# SECTION—I

#### खण्ड—[

1. (a) If  $T: U \to V$  be a linear map and U be a finite-dimensional vector space, then prove that

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim U$$

Or

rank + nullity = dimension of the domain space

(b) Find the eigenvalues and eigenvectors of the following matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(क) यदि  $T: U \to V$  एक रैखिक प्रतिचित्रण हो तथा U परिमित आयामी सदिश समष्टि हो, तो सिद्ध कीजिए कि

$$\dim R(T) + \dim N(T) = \dim U$$

या

(ख) निम्नलिखित आव्यृह के आइगेनवैल्यू और आइगेनवेक्टर ज्ञात कीजिए:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

01/FF/CC/M-2021-19/75

(Continued)

2.

2. (a) Find the points of discontinuities of the following function f:

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{(1 + \sin \pi x)^n - 1}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}, \quad x \in \mathbb{R}$$

(b) Use mean value theorem to prove

$$0 < \frac{1}{x} \log \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) < 1, \text{ for } x > 0$$

(क) निम्नलिखित फलन f के लिए असान्तत्यता के बिन्दुओं को ज्ञात की जिए :

$$f(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{(1 + \sin \pi x)^n - 1}{(1 + \sin \pi x)^n + 1}, x \in \mathbb{R}$$

(ख) माध्यमान प्रमेय का उपयोग कर सिद्ध कीजिए कि

$$0 < \frac{1}{x} \log \left( \frac{e^x - 1}{x} \right) < 1$$
, जबिक  $x > 0$ 

$$\int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x \, dx$$

and test its convergence.

(b) Evaluate

$$\iint\limits_{D} (2yx^2 + 9y^3) \, dA$$

where D is the region bounded by

$$y = \frac{2}{3}x$$
 and  $y = 2\sqrt{x}$ 

(क)  $\int_0^\infty e^{-x^2} \cos \alpha x \, dx$  का मान ज्ञात कीजिए तथा इसके अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

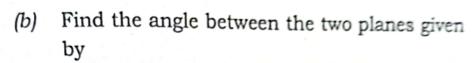
$$(\overline{u})$$
  $\iint (2yx^2 + 9y^3) dA$  का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ क्षेत्र  $D$ 

$$y = \frac{2}{3}x$$
 एवं  $y = 2\sqrt{x}$ 

से घिरा हुआ है।

01/FF/CC/M-2021-19/75

value of 
$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{4}(1+x^{5})}{(1+x)^{15}} dx$$
 5005



$$x-2y+z=0$$
 and  $2x+3y-2z=0$   
and also, find the parametric equation of  
their line of intersection.

(क) 
$$\int_0^\infty \frac{x^4(1+x^5)}{(1+x)^{15}} dx$$
 का मान ज्ञात की जिए।

$$x-2y+z=0$$
 और  $2x+3y-2z=0$ 

के बीच का कोण ज्ञात कीजिए तथा उनके प्रतिच्छेदन की रेखा का पैरामीट्रिक समीकरण भी ज्ञात कीजिए।

5. (a) Solve: 
$$\frac{x \, dx + y \, dy}{x \, dy - y \, dx} = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}}$$

Solve: (b)

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} + y = ax^2 + be^{-x}\sin 2x$$

1/FF/CC/M-2021-19/75

(Turn Over)

(क) हल कीजिए:

$$\frac{x\,dx + y\,dy}{x\,dy - y\,dx} = \sqrt{\left(\frac{a^2 - x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right)}$$

(ख) हल कीजिए:

$$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{d^2y}{dx^2} + y = ax^2 + be^{-x}\sin 2x$$

6. (a) Verify the validity of the following statement:

The covariant derivative of a covariant tensor of second order is a covariant tensor of third order.

- (b) Explain Kepler's laws of planetary motion. What will be the time period of that planet whose radius of orbit around the sun is double that of the earth?
- (क) निम्नलिखित कथन की वैधता का परीक्षण कीजिए : दो कोटि के सहपरिवर्ती प्रदिश का सहपरिवर्ती अवकलज एक तीन कोटि का सहपरिवर्ती प्रदिश होता है।
- (ख) ग्रहों की गित समझाने के लिए केपलर के नियमों को समझाइए। उस ग्रह का आवर्त-काल क्या होगा, जिसकी सूर्य के चारों ओर घूर्णन की त्रिज्या पृथ्वी से दुगुनी है?

01/FF/CC/M-2021-19/75

### SECTION—II

#### खण्ड—II

- 7. (a) Prove that the order of every sub-group of a finite group is a divisor of the order of the group.
  - (b) Prove that every quotient group of an Abelian group is Abelian but the converse is not true.
    - (क) सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि उस समूह की कोटि की भाजक होती है।
      - (ख) सिद्ध कीजिए कि अबेलियन समूह का प्रत्येक विभागीय समूह भी अबेलियन होता है परन्तु इसका विपरीत सत्य नहीं है।
  - 8. (a) Box-I contains 4 red and 5 black balls,
    Box-II contains 5 red and 4 black balls and
    Box-III contains 4 red and 8 black balls.
    A box is chosen and a ball is drawn which
    happens to be black. What is the probability
    that it came from Box-II?
    - (b) If

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}, x \in [0, 1]$$

show that the sequence of functions  $\{f_n\}$  is uniformly convergent on [0, 1].

01/FF/CC/M-2021-19/**75** 

(Turn Over)

## (8)

(क) सन्दूक-I में 4 लाल एवं 5 काली गेंदें हैं, सन्दूक-II में 5 लें एवं 4 काली गेंदें हैं तथा सन्दूक-III में 4 लाल एवं 8 केंद्रें हैं। एक सन्दूक का चयन करके उसमें से एक गेंद्र निकलि गयी, जो काले रंग की थी। यह गेंद्र सन्दूक-II से निकाली गर्व इसकी प्रायिकता क्या है?

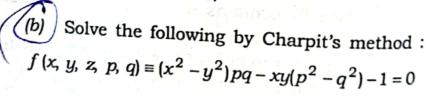
(ख) यदि

$$f_n(x) = \frac{x}{n+x^2}, x \in [0, 1]$$

हो, तो प्रदर्शित कीजिए कि फलर्नों का अनुक्रम  $\{f_n\}$ , [0,1] एकसमान अभिसरित है।

9. (a) Prove Cauchy's residue theorem. Using it, evaluate the integral

$$\int_C \frac{e^z + 1}{z(z+1)(z-i)^2} dz; \quad C: |z| = 2$$



(क) कौशी अवशेष प्रमेय को सिद्ध कीजिए। इसका प्रयोग करते हुए समाकल

$$\int_C \frac{e^z + 1}{z(z+1)(z-i)^2} dz; \quad C: |z| = 2$$

का मान ज्ञात कीजिए।

01/FF/CC/M-2021-19/75

$$f(x, y, z, p, q) \equiv (x^2 - y^2)pq - xy(p^2 - q^2) - 1 = 0$$

10. (a) Solve the following linear programming problem by the simplex method. Write its dual. Also, write the optimal solution of the dual from the optimal table of the given problem:

Maximize 
$$Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$
  
subject to

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$



- (b) Obtain the equation of motion of a simple pendulum by using Lagrangian method, and deduce the formula for its time period for small amplitude oscillations.
  - (क) निम्नलिखित रैखिक प्रोग्रामन समस्या को एकधा (सिम्प्लेक्स) विधि द्वारा हल कीजिए। इसकी द्वैती समस्या लिखिए। दी गई समस्या की इष्टतम सारणी से द्वैती समस्या का इष्टतम हल भी लिखिए:

अधिकतम मान 
$$Z = 2x_1 - 4x_2 + 5x_3$$
 जिसका प्रतिबंध है

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 2$$

$$-x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

01/FF/CC/M-2021-19/75

(Turn Over)

- (ख) लग्रांजी पद्धित का उपयोग करके एक सरल लोलक की गित का समीकरण प्राप्त कीजिए और छोटे आयामी दोलनों के आवर्त-काल का सूत्र बताइए।
- 11. (a) Solve the following system of linear equations by Gauss-Seidel method:

$$20x+y-2z=7$$
$$3x+20y-z=-18$$
$$2x-3y+20z=25$$

(b) Apply fourth-order Runge-Kutta method to solve

$$\frac{dy}{dx} = 3x + \frac{1}{2}y, \quad y(0) = 1$$

and determine  $y(0\cdot 1)$  and  $y(0\cdot 2)$  corrected up to four decimal places.

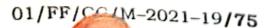
(क) निम्नलिखित रैखिकं समीकरण निकाय को गॉस-सिडल पद्धति द्वारा हल कीजिए:

$$20x+y-2z=7$$
$$3x+20y-z=-18$$
$$2x-3y+20z=25$$

(ख) रूंगे-कुट्टा विधि के चौथे क्रम के प्रयोग से निम्न को हल कीजिए

$$\frac{dy}{dx} = 3x + \frac{1}{2}y$$
,  $y(0) = 1$ 

तथा  $y(0\cdot 1)$  और  $y(0\cdot 2)$  को चार दशमलव स्थानों तक सही ज्ञात कीजिए।



- 12. (a) Find the moment of inertia of a solid hemisphere.
  - (b) A function f is defined on [0, 1] by  $f(x) = \begin{cases} x, & \text{if } x \text{ is rational} \\ 1-x, & \text{if } x \text{ is irrational} \end{cases}$

Show that f is not Riemann integrable.

- (क) एक ठोस गोलार्द्ध का जड़त्वाघूर्ण ज्ञात कीजिए।
- (ख) एक फलन f, [0, 1] में परिभाषित है, जबिक  $f(x) = \begin{cases} x , & \text{यद } x \text{ परिमेय हो} \\ 1-x , & \text{यद } x \text{ अपरिमेय हो} \end{cases}$

प्रदर्शित कीजिए कि f रीमान समाकलनीय नहीं है।

\*\*

