

SECTION—I

खण्ड—I

2.

1. (a) If $T: U \rightarrow V$ be a linear map and U be a finite-dimensional vector space, then prove that

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim U$$

Or

rank + nullity = dimension of the domain space

- (b) Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

- (क) यदि $T: U \rightarrow V$ एक रेखिक प्रतिचित्रण हो तथा U परिमित आयामी सदिश समष्टि हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim U$$

या

$$\begin{aligned} \text{कोटि (रैंक)} + \text{शून्यता (नलिटि)} \\ = \text{प्रांत (डोमेन) स्पेस का आयाम} \end{aligned}$$

- (ख) निम्नलिखित आव्यूह के आइगेनवैल्यू और आइगेनवेक्टर ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. (a) Find the points of discontinuities of the following function f :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sin \pi x)^n - 1}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (b) Use mean value theorem to prove

$$0 < \frac{1}{x} \log \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) < 1, \text{ for } x > 0$$

- (क) निम्नलिखित फलन f के लिए असातत्यता के बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(1 + \sin \pi x)^n - 1}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

- (ख) माध्यमान प्रमेय का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$0 < \frac{1}{x} \log \left(\frac{e^x - 1}{x} \right) < 1, \text{ जबकि } x > 0$$

3. (a) Evaluate

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax \, dx$$

and test its convergence.

(b) Evaluate

$$\iint_D (2yx^2 + 9y^3) \, dA$$

where D is the region bounded by

$$y = \frac{2}{3}x \text{ and } y = 2\sqrt{x}$$

(क) $\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos ax \, dx$ का मान ज्ञात कीजिए तथा इसके अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

(ख) $\iint_D (2yx^2 + 9y^3) \, dA$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ क्षेत्र D

$$y = \frac{2}{3}x \text{ एवं } y = 2\sqrt{x}$$

से घिरा हुआ है।

(5)

0.000199

290240

4. (a) Find the value of

$$\int_0^{\infty} \frac{x^4 (1+x^5)}{(1+x)^{15}} dx$$

1/5005

(b) Find the angle between the two planes given by

$$x - 2y + z = 0 \text{ and } 2x + 3y - 2z = 0$$

and also, find the parametric equation of their line of intersection.

(क) $\int_0^{\infty} \frac{x^4 (1+x^5)}{(1+x)^{15}} dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

(ख) दो समतलों

$$x - 2y + z = 0 \text{ और } 2x + 3y - 2z = 0$$

के बीच का कोण ज्ञात कीजिए तथा उनके प्रतिच्छेदन की रेखा का पैरामीट्रिक समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

5. (a) Solve :

$$\frac{x dx + y dy}{x dy - y dx} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

(b) Solve :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} + y = ax^2 + be^{-x} \sin 2x$$

(Turn Over)

1/FF/CC/M-2021-19/75

14

(क) हल कीजिए :

$$\frac{x dx + y dy}{x dy - y dx} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right)}$$

(ख) हल कीजिए :

$$\frac{d^4 y}{dx^4} + \frac{d^2 y}{dx^2} + y = ax^2 + be^{-x} \sin 2x$$

6. (a) Verify the validity of the following statement :

The covariant derivative of a covariant tensor of second order is a covariant tensor of third order.

(b) Explain Kepler's laws of planetary motion. What will be the time period of that planet whose radius of orbit around the sun is double that of the earth?

(क) निम्नलिखित कथन की वैधता का परीक्षण कीजिए :

दो कोटि के सहपरिवर्ती प्रदिश का सहपरिवर्ती अवकलज एक तीन कोटि का सहपरिवर्ती प्रदिश होता है।

(ख) ग्रहों की गति समझाने के लिए केपलर के नियमों को समझाइए। उस ग्रह का आवर्त-काल क्या होगा, जिसकी सूर्य के चारों ओर घूर्णन की त्रिज्या पृथ्वी से दुगुनी है?

SECTION—II

खण्ड—II

7. (a) Prove that the order of every sub-group of a finite group is a divisor of the order of the group.

(b) Prove that every quotient group of an Abelian group is Abelian but the converse is not true.

(क) सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि उस समूह की कोटि की भाजक होती है।

(ख) सिद्ध कीजिए कि अबेलियन समूह का प्रत्येक विभागीय समूह भी अबेलियन होता है परन्तु इसका विपरीत सत्य नहीं है।

8. (a) Box-I contains 4 red and 5 black balls, Box-II contains 5 red and 4 black balls and Box-III contains 4 red and 8 black balls. A box is chosen and a ball is drawn which happens to be black. What is the probability that it came from Box-II?

(b) If

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}, x \in [0, 1]$$

show that the sequence of functions $\{f_n\}$ is uniformly convergent on $[0, 1]$.

(Turn Over)

(क) सन्दूक-I में 4 लाल एवं 5 काली गेंदें हैं, सन्दूक-II में 5 लाल एवं 4 काली गेंदें हैं तथा सन्दूक-III में 4 लाल एवं 8 काली गेंदें हैं। एक सन्दूक का चयन करके उसमें से एक गेंद निकाली गयी, जो काले रंग की थी। यह गेंद सन्दूक-II से निकाली गयी, इसकी प्रायिकता क्या है?

(ख) यदि

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}, x \in [0, 1]$$

हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि फलनों का अनुक्रम $\{f_n\}$, $[0, 1]$ में एकसमान अभिसरित है।

9. (a) Prove Cauchy's residue theorem. Using it, evaluate the integral

$$\int_C \frac{e^z + 1}{z(z+1)(z-i)^2} dz; \quad C: |z|=2$$

(b) Solve the following by Charpit's method :

$$f(x, y, z, p, q) \equiv (x^2 - y^2)pq - xy(p^2 - q^2) - 1 = 0$$

(क) कौशी अवशेष प्रमेय को सिद्ध कीजिए। इसका प्रयोग करते हुए समाकल

$$\int_C \frac{e^z + 1}{z(z+1)(z-i)^2} dz; \quad C: |z|=2$$

का मान ज्ञात कीजिए।

(ख) निम्न को चारपिट विधि द्वारा हल कीजिए :

$$f(x, y, z, p, q) \equiv (x^2 - y^2)pq - xy(p^2 - q^2) - 1 = 0$$

10. (a) Solve the following linear programming problem by the simplex method. Write its dual. Also, write the optimal solution of the dual from the optimal table of the given problem :

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$

subject to

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(9)

- (b) Obtain the equation of motion of a simple pendulum by using Lagrangian method, and deduce the formula for its time period for small amplitude oscillations.

- (क) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को एकधा (सिम्प्लेक्स) विधि द्वारा हल कीजिए। इसकी द्वैती समस्या लिखिए। दी गई समस्या की इष्टतम सारणी से द्वैती समस्या का इष्टतम हल भी लिखिए :

$$\text{अधिकतम मान } Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$

जिसका प्रतिबंध है

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

- (ख) लग्रांजी पद्धति का उपयोग करके एक सरल लोलक की गति का समीकरण प्राप्त कीजिए और छोटे आयामी दोलनों के आवर्त-काल का सूत्र बताइए।

11. (a) Solve the following system of linear equations by Gauss-Seidel method :

$$20x + y - 2z = 7$$

$$3x + 20y - z = -18$$

$$2x - 3y + 20z = 25$$

- (b) Apply fourth-order Runge-Kutta method to solve

$$\frac{dy}{dx} = 3x + \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1$$

$$1.06652$$

$$1.15487$$

and determine $y(0.1)$ and $y(0.2)$ corrected up to four decimal places.

- (क) निम्नलिखित रेखिक समीकरण निकाय को गॉस-सिडल पद्धति द्वारा हल कीजिए :

$$20x + y - 2z = 7$$

$$3x + 20y - z = -18$$

$$2x - 3y + 20z = 25$$

- (ख) रूंगे-कुट्टा विधि के चौथे क्रम के प्रयोग से निम्न को हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx} = 3x + \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1$$

तथा $y(0.1)$ और $y(0.2)$ को चार दशमलव स्थानों तक सही ज्ञात कीजिए।

12. (a) Find the moment of inertia of a solid hemisphere.

(b) A function f is defined on $[0, 1]$ by

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1-x, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$$

Show that f is not Riemann integrable.

(क) एक ठोस गोलाई का जड़त्वाघूर्ण ज्ञात कीजिए।

(ख) एक फलन f , $[0, 1]$ में परिभाषित है, जबकि

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{यदि } x \text{ परिमेय हो} \\ 1-x, & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय हो} \end{cases}$$

प्रदर्शित कीजिए कि f रीमान समाकलनीय नहीं है।
