

2019
ISRO-06/I
 गणित : प्रश्न-पत्र – I
MATHEMATICS : Paper – I

1043467

निर्धारित समय : तीन घंटे]

Time Allowed : Three Hours]

[अधिकतम अंक : 200

[Maximum Marks : 200]

- नोट : (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं, जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।
 (ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
 (iii) प्रत्येक प्रश्न के अन्त में निर्धारित अंक अंकित है।
 (iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

- Note : (i) There are total **eight** questions in **two** Sections printed in both Hindi and English.
 (ii) Answer **five** questions, selecting atleast **two** from **each** Section.
 (iii) Marks are given against **each** of the question.
 (iv) **All** questions carry **equal** marks.

खण्ड – अ / Section – A

1. (a) यदि T सदिश समष्टि V पर एक रैखिक संकारक इस प्रकार है कि $T^2 - T + I = 0$, तो सिद्ध कीजिए कि T व्युत्क्रमणीय होगा।

If T is a linear operator on a vector space V such that $T^2 - T + I = 0$, then prove that T is invertible.

15

- (b) \mathbb{R}^3 की उपसमष्टि W, जो समुच्चय $\{(1, 2, 1), (-1, -2, -1), (2, 6, -2), (1, 1, 3)\}$ से विस्तारित होती है, का एक आधार ज्ञात कीजिए।

10

Find a basis for subspace W of \mathbb{R}^3 which is spanned by the set $\{(1, 2, 1), (-1, -2, -1), (2, 6, -2), (1, 1, 3)\}$.

15

- (c) 'm' और 'n' के मान ज्ञात कीजिए जिनके लिये समीकरण निकाय :

$$x + 2y + z = 1$$

$$3x + y + 2z = n$$

$$mx - y + 4z = n^2$$

का (i) एक अद्वितीय हल हो (ii) कोई हल न हो (iii) अनन्त हल हो।

Determine the values of 'm' and 'n' so that system of equations :

$$x + 2y + z = 1$$

$$3x + y + 2z = n$$

$$mx - y + 4z = n^2$$

has (i) a unique solution (ii) no solution (iii) infinite many solutions.

P.T.O.

2. (a) हृदयाभ (cardioid) $r = a(1 - \cos\theta)$ और इसकी द्विक स्पर्श रेखा (double tangent) के बीच का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।
 Find the area between the cardioid $r = a(1 - \cos\theta)$ and its double tangent.

15

4.

- (b) दिखाइए कि फलन

$$f(x) = x^p \cos \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

$x = 0$ पर सतत है यदि $p > 0$ और अवकलनीय है यदि $p > 1$

Show that the function

15

$$f(x) = x^p \cos \frac{1}{x}, x \neq 0$$

$$f(0) = 0$$

is continuous at $x = 0$ if $p > 0$ and differentiable if $p > 1$.

- (c) मान ज्ञात कीजिए $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a, b > 0$.

10

\sqrt{ab} Evaluate $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}}$, $a, b > 0$.

15

3. (a) उन रेखाओं का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो तीन रेखाओं

$$y - z = 1, x = 0$$

$$z - x = 1, y = 0$$

$$x - y = 1, z = 0$$

को प्रतिच्छेद करती हैं।

Find the locus of the lines which intersect the three lines

$$y - z = 1, x = 0$$

$$z - x = 1, y = 0$$

$$x - y = 1, z = 0$$

- (b) उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए जो $3x^2 + 2y^2 - 15z^2 = 4$ को ऐसे शंकव में काटता है जिसका केन्द्र बिन्दु $(-2, 3, -1)$ पर हो।

15

Find the equation of the plane which cuts $3x^2 + 2y^2 - 15z^2 = 4$ in a conic whose centre is at the point $(-2, 3, -1)$.

- (c) दिखाइये कि महत्तम आयतन तथा दी हुई तिर्यक ऊँचाई वाले शंकु का अर्धशीर्ष कोण $\tan^{-1} \sqrt{2}$ है।
 Show that the semi vertical angle of the cone of maximum volume and of given slant height is $\tan^{-1} \sqrt{2}$.

10

4. (a) निम्नलिखित आव्यूह को पंक्ति सोपानक रूप में समानीत कीजिए और तत्पश्चात इसकी कोटी ज्ञात कीजिए।

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

33

10

- ✓ Reduce the following matrix to row echelon form and hence find its rank.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 11 & 6 \end{bmatrix}$$

- (b) ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तित करते हुए

$$\int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \text{ का मान ज्ञात कीजिए।}$$

15

$$\text{Evaluate } \int_0^{2a} \int_0^{\sqrt{2ax-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx \text{ by changing into polar co-ordinates.}$$

- (c) सिद्ध कीजिए :

$$\checkmark 2^{2m-1} \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2m), m > 0.$$

$\left(\frac{m+1}{2}\right)$

15

Prove that :

$$2^{2m-1} \Gamma(m) \Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2m), m > 0.$$

खण्ड - ब / Section - B

5. (a) सिद्ध कीजिए कि एक वक्र के सरल रेखा होने के लिये आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि वक्र के सभी बिन्दुओं पर वक्रता शून्य हो।

15

Prove that the necessary and sufficient condition for a curve to be a straight line is that the curvature at all points of the curve is zero.

P.T.O.

(b) हल कीजिए :

$$\checkmark \quad (1 + xy) ydx + (1 - xy) xdy = 0.$$

Solve : $(1 + xy) ydx + (1 - xy) xdy = 0.$

10

(c) हल कीजिए :

$$\checkmark \quad \frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \cos x.$$

15

$$\text{Solve : } \frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = x^2 \cos x.$$

6. (a) दोनों प्रकार के क्रिस्टोफल प्रतीकों को परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि यह एक प्रदिश के घटक नहीं हैं।

15

Define Christoffel symbols of both kinds and prove that they are not components of a tensor.

- (b) बिन्दु $(1, 1, -1)$ से किस दिशा में $\phi(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ का दिक-अवकलज अधिकतम होगा ? अधिकतम मान भी ज्ञात कीजिए।

10

In what direction from the point $(1, 1, -1)$ is the directional derivative of $\phi(x, y, z) = x^2 - 2y^2 + 4z^2$ a maximum ? Also find the maximum value.

- (c) सिद्ध कीजिए कि $(1, 2)$ प्रकार के प्रदिश का सहपरिवर्ती अवकलज एक $(1, 3)$ प्रकार का प्रदिश होता है।

15

Prove that covariant derivative of tensor of type $(1, 2)$ is a tensor of type $(1, 3)$.

7. (a) सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र \vec{F} जो

$$\vec{F} = (siny + z)\hat{i} + (x \cos y - z)\hat{j} + (x - y)\hat{k}$$

से परिभाषित है, संरक्षी है। फलन ϕ ज्ञात कीजिए जब कि $\vec{F} = \vec{\nabla}\phi$.

10

Prove that the field \vec{F} defined by

$$\vec{F} = (siny + z)\hat{i} + (x \cos y - z)\hat{j} + (x - y)\hat{k} \text{ is conservative and find a function } \phi \text{ such that } \vec{F} = \vec{\nabla}\phi.$$

- (b) एक ठोस गोला अपनी त्रिज्या से दोगुनी त्रिज्या वाले एक निश्चित स्थान पर लगे एक खुरदे अर्धगोलाकार कटोरे में है। यह दिखाइए कि यद्यपि गोले के उच्चतम बिंदु से बड़ा भार जुड़े होने पर भी संतुलन स्थिर रहेगा।

15

A solid sphere rests inside a fixed rough hemispherical bowl of twice its radius. Show that, however, large a weight is attached to the highest point of the sphere, the equilibrium is stable.

- (c) एक चिकनी परवलीय तार जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर तथा शीर्ष नीचे है पर $2l$ लम्बाई की एक समरूप छड़ जिसके सिरे तार पर स्थित है। सिद्ध कीजिए कि सन्तुलन की स्थिति में छड़ या तो क्षैतिज होगी या क्षैतिज से θ कोण बनायेगी तो $\cos^2\theta = 2a/l$ से दिया जायेगा, जहाँ $4a$ परवलय का नाभिलम्ब है।

A smooth parabolic wire is fixed with its axis vertical and vertex downwards and in it a uniform rod of length $2l$ is placed with its end resting on the wire. Prove that in equilibrium either rod is horizontal or makes with the horizontal an angle θ given by $\cos^2\theta = 2a/l$, $4a$ being latus rectum of the parabola.

8. (a) एक कण एक केन्द्रीय बल जो केन्द्र से दूरी के वर्ग के व्युत्क्रमानुपाती है के आधीन चलायमान है। सिद्ध कीजिए कि उसके बलकेन्द्र तक की दूरी के प्रथम अर्ध एवं अंतिम अर्ध को तय करने में लगे समयों का अनुपात $\pi + 2 : \pi - 2$ है।

A particle is moving under a centre of force varying inversely as the square of the distance from the centre. Prove that its time of descent to the centre of force through first half is to that in last half is $\pi + 2 : \pi - 2$.

- (b) एक कण एक चिकने ऊर्ध्वाधर त्रिज्या a के वृत्ताकार तार पर स्वतन्त्रतापूर्वक गतिशील है। वह वृत्त के निम्नतम बिन्दु से क्षैतिज दिशा में वेंग $2\sqrt{ag}$ से प्रक्षेपित किया जाता है। सिद्ध कीजिए कि कण और तार के बीच की क्रिया समय $\sqrt{\frac{a}{g}} \log(\sqrt{5} + \sqrt{6})$ के पश्चात शून्य होगी।

A particle is free to move on the smooth vertical circular wire of radius 'a'. It is projected horizontally from the lowest point with velocity $2\sqrt{ag}$. Prove that the reaction between the particle and wire is zero after a time

$$\sqrt{\frac{a}{g}} \log(\sqrt{5} + \sqrt{6}).$$

No. of Printed Pages : 7

1081723

2019
ISRO-06/II
गणित : प्रश्न-पत्र - II
MATHEMATICS : Paper - II

निर्धारित समय : तीन घंटे]

Time Allowed : Three Hours]

[अधिकतम अंक : 200

[Maximum Marks : 200]

- नोट : (i) दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं जो हिंदी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।
(ii) प्रत्येक खण्ड से कम से कम दो प्रश्नों का चयन करते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए।
(iii) प्रत्येक प्रश्न के अन्त में निर्धारित अंक अंकित है।
(iv) सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।
(v) सामान्य केल्कुलेटर का उपयोग किया जा सकता है।

- Note : (i) There are total **eight** questions in **two** Sections, printed both in **Hindi** and **English**.
(ii) Answer **five** questions, selecting atleast **two** from **each** Section.
(iii) Marks are given **against each** of the question.
(iv) **All** questions carry **equal** marks.
(v) Simple calculators are **allowed**.

खण्ड - अ / Section - A

1. (a) यदि $(Z_n, +_n)$ पूर्णांक माझ्यूलो धनात्मक पूर्णांक n का एक समूह है तथा $u(n)$ एक समूह है, तो प्रत्येक धनात्मक पूर्णांक n के लिये दर्शाइये कि स्वाकारिता (Z_n) , $u(n)$ के समाकृतिक है। 15
If $(Z_n, +_n)$ be a group of integer modulo positive integer n and $u(n)$ is unitary group, then for each positive integer n , show that automorphism (Z_n) is isomorphic to $u(n)$.
(b) माना $Z[x]$ योग के सापेक्ष पूर्णांकों के समूह पर बहुपदों का समूह है। क्या फलन $Z(x) \rightarrow Z$ पर जो $f(x) \rightarrow f(3)$ के रूप में परिभाषित है समाकारिता है? इसकी अष्टि भी ज्ञात कीजिए। 15
Let $Z[x]$ be the group of polynomial over group of integer under addition.
Is the mapping $Z(x) \rightarrow Z$ defined by $f(x) \rightarrow f(3)$ is homomorphism? Find its Kernel.



(c) माना $Z_5[x]$, $(Z_5, +_5, \times_5)$ पर बहुपदों का वलय है तथा $I = \langle x^2 + x + 2 \rangle$, तो $f(x) = 2x + 3 + I$

का $Z_5[x]/I$ पर गुणात्मक विलोम ज्ञात कीजिये।

Let $Z_5[x]$ be the ring of polynomials over $(Z_5, +_5, \times_5)$ and let $I = \langle x^2 + x + 2 \rangle$.

Find the multiplicative inverse of $f(x) = 2x + 3 + I$ in $Z_5[x]/I$.

10

2. (a) माना H वास्तविक संख्याओं के सभी अनुक्रमों $x = \{x_n\}$ का समुच्चय इस प्रकार है कि $|x_n| \leq 1$ सभी $x \in H$ के लिये। एक फलन $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ में इस प्रकार मानिये कि

$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{Z^n} |x_n - y_n|$ जहाँ $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in H$, तो सिद्ध कीजिए कि (H, d) एक दूरीक समष्टि है।

Let H be the set of all sequences of real numbers $x = \{x_n\}$ such that $|x_n| \leq 1$ for all $x \in H$. Consider the function $d : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$ given by

$d(x, y) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{Z^n} |x_n - y_n|$ where $x = \{x_n\}, y = \{y_n\} \in H$. Prove that (H, d) is a metric spaces.

15

- (b) यदि $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$, तो $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = l$ यह भी सिद्ध कीजिए कि यदि अनुक्रम $\{a_n\}$ तथा $\{b_n\}$ क्रमशः A तथा B को अभिसरित होते हैं, तो

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1) = AB.$$

If $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = l$, then $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = l$. Also prove that if the sequences $\{a_n\}$ and $\{b_n\}$ converge to A and B respectively, then

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \dots + a_n b_1) = AB.$$

15

- (c) डी. लेम्बर्ट अनुपात एवं राबी के अनुपातिक परीक्षण की उनके प्रतिबन्धों एवं सीमाओं के साथ व्याख्या कीजिए। निम्न श्रेणी के अभिसारिता का भी परीक्षण कीजिए।

10

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{x^6}{12} + \dots$$

Explain D'Alembert's ratio test and Raabe's ratio test with their limitation.

Also test the convergence of the following series :

$$1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^4}{8} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10} \cdot \frac{x^6}{12} + \dots$$



3. (a) माना f परिबद्ध अन्तराल $[a, b]$ में एक परिबद्ध फलन है। सिद्ध कीजिये जब $\|P\| \rightarrow 0$, तो $U(P, f)$ तथा $L(P, f)$ परिमित सीमा की ओर अग्रसर करते हैं जहाँ $[a, b]$ का कोई विभाजन P है। उक्त परिणाम का रीमान समाकलन सिद्धान्त में क्या उपयोग है? यदि $[a, b] = [0, \pi/4]$ तथा $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{यदि } x \text{ परिमेय है} \\ \sin x & \text{यदि } x \text{ अपरिमेय है} \end{cases}$, तो $U(P, f)$ तथा $L(P, f)$ की सीमा ज्ञात कीजिए।

15

Let f be a bounded function defined on a bounded interval $[a, b]$. Prove that $U(P, f)$ and $L(P, f)$ tend to definite limit as $\|P\| \rightarrow 0$ where P is any partition of $[a, b]$. Explain the role of the above result in the theory of Riemann integration. In the case in which $[a, b] = [0, \pi/4]$ and

$f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{if } x \text{ is rational} \\ \sin x & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$. Find the limits of $U(P, f)$ and $L(P, f)$.

- (b) लैग्राजे मध्य मान प्रमेय का कथन लिखिये एवं सिद्ध कीजिए। उसकी ज्यामितिय व्याख्या भी कीजिए। फलन $y = |x - 1| + |x - 2|$ का अन्तराल $[0, 3]$ में ग्राफ खींचिये तथा इस अन्तराल में उसकी सांत्यतता एवं अवकलनीयता की व्याख्या कीजिए।

15

State and prove Lagrange's mean value theorem also discuss its geometrical interpretation. Draw the graph of the function $y = |x - 1| + |x - 2|$ in the interval $[0, 3]$ and discuss the continuity and differentiability of the function in this interval.

- (c) सिद्ध कीजिए कि एक परिबद्ध फलन f जो $[a, b]$ पर परिभाषित है का R-समाकलनीय होने का जरूरी तथा पर्याप्त प्रतिबंध यह है कि f $[a, b]$ में लगभग सभी जगह सतत होगा।

10

Prove that a necessary and sufficient condition that a bounded function f defined on $[a, b]$ is R-integrable if and only if f is continuous almost everywhere on $[a, b]$.

4. (a) विश्लेषिक फलन के निर्माण में मिल्ने-थामसन विधि की व्याख्या कीजिए। यदि $f(z) = u + iv$

एक विश्लेषिक फलन इस प्रकार है कि $f(\pi/3) = \frac{3-i}{2}$ तथा $u - v = \frac{e^y - \cos x + \sin x}{\cosh y - \cos x}$, तो $f(z)$ को निर्धारित कीजिए।

15

Explain Milne-Thomson's method for construction of Analytic function.

If $f(z) = u + iv$ is an analytic function such that $f(\pi/3) = \frac{3-i}{2}$ and

$u - v = \frac{e^y - \cos x + \sin x}{\cosh y - \cos x}$, then determine $f(z)$.

- (b) आयत जिसके शीर्ष $\pm \pi, \pm \pi + iR$ है, के सापेक्ष $\frac{z}{a - e^{-iz}}$ को समाकलन करते हुए सिद्ध कीजिए।

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+a^2-2a \cos x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{a} \log(1+a) & \text{if } 0 < a < 1 \\ \frac{\pi}{a} \log\left(\frac{1+a}{a}\right) & \text{if } a > 1 \end{cases}$$

By integrating $\frac{z}{a - e^{-iz}}$ round the rectangle with vertices at $\pm \pi, \pm \pi + iR$, prove that

$$\int_0^\pi \frac{x \sin x}{1+a^2-2a \cos x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{a} \log(1+a) & \text{if } 0 < a < 1 \\ \frac{\pi}{a} \log\left(\frac{1+a}{a}\right) & \text{if } a > 1 \end{cases}$$

15

- (c) यदि $z = a$ एक $f(z)$ का आवश्यक विचित्र बिन्दु है, तो सिद्ध कीजिए दिये हुए धनात्मक अंकों r, ϵ तथा किसी स्वेच्छ अचर I के लिये, वृत्त $|z - a| < r$ के लिये एक बिन्दु है जहाँ पर $|f(z) - I| < \epsilon$ । यह भी दर्शाइये कि फलन e^z के लिये $z = \infty$ पर एक आवश्यक वियुक्त विचित्र बिन्दु है।

10

If $z = a$ is an essential singularity of $f(z)$, prove that given any positive numbers r, ϵ and any arbitrary constant I , there is a point in the circle $|z - a| < r$ at which $|f(z) - I| < \epsilon$. Also show that the function e^z has an isolated essential singularity at $z = \infty$.

खण्ड - ब / Section - B

5. (a) हल कीजिए $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x+3y} + \sin(2x+y) + xy$. 15

Solve $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial x} + 2 \frac{\partial z}{\partial y} = e^{2x+3y} + \sin(2x+y) + xy$.

- (b) $q^2r - 2pq + p^2t = 0$ का समाकल $y + x f(z) = F(z)$ के प्रारूप पर प्राप्त कीजिए। यह भी दर्शाइये कि इससे एक पृष्ठ उन सरल रेखाओं से जनित होता है, जो निश्चित तल के समान्तर है। 15

Obtain the integral of $q^2r - 2pq + p^2t = 0$ in the form $y + x f(z) = F(z)$ and show that this represents a surface generated by straight lines that are parallel to fixed plane.

(c) आंशिक अवकल समीकरण $(2xy - 1)p + (z - 2x^2)q = 2(x - yz)$ का सामान्य

समाकल निकालिये तथा विशेष समाकल भी ज्ञात कीजिए जो रेखाओं $x = 1, y = 0$ से जाता हो जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

Find the general integral of the partial differential equation

$(2xy - 1)p + (z - 2x^2)q = 2(x - yz)$ and also find particular integral which passes through the line $x = 1, y = 0$ where $p = \frac{\partial z}{\partial x}, q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

10

6. (a) हैमल्टन के परिवर्तनीय सिद्धान्त का कथन लिखिए। परिवर्तनीय सिद्धान्त से हैमल्टन समीकरण ज्ञात कीजिए।

15

State Hamilton's variational principle. Derive Hamilton's equation from the variational principle.

- (b) छः एक समान बराबर छड़ जो कोणीय बिन्दुओं पर ढीलाई से बँधे हैं एक षडभुज बनाते हैं, जो एक चिकने मेज पर रखा है। एक छड़ के मध्य बिन्दु पर एक हवा का झोंका लाम्बिक रूप से दिया गया, परिणामी गति ज्ञात कीजिए और दर्शाइये कि विपरीत छड़ की गति, झोंका दी गयी छड़ की गति की दसवीं भाग होगी।

15

Six equal uniform rods form a regular hexagon, loosely jointed at the angular points and rest on a smooth table; a blow is given perpendicular to one of them at its middle point, find the resulting motion and show that the opposite rod begins to move with one tenth of the velocity of the rod that is stuck.

- (c) श्रेणी $\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}$ के एक समान अभिसारिता तथा पदानुसार समाकलन का परीक्षण कीजिए।

10

Test for uniform convergence and term by term integration of the series

$$\sum \frac{x}{(n+x^2)^2}.$$

7. (a) एक द्विआयामी असम्पीड़िय बहाव में तरल वेग घटक इस प्रकार दिये हैं $u = x - 4y$ तथा $v = -y - 4x$ । दर्शाइये कि वेग विभव का अस्तित्व है, उसको तथा प्रवाह फलन को ज्ञात कीजिए। प्रवाह फलन तथा वेग विभव में सम्बन्ध भी स्थापित कीजिए।

In a two dimensional incompressible flow, the fluid velocity components are given by $u = x - 4y$ and $v = -y - 4x$. Show that velocity potential exists and determine its form as well as stream function. Also establish relation between stream function and velocity potential.

- (b) असम्पीड़िय बहाव के लिये यूलर के गति समीकरण ज्ञात कीजिए और यह भी दर्शाइये कि इसका समाकलन बरनौली समीकरण देता है।

Find the Euler's equation of motion for incompressible flow and also show that integration of Euler's equation gives Bernoulli's equation.

- (c) त्रिविमीय बहाव के लिये वेग वितरण इस प्रकार है $u = -x$, $v = 2y$ और $w = 3 - z$ । बिन्दु $(1, 1, 2)$ से जाने वाली प्रवाहरेखीय समीकरण को ज्ञात कीजिये।

The velocity distribution for a three-dimensional flow is given by $u = -x$, $v = 2y$ and $w = 3 - z$. Find the equation of the streamline passing through $(1, 1, 2)$.

8. (a) चतुर्थ क्रम के रूपों कुटा विधि का उपयोग करते हुए $y(1)$ तथा $y(2)$ का मान दशमलव के चार स्थान तक ज्ञात कीजिए। दिया है $\frac{dy}{dx} = y - x$, $y(0) = 2$ ।

2/1985

15

By using Runge-Kutta method of order four, find $y(1)$ and $y(2)$ correct to 4 decimal places. Given that $\frac{dy}{dx} = y - x$ with $y(0) = 2$.

2.4149

- (b) दर्शाइये कि लैग्राजे गुणांकों का योग इकाई होता है। यदि फलन $f(x)$ के x के मानों के लिये मान दिये हैं $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(7) = 5$, $f(8) = 4$, तो $f(6)$ का मान ज्ञात कीजिए तथा x का वह मान भी ज्ञात कीजिए जिसके लिये $f(x)$ महत्तम और निम्नतम है।

15

Show that the sum of Lagrangian coefficients is unity. If the values of the function $f(x)$ for values of x are given $f(1) = 4$, $f(2) = 5$, $f(7) = 5$, $f(8) = 4$. Find the value of $f(6)$ and also the value of x for which $f(x)$ is maximum and minimum.

(c) गणितीय समाकलन के लिये सिम्पसन के एक तिहाई नियम को ज्ञात कीजिए और इस प्रकार निम्न सवाल को हल कीजिए :

एक नदी जो 80 मीटर चौड़ी है। गहराई y कि एक तट से दूरी x निम्न सारणी से दी जाती है :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

सिम्पसन के एक तिहाई नियम से नदी के अनुप्रस्थ काट का क्षेत्रफल लगभग ज्ञात कीजिए।
 Derive Simpson's one third rule for numerical integration and hence solve
 the following problem :

A river is 80 m wide. The depth 'y' of the river at a distance x from one bank is given by the following table :

x	0	10	20	30	40	50	60	70	80
y	0	4	7	9	12	15	14	8	3

Find approximately the area of cross section of the river using Simpson's one third rule.