

गणित : प्रश्नपत्र- I
MATH : PAPER-I

Time Allowed : Three Hours]

[Maximum Marks : 200]

- नोट :** (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिये गये हैं जो हिन्दी एवं अंग्रेजी लोगों में हों।
(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का उत्तर देना चाहयन करते हुए, कुल चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
(iii) प्रत्येक प्रश्न के अन्त में अंक निर्धारित है।
(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-A भाग-अ

1. (a) यदि W_1 तथा W_2 , एक परिमित विमीय समष्टि $V(F)$ की उपसमहिती हों, तो सिद्ध कीजिए कि-

15

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

If W_1 and W_2 are subspaces of a finite dimensional vector space $V(F)$, then prove that

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

15

समष्टि $V_3(R)$ के आधार समुच्चय।

$$B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$$

का द्वितीय आधार निकालिए।

Find the dual basis of the basis set.

$$B = \{(1, -2, 3), (1, -1, 1), (2, -4, 7)\}$$

किन शर्तों पर अदिश $a \in R$, समष्टि $V_3(R)$ में सदिश $(a, 1, 0), (1, a, 1)$ तथा

10

$(0, 1, a)$ एक घाततः परतंत्र हैं?

Under what conditions on the scalar $a \in R$, the vectors $(a, 1, 0), (1, a, 1)$ and $(0, 1, a)$ in $V_3(R)$ are linearly dependent?

- (a) सिद्ध कीजिए कि दो परिमित विमीय सदिश समष्टियाँ $U(F)$ तथा $V(F)$ समाकारी हैं, यदि और केवल यदि-

15

$$\dim U = \dim V$$

Prove that two finite dimensional vector spaces $U(F)$ and $V(F)$ are isomorphic if and only if $\dim U = \dim V$

15

(a) यदि T एक रैखिक रूपान्तरण है जो समष्टि $V_2(C)$ पर

$T(a,b) = (\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b)$

से परिभाषित है, जबकि $(a,b) \in V_2(C)$ तथा $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in C$ तो सिद्ध कीजिए कि

T व्युत्क्रमणीय है यदि और केवल यदि $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

If T is a linear transformation on $V_2(C)$ defined by

$T(a,b) = (\alpha a + \beta b, \gamma a + \delta b)$

For $(a,b) \in V_2(C)$ and $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \in C$,

Prove that T is invertible, if and only if $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$

b)

) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \log(1+x)}{x \sin x}$ का मान ज्ञात कीजिए।

10

c)

Find the value of : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2 \log(1+x)}{x \sin x}$

(a) यदि Z x और y का फलन है तथा यदि $x = e^u + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^v$. तो सिद्ध कीजिए कि।

15

If Z is the function of x and y and if $x = e^u + e^{-v}$, $y = e^{-u} - e^v$ then,
Prove that :

$$\frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v} = x \frac{\partial z}{\partial x} - y \frac{\partial z}{\partial y}$$

15

(b) सिद्ध कीजिए। (Prove that) :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{[x + \sqrt{(x^2 + 1)]^n}]^n} = \frac{n}{n^2 - 1} \quad (n > 1)$$

10

) मान निकालिए।

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n}$$

(Evaluate) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^{1/n}$$

- (a) उस गोले का समीकरण ज्ञात कीजिए जो गोला $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ को बिन्दु (1, 2, 2) पर स्पर्श करता है तथा बिन्दु (1, -1, 0) से गुजरता है।

15

Find equation of sphere which touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ at (1, 2, 2) and passes through the point (1, -1, 0).

- b) यदि $e > 1$ तो वक्र $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ के अनन्त स्पर्शियों के समीकरण ज्ञात कीजिए।

15

If $e > 1$, find the equations of the asymptotes of the curve $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$.

- c) यदि e तथा e' अति परवलय तथा इसके संयुग्मी अति परवलय की उत्केन्द्रताएँ हो, तो सिद्ध कीजिए कि
- If e and e' be the eccentricities of a hyperbola and its conjugate then prove that

$$\frac{1}{e^2} + \frac{1}{e'^2} = 1$$

Part-B / भाग-ब

- (a) वक्र $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at \tan \alpha$ की वक्रता (K) तथा मरोड़ (z) निकालिए।

15

Find the curvature (K) and torsion (z) for the curve
 $x = a \cos t, y = a \sin t, z = at \tan \alpha.$

- b) हल कीजिए।

15

$$(y^2 + 2x^2 y) dx + (2x^3 - xy) dy = 0$$

$$\text{Solve : } (y^2 + 2x^2 y) dx + (2x^3 - xy) dy = 0$$

- c) हल कीजिए।

10

$$(D^2 + 1)^2 y = \cos x$$

$$\text{Solve : } (D^2 + 1)^2 y = \cos x$$

- (d) क्रिस्टोफेल प्रतीकों को परिभाषित कीजिए तथा दिखाइये कि क्रिस्टोफेल प्रतीक एक ग्राहिता के अवयव नहीं हैं।

15

Define Christoffel symbols and show that Christoffel symbols are not components of a tensor.

- (b) $\iint_S (yz \hat{i} + zx \hat{j} + xy \hat{k}) \cdot d\bar{S}$ मान ज्ञात कीजिए, जहाँ S, गोला $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ की सतह है।

Evaluate $\iint_S (yz \hat{i} + zx \hat{j} + xy \hat{k}) \cdot d\bar{S}$,

where S is surface of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$
सिद्ध कीजिए।

$$(c) \quad \hat{i} \times (\hat{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\hat{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\hat{a} \times \hat{k}) = 2\hat{a}$$

Prove that :

$$\hat{i} \cdot (\hat{a} \times \hat{i}) + \hat{j} \times (\hat{a} \times \hat{j}) + \hat{k} \times (\hat{a} \times \hat{k}) = 2\hat{a}$$

7. (a) यदि A_{ij} एक कोवैरियन्ट सदिश का कर्ल हो तो सिद्ध कीजिए।

$$A_{ij} k + A_{jk} i + A_{ki} j = 0$$

तथा यह

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} = 0$$

के तुल्य है।

If A_{ij} is the curl of a covariant vector,

Prove that :

$$A_{ij} k + A_{jk} i + A_{ki} j = 0$$

And that this is equivalent to

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x^k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x^j} = 0$$

- (b) लम्बाई एवं W भार की समरूप जंजीर दो समस्तरीय स्थिर विन्दुओं के बीच लटक रही है एवं जंजीर के मध्य विन्दु पर W भार बंधा हुआ है। यदि जंजीर मध्य विन्दु पर झोल (sag) k है तो सिद्ध कीजिए कि किसी भी समस्तरीय विन्दु पर खिंचाव है।

$$\frac{k}{2l} W + \frac{1}{4k} W' + \frac{l}{8k} W$$

A uniform chain of length l and weight W hangs between two fixed points at the same level and a weight W' is attached at the middle point.

If k be the sag in the middle, then prove that the pull on either point of support is

$$\frac{k}{2l} W + \frac{1}{4k} W' + \frac{l}{8k} W$$

L.M.N बल एक त्रिमुख की भुजाओं के अनुदिश कार्यरत हैं, जो रेखा के समीकरणों $x+y-1=0$, $x-y+1=0$, $y=2$ से व्यक्त हैं। परिणामी का परिमाण और इसकी क्रिया रेखा के समीकरण को निकालिये।

10

Forces L, M, N act along the sides of the triangle formed by the lines $x+y-1=0$, $x-y+1=0$, $y=2$. Find the magnitude and the equation of line of action of the resultant.

- (a) एक हल्की प्रत्यास्थ रस्सी जिसकी प्रकृतिक लम्बाई a है और जिसका मापांक 2mg है, बिन्दु 0 से लटक रही है। इसके दूसरे सिरे पर m संहति का कण बँधा हुआ है। कण को 0 से गिरने दिया जाता है। रस्सी का अधिकतम विस्थापन ज्ञात कीजिये और दिखाइये कि 0 बिन्दु तक पुनः लौटने का समय :

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2) \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$$

15

One end of a light string of natural length a and modulus 2 mg, is attached to a point 0 and the other end to a particle of mass m. The particle initially held at rest at 0, is allowed to fall. Find the greatest extension of the string and show that the particle will reach 0 again after a time

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2) \sqrt{\left(\frac{2a}{g}\right)}$$

एक कण समान वेग v से एक वक्र पर चलता है जिसमें S और ψ एक साथ शून्य होते हैं। यदि किसी बिन्दु पर त्वरण $\frac{v^2 c}{(s^2 + c^2)}$ हो तो सिद्ध कीजिये कि वक्र एक कैटिनरी है।

15

A particle describes a curve for which S and ψ vanish simultaneously

with uniform speed v. If the acceleration at any point be $\frac{v^2 c}{(s^2 + c^2)}$ prove that the curve is a catenary.

- (c) आधार महित एक पतला खोखला शंकु जल में पूर्णतया दूबा हुआ नीरता है तो वह जैसे इसे रखा जाये। दर्शाइये शंकु का शीर्ष कोण $2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ है। 10

A thin hollow cone with base floats completely immersed in water wherever it is placed. Show that the vertical angle of the cone is $2 \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$.

गणित : प्रश्न-पत्र-II MATH : PAPER-II-2016

निर्धारित समय : तीन घण्टे अधिकतम अंक : 200

- नोट : (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिये गये हैं जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं
(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्न करने हैं।
(iii) प्रत्येक प्रश्न के अन्त में अंक निर्धारित हैं।
(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Part-A भाग-अ

1. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित पूर्णांकीय प्रान्त एक क्षेत्र होता है। 1
Prove that every finite integral domain is a field.
- (b) सिद्ध कीजिए कि सभी पूर्णांकों वाले वलय \mathbb{Z} की एक गुणजावली S एक उच्च गुणजावली होगी यदि और केवल यदि S किसी अभाज्य पूर्णांक से जनित है। 1(a)
Prove that an ideal S of the ring \mathbb{Z} of all integers in a maximal ideal and only if S is generated by some prime integer.
- (c) सिद्ध कीजिए कि K समूह G से समूह G' में एक समाकारिता है जिसकी अष्टि K है, यदि f किसी समूह G से समूह G' में एक समाकारिता है जिसकी अष्टि K है, 1
सिद्ध कीजिए कि K समूह G का प्रसामान्य उपसमूह होगा। 1
If f, is a homomorphism of a group G into a group G' with Kernel If f, is a homomorphism of a group G into a group G' with Kernel, then prove that K is a normal subgroup of G.

2. (a) दर्शाइये कि फलन f, जहाँ।

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x y}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \text{यदि } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0 & \text{यदि } x = y = 0, \end{cases}$$

मूलबिन्दु पर सतत है, अधिकांश अवकलज रखता है लेकिन मूलबिन्दु पर अवकलनीय नहीं है।

15

✓ Show that the function f,

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{if } x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{if } x = y = 0, \end{cases}$$

is continuous, possesses partial derivative but is not differentiable at the origin.

15

✓ $\int_0^x \frac{dx}{1+x^4 \cos^2 x}$ की अधिसारिता का परीक्षण कीजिये।

Test the convergence of $\int_0^x \frac{dx}{1+x^4 \cos^2 x}$

-) ✓ $x^2 + y^2 + z^2$ के उच्चिष्ठ तथा निम्निष्ठ मानों को प्रतिबन्धों $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1$

तथा $z = x + y$ के साथ ज्ञात कीजिये।

10

Find the maximum and minimum values of $x^2 + y^2 + z^2$ subject to the

$$\text{conditions } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{25} = 1 \text{ and } z = x + y$$

एक पूर्ण दूरीक समष्टि की परिभाषा दीजिये तथा सिद्ध कीजिये कि एक पूर्ण दूरीक समष्टि का प्रत्येक बंद उप समुच्चय, पूर्ण होता है।

15

Define a complete metric space and prove that every closed subset of a complete metric space is complete.

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^{-1}}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

द्वारा परिभाषित फलन f पर विचार कीजिए। दिखाइए कि f(z) मूलबिन्दु पर वैश्लेषिक नहीं है, जबकि मूलबिन्दु पर f(z) कोशी-रीमान के समीकरणों को संतुष्ट करता है। इस बात को समझाइए।

15

8 / Shilpi Unsolved Paper 2016

Consider the function f defined by

$$f(z) = \begin{cases} e^{-z^2}, & z \neq 0 \\ 0, & z = 0 \end{cases}$$

- Show that $f(z)$ is not analytic at the origin, although the Cauchy Riemann equations are satisfied by $f(z)$ at the origin. Explain the fact (b)
सम्मिश्र चरों के लिये कोशी प्रमेय का उल्लेख कीजिये और सिद्ध कीजिये। 10
(c)

- State and prove Cauchy's theorem for complex variables.
परिरेखीय समाकलन का उपयोग करते हुए दर्शाइये कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2$$

Using method of contour integration, show that

$$\int_0^{\infty} \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2} dx = \pi \log 2$$

हल कीजिये।

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^3 \cdot y^3$$

$$\text{Solve: } \frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x^3 \cdot y^3$$

(c) चारपिट-विधि से हल कीजिये।

$$q = (z + px)^2$$

Solve $q = (z + px)^2$ by Charpits method.

Part-B भाग-ब

5. (a) स्थापित कीजिए कि एक गतिमान समांग ठोस छड़, जिसका द्रव्यमान M है तथा जिसके दो छोरों के बीच किसी क्षण \bar{u} और \bar{v} हैं, की गतिज ऊर्जा उसके

$$\frac{1}{6} M [\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{u} \cdot \bar{v}] \text{ है।}$$

Establish that the kinetic energy of a moving uniform rigid rod of mass M whose ends have velocities \bar{u} and \bar{v} at any moment, is

$$\frac{1}{6} M [\bar{u}^2 + \bar{v}^2 + \bar{u} \cdot \bar{v}] \text{ at that moment.}$$

किसी होलोनामिक-संरक्षी-गत्यालमक तंत्र की गतिज और स्थितिज ऊर्जाएँ क्रमशः

$$T = \frac{1}{2} [3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2], \quad V = \frac{1}{2} w^2 [2q_1^2 + q_2^2] \text{ के द्वारा दी जाती}$$

हैं, जहाँ q_1, q_2 उसके व्यापकीकृत निर्देशांक हैं तथा w एक स्थिरांक है। इस तंत्र के लिए लगारॉज के गति समीकरणों को लिखिए और उनकी सहायता से दिखाइए कि

$$\ddot{q} + 2w^2 q = 0 \text{ तभी } q = q_1 - q_2$$

The kinetic and potential energies of a holonomic conservative dynamical system are given by

$$T = \frac{1}{2} [3\dot{q}_1^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \dot{q}_2^2], \quad V = \frac{1}{2} w^2 [2q_1^2 + q_2^2] \text{ respectively,}$$

where q_1, q_2 are its generalized coordinates and w is a constant. Write down the Lagrange's equations of motion for the system and with their help, show that

$$\ddot{q} + 2w^2 q = 0 \text{ where } q = q_1 - q_2$$

दर्शाइये कि शीर्ष से h दूरी पर किसी कोटि द्वारा कटाव वाले (4a नाभिलम्ब के)

परवलीय क्षेत्र का शीर्ष पर स्पर्शी के सापेक्ष जड़त्व आधूर्ण $\frac{3}{7} Mh^2$ होगा, जहाँ M उस क्षेत्र की मात्रा है।

Show that the moment of inertia of a parabolic area (of latus rectum 4a) cut off by an ordinate at a distance h from the vertex, about the tangent at the vertex is $\frac{3}{7} Mh^2$, where M is the mass of the area.

6. (a) ध्रुविया का एक गोला, P घनत्व वाले एक अनन्त द्रव से पिरा है; अनन्त पर दाब π है। गोले को अचानक गायब कर दिया जाता है। दिखाइए कि गोले के केन्द्र से r ($r > a$) दूरी पर दाब गिरकर तुरन्त $\pi \left(1 - \frac{a}{r}\right)$ हो जाता है। 15

A sphere of radius 'a' is surrounded by an infinite fluid of density P : the pressure at infinity being π . The sphere is suddenly annihilated. Show that the pressure at a distance r ($r > a$) from the centre of the sphere

immediately falls to $\pi \left(1 - \frac{a}{r}\right)$.

- (b) स्थिर परिसीमाओं $\theta = \frac{\pi}{6}$ तथा $\theta = -\frac{\pi}{6}$ के बीच बिन्दु ($r = c, \theta = \alpha$) पर स्थित खोत तथा मूल बिन्दु पर स्थित एक सिंक (अभिगम) के कारण एक द्विविमीय द्रव गति है। सिंक उसी दर से द्रव अवशोषित करता है जिससे खोत इसे उत्पन्न करता है। धारा-फलन ज्ञात कीजिये तथा दिखाइये कि धारा-रेखा वक्र $r^3 \sin 3\alpha = C^3 \sin 3\theta$ का एक भाग है। 15

Between the fixed boundaries $\theta = \frac{\pi}{6}$ and $\theta = -\frac{\pi}{6}$, there is a two-

dimensional liquid motion due to a source at the point ($r = c, \theta = \alpha$) and a sink at the origin. The sink absorbs liquid at the same rate as the source produces it. Find the stream function and show that the stream line is a part of the curve $r^3 \sin 3\alpha = C^3 \sin 3\theta$.

(c) दिखाइए कि

$$\frac{x^2}{a^2 K^2 t^4} + K t^2 \left[\left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right] = 1$$

किसी समय t पर एक द्रव के परिसीमन सतह का एक सम्पूर्ण रूप निरूपित करता है। 10

Show that at any time t,

$$\frac{x^2}{a^2 K^2 t^4} + K t^2 \left[\left(\frac{y}{b} \right)^2 + \left(\frac{z}{c} \right)^2 \right] = 1$$

represents a possible form for the boundary surface of a liquid.

7. (a) रेगुला-फालसी विधि के उपयोग से दिखाइये कि $x \log_{10} x - 1.2 = 0$ का वास्तविक मूल 3 और 2.740646 के बीच स्थित है। 15

Use Regula- Falsi method to show that the real root of $x \log_{10} x - 1.2 = 0$ lies between 3 and 2.740646.

कोटि चार की रूगे-कुद्दा विधि का उपयोग करके अवकल समीकरण।

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy+1}{10y^2+4}, y(0) = 0$$

का हल अन्तराल [0, 0.4] में, स्टेप लम्बाई 0.1 लेकर, दशमलव के पाँच स्थानों तक शुद्ध सारणीबद्ध कीजिये। 15

By the fourth-order Runge-Kutta method, tabulate the solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{xy+1}{10y^2+4}, y(0) = 0$ in [0, 0.4] with step length 0.1, correct to five places of decimals.

x और y = f(x) के लिये दिये हुए निम्नलिखित मानों :

$$\begin{array}{cccccc} x & : & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 \\ y = f(x) & : & 0 & 1 & 5 & 21 & 27 \end{array}$$

के लिये $f'(4)$ का संख्यात्मक मान निकालिये।

Given the following values of x and y = f(x)

$$\begin{array}{cccccc} x & : & 1 & 2 & 4 & 8 & 10 \\ y = f(x) & : & 0 & 1 & 5 & 21 & 27 \end{array}$$

use lag interpolation

Determine numerically the value of $f'(4)$

8. (a) सिम्प्लेक्स विधि द्वारा निम्नलिखित रेखिक प्रोग्राम समस्या को हल कीजिये। 15

$$\text{Min } Z = 2 - 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_3 - x_4 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Using Simplex method, solve the following linear programming problem.

$$\text{Min } Z = 2 - 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4$$

$$\text{s.t. } x_1 + x_3 - x_4 \leq 2$$

$$2x_1 + x_2 + 6x_3 \leq 6$$

$$x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 0$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

(b) निम्न खेल को हल कीजिये।

खिलाड़ी B

I II III IV

I	3	2	4	0
II	3	4	2	4

खिलाड़ी A	III	4	2	4	0
IV	5	4	0	8	

Solve the following game:

Player B

I II III IV

I	3	2	4	0
II	3	4	2	4

Player A	III	4	2	4	0
IV	5	4	0	8	

(c) एक अवमुख समुच्चय को परिभाषित कीजिये तथा इसका उदाहरण दीजिये। सिद्ध कीजिए कि \mathbb{R}^h में दो अवमुख समुच्चयों का उभयनिष्ठ समुच्चय भी \mathbb{R}^h में अवमुख समुच्चय होगा।

Define a convex set and give its example. Prove that the intersection of two convex sets in \mathbb{R}^h will also be a convex set in \mathbb{R}^h .

15

U.P.P.C.S. (Main) Exam. 2017

गणित : प्रश्नपत्र-I

MATHEMATICS : PAPER-I

Time Allowed : Three Hours]

[Maximum Marks : 200]

- नोट : (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में देंगे हैं।
(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का उत्तर देना चाहने करते हुए कुल पाँच प्रश्नों का उत्तर दीजिए।
(iii) प्रत्येक प्रश्न के अन्त में निर्धारित अंक अविवादित है।
(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

- Note : (i) There are total eight questions in two sections printed in both Hindi and English.
(ii) Answer five questions, selecting atleast two from each section.
(iii) Marks are given against each of the question.
(iv) All questions carry equal marks.

LA, Cal, 30

खण्ड-अ / Section-A

1. (a) मान लिया कि $V(F)$ एक परिमित विमा की सदिश समस्ति है। सिद्ध करें कि $V(F)$ के किसी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान है। 15
Let $V(F)$ be a finite dimensional vector space. Prove that any two bases of $V(F)$ have the same number of elements.

- (b) आव्यूह $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के अभिलक्षणिक मान और अभिलक्षणिक सदिश ज्ञात करें। 15

Determine the eigenvalues and eigenvectors of matrix $\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

- (c) मान लिया कि क्षेत्र F पर सभी $n \times n$ आव्यूहों की सदिश समस्ति V है तथा मान लिया कि B एक $n \times n$ का स्थिर आव्यूह है। मान लिया कि $T : V \rightarrow V$, इस प्रकार परिभासित है :

10

$$T(A) = AB - BA$$

सत्यापित करें कि T एक रैखिक रूपान्तरण है। T की शून्य समस्ति ज्ञात करें। Let V be the vector space of all $n \times n$ matrices over the field F and let

14 / Shilpi Unsolved Paper

B be a fixed $n \times n$ matrix. Let $T : V \rightarrow V$ be defined as follows :

$$T(A) = AB - BA$$

Verify that T is a linear transformation. Find the null space of T.

2. (a) आव्यूह $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ का विहित रूपान्तरण करें। 15

Reduce the matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -8 \end{bmatrix}$ to canonical form.

- (b) मान लिया कि S एक विषम सममित आव्यूह है। सिद्ध करें कि $I - S$ व्युक्तमणीय (नॉन-सिन्युलर) है, $(I + S)(I - S)^{-1} = (I - S)^{-1}(I + S)$ तथा $I + S$ और $I - S$ लाम्बिक हैं। 15

Let S be a Skew-Symmetric matrix. Prove that $I - S$ is non-singular, $(I + S)(I - S)^{-1} = (I - S)^{-1}(I + S)$ and $I + S$ and $I - S$ are orthogonal.

- (c) सिद्ध करें कि अनुक्रम $u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 10

अभिसारी है और $2 < \lim_{n \rightarrow \infty} u_n < 3$.

Show that the sequence $u_n = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$

is convergent and $2 < \lim_{n \rightarrow \infty} u_n < 3$.

3. (a) फलन, $f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ का अन्तराल $[0, 3]$ में सान्तत्य एवं अवकलनीयता पर विचार करें। 15

Discuss continuity and differentiability of the function.

$f(x) = |x - 1| + |x - 2|$ in the interval $[0, 3]$.

U.P.P.C.S. (Main) Mathematics - 2017/ 15

- (b) $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}$ का मान ज्ञात करें। 15

Evaluate : $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x^n)^{\frac{1}{n}}}$

- (c) निर्देशांक तत्त्वों और तल $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ से धिरे चतुर्फलक का द्रव्यमान ज्ञात करें यदि उसका चरं घनत्व $\rho = \mu xyz$ है। 10

Find the mass of tetrahedron bounded by co-ordinates planes and the plane $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ if its variable density is $\rho = \mu xyz$.

- (d) शांकव $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ की दो स्पर्श-रेखाओं, जो एक दूसरे पर लम्बवत् हैं, के छेदन बिंदु का विद్युपथ ज्ञात करें। 15

Find the locus of the point of intersection of two tangents to the conic $\frac{l}{r} = 1 + e \cos \theta$ which are at right angles to one another.

- (e) सिद्ध करें कि रेखाओं $y = mx, z = c$ तथा $y = -mx, z = -c$ को स्पर्श करने वाले गोलों का केन्द्र निश्चित रूप से शांकवज $mxy + c(1+m^2)z = 0$ पर स्थित है। 15

Prove that the centres of the spheres which touch the lines $y = mx, z = c$ and $y = -mx, z = -c$ must lie on the conicoid $mxy + c(1+m^2)z = 0$

- (f) बिंदुओं $(1, -2, 4), (3, -4, 5)$ से गुजरने वाले और तल $x + y - 2z = 6$ पर लम्बवत् तल का समीकरण ज्ञात करें। 10

Find the equation of the plane passing through points $(1, -2, 4), (3, -4, 5)$ and perpendicular to the plane $x + y - 2z = 6$.

ODE, Vector + stat+ Dynamics

16 / Shilpi Unsolved Paper

खण्ड-ब / Section-B

(b) without tensor

5. (a) वक्र $x = t^2, y = e^t, z = \sqrt{2} \sqrt{t^2 + b^2}$ की वक्रता और मरोड़ ज्ञात कीजिए। 15

Find the curvature and torsion for the curve $x = t^2, y = e^t, z = \sqrt{2}t$.

- (b) हल कीजिए : $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$ 15

Solve : $(x^2y - 2xy^2)dx - (x^3 - 3x^2y)dy = 0$

- (c) हल कीजिए : $(D^2 - 4)y = x \sin h x$ 10

Solve : $(D^2 - 4)y = x \sin h x$

6. (a) कोवैरियेंट सदिश के कोवैरियेंट अवकलन को परिभाषित करें तथा सिद्ध करें कि यह एक प्रदिश है। 15

Define Covariant derivative of a covariant vector and prove that it is a tensor.

- (b) $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ का मान ज्ञात करें, जहाँ $\vec{F} = z\hat{i} - x\hat{j} + y\hat{k}$ तथा C वक्र

$\vec{r} = \cos t\hat{i} - \sin t\hat{j} + t\hat{k}$ का $t=0$ से $t=2\pi$ तक वक्र का चाप है। 15

Evaluate $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$ where $\vec{F} = z\hat{i} - x\hat{j} + y\hat{k}$ and C is the arc of the curve

$\vec{r} = \cos t\hat{i} - \sin t\hat{j} + t\hat{k}$ from $t=0$ to $t=2\pi$.

- (c) $\operatorname{div} \vec{F}$ और $\operatorname{curl} \vec{F}$ का मान ज्ञात करें जहाँ

$\vec{F} = \operatorname{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ 10

Find $\operatorname{div} \vec{F}$ and $\operatorname{curl} \vec{F}$ where $\vec{F} = \operatorname{grad}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

7. (a) $2l$ लम्बाई की एक भारी समरूप जंजीर एक छोटी चिकनी धिरनी पर इस प्रकार लटक रही है कि उसकी $l+c$ लम्बाई एक ओर और $l-c$ लम्बाई दूसरी ओर है। यदि छोटे भाग के सिरे को पहले पकड़ा जाए और फिर छोड़ा जाए तो जाएगी।

सिद्ध करें कि जंजीर धिरनी से $\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \log \frac{l+\sqrt{l^2-c^2}}{c}$ समय में फिल

15

U.P.P.C.S. (Main) Mathematics - 2017/17

A heavy uniform chain of length $2l$ hangs over a small smooth pulley such that the length $l+c$ being on one side and $l-c$ on the other. If the end of the shorter portion be held and then let go, show that the chain

will slip off the pulley in time $\left(\frac{l}{g}\right)^{\frac{1}{2}} \log \frac{l+\sqrt{l^2-c^2}}{c}$

- (b) दो समरूप छड़ AB और BC जो B पर दृढ़ता से बंधी हैं और $\angle ABC$ एक समकोण है, बिन्दु A से स्वतंत्रतापूर्वक संतुलन की स्थिति में लटक रही है। छड़ों की लम्बाई a, b हैं तथा उनका भार W_a, W_b है। यदि AB ऊर्ध्व से θ कोण बना रही है तो सिद्ध करें कि $\tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$. 15

Two uniform rods AB and BC, rigidly jointed at B and $\angle ABC$ is right angle hang freely in equilibrium from the point A. The lengths of the rods are a, b and their weights are W_a and W_b . If AB makes an angle θ

with the vertical then prove that $\tan \theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}$.

- (c) एक एकसमान जंजीर, जिसकी लम्बाई l है, एक ही क्षितिज रेखा में स्थित दो बिन्दुओं A, B से लटकाई गई है। यदि बिन्दु A पर तनाव निम्नतम बिन्दु के तनाव का दूना है, तो सिद्ध कीजिए कि प्रसार AB का मान है $\frac{l}{\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3})$ 10

A uniform chain of length l, is suspended from two points A, B in the same horizontal line. If the tension at A is twice that at the lowest point, show that the span AB is $\frac{l}{\sqrt{3}} \log(2 + \sqrt{3})$.

8. (a) एक त्रिज्या का एक वृत्ताकार पटल अपने ऊर्ध्वाधर तल के साथ लुबाया गया है और उसका केन्द्र गहराइ h पर है। उसके दाव केन्द्र की गहराई ज्ञात करें। 15
A circular lamina of radius a is immersed with its plane vertical and centre at a depth h. Find the depth of the centre of pressure.

- (b) एक वर्गाकार पटल अपने से दूने धनत्व वाले तरल में अपने ऊर्ध्वाधर तल के साथ तैर रहा है। संतुलन की स्थिति ज्ञात करें। 15

खण्ड-अ / Section-A

1. (a) यदि f , किसी समूह G से समूह H में एक समाकारिता है, तो सिद्ध कीजिए कि $\text{Ker}(f)$ (अष्टि f) समूह G का उपसमूह होगा। 15
If f is a homomorphism of a group G into a group H , then prove that $\text{Ker}(f)$ is a subgroup of G .

- (b) यदि $F \subset K$, एक विस्तार-शैत्र है और $\alpha \in K$, तो सिद्ध कीजिए कि α का अतिपथ बहुपद घात n का है यदि और केवल यदि $[F(\alpha):F] = n$. 15
If $F \subset K$ is a field extension, $\alpha \in K$, show that the minimal polynomial of α has degree n if and only if $[F(\alpha):F] = n$. Pg-184

- (c) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक मुख्य गुणजावली प्रांत एक अद्वितीय गुणनखंडन प्राप्त होता है। 10
Show that every principal ideal domain is a unique factorization domain.

2. (a) किसी अनुक्रम $\{x_n\} \subseteq (s, d)$ में ज्यादा से ज्यादा एक गुच्छ बिन्दु है।
सिद्ध कीजिए। 15

Prove that, "any sequence $\{x_n\} \subseteq (s, d)$ has atmost one limit point."

- (b) सिद्ध कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, अंतराल $(0, 1)$ में एकसमान अभिसारी नहीं है। 15

Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ does not converge uniformly on $(0, 1)$. Pg-185

- (c) बिंदु (a, b) पर फलन $f(x, y)$ की अवकलनीयता की परिभाषा कीजिए। यदि $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, तो दिखाइए कि f , बिंदु $(0, 0)$ पर अवकलनीय नहीं है। 10
Define differentiability of a function $f(x, y)$ at a point (a, b) . If $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$, show that f is not differentiable at $(0, 0)$.

3. (a) सिद्ध कीजिए कि सारे बहुपद की दूरिक समष्टि $P[a, b]$ जिसकी एकसमान दूरिक $d_\infty(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$, $\forall f, g \in [a, b]$ है, पूर्ण नहीं है। 15

Prove that the metric space $P[a, b]$ of all polynomials with uniform metric. $d_\infty(f, g) = \max_{t \in [a, b]} |f(t) - g(t)|$, $\forall f, g \in [a, b]$ is not complete.

18 / Shilpi Unsolved Paper

A square lamina floating with its plane vertical in a liquid double its own density. Find the position of equilibrium.

- (c) एक कर्ण प्रारम्भिक वेग u से प्रक्षेपित किया जाता है। मान लिया कि इसकी अधिकतम ऊँचाई H तथा इसका प्रक्षेपण बिन्दु से शीतज परास R है। सिद्ध कीजिए कि $R = 4 \sqrt{H \left(\frac{u^2}{2g} - H \right)}$ 10

A particle is projected with an initial velocity u . Let its greatest height be H and its horizontal range through the point of projection be R .

$$\text{Prove that } R = 4 \sqrt{H \left(\frac{u^2}{2g} - H \right)}$$

गणित : प्रश्नपत्र-II-2017

MATHEMATICS : PAPER-II

Time : Three hours]

[Maximum Marks : 200

- नोट : (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।
(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
(iii) प्रत्येक प्रश्न के अन्त में निर्धारित अंक अंकित हैं।
(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
(v) सामान्य केल्कुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

- Note : (i) There are total eight questions in two sections printed in both Hindi and English.
(ii) Answer five questions, selecting atleast two from each section.
(iii) Marks are given against each of the question.
(iv) All Questions carry equal marks.
(v) Simple calculators are allowed.

खण्ड-ब / Section-B

- (b) घात श्रेणी $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(\log n)^2}$ के व्यवहार की जाँच उसके अभिसरण वृत्त पर कीजिए। 15

Examine the behaviour of the power series $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n(\log n)^2}$ on its circle of convergence.

- (c) फलन $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, का, z के घातों में, लारेन्ट-प्रसार ज्ञात कीजिए जो $1 < |z| < 3$ के लिए सार्वत्रिक हो। 10

Obtain the Laurent expansion of $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$, in the powers of z , which is valid for $1 < |z| < 3$.

4. (a) कौशी-अवशिष्ट प्रमेय का उपयोग कर $\int_C \frac{e^z dz}{z(z-1)^2}$, का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ C एक वृत्त $|z| = 2$ है। 15

Using Cauchy Residue Theorem, evaluate $\int_C \frac{e^z dz}{z(z-1)^2}$, where C is a circle $|z| = 2$.

$$(b) \text{ हल कीजिए : } y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 4xy \quad 15$$

$$\text{Solve : } y \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial z}{\partial x} = 4xy$$

$$(c) \text{ चारपिट-विधि से हल कीजिए : } (p^2 + q^2)y = qz \quad 10$$

Solve by charpits method :

$$(p^2 + q^2)y = qz$$

5. (a) द्रव गति में स्रोत तथा अविगम की परिभाषा लिखिए तथा उनकी शक्ति का मतलब समझाइए। एक द्वि-विमीय द्रव गति के लिए, m शक्ति वाले स्रोत का प्रतिबिम्ब, O केन्द्र और r त्रिज्या वाले एक वृत्त के सापेक्ष ज्ञात कीजिए, जबकि स्रोत बिंदु P पर स्थित है, जहाँ $OP > r$. 15

Define source and sink for the fluid motion and explain the meaning of their strength. For a two dimensional fluid motion, obtain the image of a source of strength m , situated at the point P , with respect to the circle of radius r with centre at the point O , where $OP > r$.

- (b) मानक संकेतनों को समझाते हुए, एक आदर्श द्रव के लिए, आयलर के गति समीकरणों, $\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{P} \nabla p$ की व्युत्पत्ति कीजिए। 15

Explaining the standard notations, derive Euler's equation of motion

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{P} \nabla p \text{ for an ideal fluid.}$$

- (c) यदि एक समांगी द्रव-गति में किसी बिंदु (x, y, z) पर वेग घटक $u = \frac{-c^2 y}{r^2}, v = \frac{c^2 x}{r^2}, w = 0$ के द्वारा निरूपित होते हैं, जहाँ बिंदु की z -अक्ष से दूरी हो, तो दिखाइए कि गति अधूर्णनीय है तथा z -अक्ष से गुजरने वाले समतल, धारा-रेखाओं के लम्बवत हैं। 10

If the velocity at a point (x, y, z) , for a homogeneous fluid motion, has

components, $u = \frac{-c^2 y}{r^2}, v = \frac{c^2 x}{r^2}, w = 0$, where r is the distance of the point from z -axis, then show that the fluid motion is irrotational and the planes through the z -axis are orthogonal to the stream lines.

6. (a) आयलर विधि में $h = 0.1$ ले कर, प्रारम्भिक मान समस्या $\frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y}; y(0) = 1$, के लिए $y(0.2)$ का मान ज्ञात कीजिए। 15

In Euler method, taking $h = 0.1$, obtain the values of $y(0.2)$ for the initial value problem $\frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y}; y(0) = 1$.

(b) रेगुला-फालसी विधि के उपयोग से $xe^x = 3$ के मूल, दशमलव के शुद्ध तीन स्थानों तक निकालें। 15

Using Regula-Falsi method, find the root of $xe^x = 3$ correct upto three decimal places.

(c) रन्गे-कुट्टा विधि का उपयोग करके, अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, का हल $y(0, 2)$ और $y(0, 4)$ पर निकालें. यदि $y = 0$, जब $x = 0$. 10

Using Runge-Kutta method, find $y(0, 2)$ and $y(0, 4)$ for the differential

equation $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, where $y = 0$ when $x = 0$.

7. (a) किसी छड़ की गतिज (T) और स्थितिज (V) ऊर्जाएँ, किसी समय

$$T = \frac{1}{2} ml^2 \theta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} mk^2(w - \theta)^2, V = 2mgl \cos \frac{\theta}{2}$$

के द्वारा दी जाती है, जहाँ m, l, k, w और g अचर हैं। लगराँज के गति-समीकरणों की सहायता

$$\text{से दिखाइए कि } \left(k^2 + l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \theta^2 - 4gl \cos \frac{\theta}{2} = \text{const.} \quad 15$$

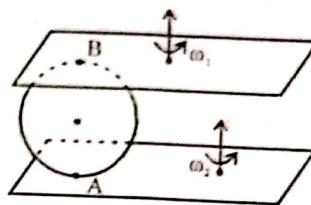
The kinetic (T) and potential (V) energies of a rod, at any time are given by $T = \frac{1}{2} ml^2 \theta^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{1}{2} mk^2(w - \theta)^2, V = 2mgl \cos \frac{\theta}{2}$ where m, l, k, w and g are constants. Using Lagrange's equations of motion

$$\text{show that } \left(k^2 + l^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \theta^2 - 4gl \cos \frac{\theta}{2} = \text{const.}$$

(b) एक गोला दो समतल तरबूजों के बीच दबा हुआ है, जो कोणीय वेगों ω_1 और ω_2 से अपने ही लम्बवत्-असंपाती अक्षों के परितः घूम रहे हैं। सिद्ध कीजिए कि गोले का केन्द्र एक वृत्ताकार पथ की सरबना करता है। उस वृत्त के केन्द्र को और उसके परितः कोणीय वेग को भी ज्ञात कीजिए। 15

A sphere is pressed between two plane boards, which are rotating with angular velocities ω_1 and ω_2 , about non-coincident axes, normal to themselves. Prove that the centre of the sphere describes a circle.

Find the centre of this circle and also the angular velocity round it.



(c) दृढ़ पिण्डों के जडत्व-आधूर्ण (moment of inertia) और जडत्व-गुणनकल (product of inertia) के संदर्भ में क्रमशः, समानांतर अक्षों के प्रमेय और परस्पर लम्बवत अक्षों के प्रमेय का कथन लिखिए तथा उन्हें सिद्ध कीजिए। 10

State and prove the theorem of parallel axes and the theorem of mutually perpendicular axes for the moment of inertia and the product of inertia respectively of rigid bodies.

8. (a) यदि A कोई परिमित उपसमुच्चय सदिश \mathbb{R}^n में है, तो सिद्ध कीजिए कि, A अवमुख समावरक सारे अवमुख संचय, जो सदिश A में है, का समूह है। 15
If A is any finite subset of vectors in \mathbb{R}^n , then show that the convex hull of A is the set of all convex combinations of vectors in A .

(b) सिम्प्लेक्स विधि द्वारा निम्नलिखित रैखिक प्रोग्राम समस्या को हल कीजिए :

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

इस प्रकार कि

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$2x_2 + 5x_3 \leq 10 \lim_{x \rightarrow \infty}$$

$$3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \leq 15$$

और $x_1, x_2, x_3 \geq 0$.

24 / Shilpi Unsolved Paper

Using simplex method, solve the following linear programming problem :

$$\text{Max } z = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$$

Such that

$$2x_1 + 3x_2 \leq 8$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10$$

$$3x_2 + 2x_3 + 4x_3 \leq 15$$

$$\text{and } x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

(c) निम्न खेल को हल कीजिए :

10

खिलाड़ी - B

	I	II	III	
I	1	-1	3	
खिलाड़ी - A	II	3	5	-3
	III	6	2	-2

Solve the following game :

Player - B

	I	II	III	
I	1	-1	3	
Player - A	II	3	5	-3
	III	6	2	-2