Stochastic Processes

(Prince's Edition: By **Abdelrhman Elbrens**)

Lec1to9

Made Possible by:

Lec1: Introduction to Random (Stochastic) Processes

1. كل حاجة بتبدأ بالrandom variables:

لو طلبت منك تجيب جنيه فضة وترميه مرتين... **تفتكر ممكن يطلع معاك كام مرة كتابة؟** ممكن ميطلعش معاك كتابة اصلاً، وممكن يطلع معاك المرتين كتابة، وممكن مرة فيهم تطلع صورة ومرة تطلع كتابة عادي.
لو قولنا علي الملك H (يعني head) وعلي الكتابة T (يعني tail) هتبقي احتمالات اني ارمي الجنيه مرتين ورا بعض كالأتي (الS دي فضاء العينة او الsample space بتاعتي):

$$S=\{HH, HT, TH, TT\}$$

احنا كل ده عايزين احتمالات ايه الأول؟ **ان يطلع معايا كام كتابة في المرتين**. طب ما جميل اوي احنا نرمز للعدد ده بx، ونحط احتمالات كام كتابة تطلع معايا في جدول (بنسمي الجدول او الرصة دي الprobability mass function او الPMF):

x	0	1	2
P(X = x)	0.25	0.5	0.25

بمعني ان كتابة واحدة طلعت مرتين (او نص الاحتمالات S)، وكتابتين طلعت معايا مرة واحدة (ربع S) وولا كتابة طلعت معايا مرة واحدة برضه. دلوقتي بقي **الX دي الrandom variable بتاعي**، وهيبقي يا اما 0 يا 1 يا 2:

$$X=x \quad \in\{0,1,2\}$$

وطبعًا مش هوصيك ان انا ممكن اخد الE(X) والVar(X) للX بس مش موضوعنا دلوقتي.

2. طب لو حطيت الtime مع الrandom variable؟

خلينا علي مثال بسيط بعيد عن ان الrandom variable فيه جه ازاي: حاجة زي الطقس بتاع كل يوم كان عامل ازاي (يعني هيطلع مشمس او غائم او ممطر وهكذا)...
هنا احتمالات الrandom variable بتاعي (اللي هو الطقس weather) **من قيم ثابتة او discrete**:

$$X=x \quad \in\{\text{Sunny}, \text{Cloudy}, \text{Rainy}, \ldots\}$$

نسجل بقي الاحتمالات دي لكل يوم بيعدي (هختصر برضه الطقس بحروف زي S وC وR، والوقت طبعًا هكتبه بt) يعني مثلاً يوم ممكن يطلع مشمس اللي بعديه ممكن يطلع غايم وبعديه ممكن يبقي مشمس وهكذا:

t	1	2	3	4	...
X = x	S	C	S	R	...

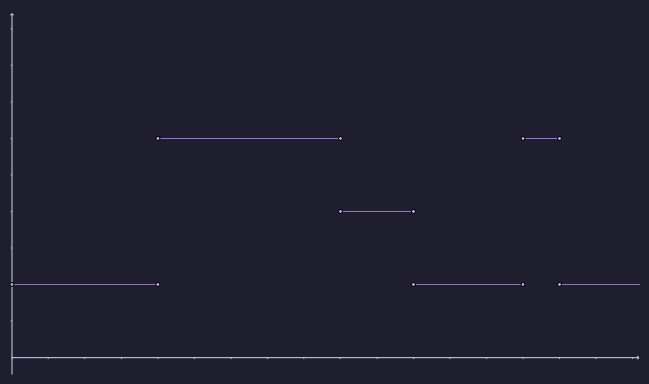
دلوقتي بقي **كل time موجود بقي مربوط بواحدة من احتماليات الrandom variable** بتاع الweather... ومبروك انت كدة **عملت ابسط stochastic process** ممكن تتخيلها! نحط بقي تعريف ثابت للstochastic process (او ليه اسم random process برضه):

- A stochastic process (SP) is a collection of **random variables indexed with time**.

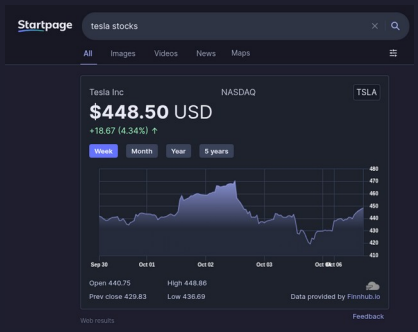
بمعني ان اي stochastic process هي **مجموعة random variables متأشرة (او محطوطلها index) بالوقت**، كل واحد من الrandom variables مربوط بالوقت بتاعها في الprocess (زي ان تاني يوم في مثال الطقس ليه احتمال يبقي غايم وكدة).
مهم اوي عشان لما اجي اشرح حاجات يامة بعدين تبقي معايا في الصورة: **احنا بنسمي كل الحالات اللي بيبقي فيها الrandom variables دي بإسم الحالات او states**، او وضع الprocess في الوقت الفلاني (برضه في مثال الطقس ان state او حالة اليوم التالت تبقي مشمسة او sunny).

3. انواع وتعريفات الstochastic processes نفسها:

في مثال الطقس اللي فات قولت قبل ما انا اعمله ان الstates بتاعته من قيم ثابتة او discrete. الوقت برضه في المثال لو انت مخدتش بالك منه فهو discrete هو كمان عشان كل يوم ثابت بحطله ريكورد واحد... وبكدة بقي عندنا اول نوع من الprocesses وهو ال**discrete-time and discrete-space** (بنختصره ب**DT-DS**).



طب لو الوقت بقي continuous؟ (يعني بقيس الحالة بتاعت حاجة معينة بالثانية)؟ ممكن برضه وفيه مثال علي ده هو الuptime بتاع سيستم معين زي سيستم الكلية كدة... هنا الstates بتاعتنا (في الstate space) بتبقي حاجات ثابتة زي idle (فاضي) وnormal (عادي) وhigh (ضغط عالي او مشغول) **يعني discrete برضه**، والوقت بيتقاس بالثانية او حتي بالمللي ثانية اللي كل حالة شغالة فيها **يعني continuous**... ده كدة تاني نوع وهو ال**continuous-time and discrete-space** (اختصاره **CT-DS**).



طب لو الاتنين بقوا continuous؟ ده مثالها سهل ومشهور وهو سوق الأسهم او الstock market... الstate space هنا بيبقي سعر السهم بالدولار وبيبقي متغير لدرجة ان الدقة فيه بالسنت، والtime متغير برضه بالثانية... يعني كدة معانا تالت نوع وهو الcontinuous-time and continuous-space (اختصاره **CT-CS**).

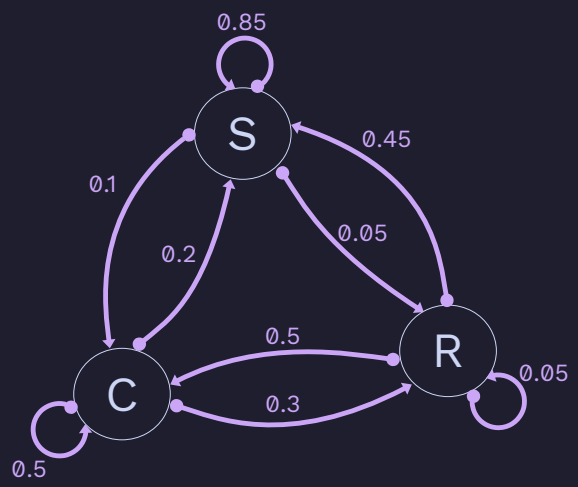
فاضلنا كدة رابع نوع وهضربلك مثال رابع عليه... لو خدنا ربح شركة او بزنس معين كل شهر احنا ممكن نعتبر الربح ده (او الstate space اللي ممكن الربح ده يبقي فيه) متغير، وفي نفس الوقت الtime بتاعك اللي بتقيس بيه بالشهر ودول ثابتين... وده رابع نوع **discrete-time and continuous-space** (او **DT-CS**).

نراجع بقي عالأربع انواع ورا بعض:

- Discrete-time and discrete-space (DT-DS). (مثال الطقس)
- Continuous-time and discrete-space (CT-DS). (مثال سيستم الكلية)
- Continuous-time and continuous-space (CT-CS). (مثال سوق الأسهم)
- Discrete-time and continuous-space (DT-CS). (مثال ربح الشركة)

4. الMarkov chains وعمايلهم:

بسمع حد بيسأل دلوقتي طب الاحتمالات غابت وهترجع امتي؟ ساعتها هقولك هنرجع تاني لمثال الطقس اللي في الأول خالص وساعتها بدل ما هنعوز احتمال كل يوم لأ احنا عايزين احتمال ان حالة طقس تتغير لحالة طقس تانية (يعني مثلاً اعرف ان احتمالية ان الطقس يتغير من C لS ب0.2، او احتمالية ان الR تفضل علي حالها لليوم اللي بعده ب0.05 وهكذا)... انا ممكن ارسم الانتقالات او الtransitions دي نفسها في رسمة بسيطة:



وبكدة اعرف في لحظة لو حالة الطقس في يوم معين S فإحتمال انها تبقي R اليوم اللي بعده ب0.05. الرسمة دي بنسميها الone-step transition diagram عشان بتدينا كل احتمال اني انقل خطوة واحدة لقدام من state لstate تانية في رسمة زي دي.

انا ممكن برضه اترجم الdiagrams اللي زي دي لmatrix هتكمل معانا حبة حلوين لقدام (وهسمي الmatrix دي الـ**one-step transition matrix**):

$$P=\begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \end{bmatrix}$$

طبعًا مش هتفهم حاجة دلوقتي عشان متعرفش كل رقم بتاع انهي transition في الجدول اللي فوق بالظبط... خليني اساعدك شوية:

$$P=\begin{array}{c} \\ S \\ C \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & C & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \end{bmatrix} \end{array}$$

دلوقتي كل صف اعتبره "من" وكل عمود اعتبره "إلي"، يعني مثلاً لو انا عايز اروح من C لS يبقي هشوف الرقم اللي في الصف C واللي في العمود S (وهيبقي اسمه P_{CS}، اول حرف طبعًا بيبقي ال"من" والتاني بيبقي ال"إلي"):

$$P=\begin{array}{c} \\ S \\ C \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & C & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \quad P_{CS}=P(X_1=S \mid X_0=C)=0.2$$

كمان مرة: لو عايز اروح من الR لنفسها (P_{RR}) هاخد الرقم اللي تحت عالشمال:

$$P=\begin{array}{c} \\ S \\ C \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} S & C & R \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \end{bmatrix} \end{array} \rightarrow \quad P_{RR}=P(X_1=R \mid X_0=R)=0.05$$

اللي احنا كنا بنوصفه ده عمومًا مثال علي Markov chain... وتعريفه ببساطة انه **stochastic process في الغالب بيبقي discrete-time and discrete-space (DT-DS) ومتعرّف بإحتماليات الtransitions بتاعته بس**. ده يجيبنا لخاصية مهمة ليه وهي كالأتي:

- Next step only depends on the **present state**, not on the past.

بمعني ان اي خطوة جاية عايز اجيب احتمالها بجيبها علي اساس **الstate اللي انا واقف فيها دلوقتي** ومليش دعوة بأي خطوة قبليها... يعني مثلاً انت عايز تجيب احتمال ان الstate الجاية تبقي S بمعلومية ان الstate اللي قبليها علي طول C واللي قبل اللي قبليها R وهكذا:

$$P(X_t = S \mid \mathbf{X_{t-1} = C}, X_{t-2} = R, \ldots)$$

الstate اللي انا عايز اجيبها دي t، يبقي طبيعي **اللي انا واقف عندها دلوقتي تبقي t-1**، واللي قبليهم اصغر منهم زي t-2 وt-3 وهكذا... الخاصية بتاعتنا بتقولك لأ **انت ممكن تلغي كل اللي قبل الpresent state** عادي (خد بالك برضه **انا رايح من انهي state** وهوصل انهي state):

$$P(X_t = S \mid \mathbf{X_{t-1} = C}, \cancel{X_{t-2} = R, \ldots})$$
$$= P(X_t = S \mid \mathbf{X_{t-1} = C}) = P_{CS}$$

5. كام خاصية وكام معلومة مهمة في الone-step transition matrices:

تعالي نرجع للone-step transition matrix اللي فصلناها نركز فيها شوية:

$$P = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.1 & 0.05 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.45 & 0.5 & 0.05 \end{bmatrix}$$

هظبطهالك شوية وهقولك علي اسم كل واحد من المتغيرات دي في P:

$$P = \begin{bmatrix} P_{SS} & P_{SC} & P_{SR} \\ P_{CS} & P_{CC} & P_{CR} \\ P_{RS} & P_{RC} & P_{RR} \end{bmatrix}$$

هنا بقي انا عايز الفت نظرك **لمصطلح مهم اسمه الstate space** (يعني فضاء الحالات وبرمزله ب**S**)... وهو **كل الحالات الممكنة اللي ممكن اوصلها**... يعني في الtransition matrix اللي فاتت الstate space بتاعتي هتتكتب كدة:

$$S=\{S,C,R\}$$

في Markov chain تانية خالص ممكن يكون كل الحالات اللي فيها او الstate space بتتكتب كدة:

$$S=\{1,2,3\}$$

ساعتها الone-step transition matrix بتاعتنا هتبقي كدة:

$$P=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

ومن هنا تقدر تحط كل P في الmatrix بكام ساعتها... المهم تعرف لو قولتلك مثلاً P_{32} او P_{11} (او حتي P_{SR} في مثال الطقس اللي قبليه) تفهم بتكلم علي انهي حتة في الmatrix كويس...

طب ايوة فين جزء الماث والخاصيات في الحوار؟ طب ركز معايا.

اول حاجة واضحة فيها ان دي matrix احتمالات... يعني كل رقم بلا استثناء اقل من او يساوي 1)... بديهيات يعني:

$$0 \leqslant P_{ij} \leqslant 1$$

عالأقل خليتك تاخد بالك من الi والj اللي تحت (الi ال**"من" يعني الصف** اللي انت فيه والj ال**"إلي" يعني العمود** اللي انت فيه برضه).

اللي مش بديهي المرادي ان مجموع الelements في **كل صف** (او بمعني اصح كل الprobabilities اللي طالعين من state معينة) بيساووا واحد:

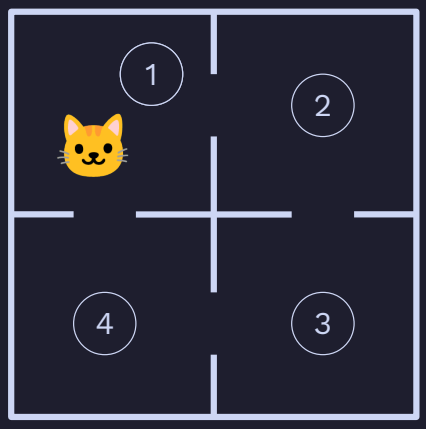
$$\sum_{j} P_{ij}=1$$

ركز كدة معايا (عشان مش هرزعلك i وj وهخلع)... الj دي اللي بغير فيها واصلاً في مكان ال"إلي" زي ما شرحتلك فوق وبثبت الi اللي في مكان ال"من".

عارف ايه دي شبه ايه برضه في الone-step transition diagram زي اللي فوق؟ خد اي دايرة (او state) واجمع كل الاسهم اللي طالعين منها.

Lec2: Initial Distributions and Multi-step Transitions

1. مسألة كيوت بس مهمة:



Q: Cat must move to an adjacent room every one time. For the following figure, position represents its states. Is this process a Markov chain? If yes, find P.

- عندك قطة لازم تتحرك لغرفة مجاورة للي هي فيها كل مرة. زي ما الشكل بيقولك، مكان القطة بيمثل حالتها. هي الprocess دي Markov chain؟ لو اه هاتلي الP بتاعتها.

الحل:

هنا انا بشكل كبير معايا رسمة متحددة وقايلي ان مكانها متحدد في الرسمة... ساعتها هشوف هي القطة فين دلوقتي وتقدر تتحرك فين بعد كدة:

القطة عند 1 (ده الinitial position او المكان المبدئي بتاعها)... وقالك ان هي **must move to an adjacent room every one time لازم تتحرك للأوضة اللي جنبها في كل مرة**... يعني من عندها ممكن تروح ل2 او 4 (وهيبقي **احتمال انها تروح للأوضة دي او دي متساويين** يعني ب0.5 طالما مقالش اي حاجة عن الاحتمالات) بس مينفعش انها تفضل في مكانها في 1 او تروح ل3... نفس الكلام لو القطة في 4 ينفع بس تروح ل1 او 3 (برضه الاحتمالات متساوية وب0.5) بس متفضلش في 4 او تروح ل2.

القطة ممكن تروح كل الأوض فممكن اقول ان الstate space او الحالات بتاعتي كدة:

$$S=\{1,2,3,4\}$$

كدة بعد ما فهمنا الرسمة خلينا نقوله علي الحل واحدة واحدة...

- Is this process a Markov chain?

- Based on the figure, the past doesn't affect the future state, only the cat's position (the present state) does. Also, the probability doesn't change with time. Hence, a Markov chain.

- هنا الماضي مبيأثرش علي القطة هتروح فين. مكان القطة دلوقتي هو بس اللي بيأثر. غير كدة مفيش احتمالات بتتغير مع الوقت فممكن نقول انها Markov chain عادي.

- Find P.

هنا انت عايز تجيب الone-step transition matrix بتاعتك عادي (واحنا من شوية لسة مفصلين احتمالات انك هتروح لأنهي state من انهي state بالظبط)... فالمهم دي الP بتاعتك:

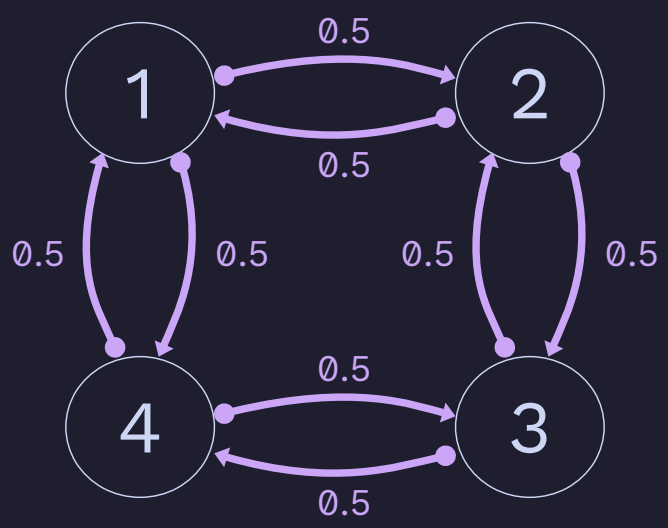
$$P=\begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

واظن هتوضح اكتر لو حطيتلك الstates عليها زي المرة اللي فاتت:

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

كدة باينة اكتر بكتير لو انا مثلاً واقف عند 1 هيبقي احتمالية اني اروح ل2 او 4 ب0.5، واحتمالية اني اروح ل3 او افضل واقف عن 1 ب0 (عشان مينفعش اصلاً).

بالمرة برضه خدوا one-step transition diagram انشالله ما حد حوش:



2. يعني ايه initial distribution؟

الinitial distribution (او التوزيعة المبدئية) ده لاممك فيه كل احتمالات الstates قبل ما تبدأ حتي اول خطوة... **بمعني؟**

ارجع كدة لمثال القطة... هو قايلك صريحة ان القطة عند state رقم 1 واحنا اشتغلنا علي ده للأخر... يعني كدة **احتمال ان القطة تبدأ من state رقم 1 ب1 واحتمال انها تبدأ بstate رقم 2 او 3 او 4 ب0**... هندي بقي احتمالات الstates عند البداية بإسم الinitial distribution او **الinitial position distribution for start** (او π^0):

$$\pi^0=\begin{bmatrix}\pi_1^0=P(X_0=1)\\ \pi_2^0=P(X_0=2)\\ \pi_3^0=P(X_0=3)\\ \pi_4^0=P(X_0=4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix}$$

اه صح انا راصصلك الvector كله بالطول مبدئيًا للتوضيح مش اكتر هو في العادي بالعرض.

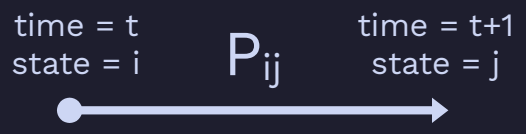
خدت بالك انا برمز للvector كله (او الinitial distribution كله) بπ^0... ولو عايز ارمز لstate معينة من الinitial distribution زي اول state برمزله بπ^0_1 او زي تاني state فبرمزله بπ^0_2 وهكذا.

طب عدي تايم واحد او خطوة واحدة، فطبيعي الاقي توزيعة للstates بعد الخطوة دي واسمها **position distribution after 1 step** (او π^1):

$$\pi^1=\begin{bmatrix}\pi_1^1=P(X_1=1)\\ \pi_2^1=P(X_1=2)\\ \pi_3^1=P(X_1=3)\\ \pi_4^1=P(X_1=4)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0.5\\0\\0.5\end{bmatrix}$$

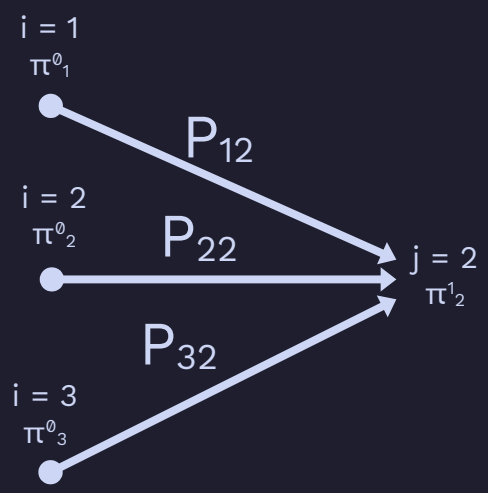
الارقام دي موجودة عشان المثال اللي كنا فيه مش اكتر... بس **زي اي حاجة ماث اكيد اكيد فيه طريقة او معادلة ثابتة اجيب كل ده بيها**... وهنا انا جايلك في الصفحة الجاية بإثبات صغنتوت:

عمومًا لما بروح من state للتانية فيه الاحتمالية بتاعت الone-step transition بتاعتي (اللي بتتجاب من الP عادي، وساعتها انا معايا احتمالية الtransition ده لوحده اللي هو P_{ij}). متفقين؟



طب لو جيت وحطيت معاها احتمال اني ابقي في state معين قبل ما حتي اشوف هو هيروح لأنهي state قبليها؟

تعالي ركز معايا في الحالة دي: لو معانا S = {1,2,3} (كمان مرة دي الstate space) وعايز اجيب احتمال اني بعد اول خطوة هروح لstate رقم 2 مثلاً (وركز احنا مع "إلي" مش "من" المرادي) بس في نفس الوقت **فيه احتمال initial اني ابقي عند انهي state الأول**... اللي هو الπ^0 برافو عليك (وهنا هفصصهالك لكل state من التلاتة):



كدة بقي انا وصلت لstate رقم 2 وبقي فيه احتمال جديد هحسبه اني بقيت عند الstate دي (اللي هو π^1_2) وده بقي بيتحسب اني بضرب كل π في الP بتاعتها وبجمعهم مع بعض (زي الdot product كدة):

$$\pi^1_2 = \pi^0 P_{i2} = \pi^0_1 P_{12} + \pi^0_2 P_{22} + \pi^0_3 P_{32}$$

بس احنا مش عايزين π^1_2 بس... لأ احنا **عايزين الvector بتاع π^1 كله**... وساعتها **هحتاج الmatrix بتاعت الP كلها** مش عمود الP_{i2} بس... يعني بمعني اصح **هضرب vector في matrix**:

$$\pi^1 = \begin{bmatrix} \pi^1_1 & \pi^1_2 & \pi^1_3 \end{bmatrix}$$

$$= \pi^0 P = \begin{bmatrix} \pi^0_1 & \pi^0_2 & \pi^0_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

وبالمرة هعلملك علي $\pi^0 P_{i2}$ من قلب ضرب الاتنين في بعض:

$$\pi^1 = \begin{bmatrix} \pi_1^1 & \pi_2^1 & \pi_3^1 \end{bmatrix}$$

$$= \pi^0 P = \begin{bmatrix} \pi_1^0 & \pi_2^0 & \pi_3^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

3. نطينا من الone-step للmulti-step:

هستفيد تاني من خاصية الMarkov chain الأجمل ان كل step ملهاش دعوة باللي قبليها... فممكن اني ابدل الπ^0 من المعادلة بπ^1 عشان اجيب الπ^2، ومن الπ^2 ممكن انط للπ^3 وهكذا (من غير ما اغير الP تبقي هي هي عادي).

$$\pi^1 = \pi^0 P$$
$$\pi^2 = \pi^1 P$$
$$\pi^3 = \pi^2 P$$
$$\vdots$$

طب سؤال خبيث: لو جربت وعوضت بمعادلة الπ^1 في مكان معادلة الπ^2؟ ايه اللي هيحصل؟

$$\pi^2 = (\pi^0 P) P = \pi^0 P^2$$

يعني انا مثلاً ممكن اجيب احتمالات خطوتين في بعض علي طول من غير الπ^1؟ حصل والP^2 دي تعتبر ال**two-step transition matrix**.

ولو عايز اجيب الthree-step transition matrix وماله انا موافق اضرب الطرفين في P مرة كمان:

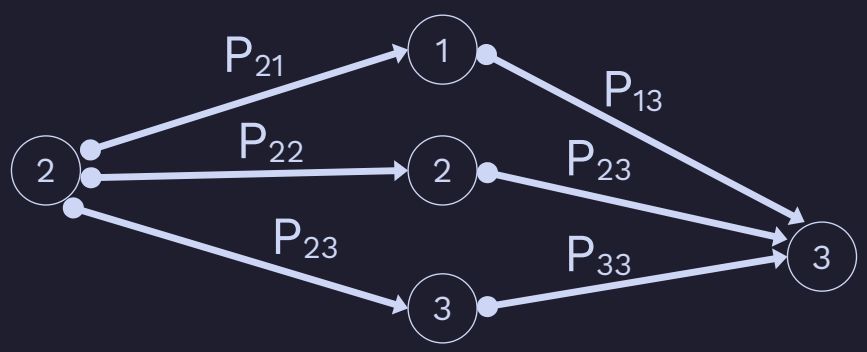
$$\pi^3 = (\pi^0 P^2) P = \pi^0 P^3$$

وبشكل عام اي π^n ممكن تتجاب من الπ^0 والP^n (سميها الn-step transition matrix بالمرة وخليك ناصح):

$$\pi^n = \pi^0 P^n$$

طب ماشي الP اما نضربها في نفسها ونحطلها باور وفهمناها... بس يعني ايه حاجة زي P^2؟ واجيب احتمالات اني اروح من state للتانية في خطوتين ازاي؟ ساعتها هنعدل علي الاثبات اللي فات ونشرح منه...

هجيبلك نفس مثال الاسهم (برضه S={1,2,3}) واني اروح من state للتانية... بس المرادي انا معايا خطوتين و**بالخطوتين لازم اروح من state رقم 2 لstate رقم 3** (عادي ان الخطوة افضل بيها عند نفس الstate كدة كدة)... فممكن اروح ل1 بعدين 3، وممكن افضل عند 2 اول خطوة بعدين اروح ل3، وممكن اروح ل3 اول خطوة وبعدين افضل عند 3 التانية:



فالمهم برضه بدل ما يبقي عندي احتمالات الخطوة والinitial بقي **عندي احتمال خطوتين في بعض**... دلوقتي مطلوب احسب مني الاحتمال الجديد (**اللي اسمه P^2_{23}**)، وهحسبه بنفس طريقة الdot product هضرب كل اتنين P بعد بعض وهجمعهم:

$$P^2_{23}=P(X_2=3 \mid X_0=2)=P_{2j}P_{i3}=P_{21}P_{13}+P_{22}P_{23}+P_{23}P_{33}$$

برضه احنا مش عايزين ال P^2_{23} وخلاص **احنا عايزين الP^2 مرة واحدة**... وبكدة مش محتاج اقولك انك هتضرب الP في نفسها:

$$P^2=\begin{bmatrix} P^2_{11} & P^2_{12} & P^2_{13} \\ P^2_{21} & P^2_{22} & P^2_{23} \\ P^2_{31} & P^2_{32} & P^2_{33} \end{bmatrix}=PP=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}$$

كمان مرة هعلملك علي **P^2_{23}** من قلب ضرب الmatrices في بعض (زي ما انت عارف اول رقم ده الصف وتاني رقم ده العمود... فهنا هضرب **تاني صف** في **تالت عمود**):

$$P^2=\begin{bmatrix} P^2_{11} & P^2_{12} & P^2_{13} \\ P^2_{21} & P^2_{22} & \mathbf{P^2_{23}} \\ P^2_{31} & P^2_{32} & P^2_{33} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ \mathbf{P_{21}} & \mathbf{P_{22}} & \mathbf{P_{23}} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathbf{P_{13}} \\ P_{21} & P_{22} & \mathbf{P_{23}} \\ P_{31} & P_{32} & \mathbf{P_{33}} \end{bmatrix}$$

ولو لسبب ما محتاج $\mathbf{P^3_{23}}$ عينيا انت تؤمر... انت كدة محتاج تضرب **الصف التاني** بتاع الP في **كل العواميد** بتاعت الP الأول عشان تطلع صف جديد من الP^2، بعدين **تضرب الصف الجديد** من P^2 من الأول **في العمود التالت**:

$$P^3=\begin{bmatrix} P^3_{11} & P^3_{12} & P^3_{13} \\ P^3_{21} & P^3_{22} & \mathbf{P^3_{23}} \\ P^3_{31} & P^3_{32} & P^3_{33} \end{bmatrix}=P^2P=\begin{bmatrix} P^2_{11} & P^2_{12} & P^2_{13} \\ \mathbf{P^2_{21}} & \mathbf{P^2_{22}} & \mathbf{P^2_{23}} \\ P^2_{31} & P^2_{32} & P^2_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} & \mathbf{P_{13}} \\ P_{21} & P_{22} & \mathbf{P_{23}} \\ P_{31} & P_{32} & \mathbf{P_{33}} \end{bmatrix}$$

بلاش بالله عليك تسألني علي P^4 عشان هفاجئك واقولك انك لازم تطلع P^2 كلها رقم رقم عشانها الأول. -_-

4. احتمالات الintersection:

نرجع نفتكر انت لما كنت بتجيب احتمال خطوة معينة من state للتانية (نقول مثلاً من 2 ل3 كالعادة) انت كنت بتجيبها بالconditional عادي:

$$P(X_1=2 \mid X_0=1)=P_{12}$$

هنا انا اللي يهمني بس **فرق التايم بين الاتنين** (كنت عند تايم 0 او الinitial في state رقم 1، وكنت عند تايم 1 في state رقم 2)... يعني انا ميهمنيش في الconditional لو زودت علي التايم براحتي وحايد هنا وهناك (هي كدة كدة خطوة واحدة اللي بعملها):

$$P(X_9=2 \mid X_8=1)=P_{12}$$

طب لو انا عايز بقي الاحتمالية ان مثلاً عند تايم 1 بالظبط ابقي في state رقم 2 ومعاها عند تايم 2 بالظبط ابقي في state رقم 3؟ هتلجأ ساعتها للتقاطع او الintersection:

$$P(X_2=3, X_1=2)$$

علامة الكوما , اللي في النص دي (ممكن اسميها and عادي) زيها زي ال∩ اللي نعرفها كلنا عادي... وساعتها نفتكر قانون نفصص ده بيه من ايام البروب 1:

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)} \quad \rightarrow \quad P(A\cap B)=P(A|B)P(B)$$

اللي هو من اي intersection لازم تطلع منها الconditional (احتمال الخطوة نفسها) وكمان احتمال الB نفسه.

عندنا في الستوكاستيك بقي احنا بنطلع التايم الأصغر برا وبنشوف احتمالية الstate نفسها (وده الpresent واللي عرفنا انه موجود من جوا الπ^1):

$$P(X_2=3, X_1=2)=P(X_2=3 \mid X_1=2)P(X_1=2)=P_{23}\pi_2^1$$

طب لو اكتر من intersection؟ غير اني ممكن افكهم مرة علي مرة زي تاني سطر (وامسك كل اللي بعد اول and في probability لوحده) بس عايز اقولك اني ممكن اختصر واجيب الناتج النهائي في حركة واحدة هعملها في خامس سطر بس تفهمها:
هجيب الconditional بين كل اتنين ورا بعض وفي الاخر هجيب احتمالية اللي بأقل تايم لوحده... اهم حاجة بس **الترتيب** وحياتك:

$$P(X_4=1, X_3=1, X_2=3, X_1=2)$$
$$=P(X_4=1 \mid X_3=1, \cancel{X_2=3, X_1=2})P(X_3=1, X_2=3, X_1=2)$$
$$=P(X_4=1 \mid X_3=1)P(X_3=1 \mid X_2=3, \cancel{X_1=2})P(X_2=3, X_1=2)$$
$$=\dots$$
$$=P(X_4=1 \mid X_3=1)P(X_3=1 \mid X_2=3)P(X_2=3 \mid X_1=2)P(X_1=2)$$
$$=P_{11}P_{31}P_{23}\pi_2^1$$

طب لو ميكس بين الاتنين؟ انت عارف من **Lec1** اول ميكس فيهم ان انا لو جالي conditional وكذا state من الماضي مع بعض **باخد اقرب حاجة للfuture** (ممكن لما نخش علي الmulti-step ساعتها المهم عندي هيبقي **اعلي واقرب تايم**)... يعني مثلاً لو اديتك مثال زي ده:

$$P(X_7=1 \mid X_2=3, X_6=2, X_3=1, X_5=3)$$

طب ما انا لو رتبت التايم من الكبير للصغير (وده لازم اعمله دايمًا) ممكن اختصر كل اللي بعد اكبر تايم:

$$P(X_7=1 \mid X_6=2, \cancel{X_5=3}, \cancel{X_3=1}, \cancel{X_2=3})$$
$$P(X_7=1 \mid X_6=2)=P_{21}$$

تاني ميكس بقي لو جبتلك الintersection في الأول فهتفك كل واحد فيهم واحدة واحدة لحد ما توصل لconditional ممكن تلغي الكذا intersection اللي بعديه براحتك... تعالي مثلاً:

$$P(X_6=2, X_7=1 \mid X_3=1, X_5=3)$$

ممكن تجرب تفكها براحتك عادي قبل ما اقولك الحل... المهم بس قبل ما تفك ترتب (ولما تفك ممكن تعتبر كللل اللي بعد علامة الintersection الB عادي)...

الحل:
عايز اقولك ان فيه حركة جديدة خبيثة هعملها: انا لو لقيت اتنين conditional ورا بعض طبعًا عشان انا في Markov chain **ممكن اكنسل الconditional التاني** عادي:

$$P(X_7=1, X_6=2 \mid X_5=3, X_3=1)$$
$$=P(X_7=1 \mid X_6=2, \cancel{X_5=3, X_3=1})P(X_6=2 \mid X_5=3, \cancel{X_3=1})$$
$$=P(X_7=1 \mid X_6=2)P(X_6=2 \mid X_5=3)=P_{21}P_{32}$$

5. احتمالات الmulti-step:
طب بدل الconditional العادي ابو خطوة واحدة ممكن عادي اخليلك الفرق بين التايم في الاتنين states اكبر من واحد... اتنين او تلاتة مثلاً:

$$P(X_2=3 \mid X_0=1)=P^2_{13}$$

انت اكيد شوفت انا ممكن اجيبها من **اي باور للP** من غير اي مشاكل (زي P^2 في المثال هنا)... فمثلاً لو فيه مسألة طلب مني فيها بعد خطوتين او تلاتة اجيب احتمالية انه بقي في الstate كذا فالطريقة دي اللي هتشتغل بيها.
واكيد نفس الموضوع ممكن اطبقه بالمللي علي الintersections والميكسات وكل اللي شرحناه الصفحتين اللي فاتوا عادي:

$$P(X_3=1, X_1=2)$$

فده مثلاً هعرف افكه في ثانيتها:

$$=P(X_3=1 \mid X_1=2)P(X_1=2)=P^2_{21}\pi^1_2$$

تخش علي كام مثال حي نطبق فيه علي كل ده؟

6. مسألة الtossing:

Q: Four players A, B, C, D are tossing a ball among themselves.
- If A has the ball, they toss it to B with probability ½ and to C or D with equal probability.
- If B has the ball, they pass it to either A or D with equal probability.
- If C has the ball, they pass it to A with probability twice that of passing it to D.
- If D has the ball, they always toss it to C.

The ball is initially with player A.

a) Construct the transition matrix.
b) What is the probability the ball moves from player B to player D?
c) What is the probability that after two tosses it is with player C?
d) What is the probability that C will have the ball after the first toss and A will have it after the third toss?

بإختصار هو مديك اربع لاعبين بيرموا الكورة لبعض (وكل واحد بيرمي الكورة بشروط معينة)، فعايز منك الtransition matrix (الP) وتطلع منها كام احتمال كمان.

الحل:
إنت كدة كدة في الأول هتبص علي كل حد فيهم هو بيرمي الكورة فين بالظبط وهتملي الP علي اساس كل ده:
- اول لاعب A بيرمي الكورة لB **بإحتمال ½** ولC أو D بإحتمالات متساوية with equal probability (يعني هينصص معاهم النص الباقي **فإحتمال كل واحد فيهم ¼**).
- تاني لاعب B بيرمي الكورة لA ولD بإحتمالات متساوية (هينصص معاهم الاحتمال كله **فإحتمال كل واحد فيهم ½**).
- تالت لاعب C بيرمي الكورة لA بس بضعف إحتمال اللي بيرميه لD (هي بديهية شوية ان **الاحتمال هيبقي 2/3 لA و1/3 لD** بس لو عايز تشتغلها 2x + x = 1 مفيش مشاكل عادي).
- رابع لاعب D بيدي الكورة دايمًا لC فمش محتاج اقول ان **الاحتمال ب1**.
فيه كمان حاجة عطاهالك given وهي ان الكورة بتبدأ مع A دايمًا (ودي هنحتاجها بعدين مش دلوقتي).

ساعتها انت لما تيجي تعمل الtransition matrix هتملي كل اللي قايلك عليه في كل صف بالظبط (وهتفهم كدة كدة ان محدش هيخلي الكورة مع نفسه في اي وقت فهتصفر الdiagonal كله علي طول).

a) Construct the transition matrix.

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

b) What is the probability the ball moves from player B to player D?

طبعًا هنا هو عايز P_{BD} واللي ساعتها في تاني صف ورابع عمود و(= ½).

$$P(X_1=D \mid X_0=B)=P_{BD}=1/2$$

c) What is the probability that after two tosses it is with player C?

هنا عايز P^2_{AC} ودي هجيبها من dot product صف الA مع عمود الC في الP:

$$P^2=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/4 & 1/4 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$P(X_2=C \mid X_0=A)=P^2_{AC}$$

$$=0(1/4)+(1/2)(0)+(1/4)(0)+(1/4)(1)=1/4$$

d) What is the probability that C will have the ball after the first toss and A will have it after the third toss?

بيقولك دوغري هو عايز ان **اول تايم لازم الstate بتاعه C** و**تالت تايم لازم الstate بتاعه A**... هنا مش هعرف اجيب P مباشرة عشان هو كدة عايز مني intersection اصلاً مش conditional بس:

$$P(X_3=A, X_1=C)$$

ساعتها هفصصها ببساطة:

$$=P(X_3=A \mid X_1=C)P(X_1=C)=P^2_{CA}\,\pi^1_C$$

بس ثانية... انا معيش π^1 ولا π^0 حتي... ساعتها هقولك **استخدم الgiven** اللي قولتلك خليه بعدين ان الكورة هتبدأ مع A، يعني معني كدة ان **الπ^0 علي بعضها هتبقي ب[1,0,0,0]**، يدوبك هتجيب الπ^1_C وبعدين الP^2_{CA} وبكدة مبروك عليك الناتج:

$$\pi^1=\pi^0 P=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix} \rightarrow \pi^1_C=1(1/4)=1/4$$

$$P^2=\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1/2 & 1/4 & 1/4\\ 1/2 & 0 & 0 & 1/2\\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\rightarrow P^2_{CA}=(2/3)0+(0)(1/2)+0(2/3)+(1/3)(0)=0$$

$$P(X_3=A, X_1=C)=P^2_{CA}\,\pi^1_C=0(1/4)=0$$

صفر؟ هو انا كدة عملت حاجة غلط؟ لأ عادي لو طلع الناتج في اي مسألة ب0 مفيش مشاكل... بيني وبينك بالعقل السيناريو ده مستحيل عشان يا اما C هيودي الكورة لA بعدين لازم تفلت منه، يا اما هيوديها لD ولازم ترجع لC تاني، فأنا عارف ان P^2_{CA} بصفر بس اديك انت جبتها بالماث باللي بنحل بيه :)

7. مسألة الcounting:

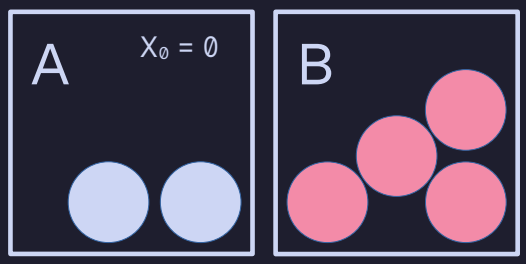
Q: We have two boxes: box A contains 2 white balls, and box B contains 4 red balls. At each time we select a ball from box A and interchange it with box B. X_n = # of red balls in A.

Find:

- **P**
- **π^0**
- **π^1**
- **$P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2)$**

الحل:

بص خلينا نرسمها... انت الأول عندك صندوق A فيه كورتين بيض، وصندوق تاني اسمه B عندك فيه اربع كور حمر. هو بيقولك انا هاخد كورة من A وهبدلها مع واحدة من B عمياني (يعني كدة لو تركز انا في الصندوق A ممكن **يبقي عندي يا صفر كور حمرا، يا كورة واحدة حمرا، يا كورتين حمر**).



بسم الله الرحمن الرحيم كدة **الstate space بتاعتي S={0,1,2}** اللي هي عدد الكور الحمرا في A، والinitial بتاعي 0 (عشان **مديلك في راس السؤال given** ان A كلها بدأت بكورتين بيض)... كدة **π^0 = [1,0,0]** اول مطلوب وراح لحاله.

$$S=\{0,1,2\} \quad , \quad \pi^0=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

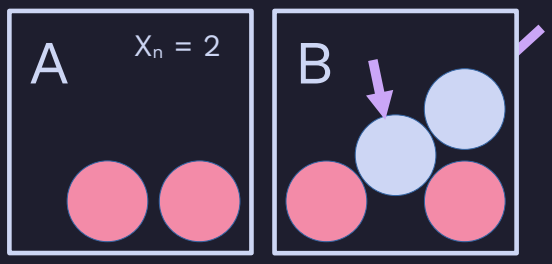
طب دلوقتي من الinitial عندي انا روحت عملت اول تبديلة (يعني بدلت كورة من A مع كورة من B)... مش كدة كدة غصب انا **هحط كورة حمرا في A وهودي كورة بيضا في B**؟ حصل (روحت من state رقم 0 يعني مفيش كورة حمرا لstate رقم 1 يعني فيه كورة واحدة حمرا) وكدة انا جبت **P_{01} = 1** (وبرضه هكون جبت بالفهلوة π^1 = [0,1,0] بس مش عايز امشي حالي بالفهلوة دلوقتي خلينا دوغري).

هنجيب برضه كذا احتمال محتاجينه منك... تركيزك بقي وانت بتفهمهم:
- انا ببدل كورة واحدة بس كل مرة (يعني لازم عشان اروح من 0 ل2 او العكس لازم اعدي علي state رقم 1 الأول)، فكدة **استحالة اروح من state رقم 0 لstate رقم 2 او العكس** ($P_{02} = 0$, $P_{20} = 0$).
- في صندوق A لو كله كور بيضا (state رقم 0) مش غصب الخطوة الجاية هحطله كورة حمرا؟ **وغصب هروح لstate رقم 1؟** يبقي كدة **استحالة افضل علي state 0** (يعني $P_{00} = 0$).
كدة انت في ملاحظتين تلاتة مليت نص الP تقريبًا من غير ما تحس:

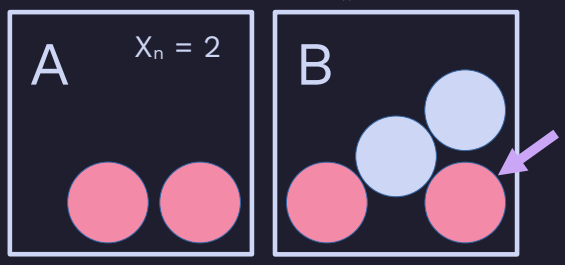
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ 0 & P_{21} & P_{22} \end{bmatrix}$$

كدة انت فاضلك ايه في الP؟ صف state رقم 1 كله وحبة من state رقم 2... ودول عشان نملاهم محتاجين نبص علي state رقم 1 ورقم 2 بالتفصيل الممل (اروح من 1 او ل2 لباقي الحالات حتي نفسها ازاي؟):

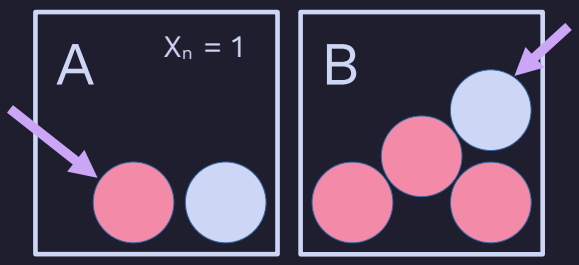
من state رقم 2 لباقي الstates:
انا لو معايا كورتين حمر في الصندوق A و**عايز اروح لstate رقم 1** يبقي هعوز اسحب كورة بيضا من B مش كدة؟ كدة كدة هسحب كورة حمرا من A (احتمالية سحبها 1 ده لازم) **وفي نفس الوقت** واحدة بيضا من B (احتمالية سحبها ½)... هضرب الرقمين في بعض زي اي احتمالين بيحصلوا مع بعض هيطلعلي **$P_{21} = ½$**... في رسمة state رقم 2 **هسحب من B اي واحد من دول:**



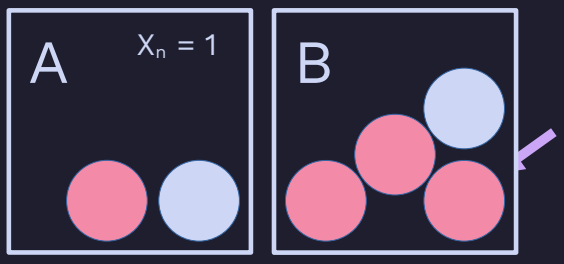
طب ينفع افضل في state رقم 2 زي ما انا؟ ينفع عادي وساعتها بدل ما تسحب كورة بيضا من B هتسحب كورة حمرا (احتمالية سحبها ½ برضه)... كدة معاك **$P_{22} = ½$** برضه... وفي الرسمة **هتسحب من B اي واحدة من دول:**



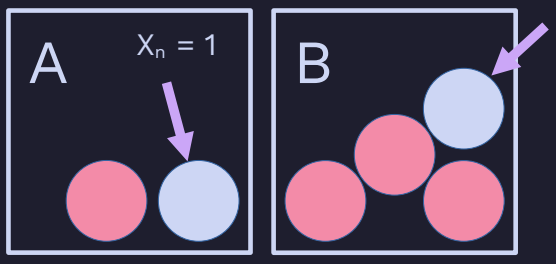
من state رقم 2 لباقي الstates:
ولو انا من state رقم 1 (معايا كورة حمرا واحدة بس في A) وعايز اروح لstate رقم 0 (اخلي A كله كور بيضا بس)... فأنا ممكن اعملها بإني اسحب الكورة الحمرا من A (احتمالية سحبها ب½) **ومعاها** اسحب الكورة البيضا من B (احتمالية سحبها ب¼)... اضربهم في بعض زي اي احتمالين بيحصلوا مع بعض هيطلعلك **P_{10} = 1/8**:



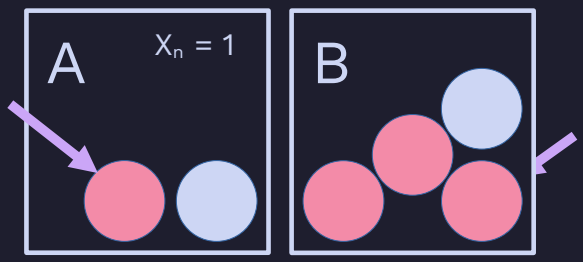
طب لو عايز اروح لstate رقم 2 (واقلب A كله كور حمرا)؟ هسحب الكورة البيضا من A (احتمالية سحبها ½) **ومعاها** هسحب واحدة من الكور الحمرا من B (احتمالية سحبهم ¾)... اضربهم في بعض كدة **P_{12}=3/8**:



كدة مفاضليش غير احتمالية واحدة **P_{11}** يعني **افضل في state رقم 1** زي ما انا... دي تتجاب بسكتين:
- يا اسحب الكورة البيضا من A (احتمالية سحبها ½) والكورة البيضا من B (احتمالية سحبها ¼):



- يا اسحب الكورة الحمرا من A (احتمال سحبها ½) وواحدة من الكور الحمرا من B (احتمالية سحبهم ¾):



وفي الاخر هطلع P_{11} من ضرب كل سكة فيهم بعدين جمعهم:

$$P_{11}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}$$

وبكدة اكون كملت الP عندي بنجاح:

$$P=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

وطبعًا ممكن تجيب ال π^1 عدل المرادي طالما معاك الP كاملة:

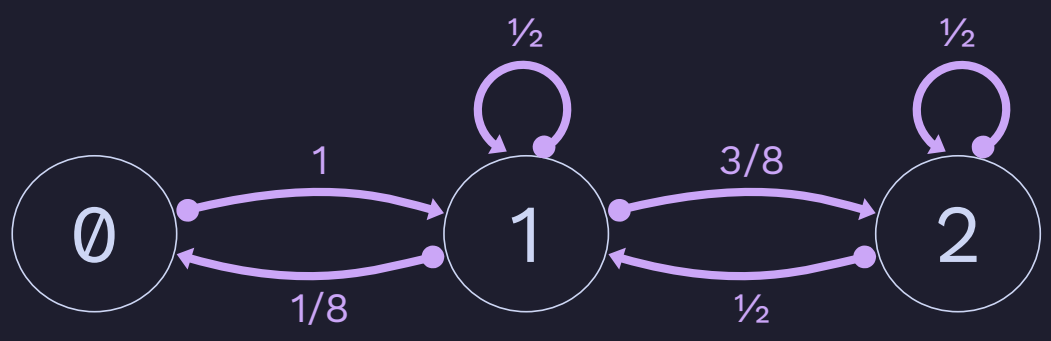
$$\pi^1=\pi^0 P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

- $P(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 2)$

اخر مطلوب اني اجيب احتمال الintersection اللي معايا وده هرتبه وهفكه في ثانيتها:

$$P(X_1=1, X_2=1, X_3=2)$$
$$=P(X_3=2, X_2=1, X_1=1)$$
$$=P(X_3=2 \mid X_2=1)P(X_2=1 \mid X_1=1)P(X_1=1)$$
$$=P_{12}P_{11}\pi_1^1=\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{3}{16}$$

كدة انا خلصت المسألة بنجاح! ممكن برضه لو عايز ترسم one-step transition diagram عشان توضع معاك الtransitions اكتر هعملهالك عادي:



Lec3&4: Fixed-Point Distribution and Steady-State

1. بص اعتبرها معادلة وحلها:
قالك وانا بجيب الπ عند كل time (او iteration) قيمة الπ دي بتقرب لقيمة ثابتة بحيث **اني لو ضربت الπ دي في الP هتطلع زي ما هي:**

$$\pi P = \pi$$

وانت لو فكيت كل حاجة فيهم لvector وmatrix هتعرف تعمل معادلتين زي الفل تحلهم مع بعض:

$$\begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{bmatrix}$$

$$\pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} = \pi_1$$

$$\pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} = \pi_2$$

طبعًا دي الP اللي بنتكلم عليها **يعني مجموع كل صف فيها بيساوي 1** فأنا استحالة اطلع بحل لو جمعت او طرحت كل معادلات الmatrix مع بعض:

$$\pi_1 P_{11} + \pi_2 P_{21} + \pi_1 P_{12} + \pi_2 P_{22} = \pi_1 + \pi_2$$

$$\pi_1 (P_{11} + P_{12}) + \pi_2 (P_{21} + P_{22}) = \pi_1 + \pi_2$$

$$\pi_1 (1) + \pi_2 (1) = \pi_1 + \pi_2$$

فأنا باخد معادلة واحدة (او كام معادلة لو الP ابعادها اكبر المهم مش كلهم) مع معادلة مساعدة برضه بطبقها علي الπ نفسها:

$$\pi_1 + \pi_2 = 1$$

الfixed-point distribution ده **ممكن اجيبه من اي Markov chain واي P**... اللي يهمني بس اني احل المعادلات الصح مع بعض الأول.
ناخد مثال بأرقام؟

Q: Find the fixed-point distribution for the following one-step transition matrix P.

$$P=\begin{bmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

الحل:

هتحط الP زي ما هي في فكة المعادلة بتاعتنا وتطلع منها المعادلتين بتوعك عادي:

$$\pi P=\pi$$

$$\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\pi_1 & \pi_2\end{bmatrix}$$

$$0.3\pi_1+0.5\pi_2=\pi_1$$

$$0.7\pi_1+0.5\pi_2=\pi_2$$

هتاخد اول معادلة من دول (مثلاً) وهتحلها مع المعادلة المساعدة:

$$\pi_2=1-\pi_1$$

$$0.3\pi_1+(1-\pi_1)0.5=\pi_1$$

$$0.5-0.2\pi_1=\pi_1$$

$$\pi_1=\frac{5}{12},\quad \pi_2=\frac{7}{12},\quad \pi=\left[\frac{5}{12},\ \frac{7}{12}\right]$$

2. الsteady-state:

لو مسكنا في الP اللي كانت في المثال اللي فات عمومًا:

$$P=\begin{bmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}$$

نقول مثلاً عايزين نجيبلها P بباور كبير زي P^7 مثلاً (الcalculator هتساعد اوي معاك عمومًا ونقرب لأربع ارقام عشرية معاهم):

$$P^7=\begin{bmatrix}0.4167 & 0.5833\\ 0.4167 & 0.5833\end{bmatrix}$$

لو كملنا علي نفس المنوال لـ∞ (او لعدد كبير برضه ميضرش) هلاقي **ان الـP^n يعتبر مبتتغيرش كل ما اضرب فيها P**...

$$\lim_{n\to\infty} P^n=\lim_{n\to\infty}\begin{bmatrix}0.3 & 0.7\\ 0.5 & 0.5\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}0.41\overline{6} & 0.58\overline{3}\\ 0.41\overline{6} & 0.58\overline{3}\end{bmatrix}$$

بمعني اصح:

$$P^n=P^{n+1}$$

كدة بنقول ان الMarkov chain اللي الP بتاعتها كدة **هتخش في steady-state من عند اي π^0** ممكن ابدأ الprocess بتاعتي منها... وكمان الـπ^n هتقرب للfixed-point distribution بتاعتها (نظريًا):

$$\pi^n=\pi^0 P^n,\quad \pi^{n+1}=\pi^0 P^{n+1}$$

$$\because\ P^n=P^{n+1},\quad \therefore \pi^n=\pi^{n+1}=\pi$$

$$\pi^{n+1}=\pi^0 P^n P=\pi^n P=\pi P$$

$$\pi P=\pi$$

المهم بس فيه شرط اساسي عشان اوصل لكل الكلام ده... ان عند n معينة الاقي ان **كل القيم اللي في P اكبر من واحد (لو فيه اصفار كانت في الP الاصلية هتتشال)**... يعني ممكن يبقي كل ده بعد n=2 او n=3 او حتي n=10 المهم اوصل لP مفيهاش ولا صفر:

$$P_{ij}^{n} > 0 \quad \text{for all } i, j$$

المهم هل فيه مثال ان فيه ماتريكس ممكن تبقي عكس كدة؟ حصل... عندك مثلاً ابسط مثال لو في Markov chain تانية الP كانت كدة:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

دي انت لو جربت انك تجيب الP^2 هتتبدل الوحايد بالإصفار، ولو جربت تجيب الP^3 هتتبدل الوحايد بالإصفار مرة كمان وهتبقي بتساوي الP، وهكذا:

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = P, \quad P^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = P^2, \quad \dots$$

ماتريكس زي دي هتلاقيها بتنط ما بين الP والP^2 مع كل باور ليها (كل باور فردي = P وكل باور زوجي = P^2)... فبنقول ان استحالة الMarkov chain دي تخش في steady-state عشان دايمًا $P^{n+1} \neq P^n$.

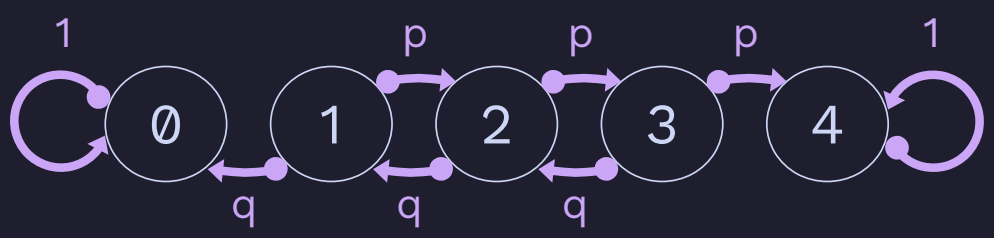
Lec4 (Cont.): Gambler's Game and Classification of States

الgambler's game وتصنيف الstates:

بص علي قد ما دي لعبة في اسمها لعب علي فلوس وقمار اصلاً بس **مهم اننا نعرف فيها كام حاجة في تصنيف الstates جوا اي Markov chain عمومًا** فركز معايا في شروطها:

- انا معايا عدد معين من الجنيهات (جنيه او اتنين او تلاتة وهكذا) وبلعب لعبة معينة.
- لو انا كسبت (احتمال الفوز p) فأنا هكسب جنيه، ولو انا خسرت (احتمال الخسارة q) هخسر جنيه.
- لو انا وصلت لعدد جنيهات معين (نقول 4) يبقي خلصت الفورة وهخلع بالفلوس كلها ومش هلعب تاني.
- ولو انا خسرت كل فلوسي (معايا 0) يبقي فارت عليا وفلست ومبقاش معايا حاجة العب عليها.

بديهيًا هرسم الMarkov chain للعبة دي ازاي؟ دلوقتي انا الstates عندي عدد الجنيهات اللي معايا يعني هيبقي عندي كدة 5 حالات (من 0 ل4)... بص علي الرسمة دي مبدئيًا وهشرحلك بعديها الstates عاملة ازاي بعديها:



هقول علي اكتر من ملحوظة ورا بعض وركز عشان كل ملحوظة ببني عليها اللي بعديها:

ملحوظة #0:

اي سكة انا ممكن امشي فيها عبارة عن sequence of transitions بتحول فيها من state للتانية... وبسمي اي سكة فيهم **path** او **طريق**.

ملحوظة #1:

من اول كام حاجة هتاخد بالك منها غير الp والq الوحايد اللي علي ال0 وال4... ودول ببساطة يعني **لو انا وصلتلهم مش هعرف اطلع منهم**... يعني كدة عندك **$P_{00} = 1$** وكمان **$P_{44} = 1$**... دول بنسميهم **الabsorbing states** او الحالات الجاذبة... بشكل عام اي absorbing state رقم i ممكن يترمزلها كالأتي:

$$P_{ii} = 1$$

ملحوظة #2:

انا ممكن اوصل من state 1 لـstate 4... فممكن اقول ان:

$1 \rightarrow 4$ (state 4 is **accessible** from state 1)

او ان state رقم 4 **متاحة** من state رقم 1.

وبرضه لو انا في state 4 استحالة اوصل منها لـstate 1... فبرضه ممكن اقول ان:

$4 \not\rightarrow 1$ (state 1 is **inaccessible** from state 4)

او ان state رقم 1 **غير متاحة** من state رقم 4.

ملحوظة #3:

لو لقيت اي اتنين states متاحين من بعض:

$1 \rightarrow 3,\ 3 \rightarrow 1$

اقدر اقول ان:

$1 \leftrightarrow 3$ (states 1 and 3 are **communicating** states)

او ان states رقم 1 و3 **بيتواصلوا** مع بعضيهم.

ملحوظة #4:

لو لقيت كذا communicating state ورا بعض ممكن اجمعهم في class او فئة لوحدها (نسميها C_1 للتبسيط):

$1 \leftrightarrow 2,\ 2 \leftrightarrow 3,\ 1 \leftrightarrow 3$

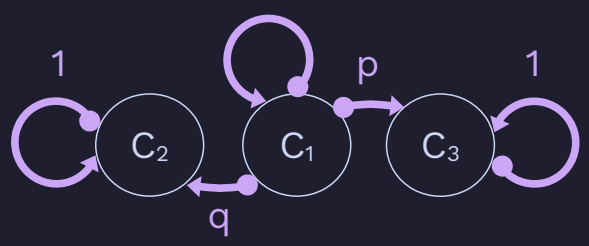
$\mathbf{C_1 = \{1,2,3\}}$

ولما بكتب الـclasses ممكن **ارمي كل state باقية في class لوحدها** (حتي لو قولنا عليهم في **ملحوظة #1** انهم absorbing states لأ **مش سبب** احطهم مع بعض):

$C_1 = \{1,2,3\},\ C_2 = \{\emptyset\},\ C_3 = \{4\}$

ملحوظة #5:

لو علي التقسيمة بتاعت الـclasses اللي فوق لقيت فيه **اكتر من class** فممكن اقول تلقائي اني ممكن اختصر كل class فيهم مع بعضه (زي الرسمة اللي جنبي كدة).



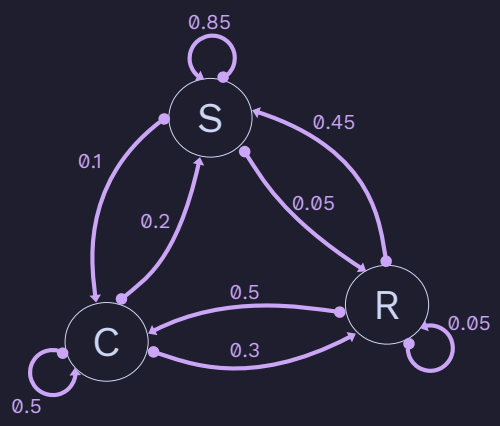
ويبقي ساعتها الـMarkov chain دي **reducible** او **قابلة للإختصار**... بالعكس بقي لو لقيتهم كلهم في class واحد فممكن اقول ان الـMarkov chain دي **irreducible** **غير قابلة للإختصار**.

ملحوظة #6:

ارجع للMarkov chain بتاعت اللعبة تاني كدة... لو فيه state انا ممكن **اطلع منها في اي path من غير ما ارجعلها تاني** (زي ما بروح من اي state ل4 او ل0 ومش هعرف ارجع) ممكن نقول علي الstate دي **transient state** او مؤقتة استحالة ارجعلها تاني لو طلعت منها في path واحد عالأقل:

Transient state is a state that has at least one path where we can leave the state without returning back to it.

ملحوظة #7:



بالعكس بقي بس في Markov chain تانية زي المثال الكلاسيكي بتاع الweather اللي شوفناه في الأول... لو **فيه اي state انا لازم وحتمًا ولابد ارجعلها تاني** دي بسميها **recurrent state** او متكررة لازم ارجعلها تاني بعدين.

يعني مثلاً انا لو في S ممكن امشي في اي path براحتي انشالله ابات عند R وC بس ممكن ارجع بأي احتمالية لS عادي... فتعتبر الS دي recurrent state (وكلهم recurrent اصلاً مساء الفل عشان ببساطة الchain كلها irreducible وكل حالاتها communicating).

Recurrent state is a state where it's certain that it's possible to return to that state.

او ان الrecurrent state دي انا متأكد مليون في المية اننا ممكن نرجع للstate دي بعد ما طلعنا منها.

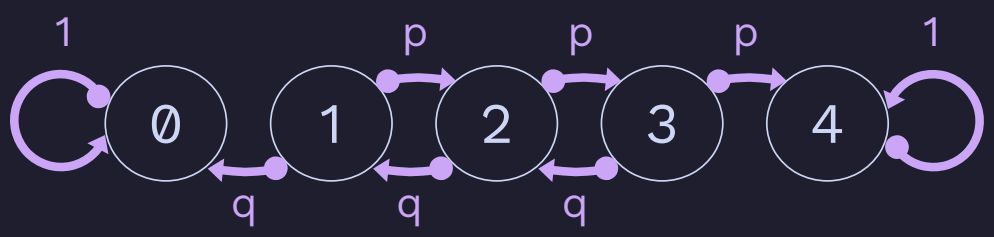
كدة خلصنا الملحوظات مؤقتًا وهنلخصهم سريعًا كدة:

- **Path**: sequence of transitions (سلسلة من التحولات).
- **Absorbing state** (حالة لازم افضل عندها زي ما هي): $P_{ii} = 1$
- **Accessible state** (B is accessible to A): A → B
-/- **Inaccessible state** (B is inaccessible to A): A -/→ B
- **Communicating states** (A and B are communicating states): A ↔ B
- **Class**: collection of communicating states: C = { ... , ... , ... }
- **Reducible chain**: Markov chain with more than one class.
-/- **Irreducible chain**: Markov chain with only one class.
- **Transient state**: Cannot return to state in at least one path.
(فيه سكة واحدة عالأقل منها اللي يروح ميرجعش)
-/- **Recurrent state**: Can return to state in all possible paths.
(لو مشيت منها ممكن ارجعلها في اي وقت عادي)

Lec5: Gambler's Game and Probability Calculations

1. تقسيمة الP في الgambler's game:

طب ايه احتمالية اني افضل في الtransient او اني اروح منها للabsorbing في نهاية المطاف (لما اوصل للمالانهاية)؟ ده اللي هنعرفه لما نرجع للعبة بتاعتنا تاني ونفصصها واحدة واحدة ونحسب ايه الP^n اللي عايزينها منه دي:



$$P=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

طب دول ومترتبين من 0 ل4 بأرقام الstates... **طب لو رتبناهم بالclasses وخلينا كل الtransient (اللي هما $C_1 = \{1,2,3\}$) الأول؟** نشوف كدة هيطلع معايا ايه:

$$P=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & q & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ونقسم الP برضه اربع ارباع (ممكن تشوفها احنا لسة في الtransient ولا روحنا لabsorbing منها ولا لأ):

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 0 & 4 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & p & 0 & q & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

دلوقتي احنا ممكن **نقسم الربعين اللي فوق لQ فوق عالشمال (مكان الtransient) وR فوق عاليمين (مكان اي حاجة رايحة من transient لabsorbing)**... وبما ان مينفعش ارجع من absorbing لtransient فالربع اللي تحت عالشمال ب0، وبرضه بما اني اكيد هفضل في اي absorbing state بعد ما وصلتلها فالربع اللي تحت عاليمين ب1 (مش بالواحد بتاعنا لأ... بالواحد بتاع ال**matrices** يعني **I او ال identity**):

$$P = \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

نرجع نوضحلك هدفنا اللي قولته في اول **Lec5** اللي احنا فيه... احنا عايزين P^n اما توصل للمالانهاية فإنت كدة هتكتبها علي صورة نهاية او limit (وده بنسميه بعد كدة بال**absorbing probability** او الاحتمالية الجاذبة وهتعرف ليه قريب):

$$\lim_{n \to \infty} P^n$$

يعني هتقعد تضرب الP في نفسها كذا مرة... والP^2 مبدئيًا كدة:

$$P^2 = \left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} Q^2 & QR + R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

وكمان مرة لما نجيب الP^3:

$$P^3=\left[\begin{array}{c|c} Q & R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c} Q^2 & QR+R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} Q^3 & Q^2R+QR+R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

هتاخد بالك كدة من كام نمط مهمين... الربعين اللي تحت بتوع ال0 والI مش بيتغيروا (وبالمنطق عمرهم ما هيتغيروا) وكل اللي بيتغير الربعين اللي فوق... الQ بتتضرب في نفسها والR بيتضاف عليها كل مرة Q بباور اكبر مضروب في R برضه... فإنت لما تيجي توصل للP^n هتوصل للمنظر ده:

$$P^n=\left[\begin{array}{c|c} Q^n & Q^{n-1}R+Q^{n-2}R+\ldots+Q^2R+QR+R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

دلوقتي هنبدأ نجيب الlimit بتاع الP^n او الabsorbing probability زي ما قولنا... مبدئيًا كدة:

$$\lim_{n\to\infty} Q^n=0$$

لو جربت تحسبها مع نفسك هتطلع كدة (او حتي بالمنطق استحالة افضل في حالة الtransient للأبد فلازم فيه نقطة اطلع منها للabsorbing).
كدة اتفضلنا الربع اللي فوق عاليمين وده محتاج شغل شوية... خد الR عامل مشترك الأول نشتغل علي نضافة:

$$\lim_{n\to\infty} Q^{n-1}R+Q^{n-2}R+\ldots+Q^2R+QR+R$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(Q^{n-1}+Q^{n-2}+\ldots+Q^2+Q+I\right)R$$

بس الأول خلينا نبص علي قانون مشهور نوعًا ما بتاع الgeometric series (اثباته معلومة اثرائية عليك وفيه Taylor expansion عند 0 من هنا):

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n=1+x^2+x^3+\ldots=\frac{1}{1-x}$$

طبعًا ممكن تطبق الكلام الجميل ده علي حبة الQ اللي خدت الR منهم عامل مشترك... وبما ان الQ ماتريكس فإنت **هتقلب كل حاجة عندك لنسختها في الmatrices** (المقلوب بinverse والواحد بI الidentity):

$$\lim_{n\to\infty}\left(Q^{n-1}+Q^{n-2}+\ldots+Q^{2}+Q+I\right)R=\left(I-Q\right)^{-1}R$$

كدة كمل عندك الlimit بتاع P^n بنجاح:

$$\lim_{n\to\infty}P^{n}=\left[\begin{array}{c|c} 0 & (I-Q)^{-1}R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

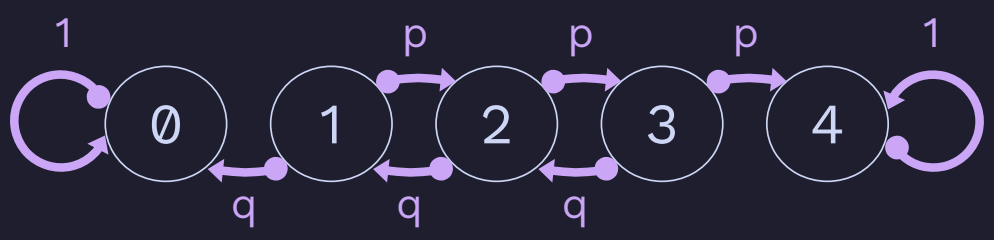
كدة عرفت ليه سمينا الليميت ده بالذات الabsorbing probability؟ عشان ده اللي بيقولك كل الاحتمالات للabsorbing states (بما ان الاحتمالات للtransient states ب0 بالغصب).

2. ابسط مثال من اللعبة نفسها بالحل:

In gambling game, the probability for winning p is 0.6 and the probability of losing q is 0.4. The state space S for the game is {0,1,2,3,4}, with 0 and 4 as end states. Find absorbing probability for the game.

الحل:

هنا يدوبك اخد نفس المثال اللي شرحناه وحط مكان الp والq احتمالاتهم... طب ماشي خليني امشي ببساطة وراه عشان غصب هحل كل مسألة من الأول:



وهطلع بقي منها الP اللي هنفصصها بعدين:

$$P=\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & p & 0 & q & 0 \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 & 0 & p \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0.6 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0 & 0.6 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

احنا هنا عارفين مين الQ ومين الR بتاعتنا فببساطة هنجيب الabsorbing probability من القانون:

$$\lim_{n\to\infty} P^n=\left[\begin{array}{c|c} 0 & (I-Q)^{-1}R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

وهنجيب $(I-Q)^{-1}R$ بالألة عادي... هتدخل I-Q في MatA (كل الماتريكس معاك بالسالب مع عدا القطر هتطرحه من وحايد) وR في MatB ومبروك عليك ناتج الربع:

$$(I-Q)^{-1}R=\begin{bmatrix} 1 & -0.6 & 0 \\ -0.4 & 1 & -0.6 \\ 0 & -0.4 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.585 & 0.415 \\ 0.308 & 0.692 \\ 0.123 & 0.877 \end{bmatrix}$$

ومعاها هتكمل الabsorbing probability علي طول وتبقي مسألتك خلصت:

$$\lim_{n\to\infty} P^n=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.585 & 0.415 \\ 0 & 0 & 0 & 0.308 & 0.692 \\ 0 & 0 & 0 & 0.123 & 0.877 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. مثال كمان نراجع بيه علي كل اللي فات:

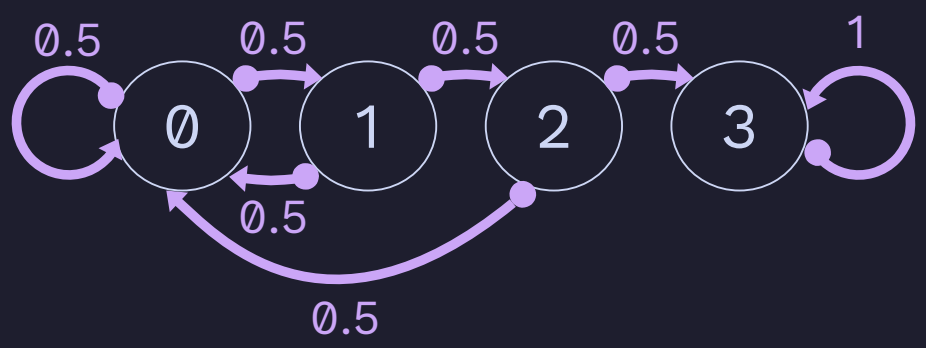
A fair coin is flipped until three heads occur in a row. Find the one-step transition matrix P and the absorbing probability.

احنا بنقعد نرمي عملة لحد ما نجيب 3 ملك ورا بعض. احسب الP والabsorbing probability.

الحل:

بص... هي كدة كدة فيها فكرة فركز معايا انا فكرت فيها ازاي: **انا عايز الstates بتاعتي تبقي زي عداد يعد ورايا انا جبت كام head ورا بعض** (يعني كدة S = {0,1,2,3}). هنا انا كل ما اجيب head يطلع علي الstate اللي اعلي منها، وكل ما اجيب tail ارجع لل0 تاني... وبرضه لو وصلت لل3 بكون خلصت خلاص وحققت هدفي... يعني **state رقم 3 هتبقي absorbing state**.

تعالي نرسم بقي الdiagram بتاعها عشان نوضح اكتر (طالما قولنا fair يعني احتمالية الhead والtail بيساووا بعض ب0.5 عادي):



وعادي انا حاطط P_{00} ب0.5 هنا عشان اكيد ممكن ارمي tail في الأول خالص وارجع لنفس النقطة، او اي عدد من الtails ورا بعض انا بفضل في ال0 برضه.

المهم يعني ممكن نعمل من ده الP علي طول:

$$P = \left[\begin{array}{ccc|c} 0.5 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0.5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

وطبعًا مقدرش اوصيك تاني ان state رقم 3 هو اخر صف واخر عمود.

كمان مرة طالما طلعنا الP وعرفنا مين الQ ومين الR يبقي سهل نطلع الR$(I-Q)^{-1}$ بالألة ومعاها والabsorbing probability:

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \left[\begin{array}{c|c} 0 & (I-Q)^{-1}R \\ \hline 0 & I \end{array}\right]$$

$$(I-Q)^{-1}R = \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Lec6: Expected Number of Visits and Discrete Markov Chains

1. ال expected number of visits:

لو انا جبت عداد يعدلي انا روحت state معينة بعد n خطوات وسميت العداد ده I_n (لو انا في الstate فبيساوي 1 وان انا مش فيها فبيساوي 0)... فأنا ممكن اجيب الexpected number of visits عدد المرات اللي هزور فيها الstate دي قبل ما اخش في اي absorbing state (وده معناه **الexpectation بتاع مجموع الIn** او مبعني اصح **مجموع الexpected values عند كل n لحد الinfinity**):

$$E\left(\sum_{n=0}^{\infty} I_n\right)=\sum_{n=0}^{\infty} E\left(I_n\right)$$

المهم يعني عشان ده expectation فكل state الexpected value بتاعتها (لو الIn بيساوي 1) **بيساوي احتمال اني اروح للstate دي اصلاً** بعد n خطوة (مضروب في احتمال الstate اللي انا فيها اللي بيساوي 1 كدة كدة)... طالما محتاج ده يبقي للtransient بس يبقي انا ممكن اكرر الحوار علي الQ من **Lec5** اللي فات:

$$\text{Expected \# of visits}=\sum_{n=0}^{\infty} Q^n$$

واللي عرفنا برضه ان الΣ ده بالذات بيساوي:

$$\text{Expected \# of visits}=(I-Q)^{-1}$$

طبعًا ممكن اطبق الكلام الجميل ده علي اي Markov Chain زي مثال العملة اللي فات:

$$(I-Q)^{-1}=\begin{bmatrix} 0.5 & -0.5 & 0 \\ -0.5 & 1 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 6 & 4 & 2 \\ 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

ولو حبينا نعرف الexpected number of visits **من** اي حالة ببساطة بجمع الصف بتاعها كله... يعني من state رقم 2 بالذات انا محتاج **اجمع 2+4+6 عشان اعرف ان الexpected number of steps from state 2 هيطلع ب12.**

2. الprobability of first return والhitting time:

المرادي بدل ما بجيب احتمالية اني هروح الstate عمومًا ايًا كان عديت عليها قبل كدة ولا لأ المرادي انا باخد بالي من ان يكون **وصولي للstate دي اول وصول**... خلينا نبدأ الأول بإني اعرّف احتمالية اني ارجع للstate دي اول مرة بعد ما مشيت منها بعد n خطوة (وهنرمزلها بالرمز f_{ii}^n):

$$f_{ii}^n = P(X_n = i, X_{n-1} \neq i, \ldots, X_1 \neq i \mid X_0 = i)$$

يعني انا بروح من i لأي state تانية غير الi لحد اما ارجع لi تاني في n خطوات بالظبط... ممكن تاخد بالك ان لو الn ب1 يبقي معايا الself-transition العادي P_{ii}:

$$f_{ii}^1 = P(X_1 = i \mid X_0 = i) = P_{ii}$$

هنا بقي هبدأ اعرّف كمان حاجة جديدة وهي f_{ii} (او f_i بإختصار واسمها **probability of first return** او **probability of first visit**) وده احتمال اني اروح وارجع للi تاني مرة علي طول عمومًا يعني **مجموع كل f_{ii}^n لحد ما الn توصل لinfinity**:

$$f_i = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^n$$

والfi هي اللي بتحدد اذا كانت الstate اللي انا فيها دي transient ولا recurrent...

$f_i = 1$ → state i is **recurrent**.

$f_i < 1$ → state i is **transient**.

او ان لو الfi **بتساوي 1** اللي هو انا متأكد اني هرجع لi تاني يبقي اكيد الi **دي recurrent**... انما غير كدة تبقي الi **دي transient** عادية.

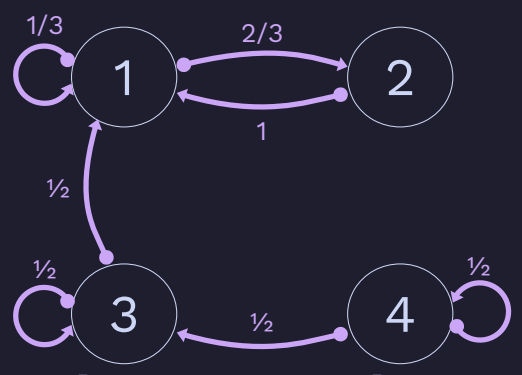
تالت حاجة جدية هعرّفها هي الmii (اختصارها m_i او μ_i واسمها الhitting time او الrecurrence time) وده الوقت او عدد الخطوات اللي متوقع اخدها عشان اوصل تاني للstate اللي كنت فيها تاني مرة، وده ليه قانون صعب شوية نحسبه:

$$m_i = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^n$$

بس عرفنا قانون تاني ليه (ملناش دعوة بإثباته عمومًا) سهل نقدر نحسب منه الmi بسهولة لو معانا الπi (ودي الπ بتاعت الsteady-state من **Lec4** لو تفتكرها):

$$m_i = \frac{1}{\pi_i}$$

3. مثال علي الprobability of first return:



Q: Given this Markov chain diagram.
- State using f_{ii}n if states 2 and 4 are recurrent or transient.
- Obtain expected number of steps needed to return to state 1.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

الحل:

خلينا الأول نجيب الP من الdiagram ده (وهخليه في الجنب عشان بياخد مني طول في الكتابة اصلاً).
خلينا في اول مطلوب بتاع الnf_{ii} وعمومًا قاعدتنا ثابتة لما نيجي نحسب الf_2 والf_4 لو = 1 يعني recurrent لو < 1 يعني transient.
هنبدأ بstate رقم 2 (او f_2) علي طول وهنفصصها واحدة واحدة من اول f_{22}^1:

$$f_{22}^1=P_{22}=0$$

وده عشان مفيش اي self-transition ممكن اعمله من 2 عشان ارجعلها تاني... نخش في f_{22}^2:

$$f_{22}^2=P_{21}P_{12}=1\times\frac{2}{3}$$

روحت من 2 ل1 بعدين رجعت ل1 تاني... طب f_{22}^3؟

$$f_{22}^3=P_{21}P_{11}P_{12}=1\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}$$

هنا انا روحت من 2 ل1 برضه بعدين لفيت في self-transition مرة واحدة عند ال1 بعدين رجعت ل2 (هسيب الضرب متفرد عشان الشرح)... طب f_{22}^4؟

$$f_{22}^3=P_{21}P_{11}P_{11}P_{12}=1\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}=1\times\left(\frac{1}{3}\right)^2\times\frac{2}{3}$$

برضه نفس اللي عملناه في f_{22}^{3} بس المرادي لفينا مرتين عند 1... **ايه ده يعني كل مرة كمان هضرب في P_{11} يعني 1/3؟** بالظبط كدة... حتي انك ممكن تعمم كل ده في قانون ثابت لما تيجي تحسب الf_2 علي بعضها:

$$f_2=\sum_{n=1}^{\infty} f_{22}^{n}=0+\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots$$

$$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\ldots\right)$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)=1$$

برضه استعملنا نفس قانون الgeometric series اللي معايا عشان احول كل اللي جمعته لكسر بسيط 3/2 اضربه في ال2/3 عشان يساوي 1... **وبكدة يبقي عرفنا ان state رقم 2 بقي recurrent**.

نخش علي state رقم 4 وبنفس الطريقة نفصص f_4 من اول f_{44}^{1}:

$$f_{44}^{1}=P_{44}=\frac{1}{2}$$

طبعًا عشان الself-transition اللي عند ال4... طب لو بصيت عالشكل بالعقل مش هعرف ارجع تاني اصلاً لstate رقم 4:

$$f_{44}^{2}=0,f_{44}^{3}=0,f_{44}^{4}=0,\ldots$$

يعني كدة الf_4 كلها ب½:

$$f_4=\sum_{n=1}^{\infty} f_{44}^{n}=\frac{1}{2}$$

وبكدة نبقي عرفنا ان state رقم 4 هتبقي transient.

تاني مطلوب بتاع الexpected number of steps (بالبلدي الrecurrence time) ده مطلوب مني علي state رقم 1 يعني **مطلوب مني m_1**... هنا هشتغلها بالطريقة الصعبة (سيبك من السهلة دلوقتي وهوضحلك ليه).
نبدأ واحدة واحدة نحسب الf_{11}^1:

$$f_{11}^1 = P_{11} = \frac{1}{3}$$

ووراها نحسب الf_{11}^2:

$$f_{11}^2 = P_{12} P_{21} = \frac{2}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

طبعًا مش هتعرف تجيب اكتر من كدة عشان استحالة تقعد برا 1 من انك تقعد في state رقم 2 مرة بالعدد وترجع تاني... فكدة:

$$f_{11}^3 = 0, f_{11}^4 = 0, f_{11}^5 = 0, \ldots$$

كدة هجيب الm_1 بإني هجيب كل f_{11}^n وهضرب فيها الn بتاعتها واجمعهم مع بعض:

$$m_1 = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{11}^n = 1 \times f_{11}^1 + 2 \times f_{11}^2 = 1\left(\frac{1}{3}\right) + 2\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{5}{3}$$

ليه بقي محسبتش بالطريقة السهلة؟ عشان اصلاً الP مليانة اصفار (ولسة هيبقي فيها اصفار لما اجيب ليميت الP^n) فمش هعرف اطلع منها بsteady-state ودايمًا **لو ملقتش الP بتخش steady-state يبقي متقربش من الطريقة السهلة.**
بس عمومًا لو جيت حسبت الfixed-point distribution بتاعها π هتبقي كدة:

$$\pi = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

وبالملاحظة هتلاقي ان:

$$m_1 = \frac{1}{\pi_1}$$

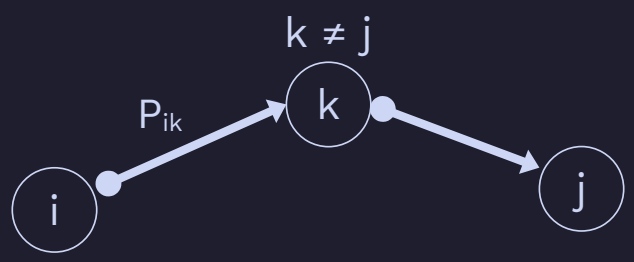
وده مش دايمًا بيحصل مع اي P مبتخشش في steady-state... اللي حصل فهلوة كون ان states رقم 1 و2 في recurrent class لوحدهم.

4. الfirst-hitting time:

انا ممكن برضه اعرّف الf علي اي اتنين states عندي i و j زي مثلاً f_{ij}^n:

$$f_{ij}^n = P(X_n = j, X_{n-1} \neq j, \dots, X_1 \neq j \mid X_0 = i)$$

ده بقي بالذات ممكن افهمه بحاجة بسيطة: انا لو سميت الstate اللي بروحها بعد i اول خطوة بk (وممكن بعديها اروح من k لj في اي عدد خطوات انا عايزه وليكن n-1):



ساعتها زي شرح الأسهم في **Lec2** انا بضرب الاتنين في بعض (والمرادي **انا بعدد في الk مش الn** او بمعني اصح **كل الstates غير الj**... وعادي لو الk بقت i علي فكرة):

$$f_{ij}^n = \sum_{k, k \neq j} P_{ik} f_{kj}^{n-1}$$

يعني مثلاً ممكن تاخد بالك ان لو عندي state space زي S = {1,2,3} وقالك انا عايز اوصل اول مرة لstate رقم 3 من state رقم 2، ساعتها هعدد الk معايا تبقي اي state تانية غير ال3 (يعني k ∈ {1,2}):

$$f_{23}^2 = \sum_{k, k \neq j} P_{2k} f_{k3}^1$$

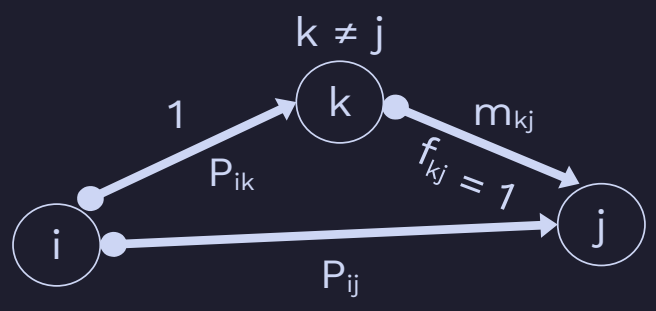
$$= P_{21} f_{13}^1 + P_{22} f_{23}^1 = P_{21} P_{13} + P_{22} P_{23}$$

دلوقتي انا برضه ممكن اعرّف الm_{ij} (ونسميها شبه اخوها الm_i ال**first-hitting time** او ال**first-passage time**) ودي زي الm_i دي عدد المرات اللي متوقعها عشان اوصل من i لj اول مرة، فقانونها شبه الm_i وهرجع اعدد فيها الn:

$$m_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^n$$

وطبعًا ده القانون الاصعب وهنا جايلك عشان القانون السهل بإثبات تقيل حبتين الصفحة الجاية.

دلوقتي هنرجع لنفس شكل الاسهم بتاع الf_{ij}^{n} بس هزود عليه كذا حاجة:



دلوقتي انا حطيت فوق الأسهم عدد المرات اللي محتاجها عشان اروح من الstates في الخطوة، وتحت الخطوة دي... فكدة كدة انا من i لو مشيت في اول سكة (n > 1) ممكن اعدي علي k في اول خطوة احتمالها P_{ik} وبعديها تاني خطوة احتمالها f_{kj} (وبما اني معتبر الk فكة ومؤكد اني اروح لj فعندي **$f_{kj} = 1$**)، وممكن برضه اروح من i لj علي طول في خطوة واحدة (n = 1) احتمالها P_{ij}... المهم يعني هنا انا ضربت عدد الخطوات بتاعت كل سكة مشيت فيها (m_{kj} + 1 في اول سكة) في احتمالية السكة دي:

$$m_{ij}=(1)P_{ij}+\sum_{k,k\neq j}(1+m_{kj})P_{ik}f_{kj}=P_{ij}+\sum_{k,k\neq j}P_{ik}(1+m_{kj})$$

بعد كدة نوزع الΣP_{ik} في القوس اللي جواها:

$$m_{ij}=P_{ij}+\sum_{k,k\neq j}P_{ik}+\sum_{k,k\neq j}P_{ik}m_{kj}$$

ركز بقي معايا... الP_{ij} والΣP_{ik} مع بعض دول مدينني كل اللي طلع من i بلا استثناء (يعني كدة مجموعهم ب1)... **وبس كدة بقي معاك المعادلة السهلة:**

$$m_{ij}=1+\sum_{k,k\neq j}P_{ik}m_{kj}$$

ميزة المعادلة السهلة انك **هتعدد k بس فيها** بدل الn (يعني لو عندك في المسألة 3 states هتعدد 2 بس)... بس فيه تريكاية كمان في المعادلة مش هتشوفها غير بمثال عليها (اللي جاي ده) وهي ان **المعادلة recursive** يعني انت هتجيب الm اللي انت عايزها بدلالة نفس الm دي عادي.

5. مثال علي الfirst-hitting time:

Q: In a Markov chain with state space S = {1,2,3} and the following one-step transition matrix P, at state 1, find expected time until reaching state 3.

$$P=\begin{bmatrix} \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

الحل:

هنا هو عايز الfirst-hitting time (بالتحديد m_{13}، قايلك من سكة جيب الtime لحد ما توصل للstate كذا) فإنت ببساطة هتجيبله المعادلة بتاعتها وتمشي معاها:

$$m_{13}=1+\sum_{k,k\neq j} P_{1k}\, m_{k3}$$

طبعًا مش هوصيك انك هتعدد ال$k \in \{1,2\}$ فهتعوض بيهم في الsum عندك:

$$m_{13}=1+P_{11}\, m_{13}+P_{12}\, m_{23}$$

$$m_{13}=1+\frac{1}{4} m_{13}+\frac{3}{4} m_{23}$$

عشان المعادلة recursive لقيت ان الm_{13} (المطلوب بتاعك) موجود في الطرفين فإنت هتخليهم في طرف واحد وهيطلعلك بدلالة الm_{23} (**معادلة 1**):

$$\frac{3}{4} m_{13}=1+\frac{3}{4} m_{23}$$

كدة ممكن تتكرم وتجيب الm_{23} بنفس الطريقة (اللي هيطلع منها **معادلة 2**):

$$m_{23}=1+\sum_{k,k\neq j} P_{2k}\, m_{k3}$$

$$m_{23}=1+P_{21}\, m_{13}+P_{22}\, m_{23}=1+\frac{1}{4}m_{13}+\cancel{(0)\, m_{23}}$$

$$m_{23}=1+\frac{1}{4}m_{13}$$

ولو عوضت معادلة 2 في معادلة 1 هيطلعلك الحل بتاع m_{13} علي طول ومبروك عليك المسألة:

$$\frac{3}{4}m_{13}=1+\frac{3}{4}\left(1+\frac{1}{4}m_{13}\right)$$

$$\frac{3}{4}m_{13}=1+\frac{3}{4}+\frac{3}{16}m_{13}$$

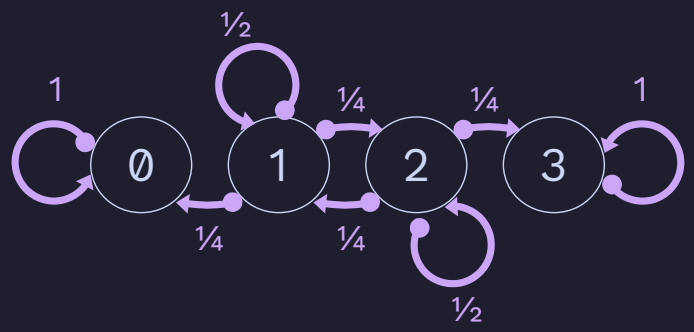
$$\frac{9}{16}m_{13}=\frac{7}{4}$$

$$m_{13}=\frac{28}{9}$$

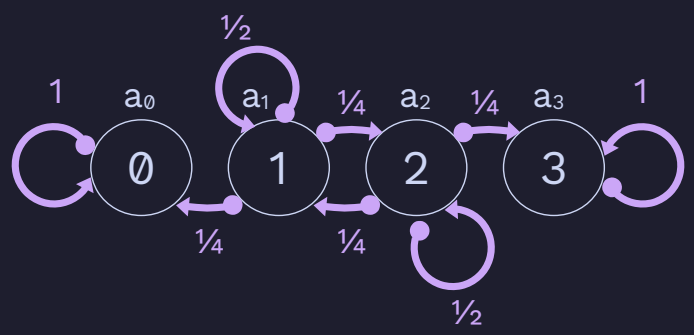
Lec7: First-step Analysis

طريقة كمان عشان نحسب الabsorbing probability:

غير طريقة الR$(I-Q)^{-1}$ فيه طريقة كمان عشان احسب الabsorbing probability وهي اني اخد بعين الاعتبار انا بروح لأنهي absorbing state بالظبط... تعالي نشوف Markov chain كدة نطبق عليها:



دلوقتي انا ممكن احط رمز معين للabsorbing probability بتاعت الstates كلها وهنا عندي ال0 وال3 هما الabsorbing states بتوعي **فهعمل ده لكل state منهم**... وليكن ان الa_i يعني **احتمالية اني اروح وابقي absorbed من i في ال0**... وb_i يعني بالعكس **احتمالية اني اروح وابقي absorbed من i في ال3**... نبدأ بس بالa_i بلاش نستعجل وحطها جنب كل state من اللي عندي:



هنا انت عندك ثوابت تتجاب بالبديهيات: انا دايمًا لو كنت في state رقم 0 هفضل عندها في كل خطوة جاية... معني كدة **$a_0 = 1$**، ولو كنت في state رقم 3 استحالة اروح منها حتي لل0... ومعني كدة **$a_3 = 0$**:

$$a_0 = 1, a_3 = 0$$

كدة بقي انت فاضلك تجيب a_1 وa_2 ودول هيطلعولك معادلات recursive وهنفهمها دلوقتي... دلوقتي انت لو في state رقم 1 مثلاً يبقي انت ممكن تروح اول خطوة بالعدد لstates ايه بالظبط؟ 0 و1 (في self-transition) و2... اهي بقي كل absorbing probability ممكن احسبها بدلالة الabsorbing probabilities التانية اللي هو ايه مجموع احتماليات اني ابقي absorbed من كل state من دول مضروبة في احتمالية اني اروح للstates دي من عندي:

$$a_i = \sum P_{ik} a_k$$

فهنبدأ فهضرب كل دول في بعضهم وهجمعهم طبعًا:

$$a_1 = P_{10} a_0 + P_{11} a_1 + P_{12} a_2$$

$$a_1 = \frac{1}{4}(1) + \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{4} a_2 \rightarrow \frac{1}{2} a_1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} a_2$$

نفس الكلام ممكن اعمله علي الa_2... ركز انا ممكن اروح من state رقم 2 ل1 ول2 (في self-transition) ول3:

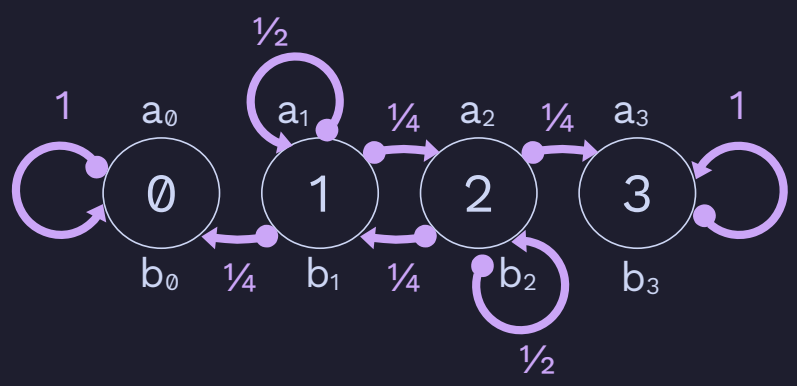
$$a_2 = P_{21} a_1 + P_{22} a_2 + P_{23} a_3$$

$$a_2 = \frac{1}{4} a_1 + \frac{1}{2} a_2 + \frac{1}{4}(0) \rightarrow \frac{1}{2} a_2 = \frac{1}{4} a_1$$

كدة بقي معايا معادلتين احلهم مع بعض وكالعادة هحرقلك عليك حلهم:

$$a_1 = \frac{2}{3}, a_2 = \frac{1}{3}$$

طب ده وبالنسبة للa_i... **ايه بقي الوضع بالنسبة للb_i؟** طبعًا انت ممكن تكرر نفس القصة الطويلة بالنسبة للb_i بس حرفيًا طالما عندنا اتنين absorbing بس يعني احتمالية اني ابقي absorbed في state بتساوي **1 – اني ابقي absorbed في ال state التانية**... فلو قولنا ان كل b_i معناها ال absorbing probability بس في ال state التانية (او ان كل a_i قصادها بالظبط b_i زيها):



بمعني ان اي **$b_i = 1 - a_i$**:

$$b_i = 1 - a_i \rightarrow b_0 = 0, b_3 = 1, b_1 = \frac{1}{3}, b_2 = \frac{2}{3}$$

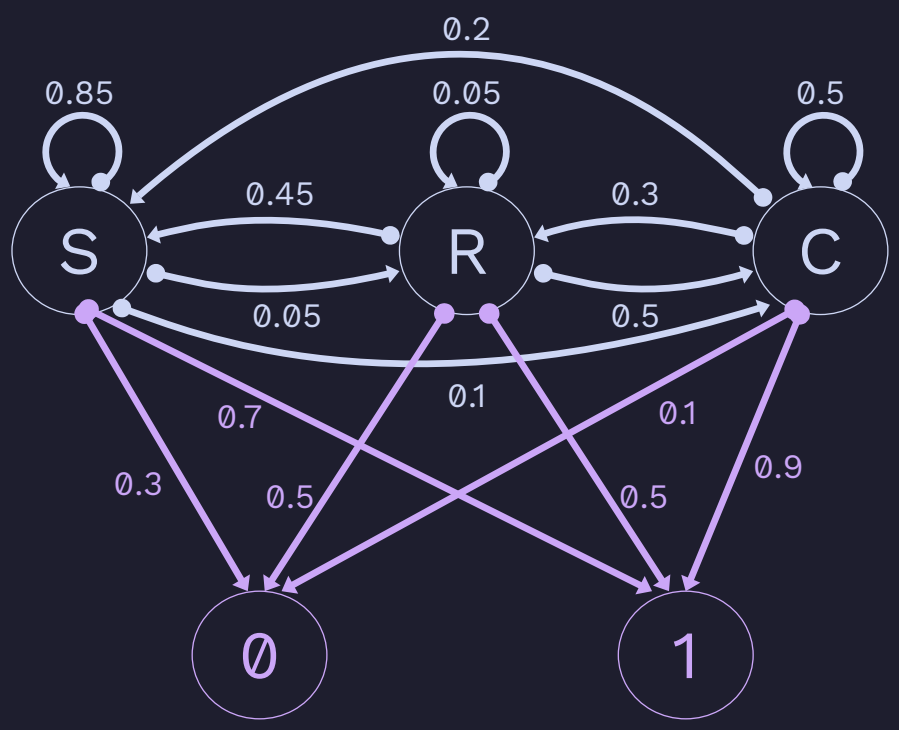
Lec8: Hidden Markov Model and Forward Algorithm

1. الhidden Markov model:

دلوقتي بدل ما في الMarkov model العادي بتاعنا الاحتمالات تبقي عندي ما بين لstates جاهزة وانا ابقي في كل state اتنقل منها وخلاص لأ بقي عندي احتمالات تانية بتعامل معاها مربوطة بالstates دي... **وممكن يبقي ده بس اللي ظاهرلي وممكن اتعامل معاه** (ويبقي ده اسمه الhidden Markov model واختصاره HMM).

في مثال الطقس الجميل بتاعنا... ممكن احتمالات اني اروح من كل حالة طقس والتانية متبانش ويبان منها بس احداث مربوطة بيها بإحتمالات مخصوصة زي ان الجو كان حلو ساعتها ولا لأ... بنسمي الاحداث دي برضه **observable events** او **الاحداث الظاهرة** (وحالات الطقس بتاعتنا في الحالة دي ممكن نسميهم **hidden states** او حالات مخفية بتبان بس من الobservable events او الobservations بمعني اصح).

لو جيت رسمت الMarkov chain بتاعنا بتاع الطقس مفرود ورسمت معاه برضه اتنين observable events نرقمهم 0 و1 (قول مثلاً 1 يعني الجو كان حلو) فممكن اطلع من كل state من اللي عندي سهم بإحتمال معين لكل observable event:



اه الchain كلها بقي شكلها يخض بس ركز معايا ان فيه اسهم رايحة من غير ما ترجع من الstates بتاعتي S وR وC للevents اللي معايا ال0 وال1 وكإنها بتقولي **احتمالات ان كل event من دول يطلع من (او يتربط ب) كل الstates**...

احتمالات زي دي بقي بتتحط في matrix جديدة غير الP اسمها الemission matrix او مصفوفة الانبعاثات (وبنرمزلها بE):

$$E=\begin{array}{c} \\ S \\ C \\ R \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 0 & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.1 & 0.9 \\ 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \end{array}$$

دي كل اللي فيها بتبقي احتمالات conditionals زي الP، يعني لو قولنا مثلاً في تايم t=1 احتمال ان event رقم 0 يطلع من state رقم C (ربط الevent نفسه يعني الobservation نفسها وبنرمزلها بo_t) هيبقي كدة:

$$P(o_1=0 \mid X_1=C)=P(0 \mid C)=e_C(0)=0.1$$

كمان احتمالية هنتعرف عليها (او حتي هنفتكرها) وهي احتمالية sequence او سلسلة معينة من الstates... زي لما اقولك ايه احتمالية اني في اول وقت هعدي علي S وبعديها علي طول هعدي علي R وبعديها علي طول هعدي علي C:

$$P(SRC)$$

دي سهلة وبسيطة هفكها زي ما بفك اي and زي ما كنت بعمل:

$$P(SRC)=P(X_1=S, X_2=R, X_3=C)$$

$$=P(X_1=S)P(X_2=R \mid X_1=S)P(X_3=C \mid X_2=R)$$

$$=P(X_1=S)P(R \mid S)P(C \mid R)=\pi_1 P_{SR} P_{RC}$$

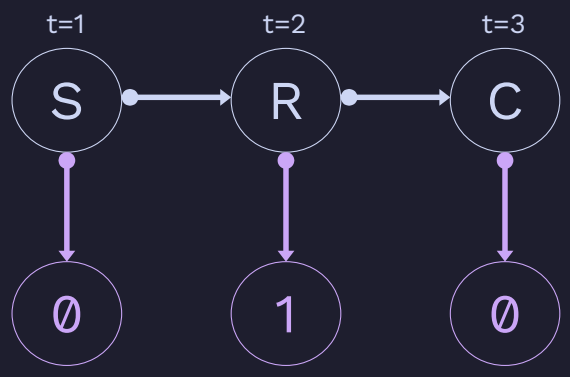
المشكلة بقي لو اتربط بكل واحدة فيهم observable event بيها:

$$P(010, SRC \mid \lambda)$$

مبدئيًا بس يعني ايه الλ هنا؟ دي معناها بمعلومية الP والE والπ مع بعض:

$$\lambda=(P, E, \pi)$$

نرجع لمثالنا تاني وخلينا نرسمه علي شكل diagram عالخفيف:



ده يعتبر الsequence بتاعي البداية فيه عندي من اول t=1 بدأت بالS واتربط بيها event رقم 0، بعدين روحت من S للR واتربط بالR معايا event رقم 1، بعدين روحت من R للC واتربط بالC معايا event رقم 0.
ببساطة طالما كل احتمالية من دول بما فيهم احتماليات كل observation بيحصلوا مع بعض (فيه بينهم كلهم and اصلاً) يبقي ممكن اضربهم مع بعض عادي:

$$P(010, SRC \mid \lambda)$$
$$= P(X_1 = S)P(0|S)P(R|S)P(1|R)P(C|R)P(0|C)$$
$$= P(SRC)P(0|S)P(1|R)P(0|C)$$
$$= P(SRC)e_S(0)e_R(1)e_C(0)$$

2. الforward algorithm وعمايله:

طب انا لو عايز مثلاً اجيب كل احتمالات ان الobservations نفسها تحصل (مش مربوطة بhidden states معينة) زي مثلاً:

$$P(010 \mid \lambda)$$

مسائل زي دي بنسميها **evaluation problems** او مسائل التقييم اني بقيم نوع احتمالات معين (بمعلومية الλ بتاعتي الP والE والπ زي ما قولنا)... الشكل العام بتاعهم كدة (لمة الo دول زي ما قولتلك دول الobservations وبجيب احتمالية انهم يحصلوا مع بعض):

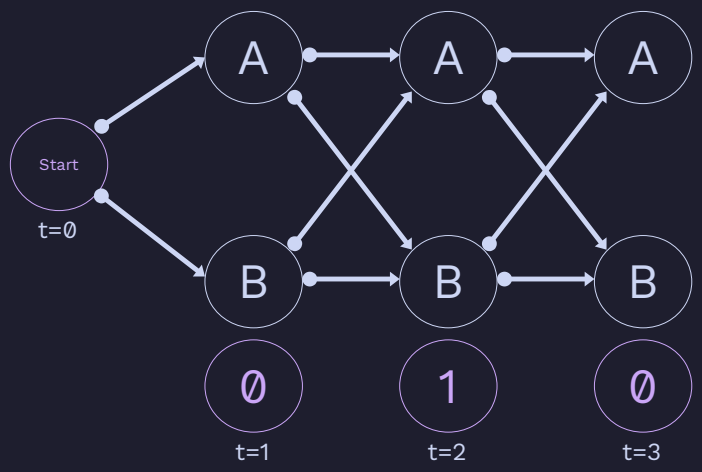
$$P(o_1, o_2, \ldots, o_T \mid \lambda) = P(o_{1:T} \mid \lambda)$$

عمومًا يعني حلهم بيكون بخوارزميات زي الforward algorithm والbackward algorithm هناخد منهم دلوقتي الforward.

Q: For the event space S = {A,B} and the observable events O = {0,1}, the following values for P, E, and π are given.
Evaluate P(010 | λ) using the forward algorithm, where λ = (P, E, π).

$$P=\begin{bmatrix}0.99 & 0.01\\ 0.01 & 0.99\end{bmatrix}\quad E=\begin{bmatrix}0.8 & 0.2\\ 0.1 & 0.9\end{bmatrix}\quad \pi=\begin{bmatrix}0.99 & 0.01\end{bmatrix}$$

الحل:
انت عندك 3 events اللي عايز تقيمهم فساعتها هتعمل 3 خطوات (البداية ومضروب فيهم الtransitions واحدة بواحدة)... خليني ارسم انا قصدي ايه:



انا شلت الأسهم بتاعت الevents عشان التركيز دلوقتي علي الstates بتاعتي بس افهم انت ان **كل state اوتوماتيك مربوط بسهم للevent اللي قصاده.**
دلوقتي انت بدايتك عند الStart وهتروح منه لt=1 فممكن ابدأ مشيتي في سكتين يا اما للA او للB... كدة عندي احتمال كل سكة فيهم هو احتمال اني ابدأ منهم (يعني كدة π بتاعت كل state) مضروب في الevent اللي مربوط بيه (هنتفق علي ان الاحتمالات دي بنرمزلها بα_1 لكل state منهم):

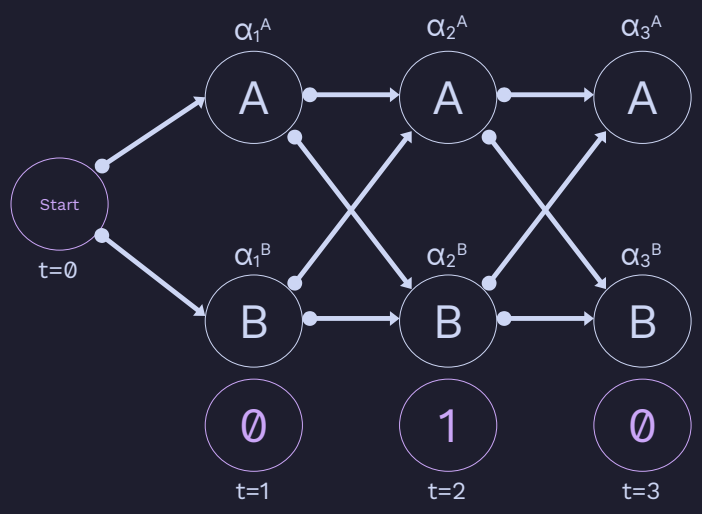
$$\alpha_1^A=P(X_1=A)P(0|A)=\pi_A e_A(0)=0.99(0.8)=0.792$$

$$\alpha_1^B=P(X_1=B)P(0|B)=\pi_B e_B(0)=0.01(0.1)=0.001$$

دلوقتي انت مطلوب منك تمشي في كل تباديل السكك منهم لحد ما توصل لα_3^A او لα_3^B في اخرهم (عشان اخر التايم بتاعي t=3 ومعنديش غير اتنين states) عشان **الاحتمال اللي عايزينه P(010 | λ) بيساوي مجموعهم:**

$$P(010 \mid \lambda)=\sum_i \alpha_3^i=\alpha_3^A+\alpha_3^B$$

هنا بقي انا هرسم تاني نفس الdiagram بس هحط عليها كل α عندي اوضح بس مش اكتر:



طب دلوقتي معانا α_1^A وα_1^B... **ازاي نجيب الباقي؟** نبدأ بα_2^A مثلاً... فيه سكتين انا ممكن اروح فيهم ليها واحدة من α_1^A وواحدة من α_1^B... طب ماشي احتمال كل سكة فيهم يعني احتمال الα اللي فيها (كل α معتمدة علي كل الα اللي قبلها) مضروب في احتمال اني اروح في الstates للسكة دي (من A لA او من B لA مثلاً... احتمالات الtransitions اللي من الP عادي) مضروب فيه احتمال الevent اللي مربوط فيه... هنا في α_2^A انت سككك من α_1^A (رايح **من** A) وα_1^B (رايح **من** B) **ل**A:

$$\alpha_2^A = \alpha_1^A P(A|A) P(1|A) + \alpha_1^B P(A|B) P(1|A)$$

$$= \alpha_1^A P_{AA} e_A(1) + \alpha_1^B P_{BA} e_A(1)$$

$$= 0.792(0.99)(0.2) + 0.001(0.01)(0.2) = 0.1568$$

نفس الكلام هعمله مع α_2^B (السكتين بتوعي برضه من α_1^A وα_1^B بس المرادي للB):

$$\alpha_2^B = \alpha_1^A P(B|A) P(1|B) + \alpha_1^B P(B|B) P(1|B)$$

$$= \alpha_1^A P_{AB} e_B(1) + \alpha_1^B P_{BB} e_B(1)$$

$$= 0.792(0.01)(0.9) + 0.001(0.99)(0.9) = 0.008$$

كدة فاضلنا α_3^A وα_3^B (اللي هما اخرك) ودول هيتجابوا بنفس الطريقة بالظبط (خلي بالك من تبديلة الα وتبديلة الevents هترجع تاني لevent رقم 0):

$$\alpha_3^A = \alpha_2^A P(A|A) P(0|A) + \alpha_2^B P(A|B) P(0|A)$$

$$= \alpha_2^A P_{AA} e_A(0) + \alpha_2^B P_{BA} e_A(0)$$

$$= 0.1568(0.99)(0.8) + 0.008(0.01)(0.8) = 0.1242$$

$$\alpha_3^B = \alpha_2^A P(B|A) P(0|B) + \alpha_2^B P(B|B) P(0|B)$$

$$= \alpha_2^A P_{AB} e_B(0) + \alpha_2^B P_{BB} e_B(0)$$

$$= 0.1568(0.01)(0.1) + 0.008(0.99)(0.1) = 0.0009$$

برضه كدة انت فهمت لو عايز معادلة واحدة او قاعدة عامة تربط كل α باللي قبلها خد المعادلة دي (هتلاقيني اشتغلت بيها في السكرتة في تاني سطر من كل حسبة α عمومًا):

$$\alpha_{t+1}^j = \sum_i \alpha_t^i P_{ij} e_j(o_{t+1})$$

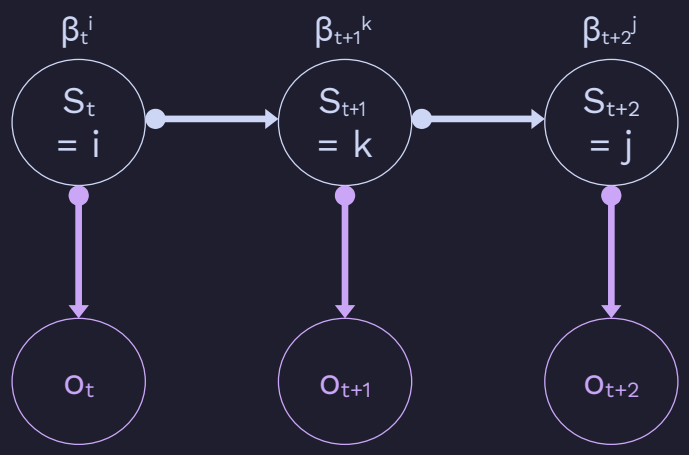
وبس كدة طالما وصلت لأخرك يبقي خلصت (النواتج كلها متقربة فبعيد سيكا عن الناتج الصح 0.1252 لو لسة مأخدتش بالك):

$$P(010 \mid \lambda) = \alpha_3^A + \alpha_3^B = 0.1242 + 0.0009 = 0.1251$$

Lec9: Backward Algorithm

1. اثبات الbackward algorithm:

زي ما قولت قبل كدة فيه طريقة تانية عشان احل مسائل الevaluation problems
وهي الbackward algorithm... دي تعتبر نفس الforward بس بكام تغيير
هيفرقوا مع الخوارزمية دي بالذات بس الأول هحتاجك تعرف اثبات مهم الأول:



في نفس الرسمة بتاعت اي sequence دلوقتي الرموز عندي اتغيرت بدل كل α معايا
بدالها β وكمان الحسبة معكوسة اني دلوقتي **عايز اجيب احتمالية الأول بدلالة اللي جاي:**

$$\beta_t^i = P(o_{t+1:T} \mid S_t = i) = \sum_k P(o_{t+1:T}, S_{t+1} = k \mid S_t = i)$$

هنا اللي جاي بعد β_t^i اللي عايز احسبها باقي sequence الevents اللي جاي
($o_{t+1:T} = o_{t+1}, o_{t+2}, \ldots, o_T$ وطبعًا T ده اخر تايم معايا) والstates اللي هروحلها من عند
β_t^i (اللي هفكها لk كالعادة) واللي كل واحدة منهم ليها β_{t+1}^k بتاعتها. دلوقتي انت ممكن
تفك o_{t+1} برا الo$_{t+1:T}$ واللي هيتبقي معاك ساعتها $o_{t+2:T}$:

$$= \sum_k P(o_{t+2:T}, o_{t+1}, S_{t+1} = k \mid S_t = i)$$

هفك الand اللي بين الo$_{t+2:T}$ والباقي:

$$= \sum_k P(o_{t+2:T} \mid \cancel{o_{t+1}}, S_{t+1} = k, \cancel{S_t = i}) P(o_{t+1}, S_{t+1} = k \mid S_t = i)$$

انا كنسلت $S_{t=i}$ طبعًا عشان تايم اقل من t+1... **بس ليه كنسلت o_{t+1}؟** عشان ببساطة
كل event يعتبر independent او مستقل عن التاني فo$_{t+1}$ ملهوش اي علاقة بo$_{t+2:T}$.

عمومًا ده اللي معانا حتي الأن:

$$\beta_t^i = \sum_k P(o_{t+2:T} \mid S_{t+1}=k) P(o_{t+1}, S_{t+1}=k \mid S_t=i)$$

تاني probability مش هعرف افكها تاني زي اي and كنت بعملها عشان نفس التايم... بس لو تركز شوية هتلاقي اني **بجيب احتمالية الobservation من k لo_{t+1} بدلالة الtransition بتاعي من i لk** (يعني **$P_{ik}e_k(o_{t+1})$**). اول probability بقي هتلاقيها هي هي زي تعريف الβ_t^i بتاعتي بس بدل الt+1 هتبقي t+2 وبدل الi عندي k... فكدة انا من غير ما احس طلعت الβ_{t+1}^k:

$$\beta_t^i = \sum_k \beta_{t+1}^k P_{ik} e_k(o_{t+1})$$

كدة اثباتك خلص وزي الفل... عشان اخلي القانون بقي زي القاعدة العامة بتاعت α (وعشان تفهمه بالi والj اللي متعود عليهم) يدوبك هبدل كل k بالj:

$$\beta_t^i = \sum_j \beta_{t+1}^j P_{ij} e_j(o_{t+1})$$

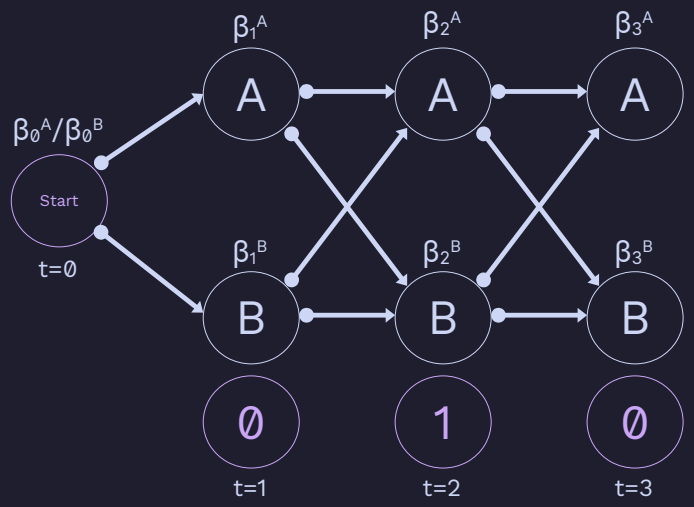
2. الbackward algorithm وعمايله:

نرجع نطبق بقي علي نفس المسألة بس بالbackward عشان فاضلي كام حاجة بس لازم اوضحهم:

Q: For the event space S = {A,B} and the observable events O = {0,1}, the following values for P, E, and π are given.
Evaluate P(010 | λ) using the backward algorithm, where λ = (P, E, π).

$$P = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \\ 0.01 & 0.99 \end{bmatrix} \quad E = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.2 \\ 0.1 & 0.9 \end{bmatrix} \quad \pi = \begin{bmatrix} 0.99 & 0.01 \end{bmatrix}$$

الحل:
برضه هرجع ارسم نفس الرسمة بتاعتي بس بدل كل α هحط β:



دلوقتي انا هرجع من الأخر للأول وهنا هبدأ من β_3^A وβ_3^B... بما اني انا متأكد ان الsequence بتاعتي ايًا يكن ايه هي تمت فبنخلي كل واحد فيهم بيساوي 1:

$$\beta_3^A=1,\beta_3^B=1$$

انا بقي عايز ايه عمومًا من مسألتي؟ اجيب ال$P(010 \mid \lambda)$ بتاعتي وهنا انا برجع خالص لحد الStart يعني اجيب لحد β_0^A والβ_0^B وهقولك ليه مش مجموعهم بعدين (ممكن تكون اخد بالك اني حطيتهم فوق الStart من بدري):

$$P(010 \mid \lambda)=\beta_0^A=\beta_0^B$$

واحدة واحدة نبدأ نجيب الβ_2^A وβ_2^B وهنبدأ بالβ_2^A... هنا زي ما انت عارف برجع من ورا لقدام بمعني ده احتمال كل سكة انا رايحلها (كل β معتمدة علي كل الβ اللي بعديها) مضروب في احتمال اني اروح في الstates للسكة دي (من A لA او من A لB مثلاً... احتمالات الtransitions اللي من الP عادي) مضروب فيه احتمال الevent اللي مربوط في **الstate الجاية** ... في β_2^A مثلاً انت سككك لβ_3^A (رايح **لA**) وβ_3^B (رايح **لB**) **من** الA:

$$\beta_2^A=\beta_3^A P(A|A)P(0|A)+\beta_3^B P(B|A)P(0|B)$$

$$=\beta_3^A P_{AA} e_A(0)+\beta_3^B P_{AB} e_B(0)$$

$$=1(0.99)(0.8)+1(0.01)(0.1)=0.793$$

هتكرر نفس الكلام علي β_2^B (سككي برضه لβ_3^A ولβ_3^B بس المرادي من الB):

$$\beta_2^B=\beta_3^A P(A|B)P(0|A)+\beta_3^B P(B|B)P(0|B)$$
$$=\beta_3^A P_{BA} e_A(0)+\beta_3^B P_{BB} e_B(0)$$
$$=1(0.01)(0.8)+1(0.99)(0.1)=0.107$$

هنا بقي مش هوصيك اني اخش علي طول باللي معايا علي β_1^A وβ_1^B:

$$\beta_1^A=\beta_2^A P(A|A)P(1|A)+\beta_2^B P(B|A)P(1|B)$$
$$=\beta_2^A P_{AA} e_A(1)+\beta_2^B P_{AB} e_B(1)$$
$$=0.793(0.99)(0.2)+0.107(0.01)(0.9)=0.158$$
$$\beta_1^B=\beta_2^A P(A|B)P(1|A)+\beta_2^B P(B|B)P(1|B)$$
$$=\beta_2^A P_{BA} e_A(1)+\beta_2^B P_{BB} e_B(1)$$
$$=0.793(0.01)(0.2)+0.107(0.99)(0.9)=0.0969$$

وبعديهم β_0^A او β_0^B اللي هما اخري (الاتنين نفس القيمة والحسبة عمومًا)... بس ركز معايا هنا انك اصلاً بادئ من الstart **بمعني ان احتماليتك هنا هتبقي الπ بدل الP**... فكدة يعتبر عاملها حسبة مخصوص نوعًا ما:

$$P(010 \mid \lambda)=\beta_0^A=\beta_0^B$$
$$=\beta_1^A P(X_0=A)P(0|A)+\beta_1^B P(X_0=B)P(0|B)$$
$$=\beta_1^A \pi_A e_A(0)+\beta_1^B \pi_B e_B(0)$$
$$=0.158(0.99)(0.8)+0.0969(0.01)(0.1)=0.1252$$

ليه برضه β_0^A وβ_0^B بيساووا بعض؟ زي ما قولتلك قبل كدة كل β معتمدة علي السكتين اللي قدامها... فالسكتين بتوع β_0^A وβ_0^B عشان **معتمدين علي الπ بتاعت الsequence كلها** بدل الP بتاعت state واحدة بس فهي كدة متساوية عالسكتين.

3. مقارنة خفيفة بين الforward والbackward:

دلوقتي يمكن الخوارزميتين لما كل واحد فيهم اتشرح لوحده يلخبط جامد... فعمومًا هحطلك كل الفروقات ما بينهم وامثلة علي كله في صفحة واحدة. لاحظ ان كل حاجة بغيرها علي كل الstates (زي الk بالظبط) حاططها بلون مختلف وتحتيها خط.

الforward:

- بمشي من الأول (الStart) لقدام.
- معادلة البداية لكل α_1:

$$\alpha_1^i = \pi_i e_i(o_1) \quad \rightarrow \quad \alpha_1^A = \pi_A e_A(0), \alpha_1^B = \pi_B e_B(0)$$

- معادلة الforward لكل α_{t+1} (بدلالة اللي قبلها α_t):

$$\alpha_{t+1}^j = \sum_i \alpha_t^{\underline{i}} P_{\underline{i}j} e_j(o_{t+1})$$

$$\rightarrow \quad \alpha_2^A = \alpha_1^{\underline{A}} P_{\underline{A}A} e_A(1) + \alpha_1^{\underline{B}} P_{\underline{B}A} e_A(1)$$

- معادلة النهاية (بجمع كل الـα_T مع بعضهم):

$$P(o_{1:T} \mid \lambda) = \sum_i \alpha_T^{\underline{i}} \quad \rightarrow \quad P(010 \mid \lambda) = \sum_i \alpha_3^{\underline{i}} = \alpha_3^{\underline{A}} + \alpha_3^{\underline{B}}$$

الbackward:

- بمشي من الأخر لورا (لحد الstart).
- معادلة البداية لكل β_T:

$$\beta_T^i = 1 \quad \rightarrow \quad \beta_3^A = 1, \beta_3^B = 1$$

- معادلة الbackward لكل β_t (بدلالة اللي بعدها β_{t+1}):

$$\beta_t^i = \sum_j \beta_{t+1}^{\underline{j}} P_{i\underline{j}} e_{\underline{j}}(o_{t+1})$$

$$\rightarrow \quad \beta_2^A = \beta_3^{\underline{A}} P_{A\underline{A}} e_{\underline{A}}(0) + \beta_3^{\underline{B}} P_{A\underline{B}} e_{\underline{B}}(0)$$

- معادلة النهاية (حسبة مخصوص للـβ_0):

$$P(o_{1:T} \mid \lambda) = \beta_0^i = \sum_j \beta_1^{\underline{j}} \pi_{\underline{j}} e_{\underline{j}}(o_1)$$

$$\rightarrow \quad P(010 \mid \lambda) = \beta_0^A = \beta_0^B = \beta_1^{\underline{A}} \pi_{\underline{A}} e_{\underline{A}}(o_1) + \beta_1^{\underline{B}} \pi_{\underline{B}} e_{\underline{B}}(o_1)$$

وبس كدة المحتوي خلص...

Fin.

واه تذكرة خفيفة ان كل دي مجهودات فردية (من اول تجميع المحتوي لتنظيمه وتنسيقه لحد تصحيحه ومراجعته وتحسينه بشكل دوري) ومهم في اي ملخص بعمله انه يطلع بشكل consistent ومتناسق علي قد ما اقدر ويبقي ملخص ومرجع نضيف وبالمسطرة ومهم ليا قبل ما يبقي ليكم... **فأعذروني لو فيه اي غلطة ولو صغيرة حصلت ولقيتوها وغابت عن عيني ومأخدتش بالي منها** (برضه براجع الملخص بشكل دوري وبحاول اتأكد انه مفيهوش غلطات كل فترة وقت).