SMNPC -06-Paper-II
2021

गणित (प्रश्न–पत्र – II)
MATHEMATICS (PAPER – II)

0050 | al No.

र्धारित समय : तीन घंटे] [अधिकतम अंक : 200

me Allowed : Three Hours] [Maximum Marks : 200

उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें :

(I) इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो** खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** एवं **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं ।

(II) उम्मीदवार को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

(III) प्रश्न संख्या **1** और **5** **अनिवार्य** हैं तथा बाकी प्रश्नों में से **प्रत्येक** खण्ड से कम से कम **एक** प्रश्न चुनकर **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

(IV) प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

(V) **सभी** प्रश्नों के अंक **समान** हैं ।

नोट : प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो । प्रश्न–सह–उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णत: काट दीजिए ।

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

(I) There are **eight** questions divided in **two** Sections and printed both in **Hindi** and in **English**.

(II) Candidate has to attempt **five** questions in all.

(III) Question Nos. **1** and **5** are **compulsory** and out of the remaining, **three** are to be attempted choosing at least **one** question from **each** Section.

(IV) The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

(V) **All** questions carry **equal** marks.

Note : Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-Cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड – अ / SECTION – A

(a) वलय का एक ऐसा उदाहरण दीजिए, जिसका तत्समक है, परन्तु उसके एक उपसमूह का भिन्न तत्समक है । 10

Give an example of a ring having identity, but a subgroup of this having a different identity.

(b) मान लीजिए कि G कोटि n का एक समूह है । दिखाइए कि G क्रमचय समूह S_n के एक उपसमूह के समरूपी है । 15

Let G be a group of order n. Show that G is isomorphic to a subgroup of the permutation group S_n.

(c) मान लीजिए R तत्समक अवयव सहित एक पूर्णांकीय प्रान्त है । दिखाइए कि R[x] में कोई भी एकक R में एक एकक है । 15

Let R be an integral domain with unit element. Show that any unit in R[x] is a unit in R.

(a) $p > 0$ का वह परास ज्ञात कीजिए, जिसके लिए श्रेणी $\frac{1}{(1+a)^p} - \frac{1}{(2+a)^p} + \frac{1}{(3+a)^p} \ldots a > 0$

(i) निरपेक्षतः अभिसारी तथा (ii) सापेक्ष अभिसारी है । 15

Find the range of $p > 0$ for which the series $\frac{1}{(1+a)^p} - \frac{1}{(2+a)^p} + \frac{1}{(3+a)^p} \ldots a > 0$ is

(i) absolutely convergent and (ii) conditionally convergent.

(b) m तथा n के किन मानों के लिए समाकलन $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \log x \, dx$ अभिसारी है ? 10

For what values of m and n, the integral $\int_0^1 x^{m-1}(1-x)^{n-1} \log x \, dx$ is convergent ?

(c) सिद्ध कीजिए कि फलन $u(x, y) = (x - 1)^3 - 3xy^2 + 3y^2$ प्रसंवादी है तथा इसके प्रसंवादी संयुग्मी को और संगत विश्लेषिक फलन f(z) को z के रूप में ज्ञात कीजिए । 15

Prove that the function $u(x, y) = (x - 1)^3 - 3xy^2 + 3y^2$ is harmonic and find its harmonic conjugate and the corresponding analytic function f(z) in terms of z.

(a) कॉशी समाकलन फॉर्मूला का उपयोग करते हुए समाकलन $\int_c \frac{e^{az}}{(z-\pi i)} dz$ को ज्ञात कीजिए, जहाँ $c : |z - 2| + |z + 2| = 6$ एक दीर्घवृत्त है । 15

Using Cauchy integral formula calculate integral $\int_c \frac{e^{az}}{(z-\pi i)} dz$, where c is the ellipse $|z - 2| + |z + 2| = 6$.

(b) परिरेखीय समाकलन का उपयोग करते हुए दिखाइये कि $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}dx = \pi\log 2.$

By using the method of contour integration show that $\int_0^\infty \frac{\log(1+x^2)}{1+x^2}dx = \pi\log 2.$

(c) एक फलन $f : R^2 \to R$ में $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \;; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है,

तो दिखाइये :

i) f, (0, 0) पर सतत है ।

ii) f, (0, 0) पर आंशिक अवकलज रखता है ।

iii) f, (0, 0) पर अवकलनीय नहीं है । 15

A function $f : R^2 \to R$ is defined by $f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}; & (x,y)\neq(0,0) \\ 0 \;; & (x,y)=(0,0) \end{cases}$

then show that :

i) f is continuous at (0, 0).

ii) f possesses partial derivatives at (0, 0).

iii) f is not differentiable at (0, 0).

4. (a) सिद्ध कीजिए कि बहुपद $(x^2 + x + 4)$, क्षेत्र F पर अखण्डनीय है जहाँ F पूर्णांक मॉड्युलो 11 का क्षेत्र है । 10

Prove that the polynomial $(x^2 + x + 4)$ is irreducible over F, where F is the field of integers modulo 11.

(b) दर्शाइये कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+x^2)}$, x के सभी वास्तविक मानों के लिए एक समान अभिसारित है । 15

Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+x^2)}$ is uniformly convergent for all real values of x.

(c) माना कि (X, d_1) और (Y, d_2) दो दूरीक समष्टि है । सिद्ध कीजिए कि फलन $f : X \to Y$ सतत है यदि और केवल यदि $f^{-1}(G)$, X का एक विवृत्त उपसमुच्चय है, जहाँ G, Y का एक विवृत्त उपसमुच्चय है । 15

Let (X, d_1) and (Y, d_2) be two metric spaces. Prove that a function $f : X \to Y$ is continuous if and only if $f^{-1}(G)$ is an open subset of X, whenever G is an open subset of Y.

खण्ड – ब/SECTION – B

5\. (a) समीकरण $p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 2xy = 0$ का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$ है। 15

Find the complete integral of the equation $p^2 + q^2 - 2px - 2qy + 2xy = 0$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

(b) हल कीजिए : $(D^2 - 3DD' + 2D'^2)z = e^{2x-y} + e^{x+y} + \cos(x + 2y)$, जहाँ $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ एवं $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$. 10

Solve : $(D^2 - 3DD' + 2D'^2)z = e^{2x-y} + e^{x+y} + \cos(x + 2y)$, where $D \equiv \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' \equiv \frac{\partial}{\partial y}$.

(c) द्वितीय-कोटि आंशिक अवकल समीकरण $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ को विहित रूप में समानीत कीजिए तथा इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 15

Reduce the second order partial differential equation $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ into canonical form. Hence, find its general solution.

6\. (a) समीकरण $xe^x - 1 = 0$ को द्विभाजक विधि द्वारा दशमलव के पाँच अंकों तक मूल ज्ञात कीजिए। 10

Find the root of the equation $xe^x - 1 = 0$ upto five decimal places by Bisection method.

(b) न्यूटन-रैफसन विधि के उपयोग से समीकरण $x^4 - 12x + 7 = 0$ का दशमलव के 5 अंकों तक मूल ज्ञात कीजिए। 15

Using Newton-Raphson method, find a root of the equation $x^4 - 12x + 7 = 0$ correct to five decimal places.

(c) रुंगे-कुट्टा विधि का उपयोग करके अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ का हल $y(0, 2)$ और $y(0, 4)$ पर निकालिए, यदि $y = 0$ जब $x = 0$। 15

Using Runge-Kutta method, find $y(0, 2)$ and $y(0, 4)$ for the differential equation $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$, where $y = 0$ when $x = 0$.

(a) दृढ़ पिण्डों के जड़त्व-आघूर्ण (moment of inertia) और जड़त्व-गुणनफल (product of inertia) के संदर्भ में क्रमशः समानांतर अक्षों के प्रमेय और परस्पर लम्बवत् अक्षों के प्रमेय का कथन लिखिए तथा उन्हें सिद्ध भी कीजिए । **15**

State and prove the theorem of parallel axes and the theorem of mutually perpendicular axes for the mom... ...duct of inertia respectively of rigid bodies.

(b) दो समरूप छड़ AB और BC जो B पर दृढ़ता से बंधे ... ∠ABC ... संतुलन की स्थिति में लटक रही है । छड़ों की लम्बाई a, b हैं, तथा उनका भार W_a एवं W_b है । AB ऊर्ध्व से θ कोण बना रही है, तो सिद्ध कीजिए कि $\tan\theta = \dfrac{b^2}{a^2 + 2ab}$.

Two uniform rods AB and BC, rigidly jointed at B and ∠ABC = 90°, hang free in equilibrium from the point A. The lengths of the rod are a, b and their weights are W_a and W_b. If AB makes an angle θ with the vertical then prove

$$\tan\theta = \frac{b^2}{a^2 + 2ab}.$$

$\frac{1}{(D-2D')}\int \frac{e^{x+h}}{D-D'}$ $y+x$ $y=1$ $m=1$

(c) मान लीजिए कि किसी यांत्रिक-निकाय का लेगरान्जियन $L = \frac{1}{2}m(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{1}{2}K(ax^2 + 2bxy + cy^2)$ के द्वारा दिया गया है, जहाँ a, b, c, m (> 0), $K > 0$ स्थिरांक हैं तथा $b^2 \neq ac$, गति के लेगरान्जियन समीकरणों को लिखिए तथा निकाय को पहचानिए । **15**

Suppose that the Lagrangian of a mechanical system is given by

$$L = \frac{1}{2}m(a\dot{x}^2 + 2b\dot{x}\dot{y} + c\dot{y}^2) - \frac{1}{2}K(ax^2 + 2bxy + cy^2),$$ where a, b, c, m (> 0), $K > 0$ are constants and $b^2 \neq ac$. Write down the Lagrangian equation of motion and identify the system.

$\ln 2x - c$ $\frac{e^{2x-c}}{2}$ $\frac{e^{x+y}}{2(D-2D')}$ $m=2$, $y+2x=c$, $y=c-2x$

(a) मानक संकेतनों को समझाते हुए एक आदर्श द्रव के लिए, ऑयलर के गति समीकरणों, $\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p$ की व्युत्पत्ति कीजिए । **15**

Explaining the standard notations, derive Euler's equation of motion $\frac{d\bar{q}}{dt} = \bar{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p$ for an ideal fluid.

$\frac{e^{3x-c}}{3}$

(b) दिखाइए कि $\frac{x^2}{a^2k^2t^4}+kt^2\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]=1$ किसी समय t पर एक द्रव के परिसीमन सतह का एक सम्भव रूप निरूपित करता है । 10

Show that at any time t $\frac{x^2}{a^2k^2t^4}+kt^2\left[\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2\right]=1$ represents a possible form for the boundary surface of a liquid.

(c) 'a' त्रिज्या का एक गोला, P घनत्व वाले एक अनन्त द्रव से घिरा है, अनन्त पर दाब π है । गोले को अचानक गायब कर दिया जाता है । दिखाइए कि गोले के केन्द्र से r (r > a) दूरी पर दाब गिरकर तुरंत $\pi\left(1-\frac{a}{r}\right)$ हो जाता है । 15

A sphere of radius 'a' is surrounded by an infinite fluid of density P, the pressure at infinity being π. The sphere is suddenly annihilated. Show that the pressure at a distance r (r > a) from the centre of the sphere immediately falls to $\pi\left(1-\frac{a}{r}\right)$.