Part A

1) If α and β are the roots of the quadratic equation $x^2 - ax + b = 0$ then find the roots of the quadratic equation $4bx^2 - 2(a^2 - 2b)x + b = 0$ in terms of α and β.

2) $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x + a$ where a is a constant. When $p(x)$ is divided by $(x+1)$ the reminder is 3. Show that the equation $p(x) = 0$ has only one real root.

7) **P** is a variable point and point A is *(1,0)* and point B is *(-1,0)* Given that $AP + BP = 4$. Show that the locus of P is in the curve $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$.

8) Image of the point *(3,-4)* on the line $ax+by+9=0$ is *(-5,6)*. Find the values of a and b.

9) If $Cos\beta = -\frac{1}{2}$ then show that $Cos\,\alpha + Cos(\alpha+\beta) + Cos(\alpha+2\beta) = 0$.

10) In usual notation in a triangle ABC, then length of the sides ***a,b,c*** in arithmetic progression.

Show that $Cos\left(\frac{A-C}{2}\right) = 2\,Sin\frac{B}{2}$.

3) Solve the inequality $\dfrac{(x^2-x-6)(x^2+x+2)}{(x-1)} \leq 0.$

4) By using the substitution $y = log_x(4)$, convert the equation $4\,log_{16}(x) - 1 = log_x(4)$ into quadratic equation of y. Hence find x.

5) By using first principle and differentiate the function $\sqrt{x+1}$.

6) A common tangent drawn to the curves $3x^2+2xy+2y^2=7$, and $y^2=ax+b$ at the point $(1,1)$. Find the values of a and b.

Part - B

11) a) α and β are the roots of the quadratic equation $ax^2 + bx + c = 0$.

Show that $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}$ and $\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

Let $f(x)=\frac{4x^2+8}{2x+1}$ where $x\in\Re$, $x\neq-\frac{1}{2}$.

(i) Find the range of values of f(x).

(ii) The difference of the roots of the quadratic equation **f(x) = k** is **3**. If k_1 and k_2 are the two values that **k** can take, find the value of $\left(k_1^2+k_2^2\right)$.

b) $f(x)=x^2-4\lambda x+2(\lambda+1)$ where $\lambda\in\Re$.

Find the minimum value of f(x) without using differentiation.

Hence deduce the range of values of λ for which $f(x)\geq 0$.

Draw the graph of $y=f(x)$ for $\lambda > \frac{1}{2}$.

12) a) A quadratic polynomial *P(x)* has remainders 1,25 and 1 when divided by **(x-1)**, **(x+1)** and **(x-2)** respectively. Find the polynomial *P(x)*. Also show that for all *x*, *P(x)* is positive.

b) Sketch the graphs of $y=2|x-1|$ and $y=5-|2x+1|$ in the same diagram.

Hence solve the inequality $2|x-1|+|2x+1| > 5$.

c) Expresses in partial fractions $\frac{x^3}{x^3+1}$.

13) a) If $\lim_{x\to 0}\left\{\frac{\sin 2x-x}{\tan kx-4x}\right\}=-1$ then find the value of k.

b) If $\sin y = 2\sin x$, then show that,

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=1+3\sec^2 y$$

Deduce that $\cot y\frac{d^2y}{dx^2}-\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1=0$.

c) Let C be the curve given by $x=\frac{1+t}{t^2}, y=\frac{3}{2t^2}+\frac{2}{t}$,

Where t is a real parameter. Find the value of $\frac{d^2y}{dx^2}$ in terms of *t*.

14) a) Sketch the graph of $y=\frac{(x-1)^3}{x^2}$

Using the graph find the number of real solutions of the equation $e^x(x-1)^3=x^2$

b) A rectangular box is to be made having a capacity of $\frac{125}{2}m^3$, with a square base but without a lid.

Find the dimensions of the box that will make its total surface area a minimum. Also find the value of minimum area.

15) $a_1x+b_1y+c_1=0$ and $a_2x+b_2y+c_2=0$ are equations of two straight lines. Show that $(a_1x+b_1y+c_1)+\lambda(a_2x+b_2y+c_2)=0$ is the equation of the line which passes through the intersection of above two straight lines. (λ is a parameter). In triangle ACD, $2x+y-1=0, x-7y+22=0$ and $x-y-5=0$ are equations of the sides AC, CD and DA.

The straight line which passes through the point ~~B~~ D perpendicular to AC and the straight line which passes through the point A parallel to CD meets at the point B. Find the equations of the sides DB and AB. Find the coordinates of the points B and C.
Show that ABCD is a rhombus and find the area of the rhombus.

16) a) Show that $\dfrac{1+\sin 2C-\cos 2C}{1+\sin 2C+\cos 2C}=\tan C$,

Deduce that $\tan \pi/8=\sqrt{2}-1$.

b) $\cos^6\theta+\sin^6\theta=A+B\cos 4\theta$ where $A, B\in\Re$

Determine the values of A and B.

Find the general solution of the equation $\cos^6\theta+\sin^6\theta=\dfrac{5}{4}+\dfrac{1}{2}\sin 4\theta$.

c) Show that $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right)=\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$.

17) In usual notation in triangle ABC show that $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.
D is the point on BC where $BD:DC=\lambda:1$

Show that $AD=\dfrac{\sqrt{b^2\lambda^2+(b^2+c^2-a^2)\lambda+c^2}}{\lambda+1}$

(i) If D is the mid point of BC then find the value of AD in terms of a, b and c.

(ii) If AD is perpendicular to AC

Show that $\cos A\cos C=\dfrac{2(c^2-a^2)}{3ac}$

A - කොටස

01. $x^2 - ax + b = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, $4bx^2 - 2(a^2 - 2b)x + b = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β ඇසුරෙන් සොයන්න.

02. $P(x) \equiv 2x^3 + 5x^2 + 4x + a$ වේ. $P(x)$, $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය 3 ක් නම්, $P(x) = 0$ සමීකරණයට, එක තාත්වික මූලයක් පමණක් තිබෙන බව පෙන්වන්න. (a නියතයකි.)

03. $\dfrac{(x^2 - x - 6)(x^2 + x + 2)}{(x - 2)} \leq 0$ අසමානතාවය විසඳන්න.

04. $y = log_x(4)$ ආදේශය යෙදීමෙන්, $4\ log_{16}(x) - 1 = log_x(4)$ සමීකරණය, y අඩංගු වර්ග සමීකරණයකට ඌනනය කර, x සොයන්න.

05. $\sqrt{x+1}$ ශ්‍රිතයෙහි අවකලන සංගුණකය, ප්‍රථම මූලධර්මය මගින් සොයන්න.

06. $3x^2 + 2xy + 2y^2 = 7$ වක්‍රයට, (1, 1) ලක්ෂයේ දී අඳින ස්පර්ශකය, $y^2 = ax + b$ වක්‍රය ද, (1, 1) ලක්ෂයේ දීම ස්පර්ශකරයි නම්, a හා b සොයන්න.

07. A(1, 0), B(-1, 0) වේ. AP + BP = 4 වන පරිදි චලනය වන, P ලක්ෂයක පථයේ සමීකරණය $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ බව පෙන්වන්න.

08. $ax + by + 9 = 0$ රේඛාව මත, (3, -4) ලක්ෂයේ ප්‍රතිබිම්බය, (-5, 6) වේ. a හා b සොයන්න.

09. $\text{Cos}\,\beta = -\frac{1}{2}$ නම්, $\text{Cos}\,\alpha + \text{Cos}\,(\alpha + \beta) + \text{Cos}\,(\alpha + 2\beta) = 0$ බව පෙන්වන්න.

10. ABC ත්‍රිකෝණයක a, b, c සමාන්තර ශ්‍රේණියක පිහිටයි නම් $\text{Cos}\left(\frac{A-C}{2}\right) = 2\,\text{Sin}\,\frac{B}{2}$ වන බව පෙන්වන්න.

B - කොටස

ප්‍රශ්න 5 කට පිළිතුරු සපයන්න.

11. (a) $ax^2 + bx + c = 0$ සමීකරණයේ මූල α හා β නම්, $\alpha+\beta = -\frac{b}{a}$, $\alpha\beta = \frac{c}{a}$ බව පෙන්වන්න.

$f(x) = \dfrac{4x^2+8}{2x+1}$, $x \in \Re$, $x \neq -\frac{1}{2}$ යැයි ගනිමු.

$f(x)$ ට ගත හැකි අගය පරාසය සොයන්න.

$f(x) = k$ සමීකණයේ මූල දෙක අතර වෙනස 2 වන පරිදි k ට ගත හැකි අගයන් දෙක k_1 හා k_2 නම් $(k_1^2 + k_2^2)$ හි අගය සොයන්න.

(b) $f(x) = x^2 - 4\lambda x + 2(\lambda + 1)$ වේ. $\lambda \in \Re$, කලනය භාවිතයෙන් තොරව $f(x)$ හි අවම අගය λ ඇසුරෙන් සොයන්න. එමගින් $f(x) \geq 0$ වීම සඳහා λ ට ගත හැකි අගය පරාසය අපෝහනය කරන්න.

$\lambda > 1$

~~$\lambda > \frac{1}{2}$~~ විට, $y = f(x)$ හි ප්‍රස්ථාරය අඳින්න.

12. (i) දෙවන මාත්‍රයේ බහු පදයක්, $(x - 1)$, $(x + 1)$, $(x - 2)$ න් බෙදූ විට ශේෂයන් පිළිවෙලින් 1, 25, 1 වේ. එම බහු පදය සොයා එය සියළුම x සඳහා ධන බව පෙන්වන්න.

(ii) $y = 2|x+1|$ සහ $y = 5 - |2x+1|$ ප්‍රස්ථාර එකම රූපයේ ඇඳ එමගින් $2|x+1| + |2x+1| > 5$ අසමානතාවය විසඳන්න.

(iii) $\dfrac{x^3}{x^3+1}$ භින්න භාග වලට වෙන් කරන්න.

13. (i) $\lim_{x\to 0}\left\{\dfrac{\sin 2x - x}{\tan kx - 4x}\right\} = -1$ වන පරිදි k නියතය සොයන්න.

(ii) $\sin y = 2\sin x$ නම් $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + 3\sec^2 y$ බව පෙන්වන්න.

$\cot y.\dfrac{d^2y}{dx^2} - \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + 1 = 0$ බව අපෝහනය කරන්න.

(iii) $x = \dfrac{1+t}{t^2}$, $y = \dfrac{3}{2t^2} + \dfrac{2}{t}$ වේ. (t පරාමිතියකි.) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2$ හි අගය, t ඇසුරෙන් සොයන්න.

14. (i) $y = \dfrac{(x-1)^3}{x^2}$ ශ්‍රිතයේ දළ රූපසටහන අඳින්න.

$e^x (x - 1)^3 = x^2$ සමීකරණයට ඇති තාත්වික මූල සංඛ්‍යාව සොයන්න.

(ii) පරිමාව $\dfrac{125}{2}\,m^3$ වන පරිදි, පතුල සමචතුරස්‍රාකාර හැඩැති විවෘත (පියන රහිත, පතුල සහිත) ටැංකියක්, තුනී ඒකාකාර තහඩුවකින් සාදා ඇත. එම තහඩුවට තිබිය හැකි අවම වර්ගඵලය සොයන්න.

15. $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ සහ $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ යන සරල රේඛා දෙකෙහි ඡේදන ලක්ෂය හරහා යන, ඕනෑම රේඛාවක සමීකරණය $(a_1x + b_1y + c_1) + \lambda(a_2x + b_2y + c_2) = 0$ ආකාරයට ලිවිය හැකි බව පෙන්වන්න.

ACD ත්‍රිකෝණයේ AC, CD, DA පාද පිළිවෙළින් $2x + y - 1 = 0$, $x - 7y + 22 = 0$, $x - y - 5 = 0$ සමීකරණ මගින් දෙනු ලැබේ. AC ට ලම්බ ව, D ලක්ෂ්‍යය හරහා යන රේඛාවත්, CD ට සමාන්තරව A ලක්ෂය හරහා යන රේඛාවත් B හි දී හමුවෙයි. DB හා AB රේඛා වල සමීකරණ ද, B හා C ලක්ෂ වල ඛණ්ඩාංක ද සොයන්න.

ABCD රොම්බසයක් බව පෙන්වන්න. රොම්බසයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

16. (i) $\dfrac{1+\sin 2C - \cos 2C}{1 + \sin 2C + \cos 2C} = \tan C$ බව පෙන්වන්න. $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$ බව අපෝහනය කරන්න.

(ii) $\cos^6\theta + \sin^6\theta = A + B\cos 4\theta$ වන පරිදි A හා B තාත්වික නියත නිර්ණය කරන්න.

$\cos^6\theta + \sin^6\theta = \frac{5}{4} + \frac{1}{2}\sin 4\theta$ සමීකරණයේ සාධාරණ විසඳුම සොයන්න.

(iii) $\tan^{-1}\left(\dfrac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{3}\right) = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) + \tan^{-1}\left(\dfrac{3}{5}\right)$ බව පෙන්වන්න.

17. ඕනෑම ABC ත්‍රිකෝණයක් සඳහා සම්මත අංකනයට අනුව $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ බව සාධනය කරන්න.

ABC ත්‍රිකෝණයක BC පාදය මත D ලක්ෂය පිහිටා තිබෙන්නේ $BD : DC = \lambda : 1$ වන පරිදි වේ.

$AD = \dfrac{\sqrt{b^2\lambda^2 + (b^2 + c^2 - a^2)\lambda + c^2}}{\lambda + 1}$ බව පෙන්වන්න.

(i) D ලක්ෂ්‍යය BC හී මධ්‍ය ලක්ෂය වන විට, AD වල දිග a, b, c ඇසුරෙන් අපෝහනය කරන්න.

(ii) D ලක්ෂ්‍යය, BC හී මධ්‍ය ලක්ෂය වී, AD හා AC ලම්බක වන විට, $a^2 - c^2 = 3b^2$ බව පෙන්වන්න.

***