

गणित

प्रश्न-पत्र—I

MATHEMATICS

Paper—I

नियमित समय : तीन घंटे
Time Allowed : Three Hours

अधिकतम अंक : 250
Maximum Marks : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें आठ (8) प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा हिन्दी और अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर किन्हीं तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (न्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख्य-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे। यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, सकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त है।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

There are EIGHT questions divided in Two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

SECTION—A

Q. 1(a) दिए गए सदिश $V_1 = (1, 1, 2, 4)$, $V_2 = (2, -1, -5, 2)$, $V_3 = (1, -1, -4, 0)$ तथा $V_4 = (2, 1, 1, 6)$ रैखिकत : स्वतंत्र हैं। क्या यह सत्य है ? अपने उत्तर के पक्ष में तर्क दीजिये।

The vectors $V_1 = (1, 1, 2, 4)$, $V_2 = (2, -1, -5, 2)$, $V_3 = (1, -1, -4, 0)$ and $V_4 = (2, 1, 1, 6)$ are linearly independent. Is it true ? Justify your answer. 10

Q. 1(b) निम्नलिखित आव्यूह को पंक्ति सोपानक रूप में समानीत कीजिये और तत्पश्चात् इसकी कोटि निकालिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 14 & 17 \end{bmatrix}.$$

Reduce the following matrix to row echelon form and hence find its rank :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 14 & 17 \end{bmatrix}.$$

10

Q. 1(c) निम्नलिखित सीमा का मान निकालिए :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}.$$

Evaluate the following limit :

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(2 - \frac{x}{a} \right)^{\tan\left(\frac{\pi x}{2a}\right)}.$$

10

Q. 1(d) निम्नलिखित समाकल का मान निकालिए :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}} dx.$$

Evaluate the following integral :

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{\sin x}}{\sqrt[3]{\sin x} + \sqrt[3]{\cos x}} dx.$$

10

Q. 1(e) 'a' के किस धनात्मक मान के लिए, समतल $ax - 2y + z + 12 = 0$, गोलक $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ को स्पर्श करता है। स्पर्श बिन्दु को भी ज्ञात कीजिये।

For what positive value of a, the plane $ax - 2y + z + 12 = 0$ touches the sphere $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z - 3 = 0$ and hence find the point of contact. 10

Q. 2(a) यदि आव्यूह $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ तब आव्यूह A^{30} को ज्ञात कीजिये।

If matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ then find A^{30} . 12

Q. 2(b) एक शंक्वाकार टेंट एक दत्त क्षमता का है। यदि उस टेंट में न्यूनतम कैनवास लगाना हो, तो उसकी ऊँचाई का उसके आधार की त्रिज्या पर अनुपात मालूम कीजिये।

A conical tent is of given capacity. For the least amount of Canvas required, for it, find the ratio of its height to the radius of its base. 13

Q. 2(c) निम्नलिखित आव्यूह के आइगन मानों एवं आइगन सदिशों को ज्ञात कीजिए :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Find the eigen values and eigen vectors of the matrix :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

12

Q. 2(d) यदि शंकु $5yz - 8zx - 3xy = 0$ की तीन परस्पर लम्बवत् जनक रेखाओं में से एक जनक रेखा $6x = 3y = 2z$ हो, तब अन्य दो जनक रेखाओं के समीकरण मालूम कीजिये।

If $6x = 3y = 2z$ represents one of the three mutually perpendicular generators of the cone $5yz - 8zx - 3xy = 0$ then obtain the equations of the other two generators. 13

Q. 3(a) यदि $V = \mathbb{R}^3$ तथा $T \in A(V)$ जहाँ सभी $a_i, A(V)$ के सदस्य हैं। यदि

$$T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 5a_2 + a_3, -3a_1 + a_2 - a_3, -a_1 + 2a_2 + 3a_3)$$

के द्वारा परिभासित हैं। तब आधार

$$V_1 = (1, 0, 1) \quad V_2 = (-1, 2, 1) \quad V_3 = (3, -1, 1)$$

के सापेक्ष आव्यूह T ज्ञात कीजिये।

Let $V = \mathbb{R}^3$ and $T \in A(V)$, for all $a_i \in A(V)$, be defined by

$$T(a_1, a_2, a_3) = (2a_1 + 5a_2 + a_3, -3a_1 + a_2 - a_3, -a_1 + 2a_2 + 3a_3)$$

What is the matrix T relative to the basis

$$V_1 = (1, 0, 1) \quad V_2 = (-1, 2, 1) \quad V_3 = (3, -1, 1) ?$$

12

Q. 3(b) गोलक $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ पर स्थित बिन्दु निकालिए जो बिन्दु $(2, 1, 3)$ से अधिकतम दूरी पर है।

Which point of the sphere $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ is at the maximum distance from the point $(2, 1, 3)$?

13

Q. 3(c) (i) उस समतल का समीकरण निकालिए जो बिन्दुओं $(2, 3, 1)$ एवं $(4, -5, 3)$ से गुजरता है व ख-अक्ष के समान्तर है।

Obtain the equation of the plane passing through the points $(2, 3, 1)$ and $(4, -5, 3)$ parallel to x-axis.

6

(ii) सत्यापित कीजिये कि रेखाएँ :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \quad \text{तथा} \quad \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

समतलीय हैं। यदि हाँ, तो उस समतल का समीकरण ज्ञात कीजिए, जिसमें उपरोक्त दोनों रेखाएँ स्थित हैं।

Verify if the lines :

$$\frac{x-a+d}{\alpha-\delta} = \frac{y-a}{\alpha} = \frac{z-a-d}{\alpha+\delta} \quad \text{and} \quad \frac{x-b+c}{\beta-\gamma} = \frac{y-b}{\beta} = \frac{z-b-c}{\beta+\gamma}$$

are coplanar. If yes, then find the equation of the plane in which they lie.

7

Q. 3(d) निम्न समाकलन का मूल्यांकन करें :

$$\iint_R (x-y)^2 \cos^2(x+y) dx dy$$

जहाँ R एक समचतुर्भुज है, जिसके शीर्ष क्रमवार $(\pi, 0)$ $(2\pi, \pi)$ $(\pi, 2\pi)$ $(0, \pi)$ हैं।

Evaluate the integral

$$\iint_R (x-y)^2 \cos^2(x+y) dx dy$$

where R is the rhombus with successive vertices as $(\pi, 0)$ $(2\pi, \pi)$ $(\pi, 2\pi)$ $(0, \pi)$.

12

Q. 4(a) निम्नलिखित का मान निकालिए :

$$\iint_R \sqrt{|y-x^2|} dx dy$$

जहाँ $R = [-1, 1 ; 0, 2]$.

$$\text{Evaluate } \iint_R \sqrt{|y-x^2|} dx dy$$

where $R = [-1, 1 ; 0, 2]$.

13

Q. 4(b) \mathbb{R}^4 की उस उपसमृष्टि की विमा ज्ञात कीजिये जो समुच्चय

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

द्वारा विस्तारित है। तत्पश्चात् उसका आधार निकालिए।

Find the dimension of the subspace of \mathbb{R}^4 , spanned by the set

$$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (1, 2, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$$

Hence find its basis.

12

Q. 4(c) यदि परवलयज $x^2 + y^2 = 2z$ पर दो लम्बवत् स्पर्शीय समतल एक सीधी रेखा में, जो समतल $x = 0$ में, पर काटते हैं। उस बक्र को प्राप्त कीजिए जिस पर वह सीधी रेखा स्पर्श करती है।

Two perpendicular tangent planes to the paraboloid $x^2 + y^2 = 2z$ intersect in a straight line in the plane $x = 0$. Obtain the curve to which this straight line touches. 13

Q. 4(d) दिए गए फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

के लिए सांतत्य एवं अवकलनीयता का परीक्षण कीजिये।

For the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - x\sqrt{y}}{x^2 + y}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Examine the continuity and differentiability.

12

SECTION—B

Q. 5(a) निम्नलिखित अवकल समीकरण को हल कीजिये :

$$x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1.$$

Solve the differential equation :

$$x \cos x \frac{dy}{dx} + y(x \sin x + \cos x) = 1.$$

10

Q. 5(b) निम्नलिखित अवकल समीकरण का हल निकालिये :

$$(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)dy = 0.$$

Solve the differential equation :

$$(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)dy = 0.$$

10

Q. 5(c) एक पिंड, जो सरल आवर्त गति (एस.एच.एम.) कर रहा है, उसका आयाम ‘a’ व आवर्तकाल ‘T’ है।

जब माध्य स्थिति से उसकी दूरी $\frac{2}{3}a$ हो, तब उसका वेग तिगुना कर दिया जाय, परंतु आवर्तकाल को न बदला जाए, तो उसका नया आयाम मालूम कीजिये।

A body moving under SHM has an amplitude ‘a’ and time period ‘T’. If the velocity is trebled, when the distance from mean position is $\frac{2}{3}a$, the period being unaltered, find the new amplitude.

10

Q. 5(d) 8 kg भार की एक छड़, ऊर्ध्वधर तल में एक सिरे पर लगे कब्जे पर चलायमान है। उसके दूसरे सिरे पर लम्बाई l की एक रस्सी के द्वारा कब्जे से b ऊँचाई पर, ऊर्ध्व दिशा में छड़ के आधे के बराबर भार बाँधा गया है। रस्सी में तनाव ज्ञात कीजिये।

A rod of 8 kg is movable in a vertical plane about a hinge at one end, another end is fastened a weight equal to half of the rod, this end is fastened by a string of length l to a point at a height b above the hinge vertically. Obtain the tension in the string.

10

Q. 5(e) निम्न दो सतहें $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ तथा $z = x^2 + y^2 - 3$ के बीच बिन्दु (2, -1, 2) पर कोण ज्ञात कीजिये।

Find the angle between the surfaces $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ and $z = x^2 + y^2 - 3$ at (2, -1, 2).

10

Q. 6(a) यदि $(x + y)^a$, निम्न अवकल समीकरण $(4x^2 + 2xy + 6y)dx + (2x^2 + 9y + 3x)dy = 0$ का समाकलन गुणांक है तो 'a' का मान मालूम कीजिये। तत्पश्चात् अवकल समीकरण का हल निकालिए।

Find the constant a so that $(x + y)^a$ is the Integrating factor of $(4x^2 + 2xy + 6y)dx + (2x^2 + 9y + 3x)dy = 0$ and hence solve the differential equation.

12

Q. 6(b) दो बराबर भार की सीढ़ियाँ, जिसमें प्रत्येक का भार 4 kg है, बिंदु A पर एक दूसरे के साथ झुकाकर रखी गई हैं। उनके दूसरे सिरे एक खुरदुरे फर्श पर हैं, जिसका घर्षण गुणांक μ है। दोनों सीढ़ि के बीच 60° का कोण है। कितना भार उस शीर्ष बिंदु A पर रखा जाए कि वह सीढ़ियों के फ़िसल जाने का कारण बन जाय।

Two equal ladders of weight 4 kg each are placed so as to lean at A against each other with their ends resting on a rough floor, given the coefficient of friction is μ . The ladders at A make an angle 60° with each other. Find what weight on the top would cause them to slip.

13

Q. 6(c) यदि दो पृष्ठ $\lambda x^2 - \mu yz = (\lambda + 2)x$ तथा $4x^2y + z^3 = 4$ बिंदु $(1, -1, 2)$ पर लम्बवत् काटती हों, तो λ व μ का मान निकालिए।

Find the value of λ and μ so that the surfaces $\lambda x^2 - \mu yz = (\lambda + 2)x$ and $4x^2y + z^3 = 4$ may intersect orthogonally at $(1, -1, 2)$.

12

Q. 6(d) एक पिंड, बल के केंद्र से अन्तर्भूत, जो दूरी के विलोमानुपाती आकर्षित करता है; 'a' दूरी से विरामअवस्था से चलना शुरू करता है। उसका केन्द्र पर आगमन का समय मालूम कीजिये।

A mass starts from rest at a distance 'a' from the centre of force which attracts inversely as the distance. Find the time of arriving at the centre.

13

Q. 7(a) (i) निम्नलिखित का लाप्लास विलोम रूपांतर प्राप्त कीजिये :

$$\left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) + \frac{s}{s^2 + 25} e^{-\pi s} \right\}.$$

(ii) लाप्लास रूपांतर का प्रयोग करके, निम्नलिखित

$$y'' + y = t, y(0) = 1, y'(0) = -2$$

का हल निकालिए।

(i) Obtain Laplace Inverse transform of

$$\left\{ \ln\left(1 + \frac{1}{s^2}\right) + \frac{s}{s^2 + 25} e^{-\pi s} \right\}.$$

(ii) Using Laplace transform, solve

$$y'' + y = t, y(0) = 1, y'(0) = -2.$$

6+6=12

- Q. 7(b) एक कण, एक ऐसी पहाड़ी के आधार पर एक बिन्दु से, प्रक्षेपित किया जाता है, जिसकी प्रवणता एक लम्ब वृत्ताकार शंकु की है जिसकी अक्षीय रेखा ऊर्ध्वाधर है। प्रक्षेप शंकु के शीर्षबिन्दु छूते हुए व पहाड़ी के आधार पर किसी दूसरे बिन्दु से जा टकराता है। यदि शंकु का अर्धशीर्ष कोण 30° व ऊँचाई h हो, तो प्रक्षेप का प्रारंभिक वेग u व उसका प्रक्षेप कोण निर्धारण कीजिये।

A particle is projected from the base of a hill whose slope is that of a right circular cone, whose axis is vertical. The projectile grazes the vertex and strikes the hill again at a point on the base. If the semivertical angle of the cone is 30° , h is height, determine the initial velocity u of the projection and its angle of projection.

13

- Q. 7(c) एक सदिश क्षेत्र

$$\bar{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}$$

के दिया गया है। सत्यापित कीजिए कि यह क्षेत्र \bar{F} अधूर्णी है या नहीं। अतः अदिश विभव ज्ञात कीजिये।

A vector field is given by

$$\bar{F} = (x^2 + xy^2)\hat{i} + (y^2 + x^2y)\hat{j}$$

Verify that the field \bar{F} is irrotational or not. Find the scalar potential.

12

- Q. 7(d) अवकल समीकरण

$$x = py - p^2$$

का हल निकालिए, जहाँ $p = \frac{dy}{dx}$.

Solve the differential equation

$$x = py - p^2 \text{ where } p = \frac{dy}{dx}$$

13

- Q. 8(a) उस अंतहीन शृंखला की लम्बाई ज्ञात कीजिये, जो एक 'a' विज्य वाली वृत्तीय घिरनी पर इस तरह से टैगी है, कि वह उस घिरनी के दो-तिहाई परिधि के स्पर्श में रहे।

Find the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius 'a' so as to be in contact with the two-thirds of the circumference of the pulley.

12

- Q. 8(b) एक कण, एक बल के अधीन, एक नियत केन्द्र की ओर जो दूरी के समानुपाती है, पर चलता है। यदि कण के मार्ग के दो एप्साइडल दूरियाँ a, b हैं ($a > b$), तब मार्ग का समीकरण ज्ञात करो।

A particle moves in a plane under a force, towards a fixed centre, proportional to the distance. If the path of the particle has two apsidal distances a, b ($a > b$), then find the equation of the path.

13

Q. 8(c) निम्नलिखित का मान निकालें

$$\int_C e^{-x} (\sin y \, dx + \cos y \, dy)$$

जहाँ C एक आयत है, जिसके $(0, 0), (\pi, 0), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ शीर्ष हैं।

Evaluate $\int_C e^{-x} (\sin y \, dx + \cos y \, dy)$, where C is the rectangle with vertices $(0, 0), (\pi, 0),$

$$\left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

12

Q. 8(d) निम्न अवकल समीकरण को हल करें :

$$x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 6x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 + 2\cos(\log_e x).$$

Solve :

$$x^4 \frac{d^4y}{dx^4} + 6x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + 4x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} - 4y = x^2 + 2\cos(\log_e x).$$

13

गणित (प्रश्न-पत्र-II)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र सम्बन्धी विशेष अनुदेश

(उत्तर देने के पूर्व निम्नलिखित निर्देशों को कृपया सावधानीपूर्वक पढ़ें)

दो खण्डों में कुल आठ प्रश्न दिए गए हैं जो हिन्दी एवं अंग्रेजी दोनों में छपे हैं।

उम्मीदवार को कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या 1 और 5 अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम एक प्रश्न चुनकर तीन प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के लिए नियत अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी प्राधिकृत माध्यम में लिखे जाने चाहिए, जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू. सी. ०. ५०) पुस्तिका के मुख्य पृष्ठ पर निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। प्राधिकृत माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको स्पष्टतया निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के प्रयासों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। आंशिक रूप से दिए गए प्रश्नों के उत्तर को भी मान्यता दी जाएगी यदि उसे काटा न गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़े गए कोई पृष्ठ अथवा पृष्ठ के भाग को पूर्णतः काट दीजिए।

MATHEMATICS (PAPER-II)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. 1 and 5 are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1. (a) (i) कोटि 8 के चक्रीय समूह G के कितने जनक होते हैं? व्याख्या कीजिए।
 How many generators are there of the cyclic group G of order 8? Explain.
- (ii) कोटि 4 के एक समूह $\{e, a, b, c\}$ को लेते हुए, जहाँ e तत्समक (आइडेंटिटी) है, संयोजन सारणियाँ बनाइए यह दर्शाते हुए कि एक चक्रीय है जबकि दूसरी नहीं है।
 Taking a group $\{e, a, b, c\}$ of order 4, where e is the identity, construct composition tables showing that one is cyclic while the other is not.

5+5=10

- (b) बलय का एक ऐसा उदाहरण दीजिए, जिसका तत्समक है परन्तु जिसके एक उपबलय का भिन्न तत्समक है।
 Give an example of a ring having identity but a subring of this having a different identity.

10

- (c) श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}$ के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

Test the convergence and absolute convergence of the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2 + 1}$.

10

- (d) दर्शाइए कि फलन $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x + y$ प्रसंवादी है। इसका संयुग्मी प्रसंवादी फलन $u(x, y)$ ज्ञात कीजिए। संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ को भी z के पदों में ज्ञात कीजिए।

Show that the function $v(x, y) = \ln(x^2 + y^2) + x + y$ is harmonic. Find its conjugate harmonic function $u(x, y)$. Also, find the corresponding analytic function $f(z) = u + iv$ in terms of z .

10

- (e) निम्नलिखित नियतन समस्या को अधिकतम बिक्री करने के लिए हल कीजिए :
 Solve the following assignment problem to maximize the sales :

10

		Territories (क्षेत्र)				
		I	II	III	IV	V
Salesmen (विक्रेता)	A	3	4	5	6	7
	B	4	15	13	7	6
	C	6	13	12	5	11
	D	7	12	15	8	5
	E	8	13	10	6	9

2. (a) यदि R एक वलय है, जिसका तत्समक अवयव 1 है तथा R आन्धादक R' (R onto R') की एक समाकारिता ϕ है, तो सिद्ध कीजिए R' का तत्समक अवयव $\phi(1)$ है।

If R is a ring with unit element 1 and ϕ is a homomorphism of R onto R' , prove that $\phi(1)$ is the unit element of R' .

15

- (b) क्या फलन

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

रीमान समाकलनीय है? यदि हाँ, तो $\int_0^1 f(x) dx$ का मान ज्ञात कीजिए।

Is the function

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Riemann integrable? If yes, obtain the value of $\int_0^1 f(x) dx$.

15

- (c) फलन $f(z) = \frac{2z-3}{z^2 - 3z + 2}$ के बिन्दु $z=0$ के इर्द-गिर्द सभी संभव टेलर तथा लौराँ श्रेणियों में प्रसारों को ज्ञात कीजिए।

Find all possible Taylor's and Laurent's series expansions of the function

$$f(z) = \frac{2z-3}{z^2 - 3z + 2} \text{ about the point } z=0.$$

20

3. (a) कौशी अवशेष प्रमेय का कथन लिखिए। इसका इस्तेमाल करते हुए समाकल

$$\int_C \frac{e^z + 1}{z(z+1)(z-i)^2} dz; \quad C: |z|=2$$

का मान निकालिए।

State Cauchy's residue theorem. Using it, evaluate the integral

$$\int_C \frac{e^z + 1}{z(z+1)(z-i)^2} dz; \quad C: |z|=2$$

15

- (b) फलनों की श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+n^2x^2)}$ का एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए।

Test the series of functions $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx}{(1+n^2x^2)}$ for uniform convergence.

15

(c) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या पर विचार कीजिए :

$$\text{अधिकतमीकरण कीजिए } Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

बशर्ते कि

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Consider the following linear programming problem :

$$\text{Maximize } Z = x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 4x_4$$

subject to

$$x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12$$

$$x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

- (i) परिभाषा का इस्तेमाल करते हुए इसके सभी आधारी हल ज्ञात कीजिए। इनमें कौन-से अपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल हैं और कौन-से अनपभ्रष्ट आधारी सुसंगत हल हैं?

Using the definition, find its all *basic solutions*. Which of these are degenerate basic feasible solutions and which are non-degenerate basic feasible solutions?

- (ii) समस्या को हल किए बिना दर्शाइए कि इसका इष्टतम हल है। आधारी सुसंगत हलों में कौन-सा/से इष्टतम हल है/हैं?

Without solving the problem, show that it has an optimal solution. Which of the basic feasible solution(s) is/are optimal?

20

4. (a) क्या निम्नलिखित समुच्चय साधारण योग तथा गुणन के अन्तर्गत पूर्णांकीय प्रांत बनाते हैं? यदि ऐसा है, तो बताइए कि क्या वे क्षेत्र हैं :

Do the following sets form integral domains with respect to ordinary addition and multiplication? If so, state if they are fields : 5+6+4=15

- (i) $b\sqrt{2}$ के रूप की संख्याओं का समुच्चय, जहाँ b परिमेय संख्या है

The set of numbers of the form $b\sqrt{2}$ with b rational

- (ii) सम पूर्णांकों का समुच्चय

The set of even integers

- (iii) धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय

The set of positive integers

- (b) क्षेत्र $x^2 + 2y^2 \leq 1$ पर फलन $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - y$ के निरपेक्ष (ऐक्सोल्यूट) उच्चतम तथा निम्नतम मानों को ज्ञात कीजिए।

Find the absolute maximum and minimum values of the function $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - y$ over the region $x^2 + 2y^2 \leq 1$.

15

- (c) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को एकधा विधि द्वारा हल कीजिए। इसकी द्वैती समस्या लिखिए। दी गई समस्या की द्वितीमात्रा से द्वैती समस्या का द्वितीमात्रा हल भी लिखिए :

$$\text{अधिकतमीकरण कीजिए } Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$

बताएं कि

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Solve the following linear programming problem by the simplex method. Write its dual. Also, write the optimal solution of the dual from the optimal table of the given problem :

20

$$\text{Maximize } Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$

subject to

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 - 2x_3 &\leq 2 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\leq 1 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

खण्ड—B / SECTION—B

5. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$(y^2 + z^2 - x^2)p - 2xyq + 2xz = 0$$

जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, को हल कीजिए।

Solve the partial differential equation

$$(y^2 + z^2 - x^2)p - 2xyq + 2xz = 0$$

where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

10

- (b) $(D^2 + DD' - 2D'^2)u = e^{x+y}$ को हल कीजिए, जहाँ $D = \frac{\partial}{\partial x}$ तथा $D' = \frac{\partial}{\partial y}$.

Solve $(D^2 + DD' - 2D'^2)u = e^{x+y}$, where $D = \frac{\partial}{\partial x}$ and $D' = \frac{\partial}{\partial y}$.

10

- (c) बूलीय व्यंजक $((p \wedge q) \rightarrow r) \vee ((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$ के लिए तीन चरों p, q, r में मुख्य (अथवा विहित) वियोजनीय (डिसजन्क्टिव) प्रसामान्य रूप ज्ञात कीजिए। क्या दिया गया बूलीय व्यंजक एक विरोध है या कि एक पुनरावृत्ति है?

Find the principal (or canonical) disjunctive normal form in three variables p, q, r for the Boolean expression $((p \wedge q) \rightarrow r) \vee ((p \wedge q) \rightarrow \neg r)$. Is the given Boolean expression a contradiction or a tautology?

10

- (d) धनात्मक x -दिशा में एक एकसमान प्रवाह U_0 का विचार कीजिए। त्रिज्या a का एक बेलन मूलबिन्दु पर स्थित है। प्रवाह फलन तथा वेग विभव ज्ञात कीजिए। प्रगतिरोध (स्टैग्नेशन) बिन्दु भी ज्ञात कीजिए।

Consider a uniform flow U_0 in the positive x -direction. A cylinder of radius a is located at the origin. Find the stream function and the velocity potential. Find also the stagnation points.

10

- (e) भर m का एक ठोस एकसमान गोलार्ध $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ के, OZ -अक्ष के इर्द-गिर्द, जड़त्व-आघूर्ण का परिकलन कीजिए।

Calculate the moment of inertia of a solid uniform hemisphere $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$ with mass m about the OZ -axis.

10

6. (a) $p \cos(x+y) + q \sin(x+y) = z$, जहाँ $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ तथा $q = \frac{\partial z}{\partial y}$, को व्यापक हल के लिए हल कीजिए।

Solve for the general solution $p \cos(x+y) + q \sin(x+y) = z$, where $p = \frac{\partial z}{\partial x}$ and $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

15

- (b) हैमिल्टोनियन उपागम का इस्तेमाल करते हुए समतल लोलक समस्या को हल कीजिए तथा दर्शाइए कि H गति का एक स्थिरांक है।

Solve the plane pendulum problem using the Hamiltonian approach and show that H is a constant of motion.

15

- (c) लग्रांज अंतर्वेशी बहुपद ज्ञात कीजिए, जो निम्नलिखित आँकड़ों को समंजन करता है :

x	:	-1	2	3	4
$f(x)$:	-1	11	31	69

$f(1.5)$ ज्ञात कीजिए।

Find the Lagrange interpolating polynomial that fits the following data :

x	:	-1	2	3	4
$f(x)$:	-1	11	31	69

Find $f(1.5)$.

20

7. (a) प्रारंभिक-परिसीमा मान समस्या

$$u_t - u_{xx} + u = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0 \\ u(x, 0) = x(l-x), \quad 0 < x < l$$

का हल ज्ञात कीजिए।

Find the solution of the initial-boundary value problem

$$u_t - u_{xx} + u = 0, \quad 0 < x < l, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = u(l, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$u(x, 0) = x(l-x), \quad 0 < x < l$$

15

(b) पग आकार $h = 0.2$ के साथ रो-कुट्टा चतुर्थोटि विधि का इस्तेमाल करते हुए प्रारंभिक मान समस्या

$$\frac{dy}{dx} = x(y-x), \quad y(2) = 3 \text{ को अंतराल } [2, 2.4] \text{ में हल कीजिए।}$$

Solve the initial value problem $\frac{dy}{dx} = x(y-x)$, $y(2) = 3$ in the interval $[2, 2.4]$

using the Runge-Kutta fourth-order method with step size $h = 0.2$.

15

(c) स्वातंत्र्य कोटि एक के एक निकाय के एक हैमिल्टोनियन का रूप निम्नलिखित है :

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bqpe^{-\alpha t} + \frac{ba}{2} q^2 e^{-\alpha t} (\alpha + be^{-\alpha t}) + \frac{k}{2} q^2$$

जहाँ α, b, k स्थिरांक हैं, q व्यापकीकृत निर्देशांक है तथा p संगत व्यापकीकृत संवेग है।

A Hamiltonian of a system with one degree of freedom has the form

$$H = \frac{p^2}{2\alpha} - bqpe^{-\alpha t} + \frac{ba}{2} q^2 e^{-\alpha t} (\alpha + be^{-\alpha t}) + \frac{k}{2} q^2$$

where α, b, k are constants, q is the generalized coordinate and p is the corresponding generalized momentum.

(i) इस हैमिल्टोनियन के संगत एक लगांजी ज्ञात कीजिए।

Find a Lagrangian corresponding to this Hamiltonian.

(ii) एक तुल्य लगांजी ज्ञात कीजिए, जो कि समय पर स्पष्ट रूप से आश्रित नहीं है।

Find an equivalent Lagrangian that is not explicitly dependent on time.

10+10=20

8. (a) द्वितीय-कोटि आंशिक अवकल समीकरण

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

को विहित रूप में समानीत कीजिए तथा इसका व्यापक हल ज्ञात कीजिए।

Reduce the second-order partial differential equation

$$x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2xy \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + x \frac{\partial u}{\partial x} + y \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

into canonical form. Hence, find its general solution.

15

(b) गाउस-सीडेल विधि का इस्तेमाल करते हुए निकाय

$$\begin{aligned}10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9\end{aligned}$$

का हल ज्ञात कीजिए (चार पुनरावृत्ति कीजिए)।

Find the solution of the system

$$\begin{aligned}10x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 &= 3 \\-2x_1 + 10x_2 - x_3 - x_4 &= 15 \\-x_1 - x_2 + 10x_3 - 2x_4 &= 27 \\-x_1 - x_2 - 2x_3 + 10x_4 &= -9\end{aligned}$$

using Gauss-Seidel method (make four iterations).

15

(c) दर्शाइए कि अक्षतः सममित गति में सांतत्य समीकरण के कारण धारा फलन का अस्तित्व है। धारा फलन के पदों में बेग घटकों को व्यक्त कीजिए। यदि प्रवाह अधूर्णनी है, तो समीकरण ज्ञात कीजिए जो कि धारा फलन द्वारा सन्तुष्ट होती है।

In an axisymmetric motion, show that stream function exists due to equation of continuity. Express the velocity components in terms of the stream function.

Find the equation satisfied by the stream function if the flow is irrotational. 20

★ ★ ★