CS (MAIN) EXAM, 2010

Sl. No. 127

C–DTN–K–NUA

MATHEMATICS

Paper—I

Time Allowed : Three Hours	Maximum Marks : 300

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Question Nos. ***1*** *and* ***5*** *which are compulsory, and any* ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

The number of marks carried by each question is indicated at the end of the question.

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols/notations carry their usual meanings, unless otherwise indicated.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section—A

1. Attempt any *five* of the following :

(a) If λ_1, λ_2, λ_3 are the eigenvalues of the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

show that

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \leqq \sqrt{1949}$$ 12

(b) What is the null space of the differentiation transformation

$$\frac{d}{dx} : P_n \to P_n$$

where P_n is the space of all polynomials of degree $\leqq n$ over the real numbers? What is the null space of the second derivative as a transformation of P_n? What is the null space of the kth derivative? 12

(c) A twice-differentiable function $f(x)$ is such that $f(a) = 0 = f(b)$ and $f(c) > 0$ for $a < c < b$. Prove that there is at least one point ξ, $a < \xi < b$, for which $f''(\xi) < 0$. 12

(d) Does the integral $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ exist? If so, find its value. 12

खण्ड—क

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) यदि λ_1, λ_2, λ_3 आव्यूह

$$A = \begin{pmatrix} 26 & -2 & 2 \\ 2 & 21 & 4 \\ 4 & 2 & 28 \end{pmatrix}$$

के अभिलक्षणिक मान हैं, तो दिखाइए कि

$$\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2} \leqq \sqrt{1949}$$ 12

(ख) अवकलन रूपांतरण

$$\frac{d}{dx} : P_n \to P_n$$

की शून्य समष्टि, जहाँ कि P_n वास्तविक संख्याओं पर घात $\leqq n$ के सभी बहुपदों की समष्टि है, क्या है? P_n के रूपांतरण के रूप में द्वितीय अवकलज की शून्य समष्टि क्या है? k वें अवकलज की शून्य समष्टि क्या है? 12

(ग) एक दो बार अवकलनीय फलन $f(x)$ ऐसा है कि $a < c < b$ के लिए $f(a) = 0 = f(b)$ और $f(c) > 0$ है। सिद्ध कीजिए कि कम-से-कम एक बिन्दु ξ, $a < \xi < b$, ऐसा है जिसके लिए $f''(\xi) < 0$. 12

(घ) क्या समाकल $\int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\, dx$ विद्यमान होता है? यदि ऐसा है, तो इसका मान ज्ञात कीजिए। 12

(e) Show that the plane $x + y - 2z = 3$ cuts the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - x + y = 2$ in a circle of radius 1 and find the equation of the sphere which has this circle as a great circle. 12

(f) Show that the function

$$f(x) = [x^2] + |x - 1|$$

is Riemann integrable in the interval $[0, 2]$, where $[\alpha]$ denotes the greatest integer less than or equal to α. Can you give an example of a function that is not Riemann integrable on $[0, 2]$? Compute $\int_0^2 f(x)\, dx$, where $f(x)$ is as above. 12

2. (a) Let $M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$. Find the unique linear transformation $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ so that M is the matrix of T with respect to the basis

$$\beta = \{v_1 = (1, 0, 0),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (1, 1, 1)\}$$

of $\mathbb{R}^3$ and

$$\beta' = \{w_1 = (1, 0),\ w_2 = (1, 1)\}$$

of $\mathbb{R}^2$. Also find $T(x, y, z)$. 20

(b) Show that a box (rectangular parallelopiped) of maximum volume V with prescribed surface area is a cube. 20

(c) Show that the plane $3x + 4y + 7z + \dfrac{5}{2} = 0$ touches the paraboloid $3x^2 + 4y^2 = 10z$ and find the point of contact. 20

(ङ) दिखाइए कि समतल $x+y-2z=3$ गोलक $x^2+y^2+z^2-x+y=2$ को त्रिज्या 1 के वृत्त में काटता है और उस गोलक का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसमें यह वृत्त एक वृहत् वृत्त होता है। 12

(च) दिखाइए कि फलन

$$f(x)=[x^2]+|x-1|$$

अन्तराल [0, 2] में रीमान-समाकलनीय है, जहाँ $[\alpha]$, α से कम या इसके समान महत्तम पूर्णांक निर्दिष्ट करता है। क्या आप एक ऐसे फलन का उदाहरण दे सकते हैं जो कि [0, 2] पर रीमान-समाकलनीय नहीं है? $\int_0^2 f(x)\,dx$ का परिकलन कीजिए, जहाँ $f(x)$ उपर्युक्त जैसा है। 12

2. (क) मान लीजिए $M=\begin{pmatrix}4 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix}$ है। अद्वितीय रैखिक रूपांतरण $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ ज्ञात कीजिए, जिससे कि M $\mathbb{R}^2$ के

$$\beta'=\{w_1=(1,0),\ w_2=(1,1)\}$$

और $\mathbb{R}^3$ के

$$\beta=\{v_1=(1,0,0),\ v_2=(1,1,0),\ v_3=(1,1,1)\}$$

आधार के साथ T का आव्यूह है। $T(x, y, z)$ को भी ज्ञात कीजिए। 20

(ख) दिखाइए कि नियत पृष्ठीय क्षेत्रफल वाले अधिकतम आयतन V का एक संदूक (आयतफलकी समांतरषट्फलक) एक घन होता है। 20

(ग) दिखाइए कि समतल $3x+4y+7z+\frac{5}{2}=0$ परवलयज $3x^2+4y^2=10z$ को स्पर्श करता है और स्पर्श-बिन्दु ज्ञात कीजिए। 20

3. (a) Let A and B be $n \times n$ matrices over reals. Show that $I - BA$ is invertible if $I - AB$ is invertible. Deduce that AB and BA have the same eigenvalues. 20

(b) Let D be the region determined by the inequalities $x > 0$, $y > 0$, $z < 8$ and $z > x^2 + y^2$. Compute

$$\iiint_D 2x \, dx \, dy \, dz$$

20

(c) Show that every sphere through the circle

$$x^2 + y^2 - 2ax + r^2 = 0, \quad z = 0$$

cuts orthogonally every sphere through the circle

$$x^2 + z^2 = r^2, \; y = 0$$

20

4. (a) (i) In the n-space $\mathbb{R}^n$, determine whether or not the set

$$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1\}$$

is linearly independent.

(ii) Let T be a linear transformation from a vector space V over reals into V such that $T - T^2 = I$. Show that T is invertible. 20

(b) If $f(x, y)$ is a homogeneous function of degree n in x and y, and has continuous first- and second-order partial derivatives, then show that

(i) $x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$

3. (क) माना कि A और B वास्तविक संख्याओं पर $n \times n$ आव्यूह हैं। दिखाइए कि $I - BA$ व्युत्क्रमणीय है, यदि $I - AB$ व्युत्क्रमणीय है। निगमन कीजिए कि AB और BA के समान अभिलक्षणिक मान हैं। 20

(ख) माना कि D असमिकाओं $x > 0$, $y > 0$, $z < 8$ और $z > x^2 + y^2$ द्वारा निर्धारित प्रदेश है। $\iiint_D 2x \, dx \, dy \, dz$ का परिकलन कीजिए। 20

(ग) दिखाइए कि वृत्त

$$x^2 + y^2 - 2ax + r^2 = 0, \ \ z = 0$$

से होता हुआ हरेक गोलक वृत्त

$$x^2 + z^2 = r^2, \ y = 0$$

से होते हुए हरेक गोलक को लाम्बिकतः काटता है। 20

4. (क) *(i)* n-विम समष्टि $\mathbb{R}^n$ में तय कीजिए कि समुच्चय

$\{e_1 - e_2, e_2 - e_3, \cdots, e_{n-1} - e_n, e_n - e_1\}$

एकघाततः स्वतंत्र है या नहीं।

(ii) माना कि T वास्तविक संख्याओं पर एक सदिश समष्टि V से V में एक ऐसा रैखिक रूपांतरण है कि $T - T^2 = I$. दिखाइए कि T व्युत्क्रमणीय है। 20

(ख) यदि $f(x, y)$, x और y में n घात का एक समघात फलन है और इसके संतत प्रथम तथा द्वितीय कोटि के आंशिक अवकलज हैं, तो दिखाइए कि

(i) $x \dfrac{\partial f}{\partial x} + y \dfrac{\partial f}{\partial y} = nf$

(ii) $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$= n(n-1)f$$

20

(c) Find the vertices of the skew quadrilateral formed by the four generators of the hyperboloid

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 49$$

passing through (10, 5, 1) and (14, 2, − 2). 20

Section—B

5. Attempt any *five* of the following :

(a) Consider the differential equation

$$y' = \alpha x, \quad x > 0$$

where α is a constant. Show that—

(i) if $\phi(x)$ is any solution and $\psi(x) = \phi(x) e^{-\alpha x}$, then $\psi(x)$ is a constant;

(ii) if $\alpha < 0$, then every solution tends to zero as $x \to \infty$. 12

(b) Show that the differential equation

$$(3y^2 - x) + 2y(y^2 - 3x)y' = 0$$

admits an integrating factor which is a function of $(x + y^2)$. Hence solve the equation. 12

(ii) $x^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} + y^2 \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

$$= n(n-1)f$$

20

(ग) (10, 5, 1) और (14, 2, − 2) से गुजरते हुए अतिपरवलयज

$$\frac{x^2}{4} + y^2 - z^2 = 49$$

के चार जनकों द्वारा बने हुए विषमतलीय चतुर्भुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए। 20

खण्ड—ख

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) अवकल समीकरण

$$y' = \alpha x, \quad x > 0$$

जहाँ α एक अचर है, पर विचार कीजिए। दिखाइए कि—

(i) यदि $\phi(x)$ कोई एक हल है और $\psi(x) = \phi(x)\, e^{-\alpha x}$, तो $\psi(x)$ एक अचर है;

(ii) यदि $\alpha < 0$, तो हरेक हल शून्य की ओर प्रवृत्त होता है जैसे ही $x \to \infty$. 12

(ख) दिखाइए कि अवकल समीकरण

$$(3y^2 - x) + 2y(y^2 - 3x)y' = 0$$

का एक समाकलन गुणक होता है जो कि $(x + y^2)$ का एक फलन है। अतः समीकरण को हल कीजिए। 12

(c) Find κ / τ for the curve

$$\vec{r}(t) = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + bt\,\vec{k}$$ 12

(d) If v_1, v_2, v_3 are the velocities at three points A, B, C of the path of a projectile, where the inclinations to the horizon are α, $\alpha - \beta$, $\alpha - 2\beta$ and if t_1, t_2 are the times of describing the arcs AB, BC respectively, prove that

$$v_3 t_1 = v_1 t_2 \text{ and } \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} = \frac{2\cos\beta}{v_2}$$ 12

(e) Find the directional derivative of

$$f(x, y) = x^2 y^3 + xy$$

at the point (2, 1) in the direction of a unit vector which makes an angle of $\pi/3$ with the x-axis. 12

(f) Show that the vector field defined by the vector function

$$\vec{V} = xyz\,(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

is conservative. 12

6. (a) Verify that

$$\frac{1}{2}(Mx + Ny)\,d(\log_e(xy)) + \frac{1}{2}(Mx - Ny)\,d(\log_e(\tfrac{x}{y})) = M\,dx + N\,dy$$

Hence show that—

(i) if the differential equation $M\,dx + N\,dy = 0$ is homogeneous, then $(Mx + Ny)$ is an integrating factor unless $Mx + Ny \equiv 0$;

(ग) वक्र

$$\vec{r}(t) = a\cos t\ \vec{i} + a\sin t\ \vec{j} + bt\ \vec{k}$$

के लिए κ / τ ज्ञात कीजिए। 12

(घ) यदि v_1, v_2, v_3 एक प्रक्षेप्य के पथ के तीन बिन्दुओं A, B, C पर वेग हैं, जहाँ क्षितिज से आनतियाँ α, $\alpha - \beta$, $\alpha - 2\beta$ हैं और यदि t_1, t_2 क्रमशः चाप AB, BC के निर्माण करने के समय हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

$$v_3 t_1 = v_1 t_2 \text{ और } \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_3} = \frac{2\cos\beta}{v_2}$$ 12

(ङ) एक मात्रक सदिश की, जो x-अक्ष के साथ $\pi / 3$ का कोण बनाता है, दिशा में बिन्दु (2, 1) पर

$$f(x, y) = x^2 y^3 + xy$$

के दिक्-अवकलज को ज्ञात कीजिए। 12

(च) दिखाइए कि सदिश फलन

$$\vec{V} = xyz(yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k})$$

द्वारा परिभाषित सदिश क्षेत्र संरक्षी होता है। 12

6. (क) सत्यापन कीजिए कि

$$\frac{1}{2}(Mx + Ny)\, d(\log_e(xy)) + \frac{1}{2}(Mx - Ny)\, d(\log_e(\tfrac{x}{y})) = M\,dx + N\,dy$$

अतः दिखाइए कि—

(i) यदि अवकल समीकरण $M\,dx + N\,dy = 0$ समघात है, तो $(Mx + Ny)$ एक समाकलन गुणक है जब तक $Mx + Ny \equiv 0$ नहीं है ;

(ii) if the differential equation $M\,dx + N\,dy = 0$ is not exact but is of the form

$$f_1(x\,y)\,y\,dx + f_2(x\,y)\,x\,dy = 0$$

then $(Mx - Ny)^{-1}$ is an integrating factor unless $Mx - Ny \equiv 0$. 20

(b) A particle slides down the arc of a smooth cycloid whose axis is vertical and vertex lowest. Prove that the time occupied in falling down the first half of the vertical height is equal to the time of falling down the second half. 20

(c) Prove that

$$\operatorname{div}(f\vec{V}) = f(\operatorname{div}\vec{V}) + (\operatorname{grad} f)\cdot\vec{V}$$

where f is a scalar function. 20

7. (a) Show that the set of solutions of the homogeneous linear differential equation

$$y' + p(x)y = 0$$

on an interval $I = [a, b]$ forms a vector subspace W of the real vector space of continuous functions on I. What is the dimension of W ? 20

(b) A particle moves with a central acceleration $\mu(r^5 - 9r)$, being projected from an apse at a distance $\sqrt{3}$ with velocity $3\sqrt{(2\mu)}$. Show that its path is the curve $x^4 + y^4 = 9$. 20

(ii) यदि अवकल समीकरण $M\,dx + N\,dy = 0$ बिल्कुल ठीक नहीं है परन्तु

$$f_1(x\,y)\,y\,dx + f_2(x\,y)\,x\,dy = 0$$

के रूप में है, तो $(Mx - Ny)^{-1}$ एक समाकलन गुणक है जब तक $Mx - Ny \equiv 0$ नहीं है। 20

(ख) एक कण एक चिकने चक्रज के चाप की ओर नीचे सरकता है जिसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है और शीर्ष सबसे नीचे की ओर है। सिद्ध कीजिए कि ऊर्ध्वाधर ऊँचाई के प्रथम आधे तक नीचे गिरने में लगा समय, दूसरे आधे तक नीचे गिरने में लगे समय के बराबर है। 20

(ग) सिद्ध कीजिए कि

$$\text{div}\,(f\,\vec{V}) = f(\text{div}\,\vec{V}) + (\text{grad}\,f)\cdot\vec{V}$$

जहाँ f एक अदिश फलन है। 20

7. (क) दिखाइए कि एक अंतराल $I = [a, b]$ पर समघात रैखिक अवकल समीकरण

$$y' + p(x)y = 0$$

के हलों के समुच्चय, I पर संतत फलनों के वास्तविक सदिश समष्टि के एक सदिश उपसमष्टि W को बनाता है। W की विमा क्या है? 20

(ख) दूरी $\sqrt{3}$ पर एक स्तब्धिका से वेग $3\sqrt{(2\mu)}$ के साथ प्रक्षेपित किये जाने पर एक कण केन्द्रीय त्वरण $\mu(r^5 - 9r)$ के साथ चलता है। दिखाइए कि इसका पथ वक्र $x^4 + y^4 = 9$ है। 20

(c) Use the divergence theorem to evaluate

$$\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n} \, dA$$

where $\vec{V} = x^2 z \vec{i} + y \vec{j} - xz^2 \vec{k}$ and S is the boundary of the region bounded by the paraboloid $z = x^2 + y^2$ and the plane $z = 4y$. 20

8. (a) Use the method of undetermined coefficients to find the particular solution of

$$y'' + y = \sin x + (1 + x^2)e^x$$

and hence find its general solution. 20

(b) A solid hemisphere is supported by a string fixed to a point on its rim and to a point on a smooth vertical wall with which the curved surface of the hemisphere is in contact. If θ and ϕ are the inclinations of the string and the plane base of the hemisphere to the vertical, prove by using the principle of virtual work that

$$\tan \phi = \frac{3}{8} + \tan \theta$$ 20

(c) Verify Green's theorem for

$$e^{-x} \sin y \, dx + e^{-x} \cos y \, dy$$

the path of integration being the boundary of the square whose vertices are $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ and $(0, \pi/2)$. 20

(ग) $\iint_S \vec{V} \cdot \vec{n}\, dA$ का मान निकालने के लिए अपसरण प्रमेय का उपयोग कीजिए, जहाँ $\vec{V} = x^2 z\vec{i} + y\vec{j} - xz^2\vec{k}$ और S परवलयज $z = x^2 + y^2$ तथा समतल $z = 4y$ से परिबद्ध प्रदेश की परिसीमा है। 20

8. (क) $y'' + y = \sin x + (1 + x^2)e^x$ का विशेष हल ज्ञात करने के लिए अनिर्धारित गुणांक विधि का उपयोग कीजिए और फिर इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए। 20

(ख) एक ठोस गोलार्ध, अपनी ही हाल पर एक बिन्दु से बँधी हुई डोरी से और एक चिकनी ऊर्ध्वाधर दीवार पर एक बिन्दु से जिस पर गोलार्ध का वक्र पृष्ठ संपर्क में है, थमा हुआ है। यदि θ और ϕ डोरी और गोलार्ध के समतल आधार के ऊर्ध्वाधर से आनति हैं, तो कल्पित कार्य के सिद्धान्त का उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि

$$\tan\phi = \frac{3}{8} + \tan\theta$$

20

(ग) वर्ग, जिसके शीर्ष $(0, 0)$, $(\pi/2, 0)$, $(\pi/2, \pi/2)$ और $(0, \pi/2)$ हैं, की परिसीमा को समाकलन का पथ लेते हुए $e^{-x}\sin y\, dx + e^{-x}\cos y\, dy$ के लिए ग्रीन-प्रमेय का सत्यापन कीजिए। 20

★ ★ ★

गणित

प्रश्न-पत्र—I

समय : तीन घण्टे	पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

*प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।*

प्रत्येक प्रश्न के लिए नियत अंक प्रश्न के अंत में दिए गए हैं।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीक/संकेत प्रचलित अर्थों में प्रयुक्त हैं, अन्यथा निर्दिष्ट हैं।

Note : English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.

CS (MAIN) EXAM, 2010

Sl. No. 253

C-DTN-K-NUB

MATHEMATICS

Paper II

Time Allowed : Three Hours	*Maximum Marks : 300*

INSTRUCTIONS

Each question is printed both in Hindi and in English.

Answers must be written in the medium specified in the Admission Certificate issued to you, which must be stated clearly on the cover of the answer-book in the space provided for the purpose. No marks will be given for the answers written in a medium other than that specified in the Admission Certificate.

Candidates should attempt Questions 1 and 5 which are compulsory, and any ***three*** *of the remaining questions selecting at least* ***one*** *question from each Section.*

Assume suitable data if considered necessary and indicate the same clearly.

Symbols and notations carry usual meaning, unless otherwise indicated.

All questions carry equal marks.

ध्यान दें : अनुदेशों का हिन्दी रूपान्तर इस प्रश्न-पत्र के पिछले पृष्ठ पर छपा है।

Section 'A'

1. Attempt any *five* of the following :

(a) Let $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ be the set of all real numbers omitting -1. Define the binary relation $*$ on G by $a * b = a + b + ab$. Show $(G, *)$ is a group and it is abelian 12

(b) Show that a cyclic group of order 6 is isomorphic to the product of a cyclic group of order 2 and a cyclic group of order 3. Can you generalize this ? Justify. 12

(c) Discuss the convergence of the sequence $\{x_n\}$

where $x_n = \dfrac{sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{8}$. 12

(d) Define $\{x_n\}$ by $x_1 = 5$ and

$x_{n+1} = \sqrt{4 + x_n}$ for $n > 1$. 12

Show that the sequence converges to $\dfrac{(1 + \sqrt{17})}{2}$.

(e) Show that

$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ is a harmonic function.

Find a harmonic conjugate of $u(x, y)$. Hence find the analytic function f for which $u(x, y)$ is the real part. 12

खण्ड 'क'

1. निम्नलिखित में से किन्हीं **पाँच** के उत्तर दीजिए :

(क) -1 को छोड़कर सभी वास्तविक संख्याओं के समुच्चय को $G = \mathbb{R} - \{-1\}$ लीजिए। G पर द्वयी संबंध $*$ को $a * b = a + b + ab$ द्वारा परिभाषित कीजिए। दिखाइए $(G, *)$ एक समूह है और यह आबेली है। 12

(ख) दिखाइए कि कोटि 6 का एक चक्रीय समूह कोटि 2 के एक चक्रीय समूह और कोटि 3 के एकचक्रीय समूह के गुणनफल से तुल्याकारी होता है। क्या आप इसका व्यापकीकरण कर सकते हैं ? औचित्य बताइए। 12

(ग) अनुक्रम $\{x_n\}$ की अभिसारिता की विवेचना कीजिए,

जहाँ $x_n = \dfrac{sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)}{8}$ । 12

(घ) $\{x_n\}$ को $x_1 = 5$ और

$n > 1$ के लिए $x_{n+1} = \sqrt{4 + x_n}$ से परिभाषित कीजिए।

दिखाइए कि अनुक्रम $\dfrac{\left(1+\sqrt{17}\right)}{2}$ की ओर अभिसरण करता है। 12

(ङ) दिखाइए कि

$u(x, y) = 2x - x^3 + 3xy^2$ एक प्रसंवादी फलन है। $u(x, y)$ का एक प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए। अतः विश्लेषिक फलन f ज्ञात कीजिए जिसके लिए $u(x, y)$ वास्तविक भाग है। 12

(f) Construct the dual of the primal problem :

Maximize $z = 2x_1 + x_2 + x_3$, subject to the constraints $x_1 + x_2 + x_3 \geq 6$, $3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3$, $-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1$, and $x_1, x_2, x_3 \geq 0$. 12

2. (a) Let $\left(\mathbb{R}^*, \cdot\right)$ be the multiplicative group of non-zero reals and $(GL(n, \mathbb{R}), X)$ be the multiplicative group of $n \times n$ non-singular real matrices. Show that the quotient group $GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R})$ and $\left(\mathbb{R}^*, \cdot\right)$ are isomorphic where

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$.

What is the centre of $GL(n, \mathbb{R})$? 15

(b) Let $C = \{f : I = [0, 1] \to \mathbb{R} \mid f \text{ is continuous}\}$.

Show C is a commutative ring with 1 under pointwise addition and multiplication.

Determine whether C is an integral domain. Explain. 15

(c) Define the function

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \quad \text{if } x \neq 0$$

$$= 0, \qquad \text{if } x = 0$$

Find $f'(x)$. Is $f'(x)$ continuous at $x = 0$? Justify your answer. 15

(च) आद्य समस्या :

अधिकतमीकरण कीजिए $z = 2x_1 + x_2 + x_3$ का व्यवरोधकों के अधीन

$x_1 + x_2 + x_3 \geqslant 6,\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 3,$
$-4x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 1,$ और $x_1, x_2, x_3 \geqslant 0$ की प्रतिसमस्या की रचना कीजिए। 12

2. (क) मान लीजिए $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ शून्येतर वास्तविक संख्याओं का गुणनात्मक समूह है और $(GL(n, \mathbb{R}), X)$ $n \times n$ व्युत्क्रमणीय वास्तविक आव्यूहों का गुणनात्मक समूह है। दिखाइए कि विभाग समूह

$GL(n, \mathbb{R})/SL(n, \mathbb{R})$ और $(\mathbb{R}^*, \cdot)$ तुल्याकारी हैं जहां

$SL(n, \mathbb{R}) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) / \det A = 1\}$ है।
$GL(n, \mathbb{R})$ का केन्द्र क्या है ? 15

(ख) लीजिए $C = \{ f : I = [0, 1] \to \mathbb{R} | f$ संतत है$\}$ दिखाइये बिन्दुशः योग और गुणन के अधीन C एक 1 सहित क्रमविनिमेय वलय है। निर्धारण कीजिए कि C एक पूर्णांकीय प्रांत है। समझाइये। 15

(ग) फलन परिभाषित कीजिए

$$f(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \text{ यदि } x \neq 0$$
$$= 0, \qquad \text{यदि } x = 0$$

$f'(x)$ ज्ञात कीजिए। क्या $x = 0$ पर $f'(x)$ संतत है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए। 15

(d) Consider the series $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$.

Find the values of x for which it is convergent and also the sum function.

Is the convergence uniform ? Justify your answer. 15

3. (a) Consider the polynomial ring $Q[x]$. Show $p(x) = x^3 - 2$ is irreducible over Q. Let I be the ideal in $Q[x]$ generated by $p(x)$. Then show that $Q[x]/I$ is a field and that each element of it is of the form $a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ with a_0, a_1, a_2 in Q and $t = x + I$. 15

(b) Show that the quotient ring $\mathbb{Z}[i]/(1+3i)$ is isomorphic to the ring $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ where $\mathbb{Z}[i]$ denotes the ring of Gaussian integers. 15

(c) Let $f_n(x) = x^n$ on $-1 < x \leq 1$ for $n = 1, 2, \ldots$. Find the limit function. Is the convergence uniform ? Justify your answer. 15

(d) Find the maxima, minima and saddle points of the surface $Z = \left(x^2 - y^2\right) e^{(-x^2-y^2)/2}$. 15

4. (a) (i) Evaluate the line integral $\int_c f(z)\, dz$ where $f(z) = z^2$, c is the boundary of the triangle with vertices $A\,(0, 0)$, $B\,(1, 0)$, $C\,(1, 2)$ in that order.

(ii) Find the image of the finite vertical strip $R:\ x = 5$ to $x = 9$, $-\pi \leq y \leq \pi$ of z-plane under exponential function. 15

(घ) श्रेणी $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}$ को विचारिए।

x के वे मान ज्ञात कीजिए जिनके लिए यह अभिसारी है और योग फलन भी ज्ञात कीजिए। क्या अभिसरण एकसमान है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए। 15

3. (क) बहुपद वलय $Q[x]$ मान लीजिए। दिखाइए Q पर $p(x) = x^3 - 2$ अलघुकरणीय है। मान लीजिए I $p(x)$ से जनित $Q[x]$ में गुणजावली है। तो दिखाइए कि $Q[x]/I$ एक क्षेत्र है और कि इसका प्रत्येक अवयव a_0, a_1, a_2 Q में और $t = x + I$ के साथ $a_0 + a_1t + a_2t^2$ रूप का है। 15

(ख) दिखाइए कि विभाग वलय $\mathbb{Z}[i]/(1 + 3i)$ वलय $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ से तुल्याकारी है जहां $\mathbb{Z}[i]$ गाऊसीय संख्याओं के वलय को सूचित करता है। 15

(ग) लीजिए $n = 1, 2, \ldots$ के लिए $-1 < x \leq 1$ पर $f_n(x) = x^n$

सीमा फलन ज्ञात कीजिए। क्या अभिसरण एकसमान है ? अपने उत्तर का औचित्य बताइए। 15

(घ) पृष्ठ $Z = \left(x^2 - y^2\right) e^{(-x^2-y^2)/2}$ के उच्चिष्ठ, निम्निष्ठ और पल्याण बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए। 15

4. (क) (i) रेखा समाकल $\int_C f(z)\, dz$ का मान निकालिए जहां $f(z) = z^2$, c शीर्षों A (0, 0), B (1, 0), C (1, 2), इसी क्रम में, वाले त्रिभुज की परिसीमा है।

(ii) चरघातांकी फलन के अधीन z-समतल की परिमित ऊर्ध्वाधर पट्टी

R: $x = 5$ से $x = 9$ तक, $-\pi \leq y \leq \pi$ का प्रतिबिम्ब ज्ञात कीजिए। 15

(b) Find the Laurent series of the function

$$f(z) = \exp\left[\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \text{ as } \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

for $0 < |z| < \infty$

where $C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - \lambda \sin \phi) d\phi$,

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots$

with λ a given complex number and taking the unit circle C given by $z = e^{i\phi} (-\pi \leq \phi \leq \pi)$ as contour in this region. 15

(c) Determine an optimal transportation programme so that the transportation cost of 340 tons of a certain type of material from three factories F_1, F_2, F_3 to five warehouses W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 is minimized. The five warehouses must receive 40 tons, 50 tons, 70 tons, 90 tons and 90 tons respectively. The availability of the material at F_1, F_2, F_3 is 100 tons, 120 tons, 120 tons respectively. The transportation costs per ton from factories to warehouses are given in the table below :

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
F_1	4	1	2	6	9
F_2	6	4	3	5	7
F_3	5	2	6	4	8

Use Vogel's approximation method to obtain the initial basic feasible solution. 30

(ख) $0 < |z| < \infty$ के लिए फलन

$$f(z) = \exp\left[\frac{\lambda}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \text{ की लौराँ श्रेणी } \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n z^n$$

के रूप में ज्ञात कीजिए जहां एक दी हुई सम्मिश्र संख्या λ के साथ और $z = e^{i\phi} (-\pi \leq \phi \leq \pi)$ से दिए गये एकांक वृत्त C को इस क्षेत्र में परिरेखा के रूप में लेते हुए

$$C_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\phi - \lambda \sin\phi) d\phi,$$

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots..$$

15

(ग) एक इष्टतम परिवहन प्रोग्राम निर्धारित कीजिए जिससे कि किसी एक प्रकार के 340 टन माल को तीन फैक्टरियों F_1, F_2, F_3 से पाँच गोदामों W_1, W_2, W_3, W_4, W_5 तक ले जाने में परिवहन लागत न्यूनतम हो। पांच गोदामों में क्रमश: 40 टन, 50 टन, 70 टन, 90 टन और 90 टन माल पहुंचना चाहिए। F_1, F_2, F_3 पर माल की प्राप्यता क्रमश: 100 टन, 120 टन, 120 टन है। फैक्टरियों से गोदामों तक की प्रति टन परिवहन लागत निम्न सारणी में दी हुई है :

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
F_1	4	1	2	6	9
F_2	6	4	3	5	7
F_3	5	2	6	4	8

प्रारंभिक आधारी सुसंगत हल प्राप्त करने के लिए वोगल की सन्निकटन विधि का उपयोग कीजिए। 30

Section 'B'

5. Attempt any *five* of the following :

(a) Solve the *PDE*

$$\left(D^2 - D'\right)(D - 2D')Z = e^{2x+y} + xy.$$ 12

(b) Find the surface satisfying the *PDE* $\left(D^2 - 2DD' + D'^2\right)Z = 0$ and the conditions that $bZ = y^2$ when $x = 0$ and $aZ = x^2$ when $y = 0$. 12

(c) Find the positive root of the equation

$$10x\, e^{-x^2} - 1 = 0$$

correct up to 6 decimal places by using Newton-Raphson method. Carry out computations only for three iterations. 12

(d) (i) Suppose a computer spends 60 per cent of its time handling a particular type of computation when running a given program and its manufacturers make a change that improves its performance on that type of computation by a factor of 10. If the program takes 100 sec to execute, what will its execution time be after the change ?

(ii) If $A \oplus B = AB' + A'B$, find the value of $x \oplus y \oplus z$. 6+6

(e) A uniform lamina is bounded by a parabolic arc of latus rectum $4a$ and a double ordinate at a distance b from the vertex.

If $b = \frac{a}{3}\left(7 + 4\sqrt{7}\right)$, show that two of the principal axes at the end of a latus rectum are the tangent and normal there. 12

खण्ड 'ख'

5. निम्नलिखित में से किन्हीं **पांच** के उत्तर दीजिए :

(क) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$\left(D^2 - D'\right)(D - 2D')Z = e^{2x+y} + xy$$

का हल निकालिए। 12

(ख) आंशिक अवकल समीकरण (PDE)

$$\left(D^2 - 2DD' + D'^2\right)Z = 0$$

और प्रतिबंधों कि $bZ = y^2$ जब $x = 0$ और $aZ = x^2$ जब $y = 0$ को पूरा करने वाले पृष्ठ को ज्ञात कीजिए। 12

(ग) न्यूटन-रेफ्सन विधि का उपयोग करके समीकरण

$$10x\, e^{-x^2} - 1 = 0$$

के 6 दशमलव अंकों तक संशुद्ध धन मूल को ज्ञात कीजिए। केवल तीन पुनरावृत्तियों तक ही अभिकलन कीजिए। 12

(घ) (i) मान लीजिए कि एक कम्पूटर जब एक दिये हुए प्रोग्राम को चलाते हुए एक विशेष प्रकार के अभिकलन को करने में अपने समय का 60 प्रतिशत समय लगाता है और इसके निर्माता कुछ परिवर्तन करते हैं जिससे इस तरह के अभिकलन पर इसके कार्य में 10 गुना सुधार हो जाता है। यदि प्रोग्राम निष्पादन करने में 100 सेकंड लेता है, तो परिवर्तन के बाद इसका निष्पादन समय क्या होगा ?

(ii) यदि $A \oplus B = AB' + A'B$, तो $x \oplus y \oplus z$ का मान ज्ञात कीजिए। 6+6

(ङ) एक एकसमान पटल नाभिलंब $4a$ वाले परवलयिक चाप और शीर्ष से दूरी b पर एक द्विकोटि से परिबद्ध है। यदि $b = \frac{a}{3}\left(7 + 4\sqrt{7}\right)$ है, तो दिखाइए कि एक नाभिलंब के सिरे पर मुख्य अक्षों में से दो स्पर्श रेखा और वहां पर अभिलंब हैं। 12

(f) In an incompressible fluid the vorticity at every point is constant in magnitude and direction; show that the components of velocity u, v, w are solutions of Laplace's equation. 12

6. (a) Solve the following partial differential equation

$$zp + yq = x$$
$$x_0(s) = s,\ y_0(s) = 1,\ z_0(s) = 2s$$

by the method of characteristics. 20

(b) Reduce the following 2nd order partial differential equation into canonical form and find its general solution

$$x\, u_{xx} + 2x^2 u_{xy} - u_x = 0.$$ 20

(c) Solve the following heat equation

$$u_t - u_{xx} = 0,\quad 0 < x < 2,\quad t > 0$$
$$u(0, t) = u(2, t) = 0,\quad t > 0$$
$$u(x, 0) = x(2 - x),\quad 0 \leqslant x \leqslant 2.$$ 20

7. (a) Given the system of equations

$$2x + 3y = 1$$
$$2x + 4y + z = 2$$
$$2y + 6z + Aw = 4$$
$$4z + Bw = C$$

State the solvability and uniqueness conditions for the system. Give the solution when it exists. 20

(b) Find the value of the integral

$$\int_1^5 \log_{10} x\, dx$$

by using Simpson's $\frac{1}{3}$-rule correct up to 4 decimal places. Take 8 subintervals in your computation. 20

(च) किसी असंपीड्य तरल में भ्रमिलता हरेक बिन्दु पर परिमाण और दिशा में एकसमान है, दिखाइए कि वेग के घटक u, v, w लाप्लास समीकरण के हल हैं। 12

6. (क) अभिलक्षणों की विधि से निम्नलिखित आंशिक अवकल समीकरण

$$zp + yq = x$$

$x_0(s) = s$, $y_0(s) = 1$, $z_0(s) = 2s$ को हल कीजिए। 20

(ख) निम्नलिखित द्विकोटि आंशिक अवकल समीकरण $x\,u_{xx} + 2x^2 u_{xy} - u_x = 0$ को विहित रूप में समानयन कीजिए और इसके व्यापक हल को ज्ञात कीजिए। 20

(ग) निम्नलिखित हीट समीकरण को हल कीजिए :

$$u_t - u_{xx} = 0,\quad 0 < x < 2,\quad t > 0$$
$$u(0, t) = u(2, t) = 0,\quad t > 0$$
$$u(x, 0) = x(2 - x),\quad 0 \leq x \leq 2.$$

20

7. (क) समीकरण निकाय दिया हुआ है :

$$2x + 3y = 1$$
$$2x + 4y + z = 2$$
$$2y + 6z + Aw = 4$$
$$4z + Bw = C$$

निकाय के लिए साधनीयता और अद्वितीयता प्रतिबंधों को बताइए। हल दीजिए जब यह होता है। 20

(ख) सिम्पसन के तिहाई नियम के उपयोग द्वारा समाकल $\int_1^5 \log_{10} x\, dx$ का 4 दशमलव अंकों तक संशुद्ध मान ज्ञात कीजिए। अपने अभिकलन में 8 उपांतरालों को लीजिए। 20

(c) (i) Find the hexadecimal equivalent of the decimal number $(587632)_{10}$

(ii) For the given set of data points

$$(x_1, f(x_1)),\ (x_2, f(x_2)),\ \ldots\ (x_n, f(x_n))$$

write an algorithm to find the value of $f(x)$ by using Lagrange's interpolation formula.

(iii) Using Boolean algebra, simplify the following expressions

(i) $a + a'b + a'b'c + a'b'c'd + \ldots\ldots$

(ii) $x'y'z + yz + xz$

where x' represents the complement of x.

5+10+5

8. (a) A sphere of radius a and mass m rolls down a rough plane inclined at an angle α to the horizontal. If x be the distance of the point of contact of the sphere from a fixed point on the plane, find the acceleration by using Hamilton's equations. 30

(b) When a pair of equal and opposite rectilinear vortices are situated in a long circular cylinder at equal distances from its axis, show that the path of each vortex is given by the equation

$$\left(r^2 \sin^2\theta - b^2\right)\left(r^2 - a^2\right)^2 = 4a^2b^2r^2\sin^2\theta,$$

θ being measured from the line through the centre perpendicular to the joint of the vortices. 30

(ग) (i) दशमलव संख्या $(587632)_{10}$ के तुल्य षट्दशमलव ज्ञात कीजिए।

(ii) दत्त बिन्दुओं के दिये हुए समुच्चय
$(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2)), \ldots\ldots (x_n, f(x_n))$
के लिए लग्रांज अंतर्वेशन-सूत्र के उपयोग से $f(x)$ का मान ज्ञात करने के लिए एक एल्गोरिथ्म लिखिए।

(iii) बूलीय बीजावली का उपयोग करके, निम्नलिखित व्यंजकों को सरल कीजिए :

(i) $a + a'b + a'b'c + a'b'c'd + \ldots\ldots$

(ii) $x'y'z + yz + xz$

जहां x' x के पूरक को सूचित करता है।

5+10+5

8. (क) त्रिज्या a और द्रव्यमान m का एक गोला क्षैतिज से कोण α पर झुके हुए एक रुक्ष समतल पर लुढ़कता है। यदि x समतल पर एक नियत बिन्दु से गोले के स्पर्श बिन्दु की दूरी है, तो हैमिल्टन समीकरण का उपयोग करके त्वरण ज्ञात कीजिए। 30

(ख) जब समान और सम्मुख रेखीय भ्रमिलों का एक युग्म एक लंबे वृत्तीय बेलन में इसके अक्ष से समान दूरी पर स्थित हों, तो दिखाइए कि प्रत्येक भ्रमिल का पथ समीकरण

$$\left(r^2 \sin^2\theta - b^2\right)\left(r^2 - a^2\right)^2 = 4a^2b^2r^2\sin^2\theta$$

से दिया हुआ है, θ मापा जाता है केन्द्र से गुजरने वाली रेखा से जो कि भ्रमिलों के जोड़ पर लंब है। 30

C-DTN-K-NUB

गणित

प्रश्न-पत्र II

समय : तीन घण्टे | पूर्णांक : 300

अनुदेश

प्रत्येक प्रश्न हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपा है।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख उत्तर-पुस्तक के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्रवेश-पत्र पर उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं दिये जाएंगे।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं। बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

यदि आवश्यक हो तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

प्रतीकों और संकेतनों के प्रचलित अर्थ हैं, जब तक अन्यथा न कहा गया हो।

सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : *English version of the Instructions is printed on the front cover of this question paper.*