -\frac{4}{3} \times \frac{3}{5}}$$

$$\underline{\lambda = -\frac{4}{5}} \quad (5)$$



(15)



$$\vec{x} = 2 - p \cos 30 + 5 \cos 60 - 3 \cos 60 = 0 \quad (10)$$

$$2 - p \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2} - 3 \times \frac{1}{2} = 0 \quad (5)$$

$$4 - \sqrt{3}p + 5 - 3 = 0$$

$$-\sqrt{3}p + 6 = 0$$

$$p = \frac{6}{\sqrt{3}} = \frac{6\sqrt{3}}{3}$$

$$\underline{p = 2\sqrt{3} N} \quad (5)$$

$$\uparrow y = 3 \cos 30 + Q + 5 \cos 30 - p \cos 60 = 0 \quad (10)$$

$$3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + Q + 5 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - p \times \frac{1}{2} = 0 \quad (5)$$

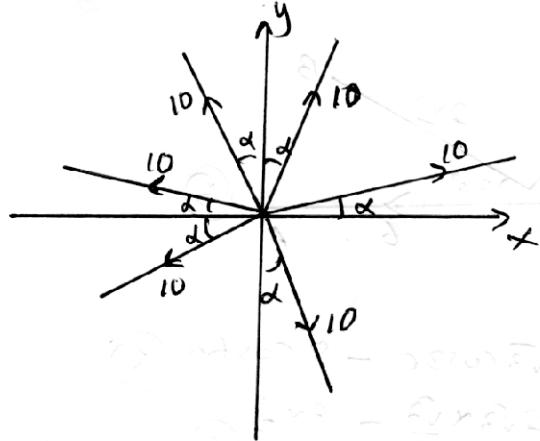
$$3\sqrt{3} + 2Q + 5\sqrt{3} - p = 0.$$

$$3\sqrt{3} + 2Q + 5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 0$$

$$2Q + 6\sqrt{3} = 0$$

$$\underline{Q = -3\sqrt{3} N} \quad (5)$$

50

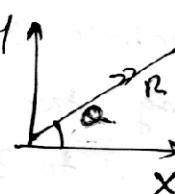


$$\begin{aligned} \rightarrow x &= 10 \cos \alpha + 10 \sin \alpha - 10 \sin \alpha - 10 \cos \alpha - 10 \cos \alpha + 10 \sin \alpha \\ &= 10 \sin \alpha - 10 \cos \alpha. \\ &= 10 (\sin \alpha - \cos \alpha) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow y &= 10 \sin \alpha + 10 \cos \alpha + 10 \cos \alpha + 10 \sin \alpha - 10 \sin \alpha - 10 \cos \alpha \\ &= 10 (\sin \alpha + \cos \alpha) \quad (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R^2 &= x^2 + y^2 \\ &= 10^2 (\sin \alpha - \cos \alpha)^2 + 10^2 (\sin \alpha + \cos \alpha)^2 \quad (5) \\ &= 10^2 [\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha] \quad (5) \\ &= 10^2 [2] \end{aligned}$$

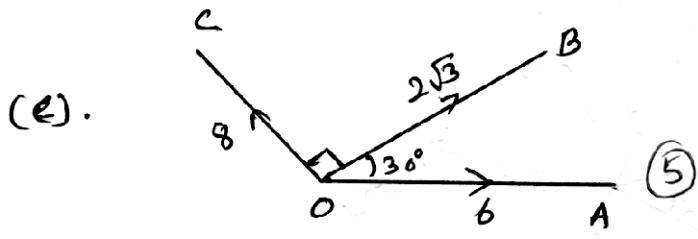
$$\underline{R = 10\sqrt{2} \text{ N.}} \quad (5)$$



$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{y}{x} \\ &= \frac{10 (\sin \alpha + \cos \alpha)}{10 (\sin \alpha - \cos \alpha)} \quad (5) \end{aligned}$$

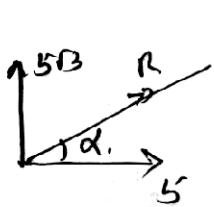
$$\underline{\tan \alpha = \frac{\tan \alpha + 1}{\tan \alpha - 1}} \quad (5)$$

5D



$$\begin{aligned} \rightarrow X &= 6 + 2\sqrt{3} \cos 30 - 8 \cos 60 \quad (5) \\ &= 6 + 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 8 \times \frac{1}{2} \quad (5) \\ &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \uparrow Y &= 2\sqrt{3} \sin 30 + 8 \sin 60 \quad (5) \\ &= 2\sqrt{3} \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (5) \\ Y_1 &= 5\sqrt{3} \quad (5) \end{aligned}$$

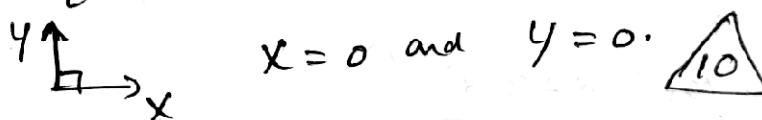


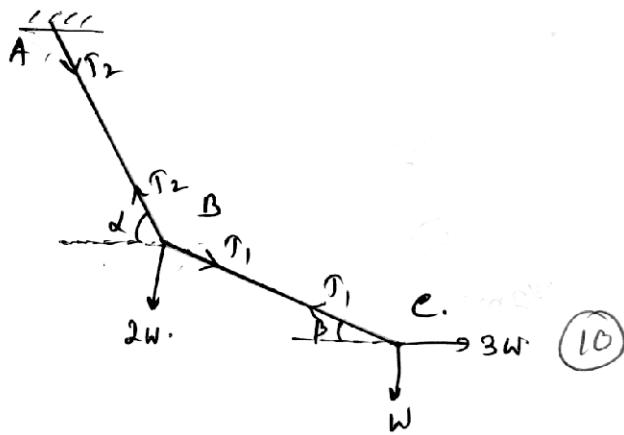
$$\begin{aligned} R &= \sqrt{5^2 + (5\sqrt{3})^2} \quad \uparrow \tan \alpha = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3} \quad (5) \\ &= 5\sqrt{4} \\ R &= 10 \text{ N} \quad \underline{\underline{\alpha = 60^\circ}} \quad (5) \end{aligned}$$

50

(f).

- (a) Algebraic sum of resolved components of forces along two perpendicular directions, should separately equal to zero.





at B.

$$\begin{aligned} \text{F}_1 T_2 \sin \alpha - T_1 \sin \beta - 2W &= 0 \quad \textcircled{1} \quad \textcircled{16} \\ \rightarrow T_1 \cos \beta - T_2 \cos \alpha &= 0 \quad \textcircled{2} \quad \textcircled{10} \end{aligned}$$

at C

$$\begin{aligned} \text{F}_1 T_1 \sin \beta - W &= 0 \quad \textcircled{3} \quad \textcircled{10} \\ \rightarrow 3W - T_1 \cos \beta &= 0 \quad \textcircled{4} \quad \textcircled{10} \end{aligned}$$

$$\therefore T_1 \cos \beta = 3W$$

$$T_1 \sin \beta = W$$

$$\textcircled{3} \Rightarrow \underline{T_1 \tan \beta = \frac{1}{3}} \quad \textcircled{5}$$



$$\therefore T_1 \sin \beta = W \quad \textcircled{5}$$

$$T_1 = \frac{W}{\sin \beta} = \frac{W}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \sqrt{10}W$$

$$\underline{T_1 = \sqrt{10}W} \quad \textcircled{5}$$

From  $\textcircled{1}$  and  $\textcircled{5}$ :

$$\begin{aligned} T_2 \sin \alpha &= 2W + T_1 \sin \beta \\ &= 2W + \sqrt{10}W \times \frac{1}{\sqrt{10}} = 3W \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$T_2 \sin \alpha = 3W \quad \textcircled{5} \quad \textcircled{5}$$

$$T_2 \cos \alpha = T_1 \cos \beta = \sqrt{10}W \times \frac{3}{\sqrt{10}} \quad \textcircled{5}$$

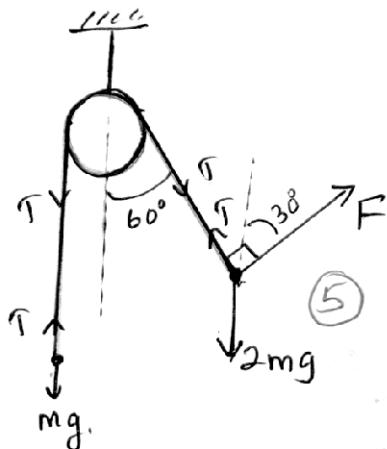
$$T_2 \cos \alpha = 3W \quad \textcircled{6} \quad \textcircled{5}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \text{and } \alpha &= 1 \quad \textcircled{5} \\ \textcircled{6} \quad \alpha &= \pi/4 \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{From } \textcircled{5}; \textcircled{6} \quad T_2 &= \frac{3W}{\sin \alpha} = \frac{3W}{\sin \pi/4} = \underline{\underline{3\sqrt{2}W}} \quad \textcircled{5} \end{aligned}$$

110

(c).



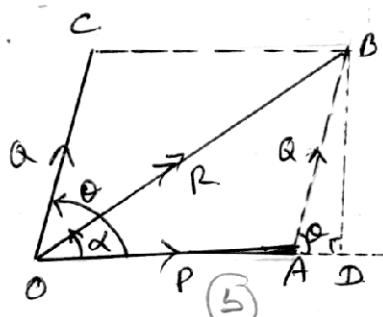
for (m):

$$\begin{aligned} \uparrow T - mg &= 0 \\ T &= mg \quad (5) \end{aligned}$$

for (2m)

$$\begin{aligned} \uparrow T \cos 60^\circ - 2mg + F \cos 30^\circ &= 0 \\ mg \times \frac{1}{2} - 2mg + F \times \frac{\sqrt{3}}{2} &= 0 \quad (5) \\ - \frac{3mg}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} F &= 0 \\ \sqrt{3} F &= 3mg \\ F &= \sqrt{3} mg \quad (5) \end{aligned}$$

(17)



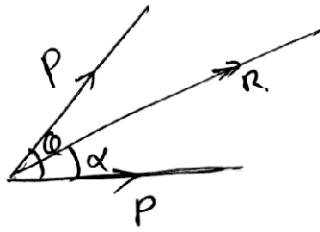
$$\begin{aligned} OB^2 &= OD^2 + BD^2 \\ R^2 &= (P+Q \cos \alpha)^2 + (Q \sin \alpha)^2 \\ R^2 &= P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha. \quad (10) \\ \tan \alpha &= \frac{BD}{OD} = \frac{Q \sin \alpha}{P+Q \cos \alpha} \quad (5) \end{aligned}$$

When  $P = Q$ :

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{P \sin \alpha}{P+P \cos \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1+\cos \alpha} = \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{1+2\cos^2 \frac{\alpha}{2}-1} \\ &= \frac{2 \sin \alpha_2 \cos \alpha_2}{2 \cos^2 \alpha_2} = \tan \alpha_2 \quad (5) \end{aligned}$$

$$\tan \alpha = \tan \alpha_2 \implies \alpha = \alpha_2 \quad (5)$$

50



$$R^2 = 2(P)(P)$$

$$R^2 = 2P^2 \quad (10)$$

using  $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$

$$R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 \cos \alpha \quad (10)$$

$$2P^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos \alpha$$

$$2P^2 \cos \alpha = 0. \quad (10)$$

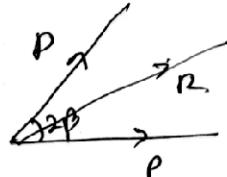
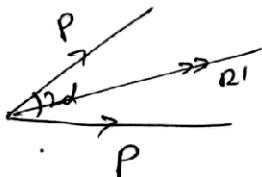
$$\therefore \cos \alpha = 0 \quad (5)$$

$$\underline{\alpha = \pi/2} \quad (5)$$

From the above result  $\alpha = \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} = 45^\circ \quad (10)$

50

(c).



Given that  $R' = 2R \quad (5)$

$$(R')^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 2\alpha. \quad (10)$$

$$R^2 = P^2 + P^2 + 2P^2 \cos 2\beta \quad (10)$$

$$(2R)^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos 2\alpha.$$

$$R^2 = 2P^2 + 2P^2 \cos 2\beta.$$

$$4R^2 = 2P^2 [1 + \cos 2\alpha]. \quad (5)$$

$$= 2P^2 (1 + \cos 2\beta) \quad (5)$$

$$4R^2 = 2P^2 [1 + 2\cos^2 \alpha - 1] \quad (5)$$

$$= 2P^2 [2\cos^2 \beta].$$

$$4R^2 = 4P^2 \cos^2 \alpha$$

$$R^2 = 4P^2 \cos^2 \beta. \quad (2)$$

$$R^2 = P^2 \cos^2 \alpha. \quad (1)$$

from (1) and (2);  $4P^2 \cos^2 \beta = P^2 \cos^2 \alpha \quad (5)$

$$\underline{2\cos \beta = \cos \alpha} \quad (5)$$

50