ඩී. එස් සේනානායක විද්‍යාලය කොළඹ 07
සංයුක්ත ගණිතය I, II
පළමු වාර පරීක්ෂණය - 12 ශ්‍රේණිය

කාලය පැය 2 ½

ප්‍රශ්න සියල්ලටම පිළිතුරු සපයන්න.

01. i. a, b, හා c තාත්වික නියතයන් වන විට

$(a+b+c)x^2+(b+2c)x+c=0$ හි මූල α හා β වේ නම් $\dfrac{\alpha}{\alpha+1}$ හා $\dfrac{\beta}{\beta+1}$ මූල වන වර්ගජ සමීකරණය සොයන්න.

ii. $\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x-5}{x-2}>3$ අසමීකරණය තෘප්ත කරන x හි අගය කුලකය සොයන්න.

iii. $\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4\lambda}{x}+\dfrac{27}{x-1}=0$ සමීකරණයට සමාන මූල ඇත්නම් λ සඳහා අගයන් දෙකක් ඇති බව පෙන්වා λ හි මෙම අගයන් සඳහා ලැබෙන මූල එකිනෙකෙහි පරස්පරයන් වන බව පෙන්වන්න.

iv. $ax^2+bx+c=0$ සමීකරණයෙහි මූල $\lambda:\mu$ අනුපාතයට බෙදේ නම් $ac(\lambda+\mu)^2=b^2\lambda\mu$ බව පෙන්වන්න.

02. i. $f(x)$ බහු පදය (x^2-a^2) න් බෙදූ විට ලැබෙන ශේෂය සොයන්න.

ii. $f(x)=x^4-2x^3-2x^2+8x-8$ හි සාධක සොයන්න.

iii. $f(x)=x^8+2x^7+\lambda x^2+\mu x+\upsilon$ යන්න x^2+x-2 න් හරියට ඉතිරි නැතිව බෙදේ. $f(x)$ යන්න x+1 න් බෙදූ විට ශේෂය -8 කි. λ,μ,υ සොයන්න.

iv. $\dfrac{x-6}{(x^2+3)(2x+1)}$ යන්න භින්නභාග වලට වියෝජනය කරන්න.

03. i. $\dfrac{\pi}{2}<A<\pi$ හා $\pi<B<\dfrac{3\pi}{2}$ වනවිට $CosA=-\dfrac{1}{2}$ හා $CosB=-\dfrac{1}{2}$ නම් $\dfrac{4SinA-3\tan B}{\tan A+SinB}$ හි අගය සොයන්න.

ii. පහත සර්වසාම්‍ය සාධනය කරන්න.

a. $\dfrac{\tan 5\theta+\tan 3\theta}{\tan 5\theta-\tan 3\theta}\equiv 4Cos2\theta Cos4\theta$

b. $$\frac{Sin(n+1)A + 2Sin(nA) + Sin(n-1)A}{Cos(n-1)A - Cos(n+1)A} \equiv Cot\frac{A}{2}$$

c. $A+B+C = \pi$ වනවිට

$$\frac{Sin2A + Sin2B + Sin2c}{SinA + SinB + SinC} \equiv 8Sin\frac{A}{2}Sin\frac{B}{2}Sin\frac{C}{2}$$ බව පෙන්වන්න.

iii. $x = 1 + Sin^2\theta$ හා $y = 1 + Cos^2\theta$ වනවිට $2\left(x^3 + y^3\right) + 9y^2 = 27(1 + Cos^4\theta)$ බව පෙන්වන්න.

04. ලක්ෂ්‍යයක් මත ක්‍රියා කරන බල දෙකක විශාලතම හා අඩුතම සම්ප්‍රයුක්තය පැහැදිලි කරන්න ලක්ෂ්‍යයක් මත එකිනෙකට ආනතව ක්‍රියාකරන F_1 හා F_2 නම් බල දෙකක සම්ප්‍රයුක්තය F වන මගින් බල දෙක පිලිවෙලින් 1:2 අනුපාතයට බෙදේ නම්

$$F = \frac{F_1^{\,2} - F_2^{\,2}}{F_2}$$ බව පෙන්වන්න.

ඉහත F_1 හා F_2 බල දෙක අතර කෝණය θ වන විට සම්ප්‍රයුක්තය $(2r+1)\ \sqrt{F_1^{\,2} + F_2^{\,2}}$ වන එහි බල දෙක $\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ කෝණයකින් ආනතව ක්‍රියාකරන විට සම්ප්‍රයුක්තය $(2r-1)\ \sqrt{F_1^{\,2} +}$ වේ නම් $(r+1)\tan\theta = r - 1$ බව පෙන්වන්න.

05 i. බල යුග්මය
ii. බල සමතුලිතතාව යන පද පැහැදිලි කරන්න.

PQRS සෘජුකෝණාස්‍රයේ PQ = 4x ද QR = 3x ද වේ. එහි $\overrightarrow{RP}$, $\overrightarrow{PS}$, $\overrightarrow{SR}$, $\overrightarrow{RQ}$ පා පිලිවෙලින් ක්‍රියාකරන 10F , F , 2F හා 3F වූ බල ඇත. බල පද්ධතියේ සම්ප්‍රයුක්තයේ විශා PQ පාදය සමග සාදන සුළු කෝණයත් සොයන්න. සම්ප්‍රයුක්ත ක්‍රියා රේඛාවෙන් PQ පාද ලක්ෂ්‍යයට P සිට ඇති දුර සොයන්න.

a. $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PS}$ හා $\overrightarrow{QR}$ ඔස්සේ පිලිවෙලින් ක්‍රියාකරන X , Y හා Z බල ඉහත බල පද්ධතියට විට පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවතී නම් X, Y හා Z සොයන්න.

b. බල පද්ධතිය P හා Q හිදී ක්‍රියා කරන λp හා μp යන සමාන්තර බල දෙකකට තුල්‍යය න μ සොයන්න.

සංයුක්ත ගණිතය I, II   12 වසර

i) $\alpha+\beta = \dfrac{-(b+2c)}{a+b+c}$, $\alpha\beta = \dfrac{c}{a+b+c}$ } 05

ආදේශයෙන් ලැබේ. $\left(x-\dfrac{\alpha}{\alpha+1}\right)\left(x-\dfrac{\beta}{\beta+1}\right)=0$

$x^2-\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\beta+1}\right)x+\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)}=0$ 05

$\dfrac{\alpha}{\alpha+1}+\dfrac{\beta}{\beta+1} = -b/a$ 05

$\dfrac{\alpha\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)} = c/a$ 05

$x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$

$ax^2+bx+c=0$ 05

25

$\dfrac{2x}{x-1}+\dfrac{x-5}{x-2} > 3 \Rightarrow \dfrac{x+1}{(x-1)(x-2)} < 0$ 05

$-\ (+)\ -1\ (-)\ 1\ (+)\ 2\ (-)\ +$ (×, ✓, ×) 15

$x \in \{(-\infty,-1) \cup (1,2)\}$ 05

25

$\dfrac{3}{x+1}-\dfrac{4\lambda}{x}+\dfrac{27}{x-1}=0 \Rightarrow (15-2\lambda)x^2+12x+2\lambda=0$ 05

සමාන මූල ඇති විට $\Delta_x = 0 \Rightarrow 2\lambda^2-15\lambda+18=0$ 05

$(2\lambda-3)(\lambda-6)=0$

$\lambda = 3/2$, $\lambda = 6$ 05

$\lambda = 3/2$ විට: $2x+1=0$, $x=-1/2$ 05

$\lambda = 6$ විට: $x+2=0$, $x=-2$ 05

∴ සමාන මූල එකිනෙකට වෙනස් වේ.

25

$ax^2+bx+c=0$ හි මූල α හා β නම් $\alpha+\beta=-b/a$ — ①

$\alpha\beta = c/a$ — ②

$\dfrac{\alpha}{\beta}=\dfrac{\lambda}{\mu}$ — ③

$\left(\dfrac{\alpha+\beta}{\beta}\right)^2=\left(\dfrac{\lambda+\mu}{\mu}\right)^2$ — ④ 05

④/③ $\Rightarrow \dfrac{(\alpha+\beta)^2}{\beta^2}\cdot\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{(\lambda+\mu)^2}{\mu^2}\cdot\dfrac{\mu}{\lambda}$ 05

$\dfrac{b^2}{a^2}\cdot\dfrac{a}{c}=\dfrac{(\lambda+\mu)^2}{\lambda\mu}$ 05

$ac(\lambda+\mu)^2=b^2\lambda\mu$

25

(2) i) ශේෂ ප්‍රමේයය අනුව $f(x) = (x-a)(x+a)\phi(x) + $ ශේෂය

$x = a \quad f(a) = Pa + Q$

$x = -a \quad f(-a) = Q - Pa$ } 05 $P = \dfrac{f(a) - f(-a)}{2a}$ 05 $Q = \dfrac{f(a) + f(-a)}{2}$

ශේෂය $= \left[\dfrac{f(a) - f(-a)}{2a}\right]x + \left[\dfrac{f(a) + f(-a)}{2}\right]$ 05

ii) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8$

$x = 2$, $f(2) = 0 \Rightarrow (x-2)$ සාධකයකි 05, $x = -2$, $f(-2) = 0 \Rightarrow (x+2)$

$f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 8x - 8 = (x-2)(x+2)(x^2 + \lambda x + 2)$ 05

$\lambda = -2$, $f(x) = (x-2)(x+2)(x^2 - 2x + 2)$ 05

$x^2 - 2x + 2$ හි $\Delta_x < 0$ නිසා තවත් රේඛීය සාධක නොමැත. 05

iii) $f(x) = x^8 + 2x^7 + \lambda x^2 + \mu x + \nu$, $x^2 + x - 2 = (x+2)(x-1)$

$(x+2)(x-1)$ සාධක වේ. 05 } $f(-2) = 0 \Rightarrow 4\lambda - 2\mu + \nu = 0$

$f(1) = 0 \Rightarrow \lambda + \mu + \nu = -3$

$f(x)$, $(x+1)$ න් බෙදූ විට ශේෂය -8 නිසා

$x^8 + 2x^7 + \lambda x^2 + \mu x + \nu = (x+1)\phi(x) - 8$ 05

$x = -1$, $\lambda - \mu + \nu = -7$ — (3) 05

$\lambda = 3$, $\mu = 2$, $\nu = -8$ 10

25

iv) $\dfrac{x-6}{(x^2+3)(2x+1)} = \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+3}$ 05

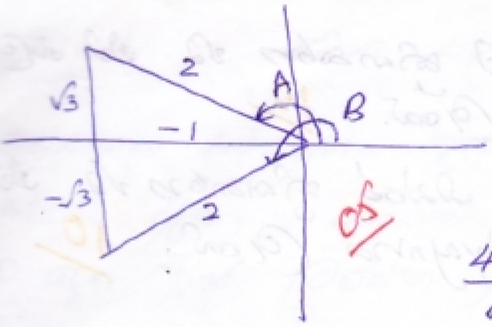
$x - 6 = A(x^2+3) + (Bx+C)(2x+1)$

$A = -2$ 05, $B = 1$ 05, $C = 0$ 05

$\dfrac{x-6}{(x^2+3)(2x+1)} = \dfrac{x}{x^2+3} - \dfrac{2}{2x+1}$ 05

25

i)



$\cos A = -\frac{1}{2}$ $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan A = -\sqrt{3}$

$\cos B = -\frac{1}{2}$ $\sin B = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\tan B = \sqrt{3}$

05

$$\frac{4\sin A - 3\tan B}{\tan A + \sin B} = \frac{4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - 3(\sqrt{3})}{-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{3}$$

10 15

ii) a)

$$\frac{\tan 5\theta + \tan 3\theta}{\tan 5\theta - \tan 3\theta} = \frac{\sin 5\theta \cos 3\theta + \cos 5\theta \sin 3\theta}{\sin 5\theta \cos 3\theta - \cos 5\theta \sin 3\theta} = \frac{\sin 8\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= \frac{2\sin 4\theta \cos 4\theta}{\sin 2\theta} = \frac{2\cdot(2\sin 2\theta \cos 2\theta)\cos 4\theta}{\sin 2\theta}$$

$$= 4\cos 2\theta \cos 4\theta$$

15

b)

$$\frac{\sin(n+1)A + \sin(n-1)A + 2\sin(nA)}{\cos(n-1)A - \cos(n+1)A} = \frac{2\sin(nA)\cos A + 2\sin nA}{2\sin(nA)\sin A}$$

$$= \frac{\cos A + 1}{\sin A} = \frac{2\cos^2 A/2}{2\sin A/2 \cos A/2} = \cot A/2$$

15

c)

$$\frac{\sin 2A + \sin 2B + \sin 2C}{\sin A + \sin B + \sin C} = \frac{2\sin(A+B)\cos(A-B) + 2\sin C\cos C}{2\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + 2\sin C/2 \cos C/2}$$

$$= \frac{\sin C\left[\cos(A-B) - \cos(A+B)\right]}{\cos C/2\left[\cos\left(\frac{A-B}{2}\right) + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\right]} = \frac{2\sin C/2 \cos C/2 \, 2\sin A \sin B}{\cos C/2 \, 2\cos A/2 \cos B/2}$$

$$= \frac{2\sin C/2 \cdot 2\sin A/2 \cos A/2 \cdot 2\sin B/2 \cos B/2}{\cos A/2 \cos B/2}$$

$$\equiv 8\sin A/2 \sin B/2 \sin C/2$$

25

iii)

$$2(x^3 + y^3) + 9y^2 = 2(x+y)\left[(x+y)^2 - 3xy\right] + 9y^2$$

$$= 2(3)\left[3^2 - 3(1+\sin^2\theta)(1+\cos^2\theta)\right] + 9(1+\cos^2\theta)^2$$

$$= 6\left[9 - 6 - 3\sin^2\theta\cos^2\theta\right] + 9 + 18\cos^2\theta + 9\cos^4\theta$$

$$= 18 + 18\cos^2\theta(1 - \sin^2\theta) + 9 + 9\cos^4\theta$$

$$= 27 + 27\cos^4\theta$$

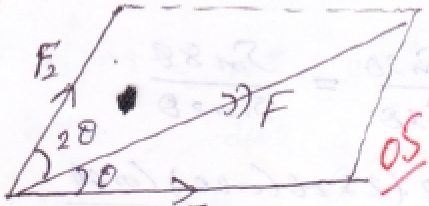
$$= 27(1 + \cos^4\theta)$$

30

25

(4) බල දෙකක් ඒකරේඛීයව එකම දිශාවට ක්‍රියාකරන විට එම බල දෙකේ එකතුවෙන් විශාලත්ව සම්ප්‍රයුක්තය ලැබේ. 10

බල දෙකක් ඒකරේඛීයව ප්‍රතිවිරුද්ධ දිශා ඔස්සේ ක්‍රියාකරන විට එම බලවල විශාලත්ව වල වෙනසින් [illegible] සම්ප්‍රයුක්තය ලැබේ. 10



$F_1 > F_2$ වේ.

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos 3\theta \quad \text{—} \ (1) \qquad 05$$

$$\tan\theta = \frac{F_2 \sin 3\theta}{F_1 + F_2\cos 3\theta} \ 05 \Rightarrow \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{F_2(3\sin\theta - 4\ldots}{F_1 + F_2(4\cos^3\ldots}$$

$$\frac{1}{\cos\theta} = \frac{3F_2 - 4F_2\sin^2\theta}{F_1 + 4F_2\cos^3\theta - 3F_2\cos\theta} \qquad 10 \qquad \Rightarrow F_1 = 2F_2\cos\theta$$

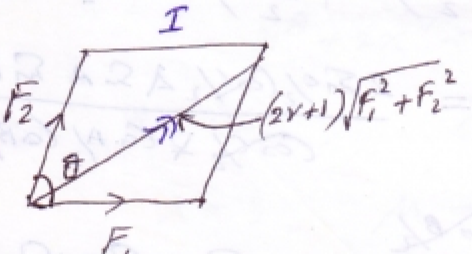
$$\cos\theta = \frac{F_1}{2F_2} \qquad 05$$

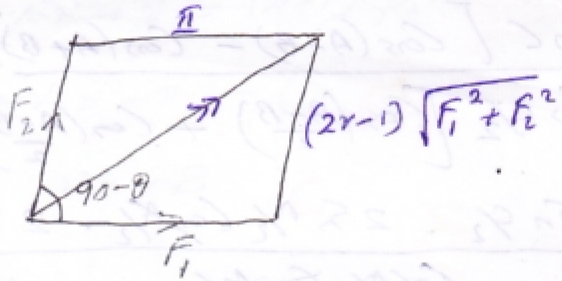
(1) ට ආදේශයෙන්

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\left[4\left(\frac{F_1}{2F_2}\right)^3 - 3\frac{F_1}{F_2}\right]$$

$$F^2 = \frac{F_1^4 + F_2^4 - 2F_1^2F_2^2}{F_2^2} \quad 15 \Rightarrow \quad F^2 = \frac{(F_1^2 - F_2^2)^2}{F_2^2}$$

$$F = \frac{F_1^2 - F_2^2}{F_2}$$





I $\quad (2r+1)^2\left[F_1^2 + F_2^2\right] = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\theta$

$$2F_1F_2\cos\theta = \left[(2r+1)^2 - 1\right](F_1^2 + F_2^2) \quad \text{—} \ (1) \qquad 10$$

II $\quad (2r-1)^2\left[F_1^2 + F_2^2\right] = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\sin\theta$

$$2F_1F_2\sin\theta = \left[(2r-1)^2 - 1\right](F_1^2 + F_2^2) \quad \text{—} \ (2) \qquad 10$$

(2)/(1) $\quad \tan\theta = \dfrac{2r(2r-2)}{2r(2r+2)} \qquad 10$

$$(r+1)\tan\theta = r - 1$$

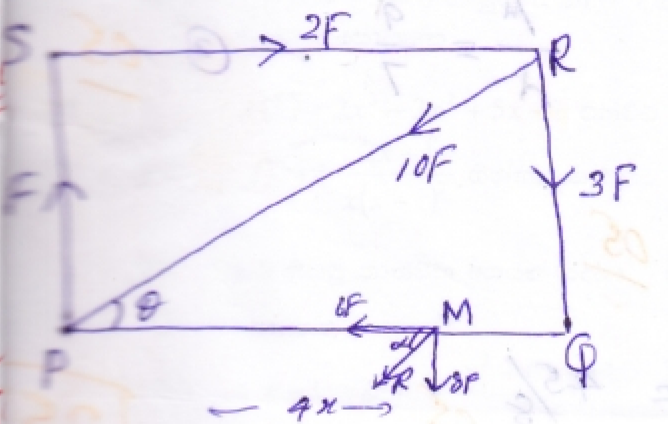
30

බල යුග්මය : සමාන , සමාන්තර , විරුද්ධ බල දෙකක් බල යුග්මයක් වේ. 05

බල යුග්මයක සම්ප්‍රයුක්තය ශූන්‍ය වේ; එහෙත් ඝූර්ණයක් ඇත, යුග්මයේ ඝූර්ණය එක් බලයක් හා බල අතර ලම්බක දුරේ ගුණිතයෙන් ලැබේ. 15

බල සමතුලිතතාව ; බල පද්ධතියක සම්ප්‍රයුක්තය ශූන්‍ය වීමත්, එම තලයේ ඕනෑම ලක්ෂ්‍යයක් වටා ඝූර්ණය ශූන්‍ය වීමත් සිදු වේ නම් බල පද්ධතිය සමතුලිත වේ. 10

$[\overrightarrow{X}=0 \; , \; Y\uparrow=0 \Rightarrow R=0$ හා $G\curvearrowleft=0]$



$\sin\theta = 3/5 \quad , \quad \cos\theta = 4/5$

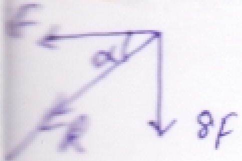
$\overleftarrow{X} = 10F \cdot 4/5 - 2F$

$= 6F$ 05

$\downarrow Y = 3F - F + 10F \cdot 3/5$

$= 8F$ 05

$R = \sqrt{X^2+Y^2} = 10F$ 05

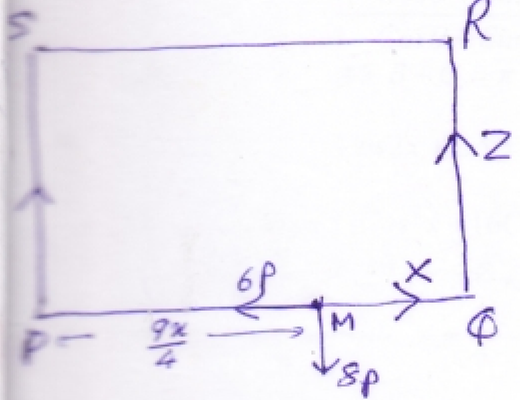


$\tan\alpha = 4/3$ 05 P වටා සම්ප්‍රයුක්තයේ ඝූර්ණය = P වටා ඝූර්ණ

$3F \cdot 4x + 2F \cdot 3x = 8F\,PM$

$PM = \frac{9x}{4}$ 10

30



පද්ධතිය සමතුලිත වේ

$P\curvearrowleft = 0 \Rightarrow 8P \cdot \frac{9x}{4} = Z\,4x$

$Z = \frac{9P}{2}$ 10

$\uparrow = 0 \quad Y + Z = 8P$

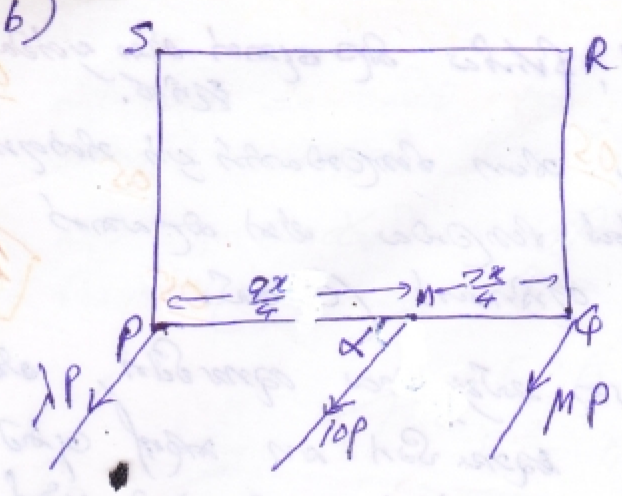
$Y = \frac{7P}{2}$ 05

$\rightarrow = 0 \quad X = 6P$

05

20

b)



සම්ප්‍රයුක්තය P හා Q අතරින් ක්‍රියා කළ λP හා μP සම්ප්‍රයුක්තය දිශාවට සමාන්තර විය යුතු නිසා

$$\lambda P + \mu P = 10P$$

$$\lambda + \mu = 10 \quad — (1)$$

$$\frac{PM}{MQ} = \frac{\mu P}{\lambda P} = \frac{9x/4}{7x/4}$$

$$\frac{\mu}{\lambda} = \frac{9}{7} \quad — (2) \quad 05$$

(1) හා (2) න්

$$\lambda + \frac{9\lambda}{7} = 10$$

$$\lambda = \frac{70}{16} = 35/8 \quad 05$$

$$\mu = \frac{9}{7} \cdot \frac{35}{8} = 45/8 \quad 05$$

25