

Σενάριο διδασκαλίας

1. Τίτλος Η θερμοκρασία των Αθηνών

2. Ταυτότητα του σεναρίου

- **Συγγραφέας:** Αθανασία Καββαδία
- **Γνωστική περιοχή των μαθηματικών:** Άλγεβρα
- **Θέμα:** Η έννοια της περιοδικότητας, που συνδέεται άμεσα με φαινόμενα της καθημερινής ζωής, είναι μια από τις σημαντικότερες έννοιες που θα διδάχτούν οι μαθητές στη Β Λυκείου. Για το λόγο αυτό δίνεται έμφαση στην ιδιότητα αυτή μέσα από τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις και τις γραφικές τους παραστάσεις. Βασιζόμενοι στην παραπάνω διαπίστωση αλλά και στην ανάγκη γνώσης της έννοιας της μοντελοποίησης σχεδιάστηκε το παρόν σενάριο, στο οποίο μελετάτε η διαδικασία προσδιορισμού συνάρτησης η οποία να μοντελοποιεί τη θερμοκρασία που δίνεται.

3. Σκεπτικό της δραστηριότητας

- **Προστιθέμενη αξία:**
Στην παραδοσιακή διδασκαλία χρησιμοποιώντας τα στατικά μέσα δεν είναι δυνατό να παρασταθούν γραφικά πολλά σημεία και να προσεγγισθεί η συνάρτηση που περιγράφουν τα σημεία αυτά. Η χρήση λογισμικού και συγκεκριμένα ο δυναμικός χαρακτήρας του δίνει τη δυνατότητα στους μαθητές να πειραματιστούν και μέσα από διαδικασίες διερεύνησης να προσδιορίσουν τον τύπο της συνάρτησης από ένα σύνολο δοσμένων σημείων. Επίσης, η ταυτόχρονη αναπαράσταση των σημείων και της γραφικής παράστασης συνάρτησης ωθεί το χρήστη σε πολύπλευρη μελέτη.
- **Γνωστικά – διδακτικά προβλήματα:**
Η εύρεση του τύπου συνάρτησης μόνο από ένα σύνολο σημείων είναι μια διαδικασία που δύσκολα γίνεται κατανοητή με τα στατικά μέσα διδασκαλίας. Επίσης, η αναπαράσταση σημείων, όπως και ο σχεδιασμός γραφικής παράστασης συνάρτησης είναι θέματα που δυσκολεύουν τους μαθητές. Το γεγονός αυτό ωθεί τους μαθητές στο να έχουν αρνητική στάση απέναντι στο μάθημα των Μαθηματικών και να αποστηθίζουν γραφικές παραστάσεις βασικών συναρτήσεων. Όμως, η υποστήριξη της διδασκαλίας των εννοιών αυτών από τα δυναμικά υπολογιστικά περιβάλλοντα έχει αποδείξει ότι αντιμετωπίζει αποτελεσματικά τα προβλήματα κατανόησης που δημιουργούνται. Οι μαθητές με τη χρήση των

εργαλείων των δυναμικών ψηφιακών μέσων κατακτούν την έννοια προσωπικά μέσω της διάδρασης που επιτυγχάνουν και τη δυνατότητα πολλαπλών και δυναμικά συνδεδεμένων αναπαραστάσεων μιας έννοιας.

4. Πλαίσιο εφαρμογής

- **Σε ποιους απευθύνεται:** Το σενάριο απευθύνεται σε μαθητές Β Λυκείου
- **Χρόνος υλοποίησης:** Για την εφαρμογή του σεναρίου απαιτείται 1 διδακτική ώρα.
- **Χώρος υλοποίησης:** Το σενάριο θα διεξαχθεί εξ ολοκλήρου στο εργαστήριο πληροφορικής με στόχο να υπάρχει μεγαλύτερη εμπλοκή περισσότερων μαθητών με το λογισμικό Geogebra, ενισχύοντας τον πειραματισμό και τη διερεύνηση. Οι μαθητές θα εργασθούν σε ομάδες των δύο ατόμων.

- **Προαπαιτούμενες γνώσεις:**

Ως προς τα μαθηματικά οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Να τοποθετούν σημεία σε ορθοκανονικό σύστημα.
- Τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \eta\mu\chi$.
- Την έννοια της περιόδου.
- Την έκφραση των δεδομένων ενός προβλήματος σε μαθηματική μορφή.

Ως προς την τεχνολογία οι μαθητές πρέπει να γνωρίζουν:

- Τη λειτουργία του υπολογιστικού φύλλου του λογισμικού Geogebra.
- Τον τρόπο χρήσης των βασικών εργαλείων του λογισμικού Geogebra και ιδιαίτερα τη λειτουργία των δρομέων.

- **Απαιτούμενα βοηθητικά υλικά και εργαλεία:**

Κάθε ομάδα είναι σκόπιμο να διαθέτει ένα φύλλο εργασίας με αναλυτικά τα βήματα των δραστηριοτήτων οι οποίες βέβαια τους δίνουν περιθώρια να θέσουν τα δικά τους ερωτήματα και να πειραματιστούν, ένα τετράδιο για σημειώσεις, γεωμετρικά όργανα καθώς και το σχολικό βιβλίο.

- **Στόχοι της δραστηριότητας**

Ως προς το γνωστικό αντικείμενο:

Οι μαθητές επιδιώκεται:

- Να γνωρίζουν την έννοια της περιοδικής συνάρτησης.
- Να μπορούν να σχεδιάζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$y = \alpha \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta \text{ με } \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

- Να μπορούν να υπολογίζουν τιμές της συνάρτησης $y = \alpha \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta$ με $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Ως προς τη μαθησιακή διδασκαλία

Οι μαθητές μέσω της δραστηριότητας επιδιώκεται:

- Να αντιμετωπίζουν ένα "ανοιχτό" πρόβλημα.
- Να χρησιμοποιήσουν τις γνώσεις που έχουν αποκομίσει από τη θεωρητική διδασκαλία και να εκτιμήσουν έτσι την πρακτική τους αξία.
- Να πειραματίζονται με τις διάφορες μαθηματικές έννοιες θέτοντας ερωτήματα και κάνοντας διάφορες εικασίες
- Να συνεργάζονται με τους συμμαθητές τους και τον καθηγητή τους για την επίτευξη του στόχου τους

Ως προς τη χρήση τεχνολογιών

- Οι μαθητές αναμένετε να εξοικειωθούν με τη χρήση ψηφιακών μέσων και να μάθουν να αναζητούν πληροφορίες μέσα από τη χρήση τους.

5. Ανάλυση της δραστηριότητας

Για τις εργασίες του συγκεκριμένου σεναρίου θα χρησιμοποιηθεί το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra. Η σειρά που παρουσιάζονται είναι τέτοια ώστε οι μαθητές αρχικά προβληματίζονται για την εύρεση εκείνων των συνθηκών που επιτρέπουν τη μοντελοποίηση του προβλήματος. Αυτό θα τους βοηθήσει χρησιμοποιώντας εργαλεία του λογισμικού να φθάσουν μόνοι τους στο να αναγνωρίσουν τη γενική μορφή της ζητούμενης συνάρτησης μέσω της γραφικής της παράστασης, όπου και θα προσδιορίσουν τον τύπο της. Τέλος, θα αναζητήσουν τρόπους για την εύρεση τιμής της συνάρτησης για την αντίστοιχη τιμή της μεταβλητής. Κατά τη διάρκεια των δραστηριοτήτων οι μαθητές εργάζονται χωρισμένοι σε ομάδες των δύο ατόμων. Συνεργάζονται με τέτοιο τρόπο που κάθε μέλος της ομάδας ασχολείται με το λογισμικό και το άλλο κρατά σημειώσεις με στόχο όλοι οι μαθητές στο τέλος των εργασιών να έχουν εμπλακεί με το λογισμικό. Ο εκπαιδευτικός καθοδηγεί τους μαθητές και παρεμβαίνει όποτε του ζητηθεί ή όταν ο ίδιος κρίνει σκόπιμο με στόχο την ολοκλήρωση των εργασιών. Οι δραστηριότητες σχεδιάστηκαν με τρόπο που να αφήνουν στους μαθητές περιθώρια πειραματισμού, ανάπτυξη εικασιών και ανάγκη διατύπωσης της απόδειξης όπου χρειάζεται. Επίσης, στην αρχή κάθε δραστηριότητας δίνει

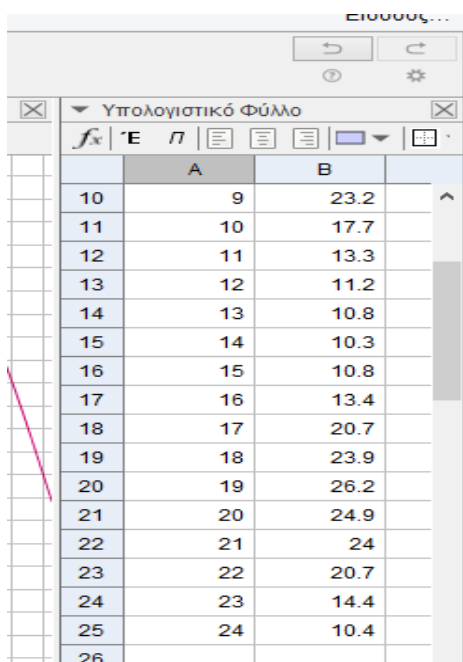
οδηγίες για την υλοποίηση των εργασιών. Μετά την ολοκλήρωση των δραστηριοτήτων παρουσιάζονται τα αποτελέσματα στην ολομέλεια από εκπροσώπους των ομάδων των μαθητών. Το δόμημα που αναμένεται να έχουν οι μαθητές στους Η/Υ τους είναι το "Η θερμοκρασία των Αθηνών.ggb".

- **Δραστηριότητα 1**

Στη φάση αυτή γίνεται συζήτηση στην ολομέλεια για το στοιχείο εκείνο στο κείμενο της άσκησης που δόθηκε, το οποίο παραπέμπει στην μαθηματική προσέγγιση του προβλήματος. Περιμένουμε οι μαθητές να αναζητήσουν τους μαθηματικούς όρους που υπάρχουν, όπως "φαινόμενο περιοδικό", παραπέμπει σε τριγωνομετρικές συναρτήσεις και αναζητούν για διαφορετικές τιμές του χ ίδιες τιμές της θερμοκρασίας, πίνακας τιμών, παραπέμπει σε συναρτήσεις, μέση θερμοκρασία, όρος γνωστός από τη στατιστική. Λόγο του πίνακα τιμών αναμένουμε να γίνει λόγος για συναρτήσεις και μάλιστα τριγωνομετρικές οι οποίες γνωρίζουν ότι είναι περιοδικές. Αυτό θα δώσει το έναυσμα για τη δεύτερη δραστηριότητα.

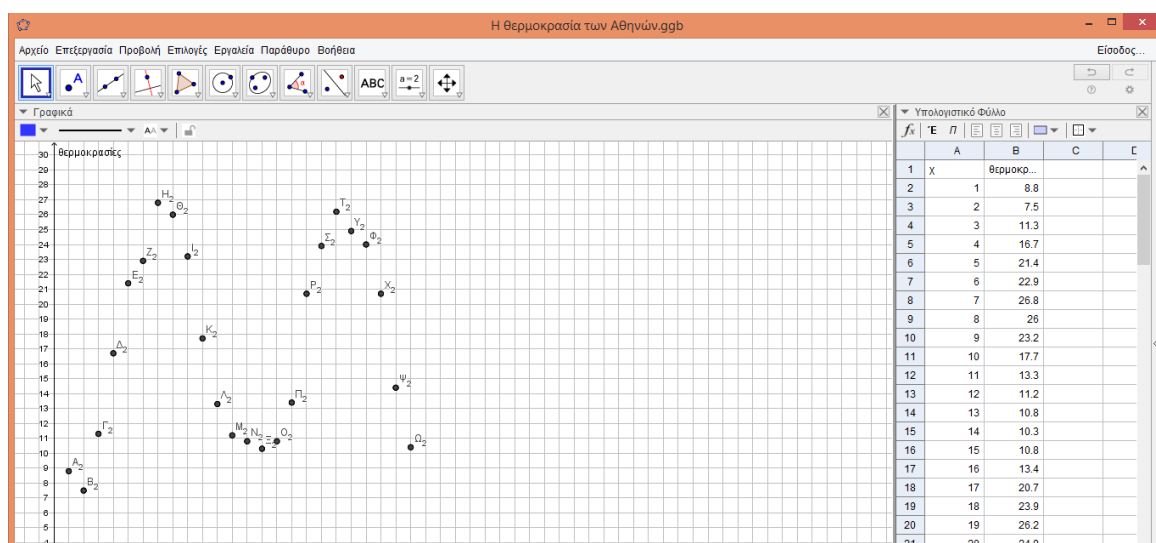
- **Δραστηριότητα 2**

Η δεύτερη δραστηριότητα ξεκινά με ένα ανοικτό ερώτημα το οποίο μπορεί να απαντηθεί αν έχει δοθεί έμφαση στην προηγούμενη δραστηριότητα στην έννοια του πίνακα τιμών. Ο εκπαιδευτικός αναφέρει ότι στο σημείο αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί το λογισμικό. Ανάλογα με την απόκριση των μαθητών ζητά από αυτούς να περάσουν τις τιμές των μέσων θερμοκρασιών που δίνονται στον παραπάνω πίνακα για τη διετία 1983-1984, στο υπολογιστικό φύλλο του Geogebra.

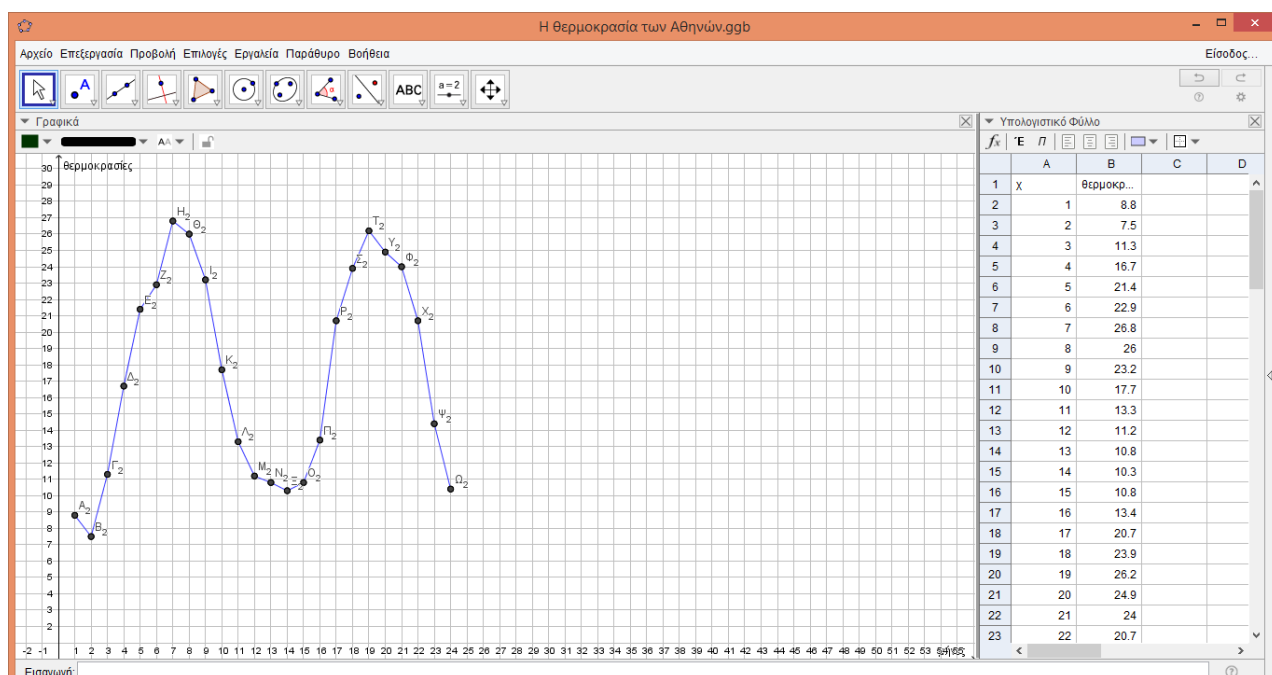


| | A | B |
|----|----|------|
| 10 | 9 | 23.2 |
| 11 | 10 | 17.7 |
| 12 | 11 | 13.3 |
| 13 | 12 | 11.2 |
| 14 | 13 | 10.8 |
| 15 | 14 | 10.3 |
| 16 | 15 | 10.8 |
| 17 | 16 | 13.4 |
| 18 | 17 | 20.7 |
| 19 | 18 | 23.9 |
| 20 | 19 | 26.2 |
| 21 | 20 | 24.9 |
| 22 | 21 | 24 |
| 23 | 22 | 20.7 |
| 24 | 23 | 14.4 |
| 25 | 24 | 10.4 |
| 26 | | |

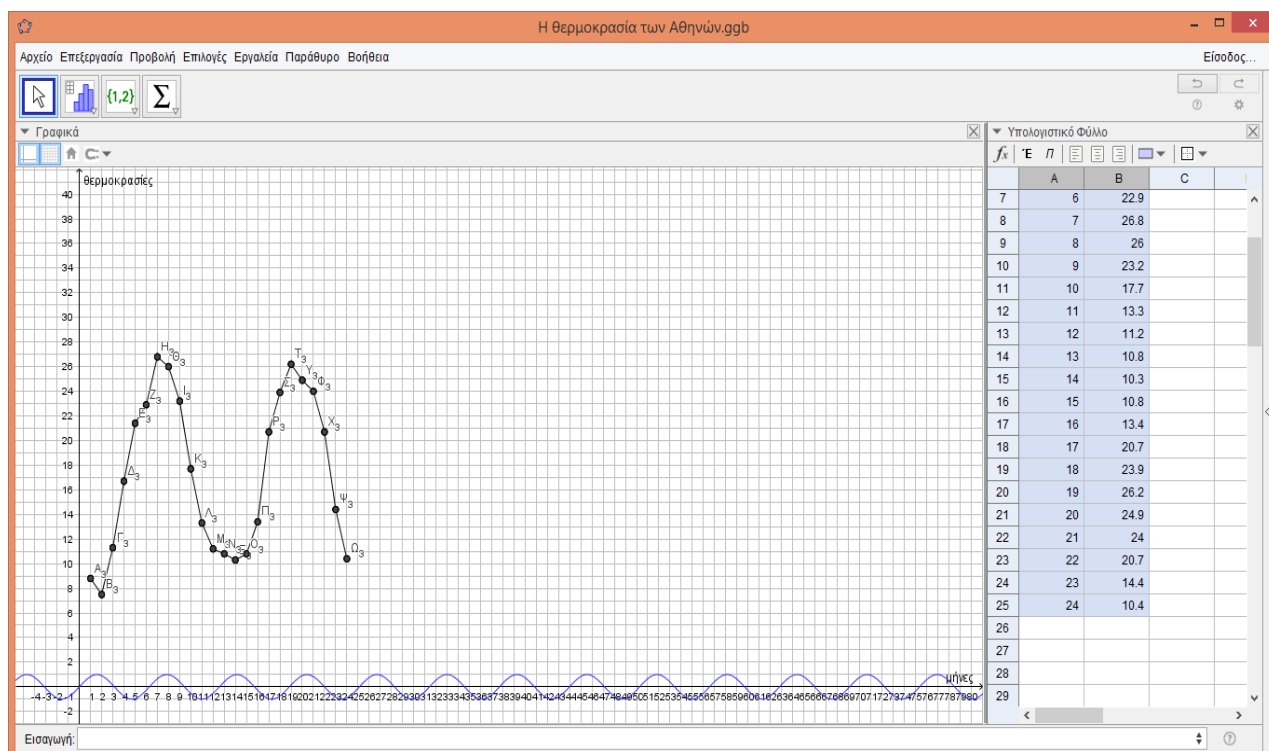
Αφού ζητείται σχέση μεταξύ συντεταγμένων σημείων αναμένουμε να προβληματιστούν για την ύπαρξη γραφικής παράστασης συνάρτησης.



Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με τα εργαλεία του λογισμικού οπότε από την επιλογή “Δημιουργία” του υπολογιστικού φύλλου, επιλέγουν “πολυγωνική γραμμή”. Στο σημείο αυτό αν κάποιες ομάδες δεν θυμούνται αυτή τη δυνατότητα του λογισμικού παρεμβαίνει ο εκπαιδευτικός ώστε να προχωρήσει η διαδικασία. Στο σημείο αυτό οι μαθητές θα αναγνωρίσουν τα πλεονεκτήματα του λογισμικού, αφού θα έχουν σε πολύ μικρό χρόνο τη γραφική απεικόνιση των σημείων και της πολυγωνικής γραμμής που τα ενώνει, γεγονός που με τα στατικά μέσα θα ήταν μια χρονοβόρα διαδικασία.

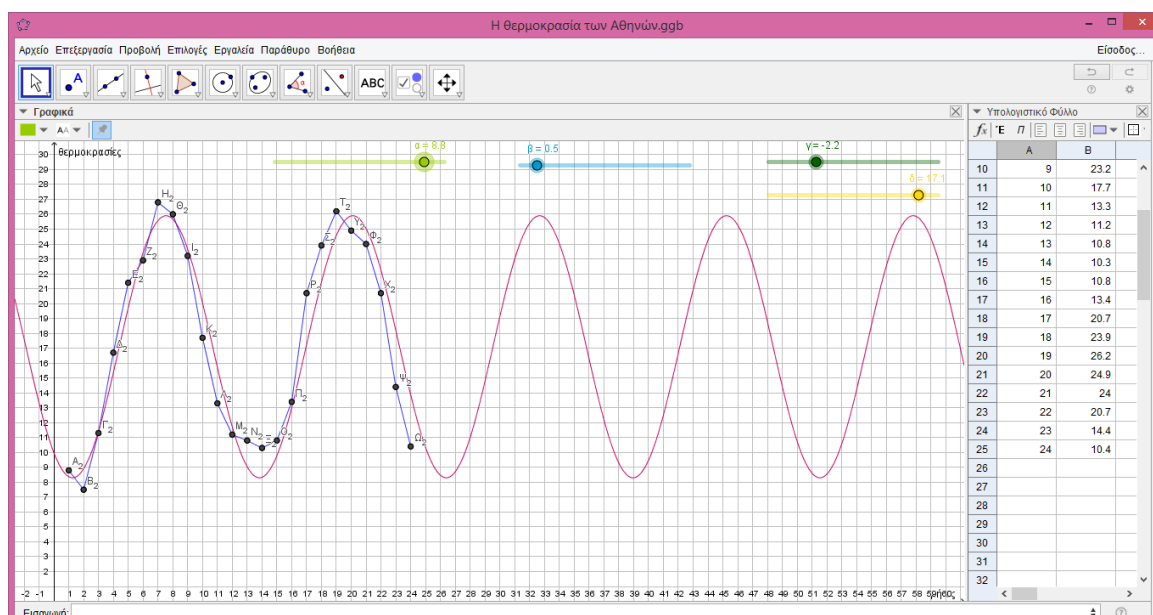


Η οπτικοποίηση των στοιχείων του πίνακα θα βοηθήσει να απαντηθεί το δεύτερο ερώτημα της δραστηριότητας 2, και περιμένουμε οι μαθητές να καταλήξουν στη συνάρτηση $y = \eta \mu x$.



• Δραστηριότητα 3

Λόγου το ότι η συνάρτηση που περιγράφει τις τιμές που δίνονται δεν είναι απλής μορφής ζητάμε από τους μαθητές με τη βοήθεια του λογισμικού να την εισάγουν. Οι δρομείς που θα ορίσουν θα ενισχύσουν τον πειραματισμό, ώστε να επιτύχουν τιμές των α , β , γ , δ και που να προσαρμόζουν τη γραφική παράσταση της συνάρτησης με την πολυγωνική γραμμή.



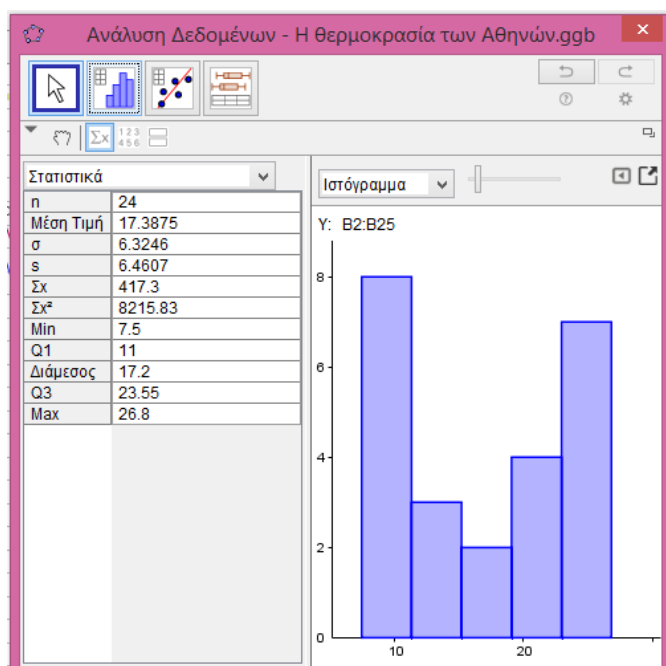
Στη δραστηριότητα αυτή ο εκπαιδευτικός παρεμβαίνει ελάχιστα και μόνο όταν του ζητηθεί αφού το λογισμικό βοηθά τους μαθητές στο να ολοκληρώσουν την εργασία. Η μόνη παρέμβαση του καθηγητή είναι ίσως στην εισαγωγή της συνάρτησης ή τον ορισμό των δρομέων σε περίπτωση που κάποιοι μαθητές δεν το θυμούνται.

- **Δραστηριότητα 4**

Με τη δραστηριότητα αυτή οι μαθητές θα αξιοποιήσουν τη γραφική παράσταση που έχουν φτιάξει με το λογισμικό και χωρίς να κάνουν πράξεις αναμένουμε να δώσουν απάντηση στο ερώτημα που έχει τεθεί. Αρχικά θα συζητηθεί στην ολομέλεια η μετατροπή του δοσμένου μήνα του έτους 1985 σε τιμή του x . Στη συνέχεια περιμένουμε να αντιστοιχήσουν την έκφραση αυτή στην τιμή $x = 25$, οπότε να αναζητήσουν την αντίστοιχη τιμή της συνάρτησης που βρήκαν στη δραστηριότητα 3. Περιμένουμε με την επιλογή zoom του λογισμικού να προσεγγίσουν τη ζητούμενη τιμή της θερμοκρασίας.

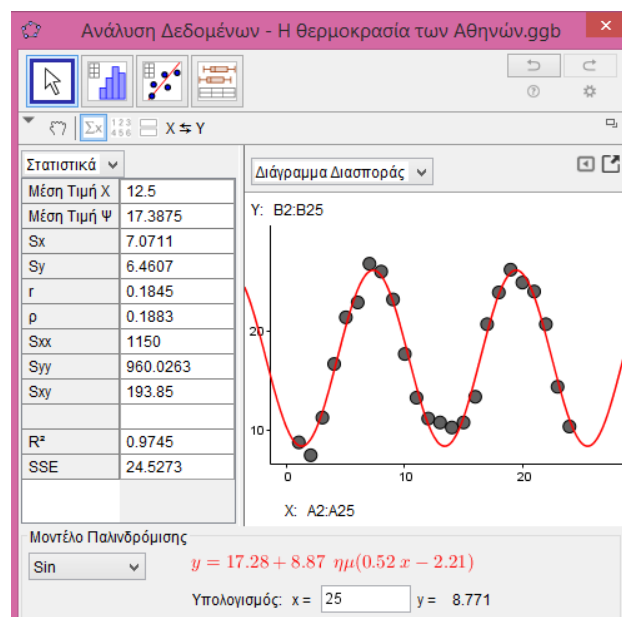
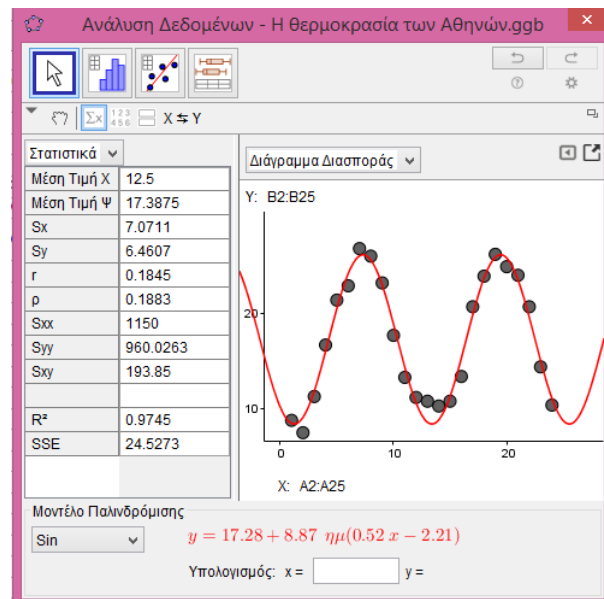
6. Επέκταση του σεναρίου

Για τις ανάγκες επέκτασης του σεναρίου θα μπορούσε να ζητηθεί στατιστική ανάλυση των αποτελεσμάτων. Συγκεκριμένα, χρησιμοποιώντας τα εργαλεία που διαθέτει το λογισμικό Geogebra να υπολογίσουν τω μέση τιμή, τη διάμεσο, την τυπική απόκλιση, το απόλυτο και σχετικό σφάλμα και να γίνουν οι σχετικές συζητήσεις.



Επίσης, αν προχωρούσαν και στην ανάλυση παλινδρόμησης δύο μεταβλητών που δίνει το λογισμικό, θα είχαν τον τύπο της συνάρτησης όπως και την τιμή της για τη δοσμένη τιμή

του χωρίς να κάνουν υπολογισμούς ή να καταφεύγουν στο γράφημα για τον συγκεκριμένο υπολογισμό.



Βέβαια, η έννοια της παλινδρόμησης δεν είναι στη διδακτέα ύλη καθώς και οι παραπάνω έννοιες της στατιστικής δεν διδάσκονται στη Β λυκείου, όμως μπορούν να αντιμετωπισθούν από μαθητές που έχουν ένα γενικότερο ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά ή να λειτουργήσει ως επίδειξη των εργαλείων που διαθέτει το λογισμικό Geogebra.

7. Αξιολόγηση μετά την εφαρμογή

Ως προς τις επιδιώξεις του σεναρίου

Με την ολοκλήρωση του σεναρίου ο διδάσκων ελέγχει κατά πόσο επιτεύχθηκαν οι στόχοι του σεναρίου. Ένας τρόπος είναι να σχεδιασθούν κατάλληλες ερωτήσεις οι οποίες να δοθούν στους μαθητές και να ελέγξει το βαθμό κατανόησης των εννοιών που είχαν εμπλακεί στο σενάριο.

Ως προς τα εργαλεία

Κατά τη διεξαγωγή των δραστηριοτήτων ο εκπαιδευτικός καταγράφει τα σημεία στα οποία παρουσιάστηκαν δυσκολίες ή παρανοήσεις κατά τη χρήση του λογισμικού. Τα στοιχεία αυτά θα βοηθήσουν τον εκπαιδευτικό να βελτιώσει τις απαιτήσεις του σεναρίου σε σχέση με την εμπλοκή του λογισμικού, όπως ποιες δραστηριότητες μπορούν να γίνουν με το λογισμικό, τι παραπάνω προσφέρουν στο μαθητή.

Ως προς τη διαδικασία υλοποίησης

Η δομή του σεναρίου, η σειρά των ερωτημάτων που δίνονται στους μαθητές αποτελούν αντικείμενο αξιολόγησης από τον ίδιο τον διδάσκοντα. Κατά τη διάρκεια εκτέλεσης του σεναρίου παρακολουθώντας την πορεία εξέλιξης αυτού και καταγράφοντας δυσκολίες στα διάφορα στάδια δίνεται η δυνατότητα να εκτιμήσει τα σημεία εκείνα στα οποία οι μαθητές παρουσίαζαν δυσκολίες στην κατανόηση ή την εφαρμογή. Με τον τρόπο αυτό μπορεί να επέμβει στα ερωτήματα, στη διατύπωση ή στη σειρά των ερωτημάτων και να αντιμετωπίσει τις δυσκολίες που παρουσιάστηκαν.

Ως προς την προσαρμογή και επεκτασιμότητα

Ο εκπαιδευτικός μετά από κάθε εφαρμογή του σεναρίου επανεκτιμά τη δομή του και σχεδιάζει νέες δυνατότητες. Στο συγκεκριμένο σενάριο θα μπορούσε να προστεθεί η εύρεση λύσης τριγωνομετρικής εξίσωσης της μορφής $a \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta = \rho$.

8. Βιβλιογραφία

Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Παπασταυρίδης, Σ., Πολύζος, Γ. & Σβέρκος, Α. (1998). Άλγεβρα Β Γενικού Λυκείου. *ΟΡΓΑΝΙΣΜΟΣ ΕΚΔΟΣΕΩΝ ΔΙΔΑΚΤΙΚΩΝ ΒΙΒΛΙΩΝ Αθήνα 1998*.

Οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών στις Α, Β τάξεις ημερησίου ΓΕΛ για το σχολικό έτος 2018-2019. Ανακτήθηκε 20.06.2019

https://www.minedu.gov.gr/publications/docs2018/01_10_18_%CE%9F%CE%B4%CE%B7%CE%B3%CE%B9%CE%B5%CF%82%CE%9C%CE%B1%CE%B8

Ερευνητικό Ακαδημαϊκό Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών, (EAITY) (2008β). Τομέας Επιμόρφωσης και Κατάρτησης. Επιμορφωτικό υλικό για την επιμόρφωση των εκπαιδευτικών – Τεύχος 3: κλάδος ΠΕ03. Πάτρα: EAITY.

Φύλλο εργασίας

Η θερμοκρασία των Αθηνών

Σας λένε τη φράση: "Η θερμοκρασία σε ένα τόπο είναι φαινόμενο περιοδικό".

Σας δίνουν επίσης τον ακόλουθο πίνακα τιμών μέσης θερμοκρασίας Αθηνών

(Ιανουάριος 1983 - Δεκέμβριος 1984).

| Μήνας | Θερμοκρασία | Μήνας | Θερμοκρασία |
|-------|-------------|-------|-------------|
| 1 | 8.8 | 13 | 10.8 |
| 2 | 7.5 | 14 | 10.3 |
| 3 | 11.3 | 15 | 10.8 |
| 4 | 16.7 | 16 | 13.4 |
| 5 | 21.4 | 17 | 20.7 |
| 6 | 22.9 | 18 | 23.9 |
| 7 | 26.8 | 19 | 26.2 |
| 8 | 26 | 20 | 24.9 |
| 9 | 23.2 | 21 | 24 |
| 10 | 17.7 | 22 | 20.7 |
| 11 | 13.3 | 23 | 14.4 |
| 12 | 11.2 | 24 | 10.4 |

Δραστηριότητα 1

Να καταγράψετε τους λόγους για τους οποίους πιστεύετε ότι η φράση αυτή μπορεί να ελεγχθεί με Μαθηματικές μεθόδους.

Δραστηριότητα 2

- α.** Πως μπορείτε να αξιοποιήσετε τα στοιχεία του πίνακα που δίνονται, ώστε να βρείτε μια μεταξύ τους σχέση;
- β.** Σε ποια συνάρτηση θεωρείται ότι αντιστοιχεί η παραπάνω γραμμή;

Δραστηριότητα 3

Είστε στο δόμημα που φτιάξατε με το λογισμικό Geogebra. Στο πεδίο εισαγωγής δοκιμάστε να εισάγεται με τη βοήθεια δρομέων τη συνάρτηση

$$y = a \cdot \eta\mu(\beta \cdot x + \gamma) + \delta \text{ με } a, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$$

- α.** Υπάρχουν τιμές των a, β, γ, δ για τις οποίες η γραφική παράσταση της συνάρτησης που εισαγάγατε προσαρμόζεται στην πολυγωνική γραμμή που προέκυψε από τα σημεία (μήνας, θερμοκρασία) του παραπάνω πίνακα.
- β.** Μπορείτε να εκτιμήσετε τον τύπο της συνάρτησης που έχει γραφική παράσταση αυτή που ορίσατε με τις τιμές μήνα και αντίστοιχη θερμοκρασία που δόθηκαν αρχικά;

Δραστηριότητα 4

Θα μπορούσατε να προβλέψετε την μέση θερμοκρασία του Γενάρη 1985;