CS (MAIN) Exam:2016

M–ESC–U–MTH

गणित (प्रश्न-पत्र–I)

समय : तीन घण्टे

अधिकतम अंक : 250

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

(कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें)

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो दो खण्डों में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेजी** दोनों में छपे हैं।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी प्रश्नों में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू० सी० ए०) पुस्तिका के मुखपृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए। उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी। यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो। प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए।

MATHEMATICS (PAPER–I)

Time Allowed : Three Hours

Maximum Marks : 250

QUESTION PAPER SPECIFIC INSTRUCTIONS

(Please read each of the following instructions carefully before attempting questions)

There are EIGHT questions divided in two Sections and printed both in HINDI and in ENGLISH.

Candidate has to attempt FIVE questions in all.

Question Nos. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, THREE are to be attempted choosing at least ONE question from each Section.

The number of marks carried by a question/part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meanings.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड—A / SECTION—A

1\. (a) (i) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$ है, तो प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया (elementary row operation) के प्रयोग से A^{-1} निकालिये।

Using elementary row operations, find the inverse of $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 3 & 2\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$. 6

(ii) यदि $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$ है, तो $A^{14}+3A-2I$ का मान निकालिये।

If $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 3\\ 5 & 2 & 6\\ -2 & -1 & -3\end{bmatrix}$, then find $A^{14}+3A-2I$. 4

(b) (i) प्रारम्भिक पंक्ति संक्रिया (elementary row operation) के प्रयोग से वह शर्त निकालिये, जिससे कि प्रथम-घातीय समीकरणों (linear equations)

$$x-2y+z=a$$
$$2x+7y-3z=b$$
$$3x+5y-2z=c$$

का एक हल हो।

Using elementary row operations, find the condition that the linear equations

$$x-2y+z=a$$
$$2x+7y-3z=b$$
$$3x+5y-2z=c$$

have a solution. 7

(ii) यदि

$$W_1=\{(x, y, z) \mid x+y-z=0\}$$
$$W_2=\{(x, y, z) \mid 3x+y-2z=0\}$$
$$W_3=\{(x, y, z) \mid x-7y+3z=0\}$$

तो $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ तथा $\dim(W_1+W_2)$ का मान निकालिये।

If

$$W_1=\{(x, y, z) \mid x+y-z=0\}$$
$$W_2=\{(x, y, z) \mid 3x+y-2z=0\}$$
$$W_3=\{(x, y, z) \mid x-7y+3z=0\}$$

then find $\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ and $\dim(W_1+W_2)$. 3

(c) मान निकालिये :

Evaluate : 10

$$I = \int_0^1 \sqrt[3]{x \log\left(\frac{1}{x}\right)}\, dx$$

(d) उस गोले (sphere) का समीकरण निकालिये, जो वृत्त $x^2 + y^2 = 4;\ z = 0$ से गुजरता है और जो तल $x + 2y + 2z = 0$ से एक वृत्त, जिसकी त्रिज्या 3 है, में काटा जाता है।

Find the equation of the sphere which passes through the circle $x^2 + y^2 = 4;\ z = 0$ and is cut by the plane $x + 2y + 2z = 0$ in a circle of radius 3. 10

(e) रेखाओं $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = z - 3$ तथा $y - mx = z = 0$ के बीच लघुतम दूरी (shortest distance) निकालिये। m के किस मान के लिए दोनों रेखाएँ प्रतिच्छेद (intersect) करेंगी?

Find the shortest distance between the lines $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{4} = z - 3$ and $y - mx = z = 0$. For what value of m will the two lines intersect? 10

2. (a) (i) यदि $M_2(R)$, 2×2 कोटि (order) के वास्तविक आव्यूहों की समष्टि (space) तथा $P_2(x)$, वास्तविक बहुपदों (polynomials), जिनकी अधिकतम घात (degree) 2 है, की समष्टि (space) हो, तो $T : M_2(R) \to P_2(x)$, जहाँ $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + c + (a - d)\,x + (b + c)x^2$, का $M_2(R)$ एवं $P_2(x)$ के मानक आधारों (standard bases) के सापेक्ष आव्यूह निरूपित कीजिये। इसके अलावा T का शून्य समष्टि (null space) प्राप्त कीजिये।

If $M_2(R)$ is space of real matrices of order 2×2 and $P_2(x)$ is the space of real polynomials of degree at most 2, then find the matrix representation of $T : M_2(R) \to P_2(x)$, such that $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + c + (a - d)\,x + (b + c)x^2$, with respect to the standard bases of $M_2(R)$ and $P_2(x)$. Further find the null space of T. 10

(ii) यदि $T : P_2(x) \to P_3(x)$ इस प्रकार है कि $T(f(x)) = f(x) + 5\int_0^x f(t)\,dt$, तो $\{1,\ 1 + x,\ 1 - x^2\}$ एवं $\{1, x, x^2, x^3\}$ को क्रमशः $P_2(x)$ एवं $P_3(x)$ का आधार (bases) लेते हुए T का आव्यूह निकालिये।

If $T : P_2(x) \to P_3(x)$ is such that $T(f(x)) = f(x) + 5\int_0^x f(t)\,dt$, then choosing $\{1,\ 1 + x,\ 1 - x^2\}$ and $\{1, x, x^2, x^3\}$ as bases of $P_2(x)$ and $P_3(x)$ respectively, find the matrix of T. 6

(b) (i) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो A के अभिलक्षणिक मान (eigenvalues) तथा अभिलक्षणिक सदिशों (eigenvectors) को निकालिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, then find the eigenvalues and eigenvectors of A. 8

(ii) सिद्ध कीजिये कि हर्मिटी (Hermitian) आव्यूह के सभी अभिलक्षणिक मान वास्तविक हैं।

Prove that eigenvalues of a Hermitian matrix are all real. 8

(c) यदि आधारों (bases) $\{1-x, x(1-x), x(1+x)\}$ एवं $\{1, 1+x, 1+x^2\}$ के सापेक्ष रैखिक रूपांतरण (linear transformation) $T: P_2(x) \to P_2(x)$ के तहत आव्यूह निरूपण $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ हो, तो T प्राप्त कीजिये।

If $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ is the matrix representation of a linear transformation $T: P_2(x) \to P_2(x)$ with respect to the bases $\{1-x, x(1-x), x(1+x)\}$ and $\{1, 1+x, 1+x^2\}$, then find T. 18

3. (a) $x^2+y^2+z^2$ का अधिकतम तथा न्यूनतम मान निकालिये, जहाँ $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ तथा $x+y-z=0$ हो।

Find the maximum and minimum values of $x^2+y^2+z^2$ subject to the conditions $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{5}+\frac{z^2}{25}=1$ and $x+y-z=0$. 20

(b) मान लीजिये

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y-5x^2y^2+y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\delta > 0$ प्राप्त कीजिये इस प्रकार कि $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, जब $\sqrt{x^2+y^2} < \delta$ हो।

Let

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{2x^4y - 5x^2y^2 + y^5}{(x^2+y^2)^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Find a $\delta > 0$ such that $|f(x, y) - f(0, 0)| < \cdot 01$, whenever $\sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. 15

(c) तल $x + 2y + 2z = 12$ के $x = 0$, $y = 0$ तथा $x^2 + y^2 = 16$ द्वारा काटे गये क्षेत्र का पृष्ठीय क्षेत्रफल (surface area) निकालिये।

Find the surface area of the plane $x + 2y + 2z = 12$ cut off by $x = 0$, $y = 0$ and $x^2 + y^2 = 16$. 15

4. (a) एक रेखा, जो रेखाओं $y = a = z$, $x + 3z = a = y + z$ को प्रतिच्छेद (intersect) करती है तथा तल $x + y = 0$ के समानान्तर है, द्वारा जनित सतह (surface generated) निकालिये।

Find the surface generated by a line which intersects the lines $y = a = z$, $x + 3z = a = y + z$ and parallel to the plane $x + y = 0$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि शंकु (cone) $3yz - 2zx - 2xy = 0$ के तीन परस्पर लम्बीय जनकों (generators) का एक अनन्त समुच्चय है। यदि $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ ऐसे किसी समुच्चय का एक जनक (generator) हो, तो बाकी दो निकालिये।

Show that the cone $3yz - 2zx - 2xy = 0$ has an infinite set of three mutually perpendicular generators. If $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$ is a generator belonging to one such set, find the other two. 10

(c) $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ का मान निकालिये, जहाँ आयत $R = [0, 1; 0, 1]$ तथा

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{यदि } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{अन्यथा} \end{cases}$$

है।

Evaluate $\iint_R f(x, y)\,dx\,dy$ over the rectangle $R = [0, 1; 0, 1]$ where

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y, & \text{if } x^2 < y < 2x^2 \\ 0, & \text{elsewhere} \end{cases}$$

15

(d) शांकवज (conicoid) $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$ के तीन पारस्परिक लम्बीय स्पर्शी तलों के प्रतिच्छेदन बिन्दु का बिन्दुपथ निकालिये।

Find the locus of the point of intersection of three mutually perpendicular tangent planes to the conicoid $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. 15

खण्ड—B / SECTION—B

5\. (a) $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=e^{x/2}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$ का विशेष समाकल (particular integral) निकालिये।

Find a particular integral of $\dfrac{d^2y}{dx^2}+y=e^{x/2}\sin\dfrac{x\sqrt{3}}{2}$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि सदिश $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{c}=4\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$ एक त्रिभुज की भुजाएँ बना सकते हैं। इस त्रिभुज की माध्यिकाओं की लम्बाई निकालिये।

Prove that the vectors $\vec{a}=3\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$, $\vec{b}=-\hat{i}+3\hat{j}+4\hat{k}$, $\vec{c}=4\hat{i}-2\hat{j}-6\hat{k}$ can form the sides of a triangle. Find the lengths of the medians of the triangle. 10

(c) हल कीजिये :

Solve : 10

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+x^2}\left(e^{\tan^{-1}x}-y\right)$$

(d) दर्शाइये कि परवलय-कुल $y^2=4cx+4c^2$ स्वलांबिक (self-orthogonal) है।

Show that the family of parabolas $y^2=4cx+4c^2$ is self-orthogonal. 10

(e) एक कण केन्द्रीय त्वरण (central acceleration), जो दूरी के त्रिघात के व्युत्क्रमानुपाती (inversely proportional) है, के तहत चलायमान है। यदि इसे मूलबिन्दु (origin) से दूरी a पर एक स्तब्धिका (apse) से उस वेग से प्रक्षेपित किया जाता है, जो कि a त्रिज्या के वृत्त के वेग का $\sqrt{2}$ गुना है, तो पथ का समीकरण निकालिये।

A particle moves with a central acceleration which varies inversely as the cube of the distance. If it is projected from an apse at a distance a from the origin with a velocity which is $\sqrt{2}$ times the velocity for a circle of radius a, then find the equation to the path. 10

6\. (a) हल कीजिये :

Solve : 10

$$\{y(1-x\tan x)+x^2\cos x\}\,dx-x\,dy=0$$

(b) अवकल समीकरण (differential equation)

$$(D^2+2D+1)\,y=e^{-x}\log(x), \qquad \left[D\equiv\frac{d}{dx}\right]$$

को प्राचल-विचरण (variation of parameters) विधि से हल कीजिये।

Using the method of variation of parameters, solve the differential equation

$$(D^2 + 2D + 1)\,y = e^{-x}\log(x), \qquad \left[D \equiv \frac{d}{dx}\right]$$ 15

(c) समीकरण $x^2 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} = 4$ का व्यापक हल (general solution) निकालिये।

Find the general solution of the equation $x^2 \dfrac{d^3y}{dx^3} - 4x\dfrac{d^2y}{dx^2} + 6\dfrac{dy}{dx} = 4.$ 15

(d) लाप्लास रूपांतरण (Laplace transformation) की मदद से निम्न का हल निकालिये :

Using Laplace transformation, solve the following : 10

$$y'' - 2y' - 8y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 6$$

7. (a) $2a$ लम्बाई की एकसमान एक छड़ (rod) AB, A पर हिन्ज (hinge) के परितः चलायमान (movable) है, जिसका दूसरा छोर एक चिकनी ऊर्ध्व दीवार पर स्थित है। यदि छड़ का ऊर्ध्वाधर से झुकाव α हो, तो सिद्ध कीजिये कि हिन्ज (hinge) पर प्रतिक्रिया (reaction) का परिमाण $\frac{1}{2}W\sqrt{4+\tan^2\alpha}$ है, जहाँ W छड़ का भार है।

A uniform rod AB of length $2a$ movable about a hinge at A rests with other end against a smooth vertical wall. If α is the inclination of the rod to the vertical, prove that the magnitude of reaction of the hinge is

$$\frac{1}{2}W\sqrt{4+\tan^2\alpha}$$

where W is the weight of the rod. 15

(b) दो भार P तथा Q एक स्थिर (fixed) बिन्दु O से धागे (strings) OA एवं OB से लटके हैं तथा एक हल्के छड़ (rod) AB द्वारा एक-दूसरे से अलग किये गये हैं। यदि धागे OA एवं OB छड़ (rod) AB से क्रमशः α तथा β कोण बनाते हों, तो सिद्ध कीजिये कि छड़ (rod) ऊर्ध्व दिशा से θ कोण बनाती है, जहाँ

$$\tan\theta = \frac{P+Q}{P\cot\alpha - Q\cot\beta}$$

Two weights P and Q are suspended from a fixed point O by strings OA, OB and are kept apart by a light rod AB. If the strings OA and OB make angles α and β with the rod AB, show that the angle θ which the rod makes with the vertical is given by

$$\tan\theta = \frac{P+Q}{P\cot\alpha - Q\cot\beta}$$ 15

(c) एक वर्ग $ABCD$, जिसके प्रत्येक भुजा की लम्बाई a है, को एक ऊर्ध्व तल (vertical plane) में स्थिर (fixed) किया जाता है, जिसकी दो भुजाएँ क्षैतिज हैं। एक अन्तहीन धागा (endless string), जिसकी लम्बाई $l(>4a)$ है, बोर्ड के कोणों पर स्थित चार खूँटियों के ऊपर से एक रिंग (ring) के द्वारा गुजरता है। रिंग का भार W है और यह ऊर्ध्व दिशा में लटक रहा है। दर्शाइये कि धागे का तनाव $\frac{W(l-3a)}{2\sqrt{l^2-6la+8a^2}}$ है।

A square $ABCD$, the length of whose sides is a, is fixed in a vertical plane with two of its sides horizontal. An endless string of length $l(>4a)$ passes over four pegs at the angles of the board and through a ring of weight W which is hanging vertically. Show that the tension of the string is $\frac{W(l-3a)}{2\sqrt{l^2-6la+8a^2}}$. 20

8. (a) $f(r)$ निकालिये, इस प्रकार कि $\nabla f = \frac{\vec{r}}{r^5}$ तथा $f(1)=0$ हो।

Find $f(r)$ such that $\nabla f = \frac{\vec{r}}{r^5}$ and $f(1)=0$. 10

(b) सिद्ध कीजिये कि

Prove that

$$\oint_C f\, d\vec{r} = \iint_S d\vec{S} \times \nabla f$$ 10

(c) एक कण एक सरल रेखा में गतिमान है। इसका त्वरण सरल रेखा पर एक स्थिर (fixed) बिन्दु O की तरफ निर्देशित है तथा हमेशा $\mu\left(\frac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$ के बराबर है, जब यह बिन्दु O से x दूरी पर है। यदि यह बिन्दु O से a दूरी पर शून्य वेग से गतिमान होता है, तो वह समय निकालिये जब कण O पर आएगा।

A particle moves in a straight line. Its acceleration is directed towards a fixed point O in the line and is always equal to $\mu\left(\frac{a^5}{x^2}\right)^{1/3}$ when it is at a distance x from O. If it starts from rest at a distance a from O, then find the time, the particle will arrive at O. 15

(d) दर्शाइये कि कार्डिऑइड (cardioid) $r = a(1+\cos\theta)$ के किसी बिन्दु (r, θ) पर वक्रता-त्रिज्या (radius of curvature) का वर्ग r के समानुपाती है। $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ पर वक्रता-त्रिज्या भी ज्ञात कीजिये।

For the cardioid $r = a(1+\cos\theta)$, show that the square of the radius of curvature at any point (r, θ) is proportional to r. Also find the radius of curvature if $\theta = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$. 15

★★★

CS (MAIN) Exam:2016

M-ESC-D-MTH

गणित / MATHEMATICS

प्रश्न-पत्र II / Paper II

निर्धारित समय : तीन घंटे *Time Allowed : **Three** Hours*	अधिकतम अंक : **250** *Maximum Marks : **250***

प्रश्न-पत्र के लिए विशिष्ट अनुदेश

कृपया प्रश्नों के उत्तर देने से पूर्व निम्नलिखित प्रत्येक अनुदेश को ध्यानपूर्वक पढ़ें :

इसमें **आठ** प्रश्न हैं जो **दो खण्डों** में विभाजित हैं तथा **हिन्दी** और **अंग्रेज़ी** दोनों में छपे हैं ।

परीक्षार्थी को कुल **पाँच** प्रश्नों के उत्तर देने हैं ।

प्रश्न संख्या **1** और **5** अनिवार्य हैं तथा बाकी में से प्रत्येक खण्ड से कम-से-कम **एक** प्रश्न चुनकर किन्हीं **तीन** प्रश्नों के उत्तर दीजिए ।

प्रत्येक प्रश्न/भाग के अंक उसके सामने दिए गए हैं ।

प्रश्नों के उत्तर उसी माध्यम में लिखे जाने चाहिए जिसका उल्लेख आपके प्रवेश-पत्र में किया गया है, और इस माध्यम का स्पष्ट उल्लेख प्रश्न-सह-उत्तर (क्यू.सी.ए.) पुस्तिका के मुख-पृष्ठ पर अंकित निर्दिष्ट स्थान पर किया जाना चाहिए । उल्लिखित माध्यम के अतिरिक्त अन्य किसी माध्यम में लिखे गए उत्तर पर कोई अंक नहीं मिलेंगे ।

यदि आवश्यक हो, तो उपयुक्त आँकड़ों का चयन कीजिए, तथा उनको निर्दिष्ट कीजिए ।

जब तक उल्लिखित न हो, संकेत तथा शब्दावली प्रचलित मानक अर्थों में प्रयुक्त हैं ।

प्रश्नों के उत्तरों की गणना क्रमानुसार की जाएगी । यदि काटा नहीं हो, तो प्रश्न के उत्तर की गणना की जाएगी चाहे वह उत्तर अंशतः दिया गया हो । प्रश्न-सह-उत्तर पुस्तिका में खाली छोड़ा हुआ पृष्ठ या उसके अंश को स्पष्ट रूप से काटा जाना चाहिए ।

Question Paper Specific Instructions

Please read each of the following instructions carefully before attempting questions :

*There are **EIGHT** questions divided in **TWO SECTIONS** and printed both in **HINDI** and in **ENGLISH**.*

*Candidate has to attempt **FIVE** questions in all.*

*Questions no. **1** and **5** are compulsory and out of the remaining, **THREE** are to be attempted choosing at least **ONE** from each section.*

The number of marks carried by a question / part is indicated against it.

Answers must be written in the medium authorized in the Admission Certificate which must be stated clearly on the cover of this Question-cum-Answer (QCA) Booklet in the space provided. No marks will be given for answers written in a medium other than the authorized one.

Assume suitable data, if considered necessary, and indicate the same clearly.

Unless and otherwise indicated, symbols and notations carry their usual standard meaning.

Attempts of questions shall be counted in sequential order. Unless struck off, attempt of a question shall be counted even if attempted partly. Any page or portion of the page left blank in the Question-cum-Answer Booklet must be clearly struck off.

खण्ड A

SECTION A

Q1. **सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :**
Answer all the questions : *10×5=50*

(a) मान लीजिए $\mathbb{K}$ एक क्षेत्र है तथा $\mathbb{K}[X]$, $\mathbb{K}$ पर एक एकल चर X में बहुपदों का वलय है । एक बहुपद $f \in \mathbb{K}[X]$ के लिए मान लीजिए (f), f द्वारा जनित $\mathbb{K}[X]$ में गुणजावली को निर्दिष्ट करता है । दर्शाइए कि (f), $\mathbb{K}[X]$ में एक उच्चिष्ठ गुणजावली है यदि और केवल यदि f, $\mathbb{K}$ पर अखंडनीय बहुपद है ।

Let $\mathbb{K}$ be a field and $\mathbb{K}[X]$ be the ring of polynomials over $\mathbb{K}$ in a single variable X. For a polynomial $f \in \mathbb{K}[X]$, let (f) denote the ideal in $\mathbb{K}[X]$ generated by f. Show that (f) is a maximal ideal in $\mathbb{K}[X]$ if and only if f is an irreducible polynomial over $\mathbb{K}$. *10*

(b) $$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, 0 < x < \infty$$

द्वारा दिए गए फलन $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ के लिए दर्शाइए कि एक अवकलनीय फलन $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ है जो f का विस्तार करता है ।

For the function $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ given by

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, 0 < x < \infty,$$

show that there is a differentiable function $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ that extends f. *10*

(c) दो अनुक्रम $\{x_n\}$ तथा $\{y_n\}$ निम्न द्वारा आगमनत: परिभाषित होते हैं :

$$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = 1 \text{ तथा } x_n = \sqrt{x_{n-1}\, y_{n-1}},\ n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_{n-1}}\right), \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

सिद्ध कीजिए कि

$$x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

तथा निगमन कीजिए कि दोनों अनुक्रम एक ही सीमान्त (limit) l पर अभिसरित होते हैं, जहाँ $\frac{1}{2} < l < 1$ है ।

Two sequences $\{x_n\}$ and $\{y_n\}$ are defined inductively by the following :

$$x_1 = \frac{1}{2},\ y_1 = 1 \text{ and } x_n = \sqrt{x_{n-1}\, y_{n-1}},\quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

$$\frac{1}{y_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{y_{n-1}}\right),\qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Prove that

$$x_{n-1} < x_n < y_n < y_{n-1},\qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

and deduce that both the sequences converge to the same limit l, where $\frac{1}{2} < l < 1$. 10

(d) क्या $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ एक प्रसंवादी फलन है ? अपने दावे को सिद्ध कीजिए । यदि हाँ, तो इसका संयुग्मी प्रसंवादी फलन $u(x, y)$ ज्ञात कीजिए तथा इससे विश्लेषिक फलन प्राप्त कीजिए जिसके वास्तविक तथा काल्पनिक भाग क्रमशः u तथा v हैं ।

Is $v(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 2y$ a harmonic function ? Prove your claim. If yes, find its conjugate harmonic function $u(x, y)$ and hence obtain the analytic function whose real and imaginary parts are u and v respectively. 10

(e) व्यवरोधों

$$x + 2y \geq 1,\ 2x + y \leq 1,\ x \geq 0 \text{ तथा } y \geq 0$$

के साथ $5x + 2y$ का अधिकतम मान आलेखीय विधि द्वारा ज्ञात कीजिए ।

Find the maximum value of

$$5x + 2y$$

with constraints

$$x + 2y \geq 1,\ 2x + y \leq 1,\ x \geq 0 \text{ and } y \geq 0$$

by graphical method. 10

Q2. (a) दर्शाइए कि श्रेणी

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

सापेक्ष अभिसारी है । (यदि इसे दर्शाने के लिए आप किसी प्रमेय/प्रमेयों का इस्तेमाल करते हैं, तो उसकी/उनकी उपपत्ति भी दीजिए ।)

Show that the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

is conditionally convergent. (If you use any theorem(s) to show it, then you must give a proof of that theorem(s).) *15*

(b) मान लीजिए p एक अभाज्य संख्या है तथा $\mathbb{Z}_p$ पूर्णांक मॉड्यूलो p के योज्य समूह को निर्दिष्ट करता है । दर्शाइए कि $\mathbb{Z}_p$ का प्रत्येक शून्येतर अवयव $\mathbb{Z}_p$ का जनन करता है ।

Let p be a prime number and $\mathbb{Z}_p$ denote the additive group of integers modulo p. Show that every non-zero element of $\mathbb{Z}_p$ generates $\mathbb{Z}_p$. *15*

(c) अधिकतमीकरण कीजिए

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

बशर्ते कि

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$3x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

क्या इष्टतम हल अद्वितीय है ? अपने उत्तर का औचित्य दीजिए ।

Maximize

$$z = 2x_1 + 3x_2 + 6x_3$$

subject to

$$2x_1 + x_2 + x_3 \le 5$$
$$3x_2 + 2x_3 \le 6$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

Is the optimal solution unique ? Justify your answer. *20*

Q3. (a) मान लीजिए K, क्षेत्र F का एक विस्तार है । सिद्ध कीजिए कि K के अवयव, जो कि F पर बीजीय हैं, K का उपक्षेत्र बनाते हैं । आगे, यदि $F \subset K \subset L$ क्षेत्र हैं, L, K पर बीजीय है तथा K, F पर बीजीय है, तब सिद्ध कीजिए कि L, F पर बीजीय है ।

Let K be an extension of a field F. Prove that the elements of K, which are algebraic over F, form a subfield of K. Further, if $F \subset K \subset L$ are fields, L is algebraic over K and K is algebraic over F, then prove that L is algebraic over F. *20*

(b) फलन

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2$$

के आपेक्षिक उच्चतम तथा निम्नतम मान ज्ञात कीजिए ।

Find the relative maximum and minimum values of the function

$$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 + 4xy - 2y^2.$$ 15

(c) मान लीजिए

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ वक्र

$\gamma(t) = e^{2\pi it}, \ 0 \le t \le 1$

है । औचित्य बताते हुए परिरेखीय (कन्टूर) समाकल

$$\int_\gamma \frac{dz}{4z^2 - 1}$$

का मान ज्ञात कीजिए ।

Let

$\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ be the curve

$\gamma(t) = e^{2\pi it}, \ 0 \le t \le 1.$

Find, giving justifications, the value of the contour integral 15

$$\int_\gamma \frac{dz}{4z^2 - 1}$$

Q4. (a) दर्शाइए कि प्रत्येक बीजतः संवृत क्षेत्र अनंत है ।

Show that every algebraically closed field is infinite. 15

(b) मान लीजिए $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ एक संतत फलन इस प्रकार है कि $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ तथा $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ का अस्तित्व है तथा ये परिमित हैं । सिद्ध कीजिए कि $\mathbb{R}$ पर f एकसमान संतत है ।

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a continuous function such that $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ and $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ exist and are finite. Prove that f is uniformly continuous on $\mathbb{R}$. 15

(c) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक घात क्षेणी इसके अभिसरण वृत्त के अन्दर एक विश्लेषिक फलन को निरूपित करती है ।

Prove that every power series represents an analytic function inside its circle of convergence. 20

खण्ड B

SECTION B

Q5. सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए :

Answer all the questions : *10×5=50*

(a) $x^2 + y^2 + z^2 = cz$ द्वारा दिए गए गोलों के कुल के लम्बकोणीय पृष्ठों का व्यापक समीकरण ज्ञात कीजिए ।

Find the general equation of surfaces orthogonal to the family of spheres given by $x^2 + y^2 + z^2 = cz$. *10*

(b) क्या वेग $\vec{q} = \left[z - \frac{2x}{r}, 2y - 3z - \frac{2y}{r}, x - 3y - \frac{2z}{r}\right]$ के द्रव की भ्रमिलता होती है, जहाँ $\vec{q}\,(u, v, w)$ कार्तीय फ्रेम में वेग है तथा $\vec{r} = (x, y, z)$ एवं $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ हैं ? वृत्त $x^2 + y^2 = 9, z = 0$ में परिसंचरण (circulation) क्या है ?

Does a fluid with velocity $\vec{q} = \left[z - \frac{2x}{r}, 2y - 3z - \frac{2y}{r}, x - 3y - \frac{2z}{r}\right]$ possess vorticity, where $\vec{q}\,(u, v, w)$ is the velocity in the Cartesian frame, $\vec{r} = (x, y, z)$ and $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$? What is the circulation in the circle $x^2 + y^2 = 9,\ z = 0$? *10*

(c) m द्रव्यमान का एक मुक्त-कण, जो बिना बलों के दिक्काल (space) में गतिमान है, का विचार कीजिए । यदि कण $t = 0$ पर मूल-बिन्दु से शुरुआत करता है तथा τ समय पर स्थिति (x, y, z) पर पहुँचता है, तो हैमिल्टन के अभिलक्षण फलन S को x, y, z, τ के एक फलन के रूप में ज्ञात कीजिए ।

Consider a single free particle of mass m, moving in space under no forces. If the particle starts from the origin at $t = 0$ and reaches the position (x, y, z) at time τ, find the Hamilton's characteristic function S as a function of x, y, z, τ. *10*

(d) निम्नलिखित दशमलव संख्याओं को तुल्य द्वि-आधारी तथा षोडश-आधारी संख्याओं में बदलिए :

(i) 4096

(ii) 0·4375

(iii) 2048·0625

Convert the following decimal numbers to equivalent binary and hexadecimal numbers : *10*

(i) 4096

(ii) 0·4375

(iii) 2048·0625

(e) आंशिक अवकल समीकरण

$$(y + zx)\, p - (x + yz)\, q = x^2 - y^2$$

का व्यापक समाकल ज्ञात कीजिए ।

Find the general integral of the partial differential equation

$$(y + zx)\, p - (x + yz)\, q = x^2 - y^2.$$ *10*

Q6. (a) समीकरण $z = p^2 - q^2$ के अभिलक्षण निर्धारित कीजिए, तथा परवलय $4z + x^2 = 0$, $y = 0$ से गुज़रने वाला समाकल पृष्ठ ज्ञात कीजिए ।

Determine the characteristics of the equation $z = p^2 - q^2$, and find the integral surface which passes through the parabola $4z + x^2 = 0, y = 0$. *15*

(b) वेग $U\vec{i}$ से गतिमान असंपीड्य तरल की एकसमान धारा में मूल-बिन्दु O पर प्रबलता m का एक सरल उद्गम दृढ़ है । दर्शाइए कि धारा के किसी बिन्दु P पर वेग विभव ϕ का मान $\frac{m}{r} - Ur\cos\theta$ है, जहाँ $OP = r$ तथा θ वह कोण है जो $\overrightarrow{OP}$, दिशा $\vec{i}$ के साथ बनाता है । धारारेखाओं का अवकल समीकरण ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि वे पृष्ठों $Ur^2 \sin^2\theta - 2m\cos\theta =$ अचर (constant) पर स्थित हैं ।

A simple source of strength m is fixed at the origin O in a uniform stream of incompressible fluid moving with velocity $U\vec{i}$. Show that the velocity potential ϕ at any point P of the stream is $\frac{m}{r} - Ur\cos\theta$, where $OP = r$ and θ is the angle which $\overrightarrow{OP}$ makes with the direction $\vec{i}$. Find the differential equation of the streamlines and show that they lie on the surfaces $Ur^2\sin^2\theta - 2m\cos\theta = \text{constant}$. *15*

(c) मान लीजिए $x \in [0, 1]$ के लिए $f(x) = e^{2x} \cos 3x$ है । नोड $x = 0$, $x = 0{\cdot}3$, $x = 0{\cdot}6$ तथा $x = 1$ पर घात 3 के लग्रांज अंतर्वेशी बहुपद का इस्तेमाल करते हुए $f(0{\cdot}5)$ के मान का आकलन कीजिए । अन्तराल $[0, 1]$ पर त्रुटि सीमा तथा वास्तविक त्रुटि $E(0{\cdot}5)$ का अभिकलन भी कीजिए ।

Let $f(x) = e^{2x} \cos 3x$, for $x \in [0, 1]$. Estimate the value of $f(0{\cdot}5)$ using Lagrange interpolating polynomial of degree 3 over the nodes $x = 0$, $x = 0{\cdot}3$, $x = 0{\cdot}6$ and $x = 1$. Also, compute the error bound over the interval $[0, 1]$ and the actual error $E(0{\cdot}5)$. *20*

Q7. (a) आंशिक अवकल समीकरण

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^{x+y}$$

को हल कीजिए ।

Solve the partial differential equation

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} - 2\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} - \frac{\partial^3 z}{\partial x\, \partial y^2} + 2\frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = e^{x+y}$$ *15*

(b) त्रिज्याओं a, b (a < b) के दो संकेन्द्र गोलीय कोशों के बीच की जगह को घनत्व ρ के तरल से भरा गया है । यदि कोशों को गतिमान कर दिया जाए, अन्दर वाले को x-दिशा में वेग U के साथ तथा बाहर वाले को y-दिशा में वेग V के साथ, तो दर्शाइए कि तरल की प्रारम्भिक गति, वेग विभव

$$\phi = \frac{\left\{a^3 U\left(1+\frac{1}{2}b^3 r^{-3}\right)x - b^3 V\left(1+\frac{1}{2}a^3 r^{-3}\right)y\right\}}{(b^3 - a^3)}$$

द्वारा दी जाती है, जहाँ $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ तथा निर्देशांक समकोणिक हैं । तरल के किसी भी बिन्दु पर वेग का मान निकालिए ।

The space between two concentric spherical shells of radii a, b (a < b) is filled with a liquid of density ρ. If the shells are set in motion, the inner one with velocity U in the x-direction and the outer one with velocity V in the y-direction, then show that the initial motion of the liquid is given by velocity potential

$$\phi = \frac{\left\{a^3 U\left(1+\frac{1}{2}b^3 r^{-3}\right)x - b^3 V\left(1+\frac{1}{2}a^3 r^{-3}\right)y\right\}}{(b^3 - a^3)},$$

where $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$, the coordinates being rectangular. Evaluate the velocity at any point of the liquid. *20*

(c) समाकल $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$ के लिए, दर्शाइए कि द्वि-बिन्दु गाउस क्षेत्रकलन नियम,

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

द्वारा दिया गया है । इस नियम का इस्तेमाल करते हुए $\int_{2}^{4} 2x\, e^{x} dx$ का आकलन कीजिए ।

For an integral $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$, show that the two-point Gauss quadrature rule is given by $\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$. Using this rule, estimate

$\int_{2}^{4} 2x\, e^{x} dx$. *15*

Q8. (a) लम्बाई 10 cm तथा अचर अनुप्रस्थ-परिच्छेद का क्षेत्रफल 1 cm^2 की चाँदी की एक छड़ में तापमान u(x, t) ज्ञात कीजिए । मान लीजिए घनत्व $\rho = 10{\cdot}6$ g/cm^3, ऊष्मा चालकता K = 1·04 cal / (cm sec °C) तथा विशिष्ट ऊष्मा σ = 0·056 cal/g °C. छड़ पूर्णत: पार्श्विक वियुक्त (perfectly isolated laterally) है, सिरों को 0°C पर रखा गया है तथा प्रारम्भिक तापमान f(x) = sin (0·1 πx) °C है । ध्यान रखिए कि u(x, t) तापीय समीकरण $u_t = c^2 u_{xx}$ का अनुगमन करता है, जहाँ $c^2 = K / (\rho\, \sigma)$ है ।

Find the temperature u(x, t) in a bar of silver of length 10 cm and constant cross-section of area 1 cm^2. Let density ρ = 10·6 g/cm^3, thermal conductivity K = 1·04 cal / (cm sec °C) and specific heat σ = 0·056 cal/g °C. The bar is perfectly isolated laterally, with ends kept at 0°C and initial temperature f(x) = sin (0·1 πx) °C. Note that u(x, t) follows the heat equation $u_t = c^2 u_{xx}$, where $c^2 = K / (\rho\, \sigma)$. *20*

(b) लम्बाई l तथा झुकाव के कोण ϕ के साथ एक झुके हुए समतल पर r त्रिज्या का एक हूप बिना फिसले लुढ़क रहा है । तंत्र को उचित व्यापकीकृत निर्देशांक दीजिए । व्यवरोध, यदि कोई हों, तो ज्ञात कीजिए । तंत्र के लिए लग्रांजी समीकरण लिखिए । तब या अन्यथा झुके हुए समतल के निचले सिरे पर हूप का वेग ज्ञात कीजिए ।

A hoop with radius r is rolling, without slipping, down an inclined plane of length l and with angle of inclination ϕ. Assign appropriate generalized coordinates to the system. Determine the constraints, if any. Write down the Lagrangian equations for the system. Hence or otherwise determine the velocity of the hoop at the bottom of the inclined plane. *15*

(c) मान लीजिए A, B, C बूलीय चर हैं, A का पूरक $\bar{A}$ द्वारा निर्दिष्ट होता है, A OR B के लिए व्यंजक A + B तथा A AND B के लिए व्यंजक A . B है । तो निम्नलिखित व्यंजक को सरल कीजिए तथा AND और OR गेट्स का इस्तेमाल करते हुए सरलीकृत व्यंजक का ब्लॉक आरेख खींचिए ।

$A \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + \bar{C})$.

Let A, B, C be Boolean variables, $\bar{A}$ denote complement of A, A + B is an expression for A OR B and A . B is an expression for A AND B. Then simplify the following expression and draw a block diagram of the simplified expression, using AND and OR gates.

$A \cdot (A + B + C) \cdot (\bar{A} + B + C) \cdot (A + \bar{B} + C) \cdot (A + B + \bar{C})$. *15*