

Note : (i) Attempt five questions in all. All questions carry equal marks. Question number 1 is compulsory. Answer any two questions from Part-I and two questions from Part-II. The parts of the same question must be answered together and must not be interposed between answers to other questions.

(ii) In case of any discrepancy in the English and Hindi versions, English version will be taken as final.

नोट : (i) पाँच प्रश्न हल कीजिए। सभी के अंक समान हैं। प्रश्न संख्या 1 अनिवार्य है। भाग-I से दो प्रश्नों तथा भाग-II से दो प्रश्नों का उत्तर दीजिए। एक प्रश्न के सभी अंशों का उत्तर एक साथ दीजिए। एक प्रश्न के अंशों का उत्तर दूसरे प्रश्न के अंशों के मध्य न ले जायें।

(ii) यदि अंग्रेजी एवं हिन्दी विवरण में कोई विसंगति हो, तो अंग्रेजी विवरण अंतिम माना जायेगा।

1. Answer any four of the following :

[7.5x4=30]

किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

(a) Prove that matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ is Hermitian.

सिद्ध कीजिए कि मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1 & 1-i & 2 \\ 1+i & 3 & i \\ 2 & -i & 0 \end{bmatrix}$ हरमीशन मैट्रिक्स है।

(b) Find the volume cut off from the paraboloid :

$$x^2 + \frac{y^2}{4} + z = 1 \text{ by the plane } z = 0$$

समतल $z = 0$ द्वारा ढोस अनुवृत्त $x^2 + \frac{y^2}{4} + z = 1$ से कटे भाग का आयतन ज्ञात कीजिए।

- (c) Why do we use the arc length parameters instead of general parameter 't' in defining the curvature and torsion?

साधारण प्राचल 't' के स्थान पर चाप लम्बाई का प्रयोग क्यों किया जाता है, इसे वक्रता और टॉर्शन में परिभाषित कीजिए।

- (d) If $z = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$, then prove that

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

यदि $z = x^2 \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)$ है, तो सिद्ध कीजिए :

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

- (e) The overall percentage of failures in a certain examination is 20% of six candidates appear in the examination, what is the probability that at five pass the examination.

किसी परीक्षा में अनुत्तीर्ण छात्रों का प्रतिशत 20% है। यदि उस परीक्षा में छः छात्र उपस्थित होते हैं तो 5 छात्रों के पास होने की सम्भावना क्या है ?

Part-I / भाग-I

2. (a) Express the matrix $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 5-5i \\ 2i & 2+i & 4+2i \\ -1+i & -4 & 7 \end{bmatrix}$ as the sum of Hermitian matrix and skew-Hermitian matrix.

[10]

मैट्रिक्स $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 & 5-5i \\ 2i & 2+i & 4+2i \\ -1+i & -4 & 7 \end{bmatrix}$ हरमीशन मैट्रिक्स का योग और स्क्यू हरमीशन मैट्रिक्स की तरह प्रस्तुत कीजिए।

- (b) Define a unitary matrix. If $N = \begin{bmatrix} 0 & 1+2i \\ -1+2i & 0 \end{bmatrix}$ is matrix, show that $(I - N)(I + N)^{-1}$ is a unitary matrix, where I is an identity matrix.

[10]

यूनिटरी मैट्रिक्स को परिभाषित कीजिए। यदि $N = \begin{bmatrix} 0 & 1+2i \\ -1+2i & 0 \end{bmatrix}$ एक मैट्रिक्स है तो सिद्ध कीजिए $(I-N)(I+N)^{-1}$ एक यूनिटरी मैट्रिक्स है जहाँ I एक इकाई मैट्रिक्स है।

(c) Find the eigen values of orthogonal matrix : [10]

$$A = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

ऑर्थोगोनल मैट्रिक्स का आइजन मान निकालिए :

$$\text{आर्थोगोनल मैट्रिक्स} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

3. (a) Obtain the Taylor's expression of $\tan \frac{-y}{x}$ about (1, 1) upto and including the second degree terms. Hence compute $f(1.1, 0.9)$. [10]

दो डिग्री पद तक बिन्दु (1, 1) पर $\tan \frac{-y}{x}$ के टेलर पद को प्राप्त कीजिए तथा $f(1.1, 0.9)$ पर गणना कीजिए।

(b) Examine $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ for maximum and minimum values. [10]

फलन $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$ के लिए महत्तम और लघुत्तम मान ज्ञात कीजिए।

(c) Find the intersection point of ellipse of the form $\frac{(x-3)^3}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ and a circle of the form $(x-1)^2 + y^2 = 4^2$. [10]

दीर्घवृत्त $\frac{(x-3)^3}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$ और वृत्त $(x-1)^2 + y^2 = 4^2$ का कटान बिन्दु ज्ञात कीजिए।

4. (a) Solve :

$$(2xy \cos x^2 - 2xy + 1) dx + (\sin x^2 - x^2 + 3) dy = 0.$$

हल कीजिए :

[10]

$$(2xy \cos x^2 - 2xy + 1) dx + (\sin x^2 - x^2 + 3) dy = 0.$$

(3)

- (b) The arch of bridge over a river is in the form of semi circle of radius 3 m. The bridge width is 10 m. Due to a flood the water level raises 1.5 m above the crest of the arch. Calculate (a) The upward force the arch, (b) The horizontal thrust on half of the arch. [10]

एक नदी पर एक पुल की त्रिज्या 3 m के अर्धवृत्त के रूप में है। पुल की चौड़ाई 10 m है। बाढ़ के कारण जल स्तर चाप के शिखर से 1.5 m ऊपर उठ जाता है तो ज्ञात कीजिए : (a) ऊपर की ओर आर्क बल, (b) आर्क के आधे हिस्से पर क्षैतिज थ्रस्ट।

- (c) The planet Mercury travels around the Sun with mean orbital radius of 5.8×10^{10} m. The mass of the Sun is 1.99×10^{30} kg. Use the Newton's version of Kepler's third law to determine how long it takes mercury to orbit the Sun. Give your answer in earth days. [10]

बुध ग्रह सूर्य के चारों ओर 5.8×10^{10} m के कक्षीय त्रिज्या के साथ भ्रमण करता है। सूर्य का द्रव्यमान 1.99×10^{30} kg है। केपलर के third नियम के न्यूटन का प्रयोग करते हुए, बुध को सूर्य का परिक्रमण करने में कितना समय लगेगा। उत्तर पृथ्वी के दिनों के अनुसार दीजिए।

Part-II / भाग-II

5. (a) If $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = yz + zx + xy$. Prove that grad u , grad v and grad w are coplanar vector. [10]

यदि $u = x + y + z$, $v = x^2 + y^2 + z^2$, $w = yz + zx + xy$ है तो सिद्ध कीजिए grad u , grad v और grad w एक वेक्टर है।

- (b) State and verify Green's theorem in plane for $\oint (3x^2 - 8y^2)dx + (4x - 6xy)dy$ where C is the boundary of the region bounded by $x \geq 0$, $y \leq 0$ and $2x - 3y = 6$. [10]

प्लेन $\oint (3x^2 - 8y^2)dx + (4x - 6xy)dy$ के लिए, ग्रीन थ्योरम का कथन और उसे सत्यापित कीजिए जहाँ C एक $x \geq 0$, $y \leq 0$ और $2x - 3y = 6$ से घिरा क्षेत्र है।

- (c) Show that the real and imaginary parts of the function $w = \log z$ satisfy the Cauchy Riemann equations when z is not zero. Find its derivative. [10]

सिद्ध कीजिए कि फलन $w = \log z$ का वास्तविक और काल्पनिक भाग Cauchy Riemann समीकरण को संतुष्ट करता है जहाँ z एक zero नहीं है। इसका derivative ज्ञात कीजिए।

6. (a) Assume that the power series $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ has radius of convergence 2. Let p be a fixed positive : [10]

माना पावर सीरीज $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ के कनवर्जेन्स की त्रिज्या 2 है जहाँ p एक निश्चित धनात्मक है :

- (i) Compute the radius of convergence for $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^p x^k$

सीरीज $\sum_{k=0}^{\infty} a_k^p x^k$ के लिए कनवर्जेन्स की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

- (ii) Compute the radius of convergence for $\sum_{k=0}^{\infty} p a_k x^k$

सीरीज $\sum_{k=0}^{\infty} p a_k x^k$ के लिए कनवर्जेन्स की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

- (b) Solve $2x^3 - 2.5x - 5 = 0$ for the root in interval $[1, 2]$ by Regula-Falsi method. [10]

रेगुला-फालसी विधि द्वारा अन्तराल $[1, 2]$ में फलन $2x^3 - 2.5x - 5 = 0$ का मूल को हल कीजिए।

- (c) The volume and surface area of sphere are known to be

$$V = \frac{4}{3} \pi a^3 \text{ and } S = 4\pi a^2$$

Where 'a' is the radius of the sphere. Using this information and theorem of Pappus, obtain the centroids of semicircular area and a semicircular curve. [10]

किसी गोले का आयतन और पृष्ठ क्षेत्रफल क्रमशः $V = \frac{4}{3} \pi a^3$ और $S = 4\pi a^2$ दिया है। जहाँ 'a' गोले की त्रिज्या है। Pappus थ्योरम का प्रयोग करके, अर्धवृत्ताकार का क्षेत्रफल और अर्धवृत्ताकार का केन्द्रक ज्ञात कीजिए।

7. (a) The number of children in a region are either 0, 1 or 2 with probability 0.2, 0.3 and 0.5 respectively. The probability of each child being a boy or girl is 0.5. Find the probability that a family has no boy.

[10]

एक क्षेत्र में, परिवार में बच्चों की संख्या 0, 1 या 2 होने की सम्भावना क्रमशः 0.2, 0.3 और 0.5 है। प्रत्येक बच्चे के लड़का और लड़की होने की सम्भावना 0.5 है। परिवार में कोई लड़का न होने की सम्भावना ज्ञात कीजिए।

- (b) Show that in a Poisson distribution with unit mean and the mean deviation about the mean is $\left(\frac{2}{e}\right)$ times the standard deviation. [10]

सिद्ध कीजिए पॉइसन वितरण में इकाई में इकाई माध्य और माध्य विचलन का मान मानक विचलन का $\left(\frac{2}{e}\right)$ गुना का होता है।

- (c) If the probability of defective bolt is 0.1, find (i) the mean, (ii) standard deviation for the distribution bolts in total of 400. [10]

यदि एक दोषपूर्ण बोल्ट की सम्भावना 0.1 है तो ज्ञात कीजिए : (i) माध्य, (ii) कुल 400 वितरण बोल्ट के लिये मानक विचलन।

----- x -----