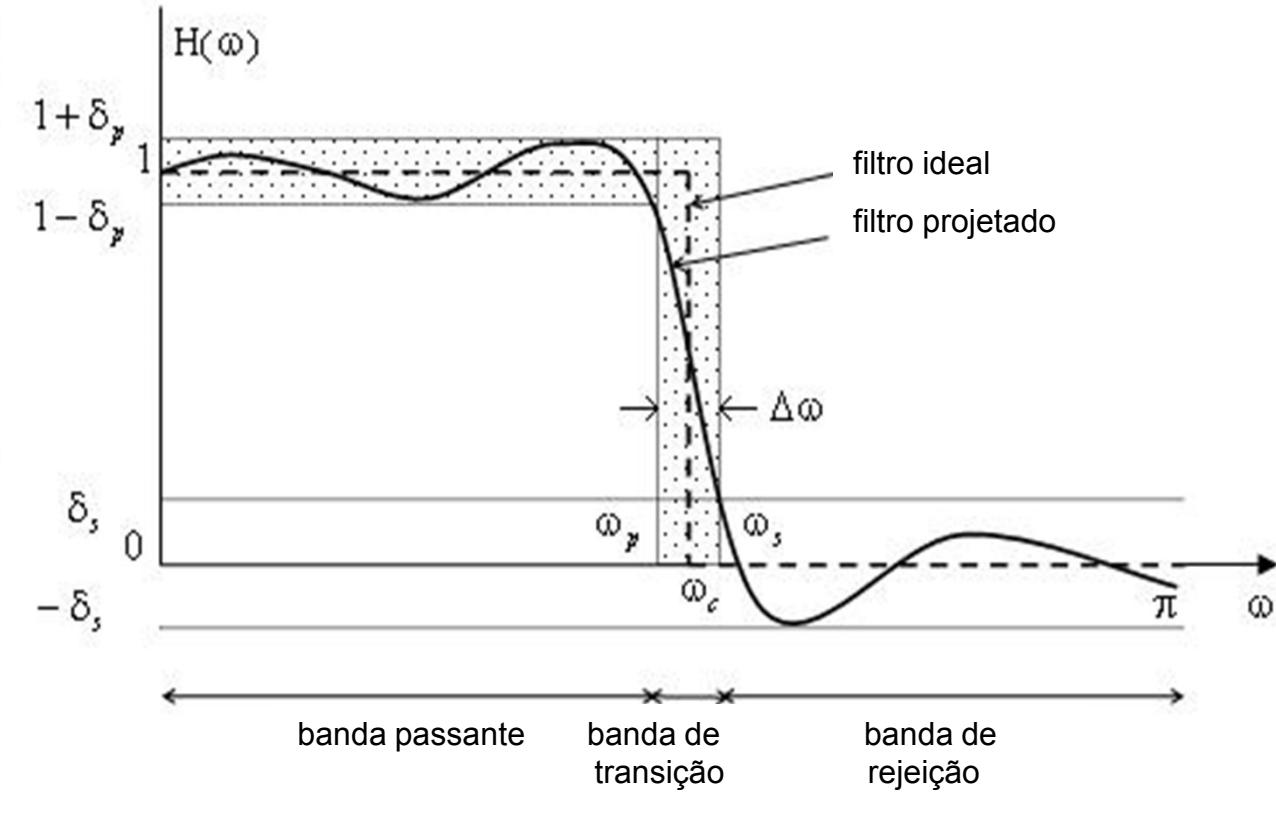
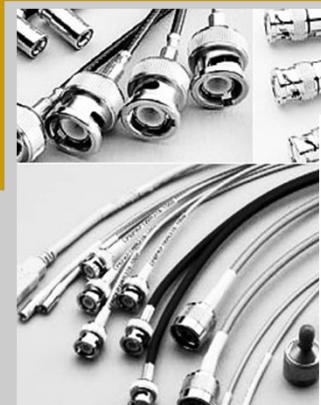


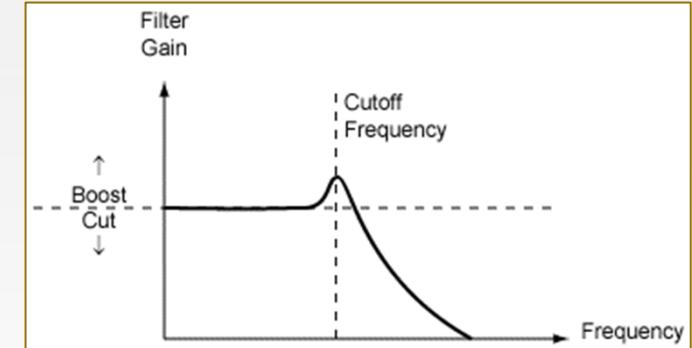
Filtros Analógicos Passivos



Prof. Cláudio A. Fleury

Conteúdo

1. Objetivo
2. Filtros de Primeira Ordem
 - Filtro Passa Baixa →
3. Filtros de Primeira Ordem
 - Filtro Passa Alta
4. Filtros de Segunda Ordem
 - Filtro Passa Faixa
 - Filtro Rejeita Faixa
5. Filtros de Ordem Superior ($N > 2$)
6. Aproximações Polinomiais
Butterworth, Chebyshev, Cauer, Bessel
7. Resumo



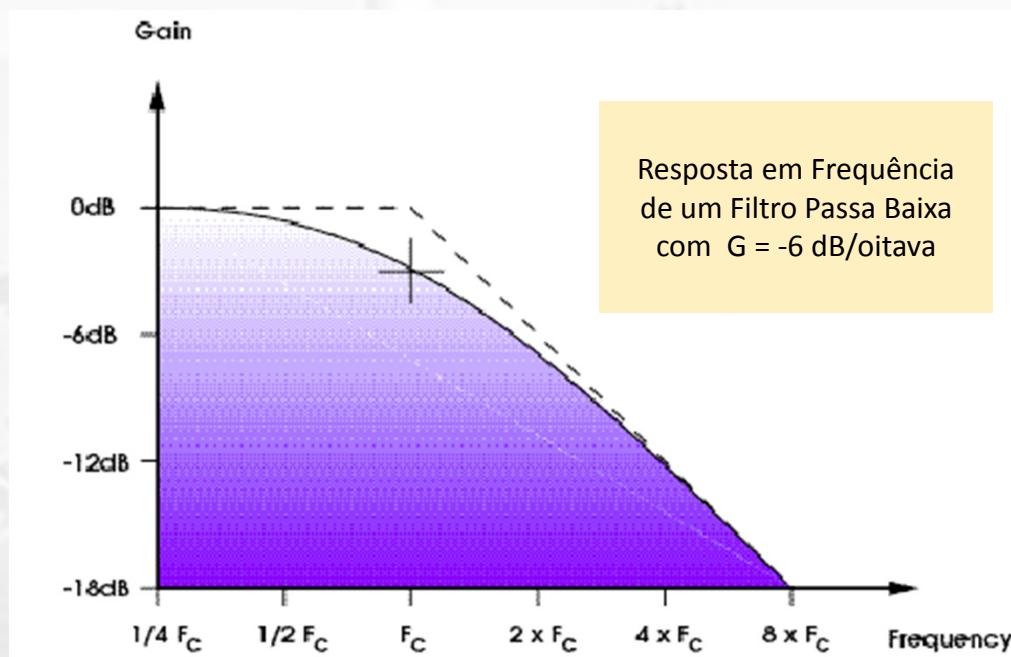
¹ RF – Resposta em Frequência

1. Objetivo

- Projetar Circuitos Seletores de Frequência (filtros) usando componentes passivos: R, L e C
 - Filtro Passa Baixa
 - Filtro Passa Alta
 - Filtro Passa Faixa
 - Filtro Rejeita Faixa

2. Filtro Passa Baixa

- Permite a passagem das componentes de **frequências baixas** e **bloqueia** a passagem das componentes de **frequências altas**
- Ganho máximo em 0 rad/s: $G(\omega) = 1$
 - Função de transferência com ganho unitário em $\omega = 0$ rad/s

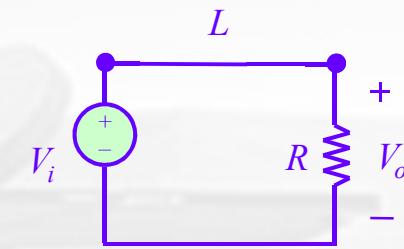
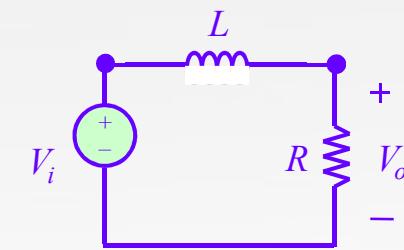


2.1 Filtro Passa Baixa – RL Série

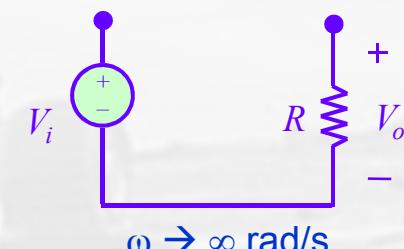
■ Circuito RL em Série

- Impedância: $Z = R + j X_L$
- Em frequências baixas: $X_L \rightarrow 0$ ou $\omega L \ll R$
Tensões de saída e de entrada tem a mesma amplitude e fase
- Em frequências altas: $X_L \rightarrow \infty$ ou $\omega L \gg R$
Grande diferença de fase entre a tensão e a corrente no indutor, logo, grande diferença de fase entre as tensões de saída e de entrada, que tende a 90° qdo a frequência tende ao infinito

- Permite a passagem dos sinais de baixas frequências e bloqueia os de altas frequências



$$\omega = 0 \text{ rad/s}$$



$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s}$$

2.1 Filtro Passa Baixa – RL Série

■ Circuito RL em Série

- Frequência de corte: $|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |H_{máx}|$
(Frequência de meia potência)
- Banda Passante: é a faixa de frequências na qual a amplitude da tensão de saída é pelo menos 70,7% do seu valor máximo (metade da potência média máxima)
- Função de Transferência: $\xrightarrow{\hspace{1cm}}$
- Resposta em Frequência: $H(j\omega) = \frac{R/L}{j\omega + R/L}$

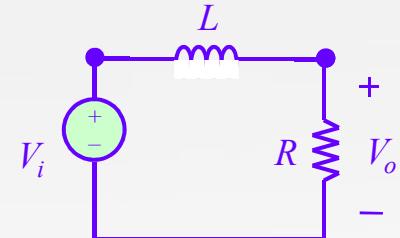
MÓDULO

$$|H(j\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

FASE

$$\angle H(j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |1| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}}$$
$$\omega_c = \frac{R}{L}$$



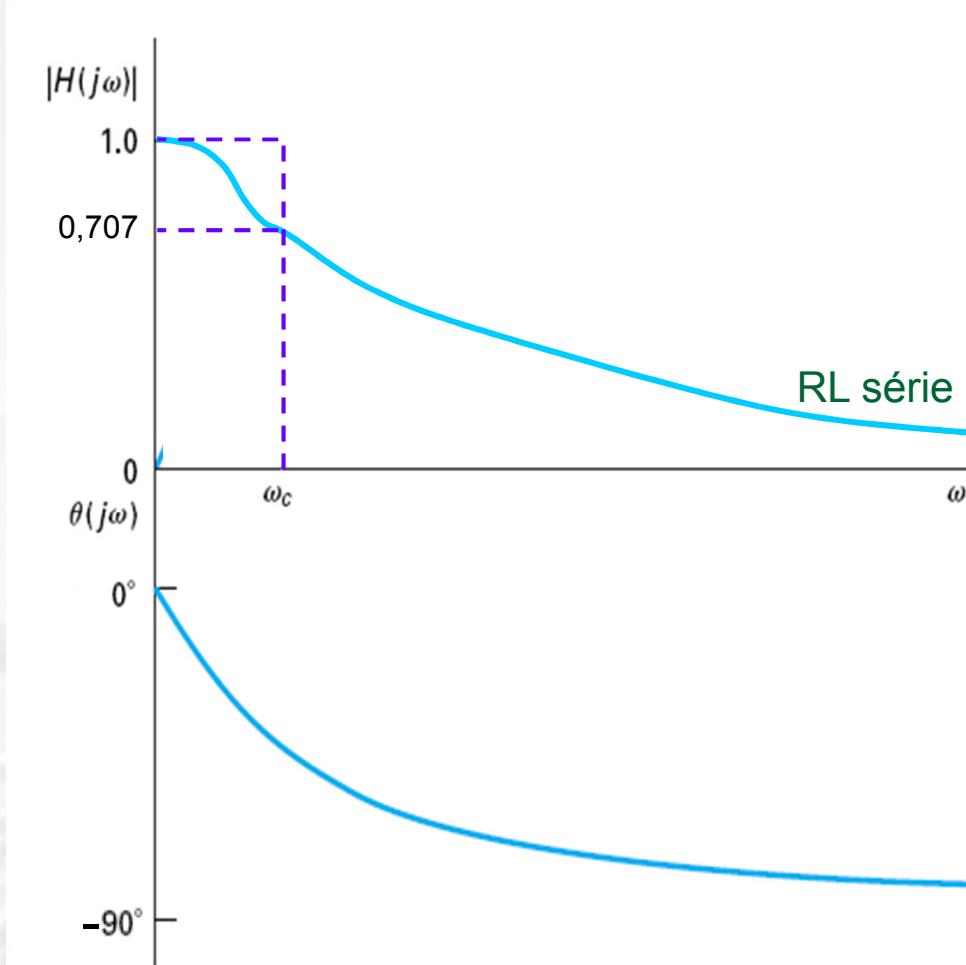
LKV: $v_i(t) = v_o(t) + L \frac{di(t)}{dt}$

Lei de Ohm: $i(t) = v_o(t) / R$

$$v_i(t) = v_o(t) + \frac{L}{R} \frac{dv_o(t)}{dt}$$

$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = H(s) = \frac{R/L}{s + R/L}$$

2.1 Filtro Passa Baixa – RL Série



2.1 Filtro Passa Baixa – RL Série

- **Exemplo:** Filtro RL Série para eletrocardiógrafo operando em presença de ruídos da rede (60 Hz). Deve filtrar sinais com frequências superiores a 10 Hz.

- Escolhe-se um valor comercial para L^* : $L = 100\text{mH}$
- Calcula-se a frequência de corte: $\omega_c = 2\pi f = 20\pi \text{ rad/s}$
- Calcula-se o valor da resistência: $R = \omega_c L = \frac{20\pi \cdot 100}{1000} = 6,28\Omega$
- Desempenho do filtro nas frequências de 1, 10 e 60 Hz

$$|V_o(\omega)| = \frac{R/L}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}} |V_i(\omega)| = \frac{20\pi}{\sqrt{\omega^2 + 400\pi^2}} |V_i(\omega)|$$

Mantendo a tensão de entrada constante e igual a 1V:

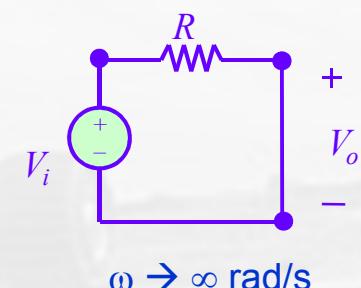
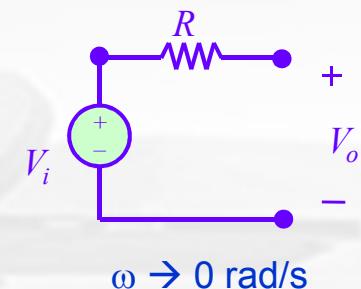
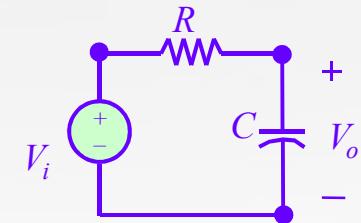
$$f = 1 \text{ Hz} \rightarrow |V_o(\omega)| = 0,995\text{V}; \quad f = 10 \text{ Hz} \rightarrow |V_o(\omega)| = 0,707\text{V}; \quad f = 60 \text{ Hz} \rightarrow |V_o(\omega)| = 0,164\text{V}$$

* facilmente encontrado no mercado (valor comercial)

2.2 Filtro Passa Baixa – RC Série

■ Circuito RC em Série

- Impedância: $Z = R - j X_C$
- Em frequências baixas: $X_C \rightarrow \infty$ (*Circ. Aberto*)
Tensões de saída e de entrada tem a mesma amplitude e fase ($V_o = V_i$)
- Em frequências altas: $X_C \rightarrow 0$ (*Circ. Fechado*)
A tensão de saída é nula ($V_o = 0$)

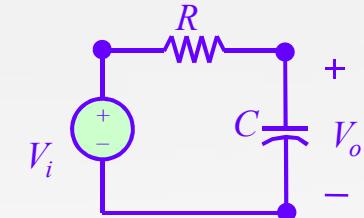


■ Permite a passagem das frequências baixas e bloqueia as altas frequências

2.2 Filtro Passa Baixa – RC Série

■ Circuito RC em Série

- O sinal de saída é a tensão nos terminais do capacitor
- Função de Transferência
- Resposta em Frequênci



$$H(s) = \frac{1/(RC)}{s + 1/(RC)}$$
$$H(j\omega) = \frac{1/(RC)}{j\omega + 1/(RC)}$$

MÓDULO

$$|H(j\omega)| = \frac{1/(RC)}{\sqrt{\omega^2 + [1/(RC)]^2}}$$

FASE

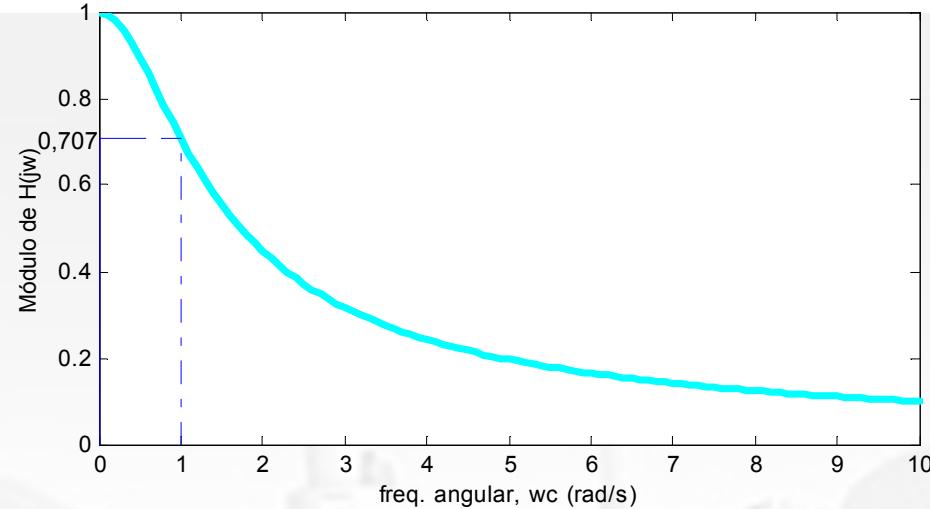
$$\angle H(j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega}{1/(RC)}\right)$$

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |1| = \frac{1/(RC)}{\sqrt{\omega_c^2 + [1/(RC)]^2}}$$

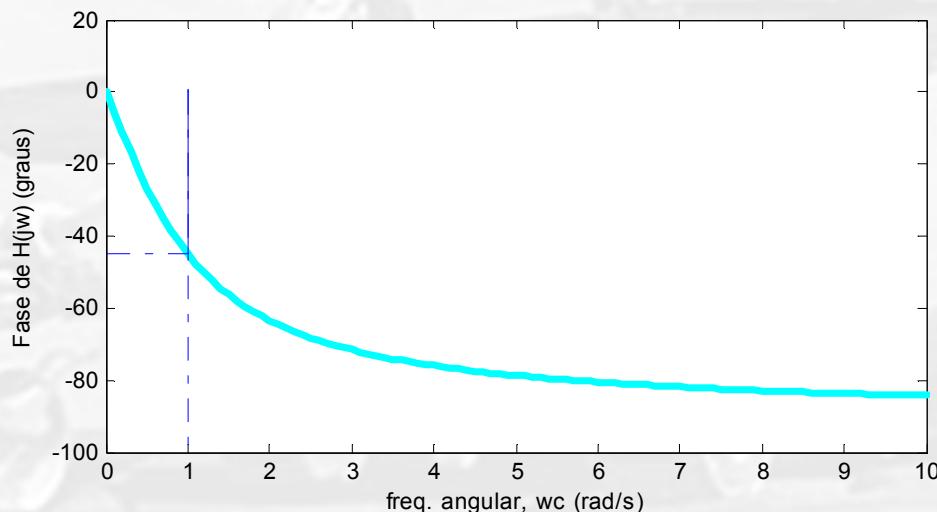
$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \text{Freq. de Corte}$$

2.2 Filtro Passa Baixa – RC Série

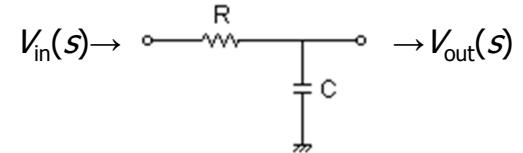
Resposta em Freq. do FPB RC em Série



$$\omega_c = 1/(RC) = 1 \text{ rad/s}$$



2.2 Filtro Passa Baixa – RC Série



■ Exemplo: FPB RC Série, com freq. de corte em 3 kHz

1. Escolhe-se um valor para C^* :

$$C = 1 \mu\text{F}$$

2. Calcula-se a Frequência de corte: $\omega_c = 2\pi \cdot f = 6\pi \cdot 10^3 \text{ rad/s}$

3. Calcula-se o valor do Resistor:

$$R = \frac{1}{\omega_c C} = \frac{1000}{6\pi} = 53,05\Omega \text{ ou } 53,6\Omega \text{ (E96)}$$

4. Calcula-se a F.T.:

$$V_{out}(s)/V_{in}(s) = H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c} = \frac{18849,55}{s + 18849,55}$$

5. Usando Resistor Comercial:

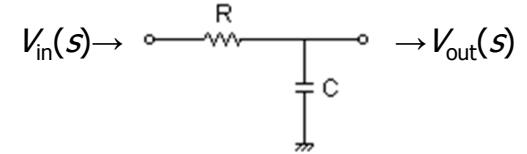
$$R = 56\Omega \text{ (E12)}: H(s) = \frac{17857,14}{s + 17857,14}$$

❑ Nova freq. de corte:

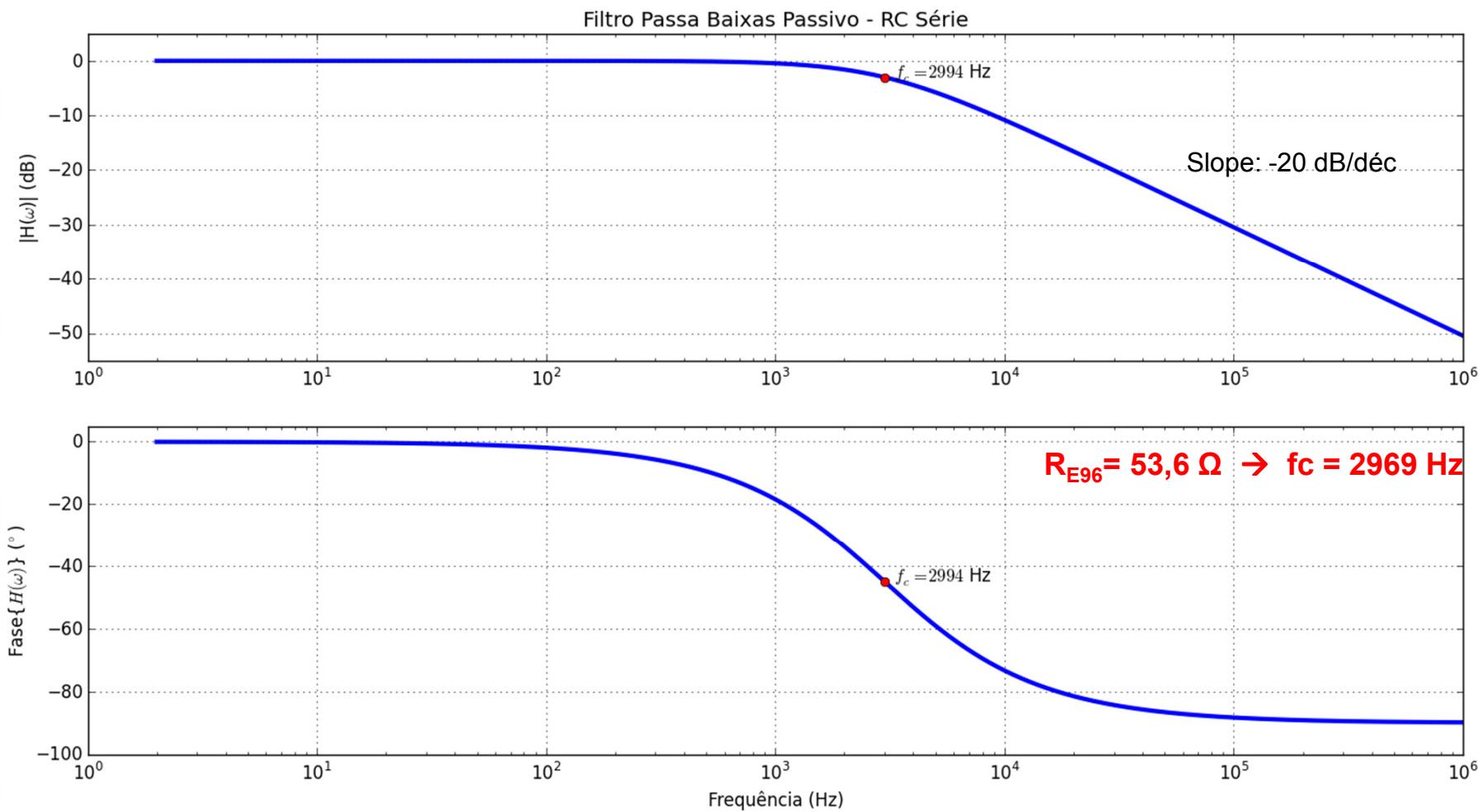
$$f_c = 2842 \text{ Hz}$$

* Valor comercial

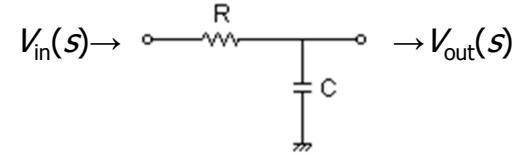
2.2 Filtro Passa Baixa – RC Série



- Exemplo: FPB RC Série, com freq. de corte em 3 kHz



2.2 Filtro Passa Baixa – RC Série



■ Exemplo: FPB RC Série, com freq. de corte em 3 kHz

```
# -*- coding: utf-8 -*-
"""
Filtro Passa Baixas RC Série (sinal de saída nos terminais do capacitor C)
@author: kaw - Mai/2015 """

from numpy import arange, pi, log10, where, angle
from matplotlib.pylab import plot, grid, semilogx, title, xlabel, ylabel,
text, ylim, subplot
C = 1e-6
R = 53.05
wc = 1./R/C
w = arange(0,1e6,2)*2*pi
Hw = wc / (1j*w + wc)           # resposta em frequência (r.f.) do fpb
mag_dB = 20*log10(abs(Hw))       # magnitude da r.f. em dB
fase = angle(Hw)*180/pi          # fase da r.f. em graus

subplot(2,1,1); semilogx(w/2/pi,mag_dB,lw=3); grid('on'); ylim([-55,5])
indice = where(mag_db <= -3)
fc = w[indice[0][0]]/2./pi
plot(fc,-3,'ro',lw=3); text(fc+300,-3,'$f_c = %d$ Hz' % fc)
title(u'Filtro Passa Baixas Passivo - RC Série')
ylabel('|H($\omega$)| (dB)'); xlabel(u'Frequência (Hz)')

subplot(2,1,2); semilogx(w/2/pi,fase,lw=3); grid('on'); ylim([-100,5])
plot(fc,fase[indice[0][0]],'ro',lw=3)
text(fc+300,fase[indice[0][0]],'$f_c = %d$ Hz' % fc)
xlabel(u'Frequência (Hz)'); ylabel('Fase{$H(\omega)$} ($^\circ$)')
```

2.2 Filtro Passa Baixa – Resumo

■ Filtro Passa Baixa de 1^a Ordem

Função de
Transferência
Passa Baixas

$$H(s) = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

	RL Série	RC Série
Freq. de Corte (rad/s): ω_c	R / L	1 / (R.C)
Tensão de Saída:	Resistor	Capacitor

Constante de Tempo: $\tau = 1/\omega_c$

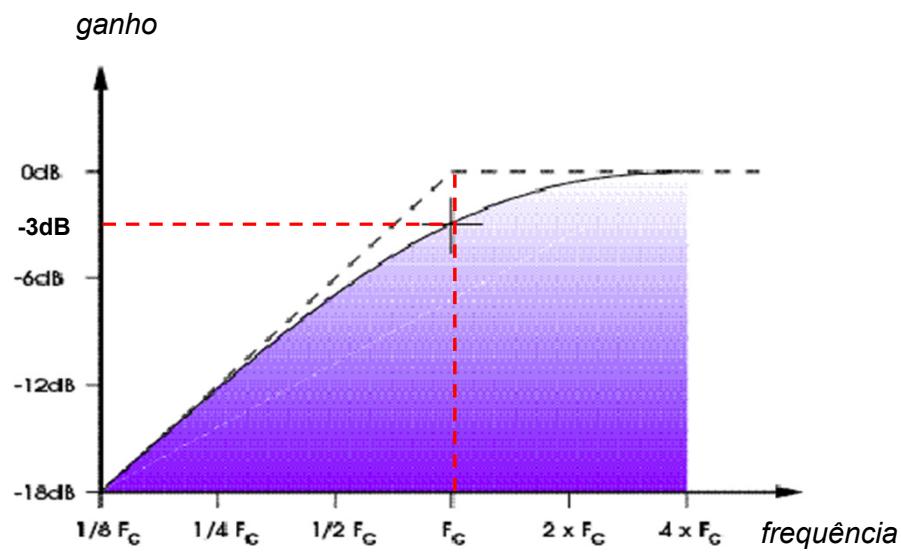
Exercícios 1

1. Projete um filtro passa baixas (fpb) RC série com frequência de corte em 8 kHz. Determine o valor de C , sabendo que $R=10\text{ k}\Omega$.

2. Um fpb RL série deve ter uma frequência de corte em 2 kHz. Sabendo que $R = 5\text{ k}\Omega$, determine L , o módulo e a fase da resposta em frequência para $f = 2\text{k}, 10\text{k}, 25\text{k}$ e 50 kHz . Se a tensão de entrada for uma senóide com 50 kHz e tensão de pico igual a 10 V, qual será a tensão de saída?

3 Filtro Passa Alta

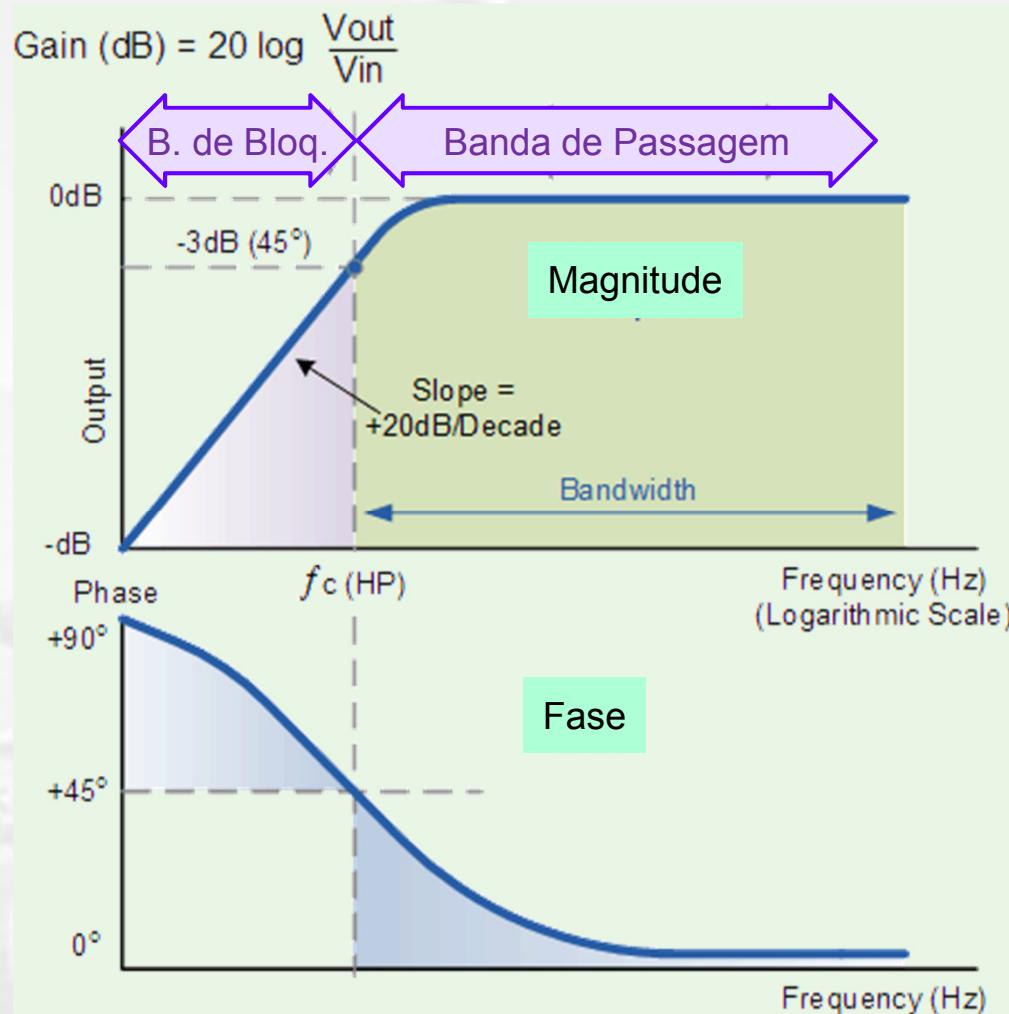
- Permite a passagem das componentes de altas frequências e bloqueia as componentes de baixas frequências
- Possui um ganho máximo em $\omega \rightarrow \infty$
 - Um zero da função de transferência em $\omega = 0$ elimina a componente DC do sinal de entrada



O ganho da R.F. de um filtro passa alta de 6 dB/oitava (20 dB/década)

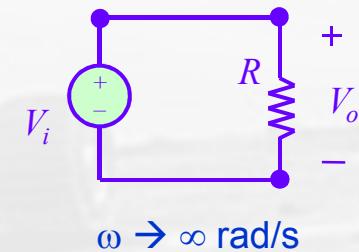
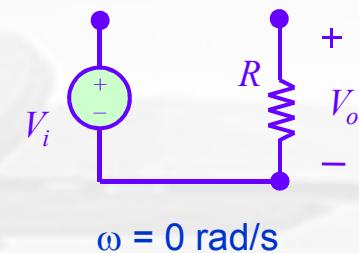
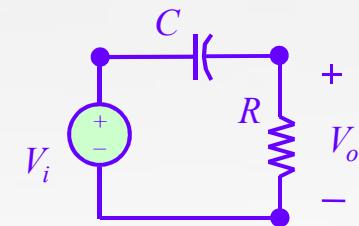
3 Filtro Passa Alta

- Resposta em Frequência: magnitude e fase



3.1 Filtro Passa Alta – RC Série

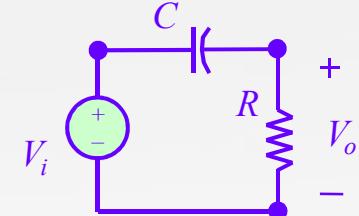
- Mesmos circuitos RC e RL em série, mas com a tensão de saída tomada em outra posição
- Circuito RC em Série
 - Impedância: $Z = R - j X_C$
 - Em frequências baixas: $X_C \rightarrow \infty$ (Circ. Aberto)
Tensão de saída nula $V_o = 0 \text{ V}$
 - Em frequências altas: $X_C \rightarrow 0$ (Circ. Fechado)
Tensões de saída e de entrada tem a mesma amplitude e fase $V_o = V_i$
- Permite a passagem do sinais com altas frequências e bloqueia os sinais com baixas freqüências



3.1 Filtro Passa Alta – RC Série

■ Circuito RC Série

- O sinal de saída é a tensão medida nos terminais do resistor
- Função de Transferência
- Resposta em Frequênci



$$V_o(s) = V_i(s) \frac{R}{R + 1/(sC)}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{sRC}{sRC + 1} = \frac{s}{s + 1/(RC)}$$

$$H(j\omega) = H(s)|_{s=j\omega} = \frac{j\omega}{j\omega + 1/(RC)}$$

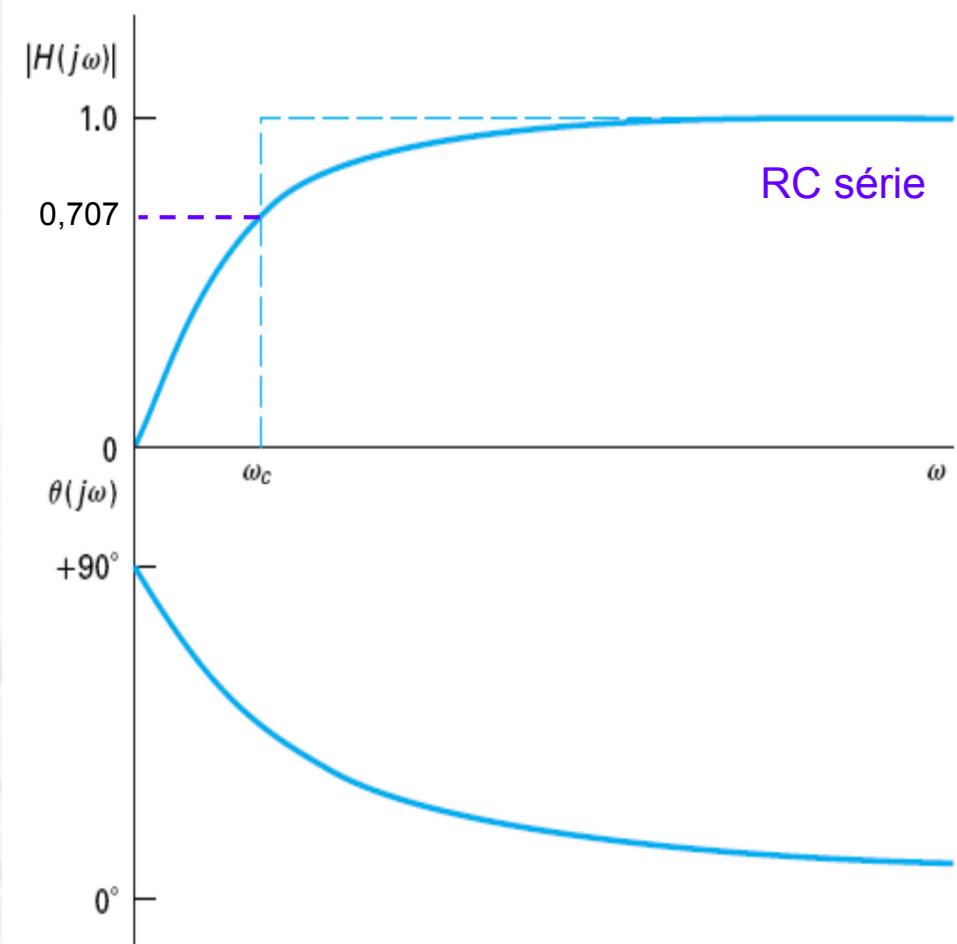
MÓDULO

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (1/RC)^2}} \quad \angle H(j\omega) = 90^\circ - \arctg(\omega RC)$$

FASE

$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |1| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (1/RC)^2}}$$
$$\omega_c = \frac{1}{RC} \quad \text{Freq. de Corte}$$

3.1 Filtro Passa Alta – RC Série

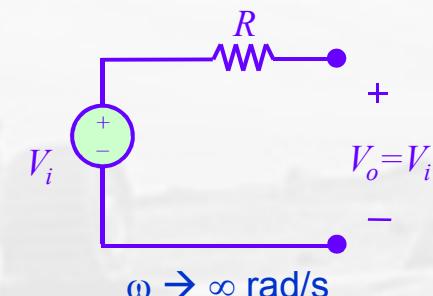
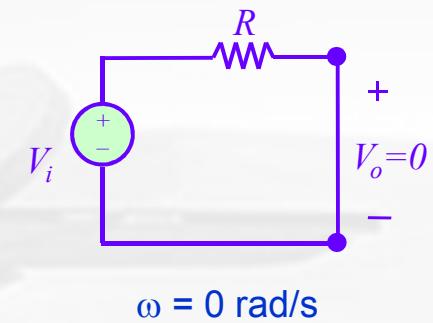
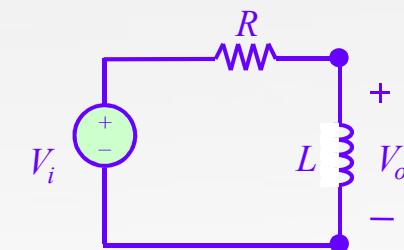


3.2 Filtros Passa Alta – RL Série

- Circuito RL Série

- Impedância: $Z = R + j X_L$
 - Em frequências baixas: $X_L \rightarrow 0$ ou $\omega L \ll R$
Tensão de saída é nula
 - Em frequências altas: $X_L \rightarrow \infty$ ou $\omega L \gg R$
A tensão de saída é igual à de entrada

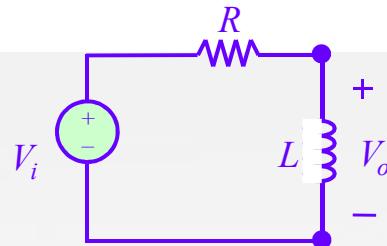
- Permite a passagem das altas frequências e bloqueia as baixas frequências



3.2 Filtros Passa Alta – RL Série

■ Circuito RL Série

- Frequência de corte:
(Frequência de meia potência)
- Função de Transferência
- Resposta em Frequência



$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} H_{\max}$$

$$H(s) = \frac{s}{s + R/L}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega}{j\omega + R/L}$$

MÓDULO

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 + (R/L)^2}}$$

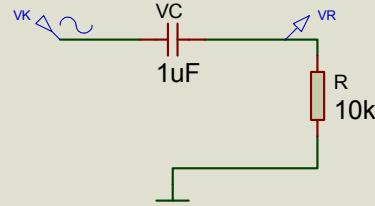
FASE

$$\angle H(j\omega) = 90^\circ - \arctg\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

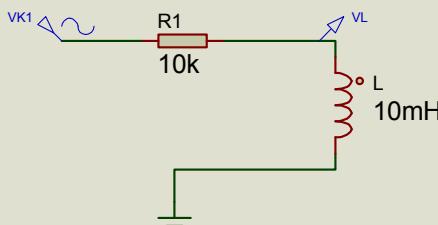
$$|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}} |1| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2 + (R/L)^2}}$$

$\omega_c = \frac{R}{L}$ Freq. de Corte

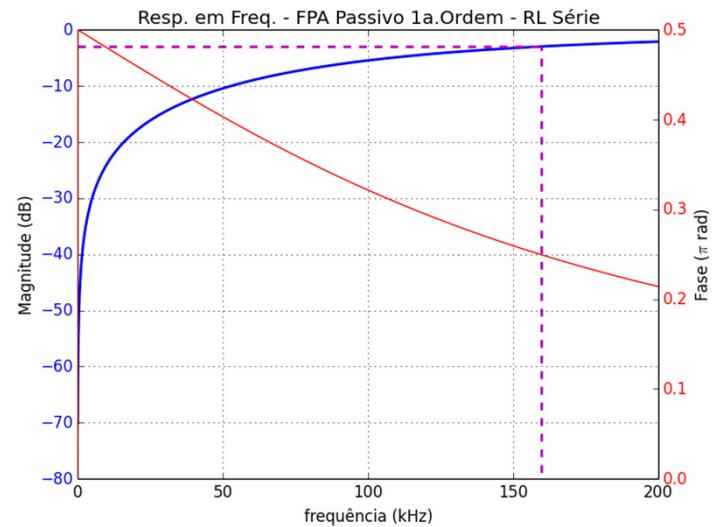
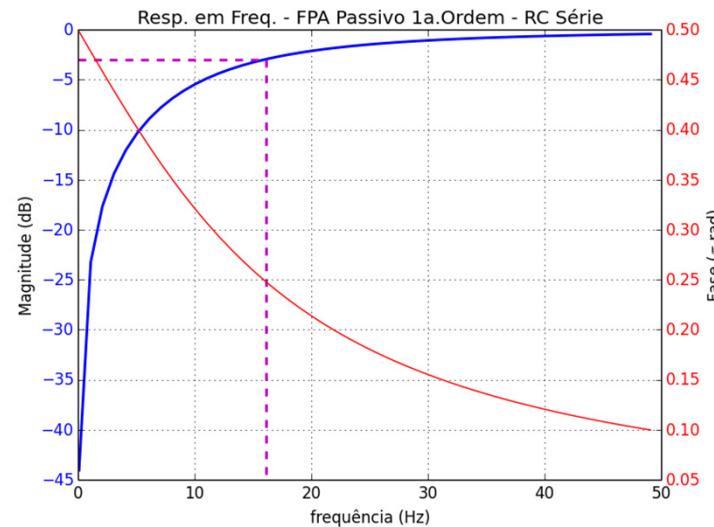
3.2 Filtros Passa Alta – RL ou RC Série



$$f_c = 1/(2\pi RC) = 15.9 \text{ Hz}$$



$$f_c = R/(2\pi L) = 159,1 \text{ kHz}$$



3.2 Filtros Passa Alta – RL ou RC Série

Script Python

```
# -*- coding: cp1252 -*-
from numpy import pi, arange, log10, abs, angle
from matplotlib.pyplot import figure
from matplotlib.mlab import find
import pylab as pl
import matplotlib as plt

# Filtro Analógico RL Série - saída no indutor
filtro = u'FPA Passivo 1a.Ordem - RL Série'
R = 10e3; L = 10e-3
wc = R/L                      # freq. corte: fc = 159,1 kHz
f = arange(0,200000,50)        # frequência em Hz
w = 2*pi*f; s = 1j*w
Hw = s/(s + wc)               # F.Transf. FPA
mag = 20*log10(abs(Hw)); pha = angle(Hw)

ax1 = pl.subplot(1,1,1)
ax1.plot(f/1000.,mag,linewidth=2)
ax1.set_title('Resp. em Freq. - ' + filtro)
ax1.set_ylabel('Magnitude (dB)');
pl.xlabel(u'frequência (kHz)'); pl.grid()
for tl in ax1.get_yticklabels():
    tl.set_color('b')
ind = find(mag>=-3)          # freq. de corte
fc = f[ind[0]]/1000.
linhaH = plt.lines.Line2D((0,fc),(-3,-3),
                           linewidth=2,linestyle='--',c='m')
ax1.add_line(linhaH)
linhaV = plt.lines.Line2D((fc,fc),(-90,-3),
                           linewidth=2,linestyle='--',c='m')
ax1.add_line(linhaV)
ax2 = ax1.twinx()
ax2.plot(f/1000.,pha/pi,'r')
ax2.set_ylabel('Fase ($\pi$ rad)')
```

```
for tl in ax2.get_yticklabels():
    tl.set_color('r')
pl.show()

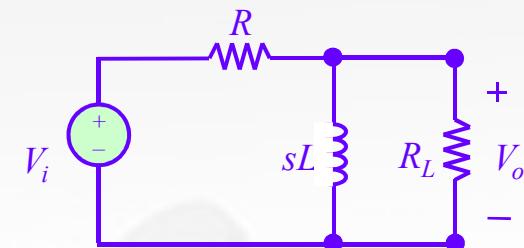
# Filtro Analógico RC Série - saída no resistor
filtro = u'FPA Passivo 1a.Ordem - RC Série'
R = 10e3; C = 1e-6
wc = 1./(R*C)                 # freq. de corte: fc = 15,9 Hz
f = arange(0.1,50,1)
w = 2*pi*f
s = 1j*w
Hw = s/(s + wc)               # F.Transf. FPA
mag = 20*log10(abs(Hw))
pha = angle(Hw)

figure()
ax1 = pl.subplot(1,1,1); ax1.plot(f,mag,linewidth=2)
ax1.set_title('Resp. em Freq. - ' + filtro)
ax1.set_ylabel('Magnitude (dB)');
pl.xlabel(u'frequência (Hz)'); pl.grid()
for tl in ax1.get_yticklabels():
    tl.set_color('b')
ind = find(mag>=-3); fc = f[ind[0]] # freq. de corte
linhaH = plt.lines.Line2D((0,fc),(-3,-3),
                           linewidth=2,linestyle='--',c='m')
ax1.add_line(linhaH)
linhaV = plt.lines.Line2D((fc,fc),(-90,-3),
                           linewidth=2,linestyle='--',c='m')
ax1.add_line(linhaV)
ax2 = ax1.twinx(); ax2.plot(f,pha/pi,'r')
ax2.set_ylabel('Fase ($\pi$ rad)')
for tl in ax2.get_yticklabels():
    tl.set_color('r')
pl.show()
```

3.2 Filtros Passa Alta – RL Série

- Influência de uma Carga Resistiva R_L no ganho e na frequência de corte do FPA RL Série

$$V_o(s) = V_i(s) \frac{R_L // sL}{R + R_L // sL} = V_i(s) \frac{\frac{R_L \cdot sL}{R_L + sL}}{R + \frac{R_L \cdot sL}{R_L + sL}}$$



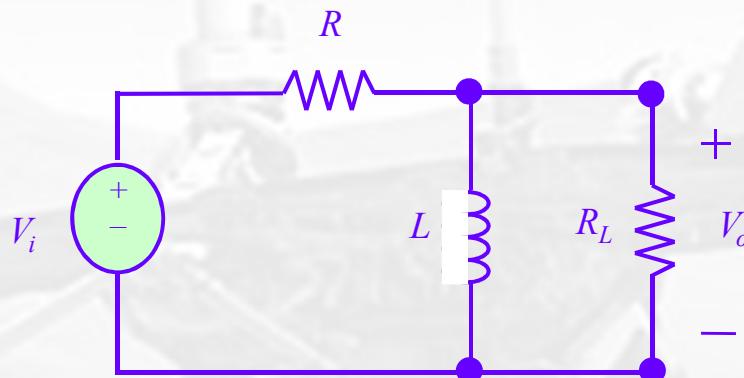
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = K \cdot \frac{s}{s + \omega_c}$$

$$\text{onde: } K = \frac{R_L}{R + R_L} \quad \text{e} \quad \omega_c = K \frac{R}{L}$$

3.2 Filtros Passa Alta – RL Série

■ Exemplo:

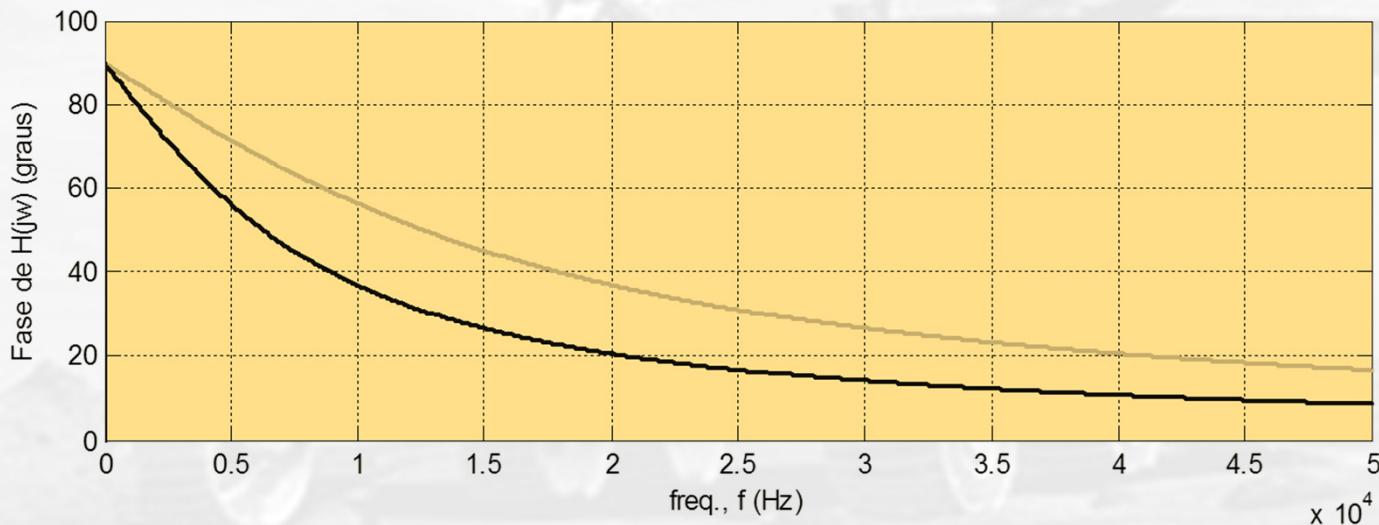
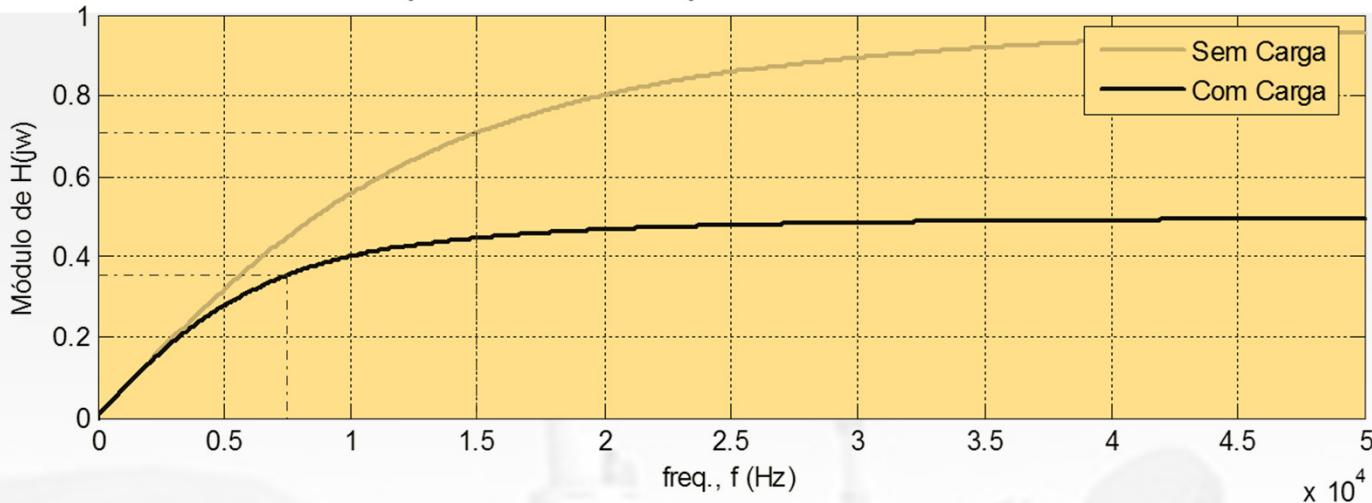
- Seja um FPA RL Série com $R = 500 \Omega$ e $f_c = 15 \text{ kHz}$. Mostre a Resposta em Frequência do circuito sem carga, e depois, com uma carga resistiva $R_L = 500 \Omega$, considerando em ambos casos uma tensão de entrada $V_i = 1,0 \text{ V}$.



3.2 Filtros Passa Alta – RL Série

■ Exemplo:

Resposta em Freq. do FPA RL em Série



3.2 Filtros Passa Alta – RL Série

■ Exemplo:

- Seja um fpa RL Série com $R = 200 \Omega$, $L = 100 \text{ mH}$ e $R_L = 1 \text{ k}\Omega$. Calcule a frequência de corte e a Resposta em Frequênciā do circuito considerando $V_i = 1,0 \text{ V}$.

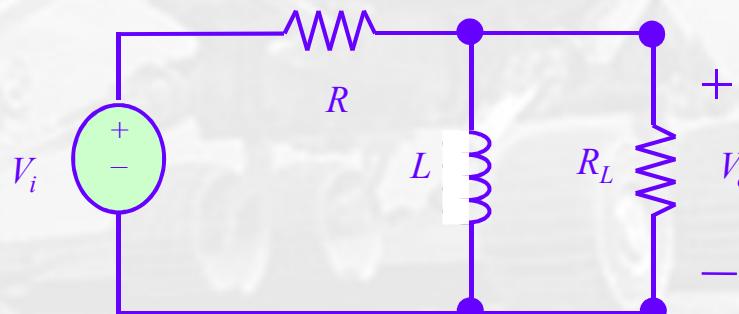
$$\omega_c' = K\omega_c \quad \text{e} \quad K = \frac{R_L}{R + R_L} = \frac{1000}{200 + 1000} = 0,833$$

$$\omega_c = 2\pi \cdot f_c = K \frac{R}{L} \quad \Rightarrow \quad f_c = \frac{200}{2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3}} = 318,3 \text{ Hz}$$

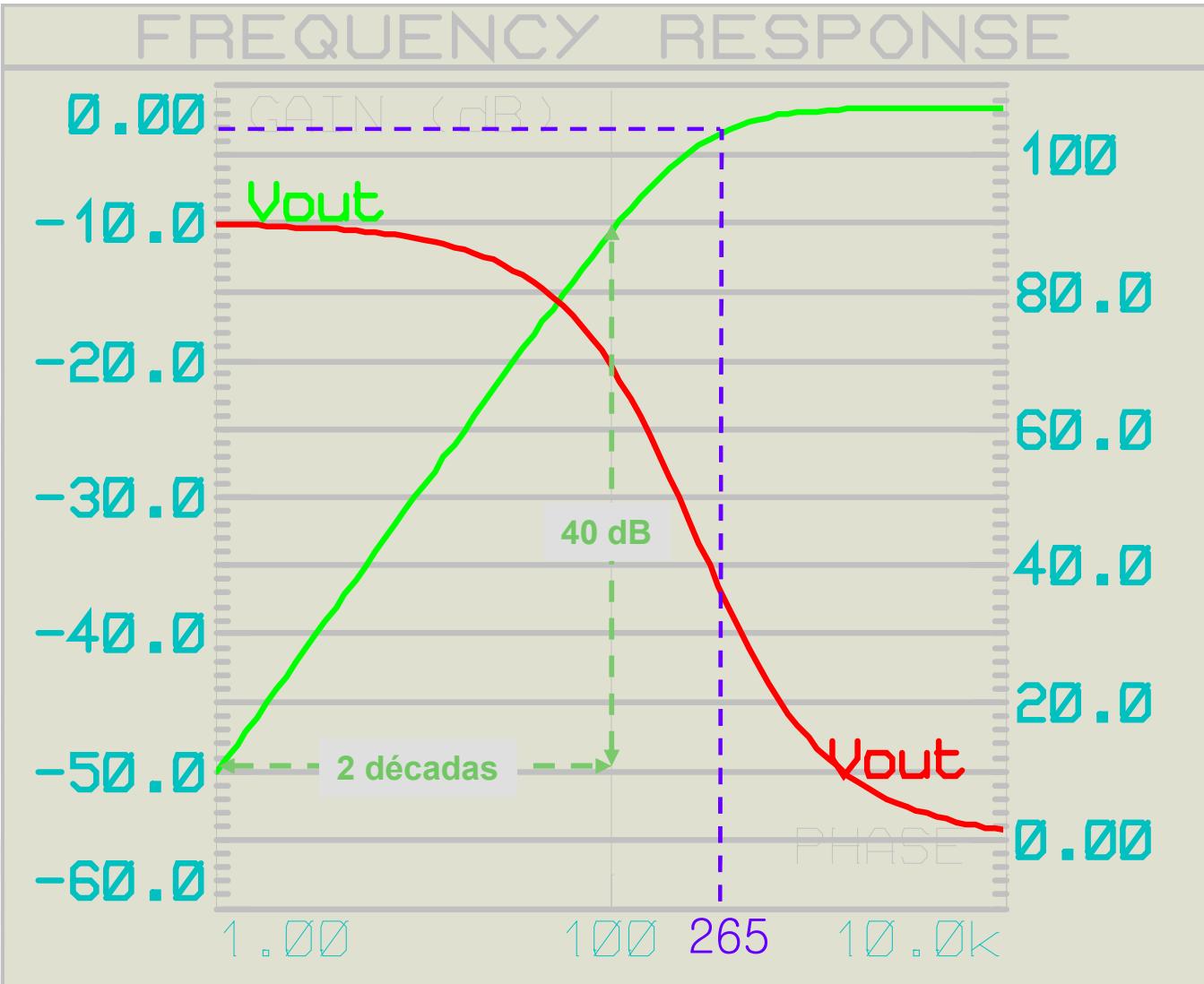
Circ.
sem carga

$$\text{Logo : } f_c' = K \cdot f_c = 0,833 \cdot 318,3 = 265,3 \text{ Hz}$$

Circ.
com carga



3.2 Filtros Passa Alta – RL Série



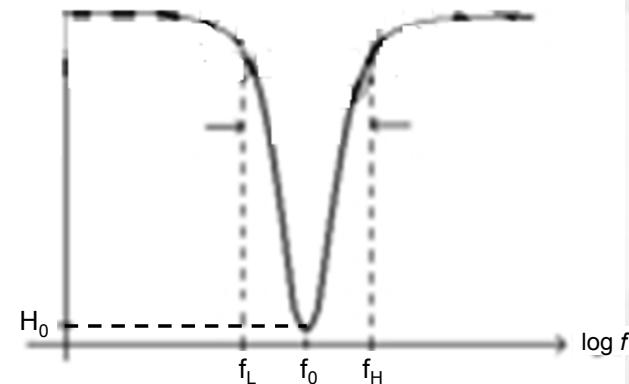
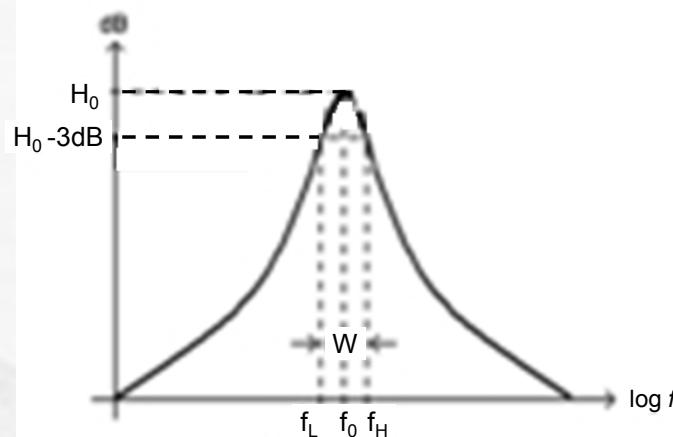
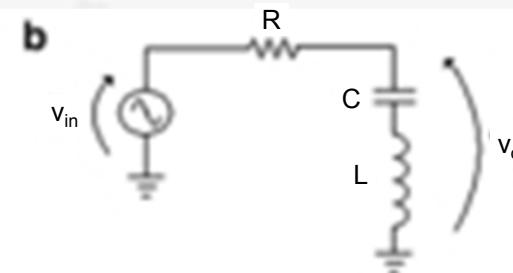
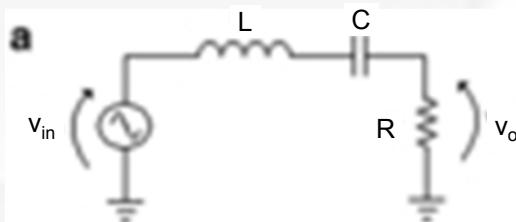
Exercícios 2

1. Em um fpa RC em série, $C = 1\mu\text{F}$. Determine a frequência de corte (rad/s) para os seguintes valores de R :
a) 100Ω ; b) $5 \text{ k}\Omega$; c) $30 \text{ k}\Omega$.
2. Determine a função de transferência de um fpb RC Série ligado a um resistor de carga R_L em paralelo com o capacitor.
3. Simule (*Matlab/Python/Multsim*) o circuito fpa RL Série, $f_c = 300 \text{ Hz}$ e compare as curvas da resposta em frequência obtidas nos dois procedimentos, prático e simulado. Explique possíveis distorções encontradas.

4 Filtros de 2^a Ordem

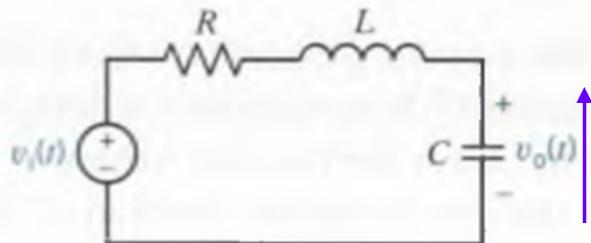
- Filtro Passa Faixa (a) e Filtro Rejeita Faixa (b)

Filtros Passivos RLC: (a) passa-faixa (b) rejeita-faixa (notch)



4 Filtros de 2^a Ordem

Low-pass

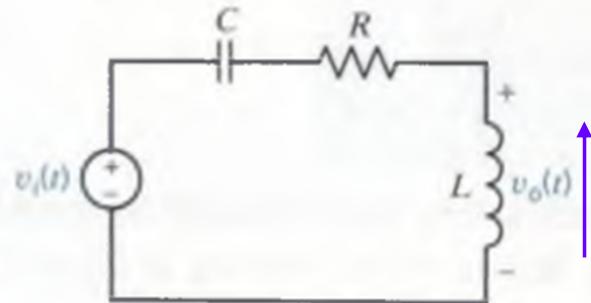


$$H(s) = \frac{1}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$k = 1$

High-pass

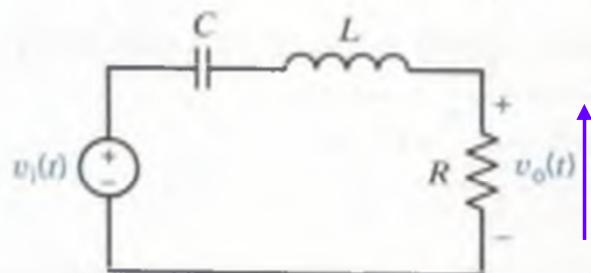


$$H(s) = \frac{s^2}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$k = 1$

Band-pass



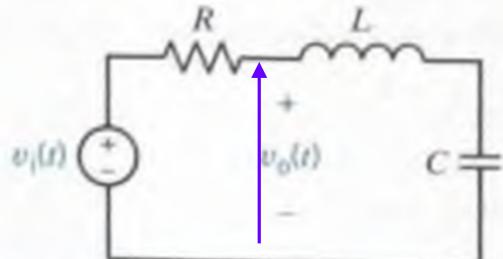
$$H(s) = \frac{\frac{R}{L}s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$k = 1$

Band-stop (notch)



$$H(s) = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}$$

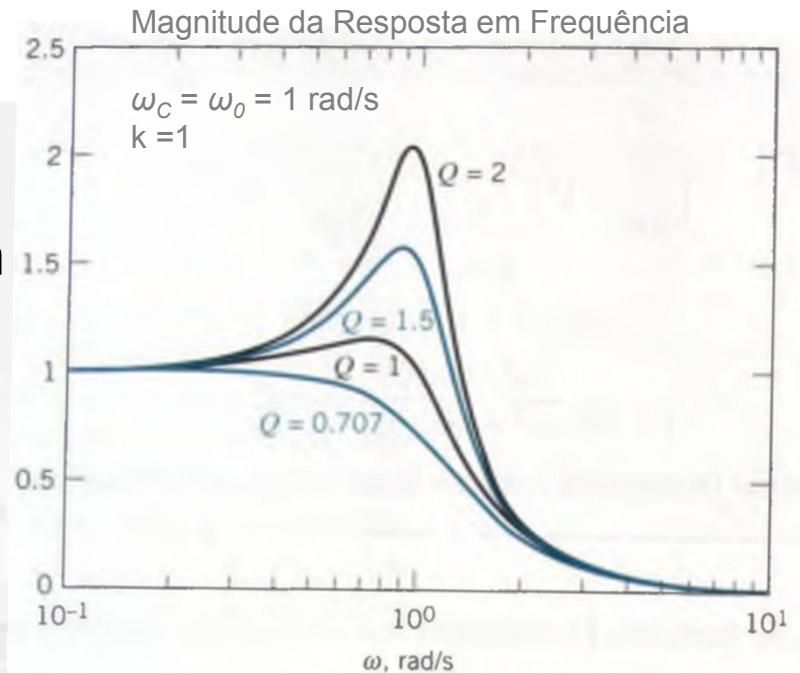
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$k = 1$

4 Filtros de 2^a Ordem

- Aproximação “barata” aos filtros ideais
- São usados como bloco construtivo em filtros mais próximos aos filtros ideais
- Resposta em Frequência definida por
 - Ganho k
 - Frequência Central ω_0
 - Fator de Qualidade Q
- Circuitos de filtros são projetados pela escolha dos valores dos elementos do circuito de modo a se obter valores desejados para k, ω_0 e Q
- Função de Transferência
FPB de 2^a Ordem

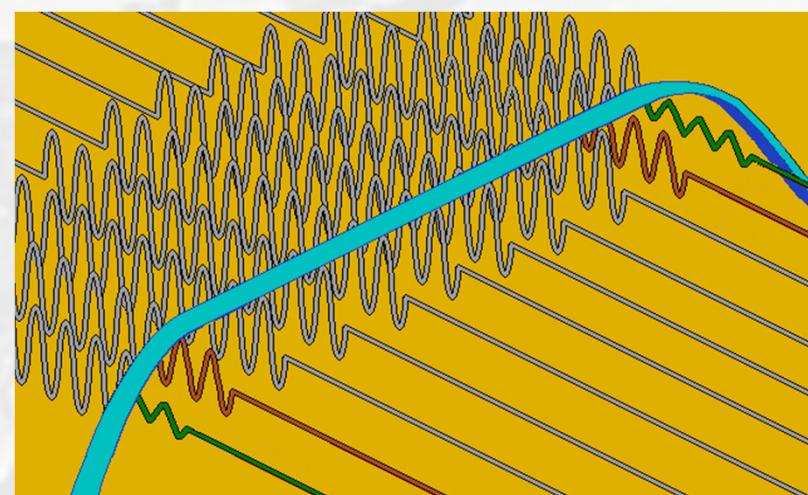


$$H_{PB}(s) = k \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

4.1 Filtro Passa Faixa (FPF)

- Permite a passagem das componentes de frequências médias e bloqueia as componentes de baixas e altas frequências
 - **Atraso de Grupo:** $\tau = -\frac{d\angle H(\omega)}{d\omega}$
 - Atraso de Grupo constante significa que o filtro não provoca distorção temporal
- Exemplo de Filtro Passa Faixa com Atraso de Grupo não constante (variação não linear da fase com a frequência)

Um filtro com **resposta de fase plana** (atraso de grupo constante) faz com que componentes freqüenciais de um sinal sejam atrasadas por diferentes tempos, que serão compensados pela diferença de velocidade de propagação de cada componente, de modo que o atraso será o mesmo para todas as componentes.

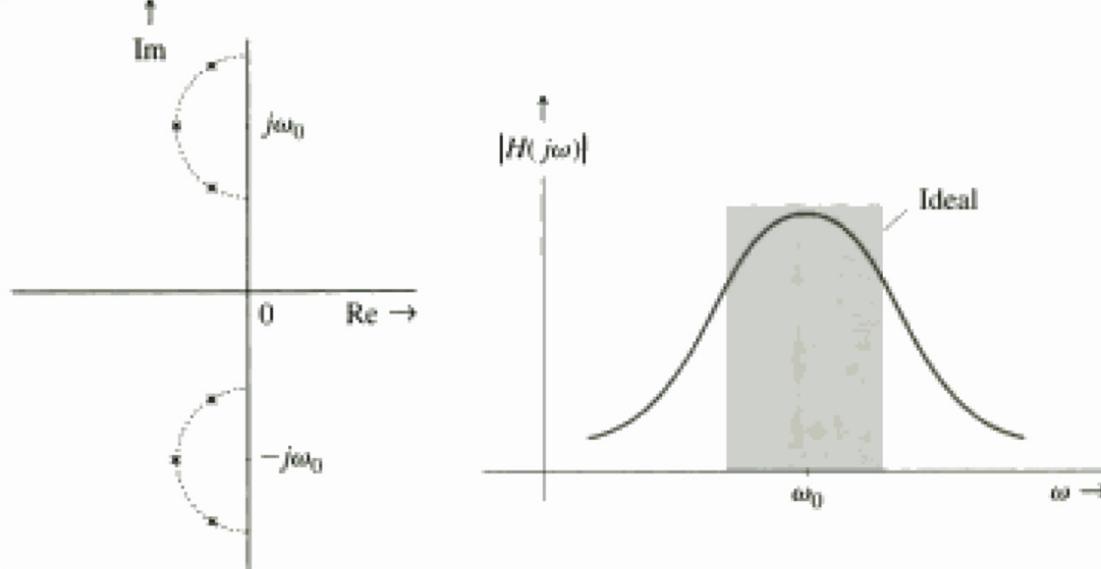


4.1 Filtro Passa Faixa

- Permite a passagem das componentes de frequências médias e bloqueia as componentes de baixas e altas frequências
- Possui um ganho máximo em $\omega = \omega_0 = (\omega_{C1} \cdot \omega_{C2})^{1/2}$

$$H(s) = \left(\frac{\omega_{C2}}{s + \omega_{C2}} \right) \left(\frac{s}{s + \omega_{C1}} \right)$$

Uma parede de polos opostos ao eixo imaginário, em frente ao centro da BP em ω_0



4.1 Filtro Passa Faixa

■ Frequência Central:

- Nessa frequência a Função de Transferência $H(s)$ é um valor real
- Nessa frequência ocorre o valor máximo do módulo da Resposta em Frequência, $|H(j\omega)|$
- Também é conhecida por **Frequência de Ressonância**

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}$$

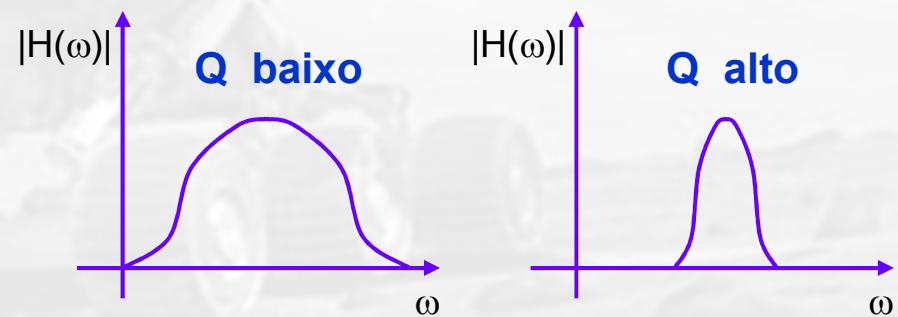
■ Largura da banda passante:

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1}$$

■ Fator de Qualidade:

- Medida da largura de banda que não depende da posição absoluta das frequências de corte

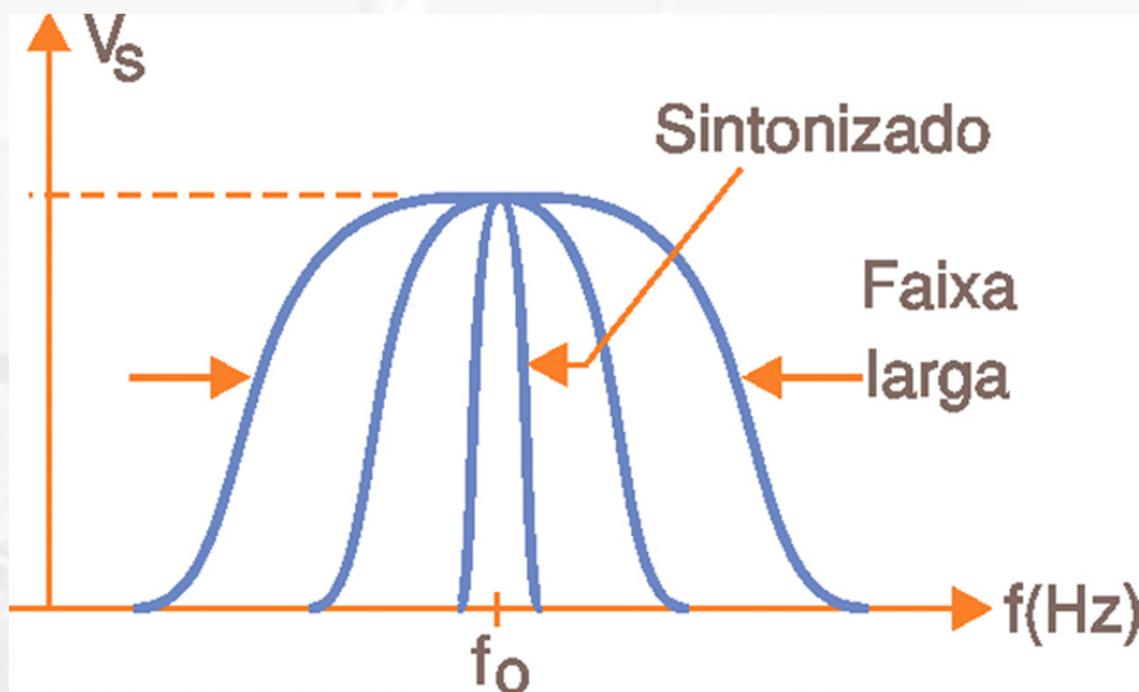
$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{\sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}}}{\omega_{c2} - \omega_{c1}}$$



4.1 Filtro Passa Faixa

■ Tipos

- ❑ **Banda Larga:** $\omega_{C2} / \omega_{C1} \geq 2$
- ❑ **Banda Estreita (Sintonizado)**



4.1 Filtro Passa Faixa

- Descrito por 5 parâmetros: ω_0 , ω_{c1} , ω_{c2} , β e Q (dois parâmetros livres)
- O F.P.F. pode ser dividido em três componentes
 - Um F.P.B. de ganho unitário e freq. de corte ω_{c2}
 - Um F.P.A. de ganho unitário e freq. de corte ω_{c1}
 - Um amplificador de ganho desejado dentro da banda passante
- Estes componentes devem ser ligados em cascata
(multiplicação das Respostas em Frequência)
- Usual para filtros ativos – com amplificadores operacionais
(células com alta impedância de entrada e baixa impedância de saída)

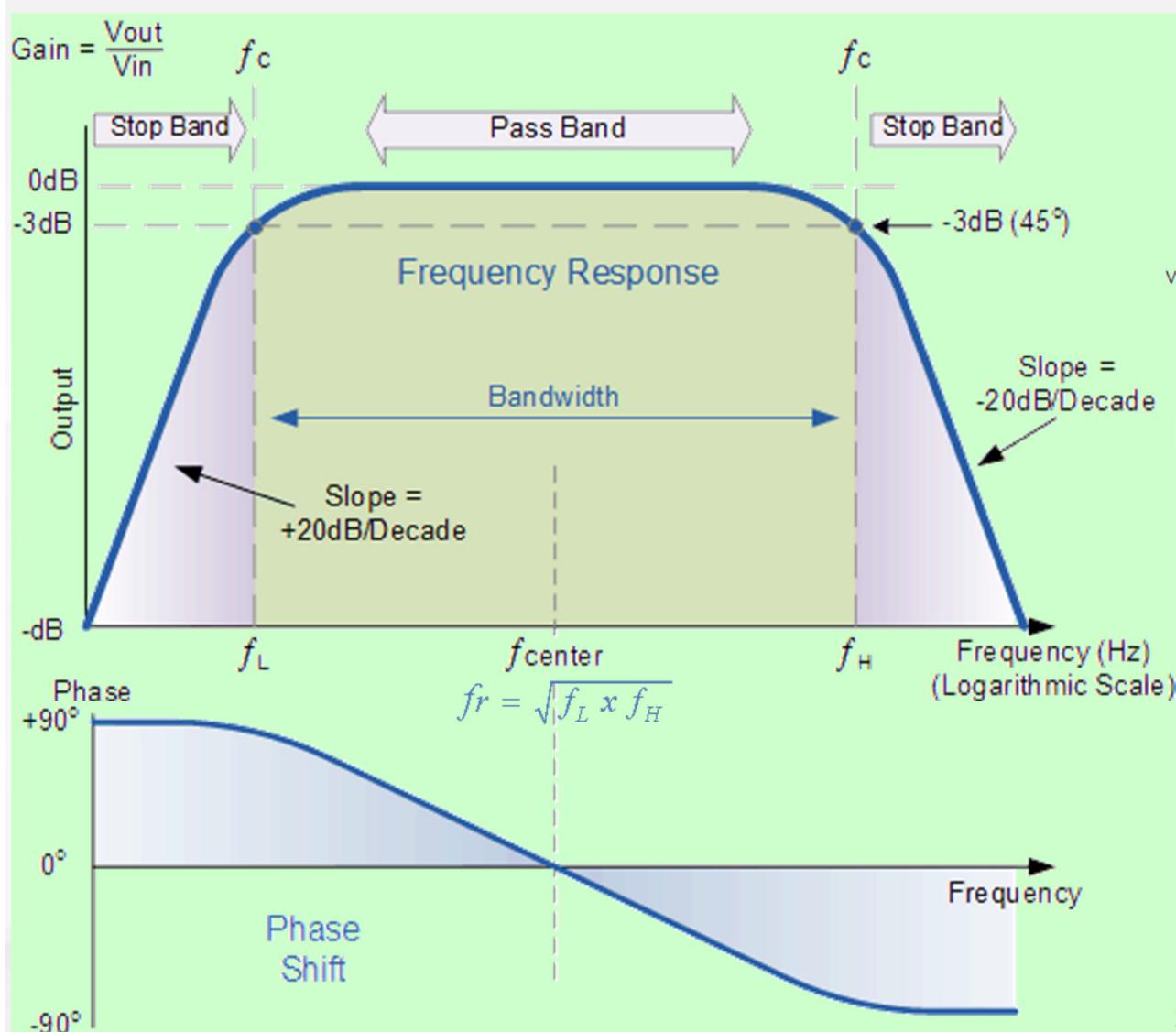


$$H(s) = \left(\frac{\omega_{c2}}{s + \omega_{c2}} \right) \left(\frac{s}{s + \omega_{c1}} \right) \left(\frac{-R_f}{R_i} \right) = \frac{-K\omega_{c2}s}{s^2 + (\omega_{c1} + \omega_{c2})s + \omega_{c1}\omega_{c2}}$$

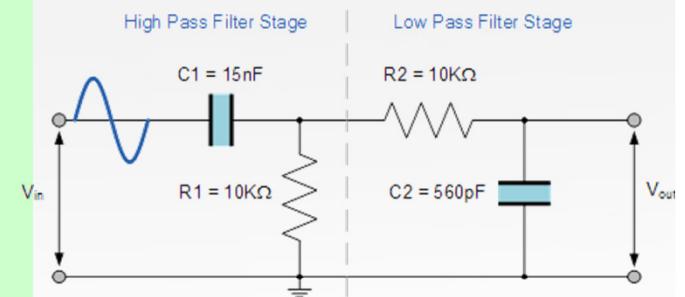
onde : $K = R_f / R_i$ e $\omega_{c1} = 1/(R_1 C_1)$, $\omega_{c2} = 1/(R_2 C_2)$

2ª Ordem

4.1 Filtro Passa Faixa

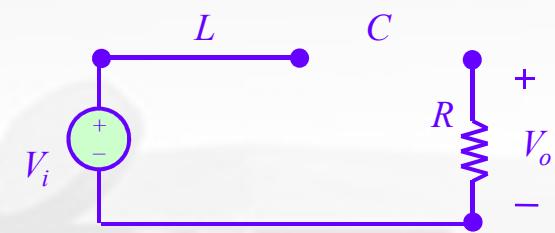
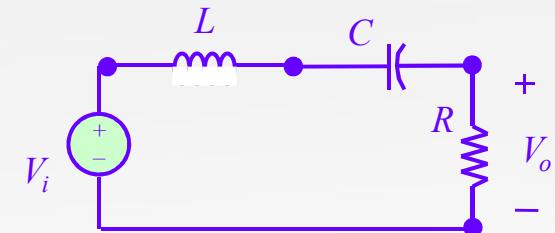


FPF Passivo de 2a. ordem com $f_{c1} = 1\text{kHz}$ e $f_{c2} = 30\text{kHz}$

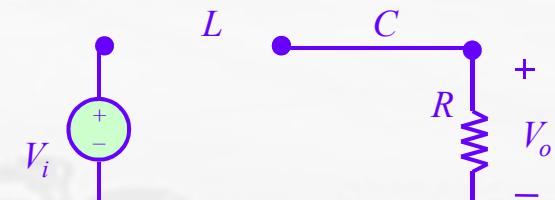


4.1 Filtro Passa Faixa – RLC Série (Banda Estreita, Sintonizado)

- Circuito RLC em Série
 - Impedância: $Z = R + j(X_L - X_C)$
 - Em frequências baixas: $X_L \rightarrow 0$ e $X_C \rightarrow \infty$
Tensão de saída é nula
 - Em frequências altas: $X_L \rightarrow \infty$ e $X_C \rightarrow 0$
Tensão de saída é nula
 - Na frequência de Ressonância ω_0 : $X_L = X_C$
Tensão de saída é máxima e igual à tensão de entrada, e a fase é nula
- Permite a passagem de uma faixa de frequências e bloqueia as demais frequências



$$\omega = 0 \text{ rad/s}$$



$$\omega \rightarrow \infty \text{ rad/s}$$

4.1 Filtro Passa Faixa – RLC Série

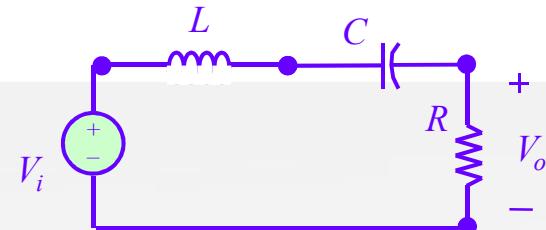
■ Circuito RLC em Série

- Frequência Central:
- Função de Transferência
- Resposta em Frequência

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{1/(L.C) + (R/2L)^2}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{1/(L.C) + (R/2L)^2}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L} \quad \text{e} \quad Q = \omega_0 / \beta = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$



$$j\omega_0 L + \frac{1}{j\omega_0 C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$H(s) = \frac{s R/L}{s^2 + sR/L + 1/(LC)}$$

MÓDULO

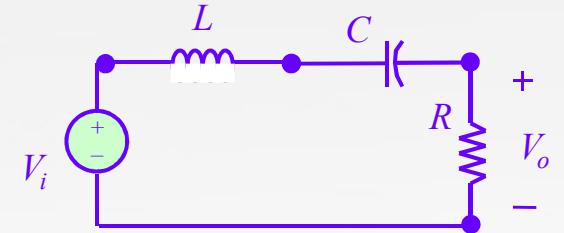
$$|H(j\omega)| = \frac{\omega R/L}{\sqrt{(1/LC - \omega^2)^2 + (\omega R/L)^2}}$$

FASE

$$\angle H(j\omega) = 90^\circ - \arctg \left(\frac{\omega R/L}{1/LC - \omega^2} \right)$$

4.1 Filtro Passa Faixa – RLC Série

■ Função de Transferência



$$\left. \begin{array}{l} \text{LKT: } v_i(t) = v_o(t) + L \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\tau) d\tau \\ v_o(t) = R.i(t) \Rightarrow i(t) = \frac{v_o(t)}{R} \end{array} \right\} \Rightarrow v_i(t) = v_o(t) + \frac{L}{R} \frac{dv_o(t)}{dt} + \frac{1}{R.C} \int_0^t v_o(\tau) d\tau$$

$$V_i(s) = V_o(s) + \frac{L}{R} s V_o(s) + \frac{1}{R.C} \cdot \frac{V_o(s)}{s} \Rightarrow s.V_i(s) = \left(s + \frac{L}{R} s^2 + \frac{1}{R.C} \right) V_o(s)$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{s.R/L}{s^2 + s.R/L + 1/(L.C)}$$

4.1 Filtro Passa Faixa – RLC Série

■ Circuito RLC em Série

$$H(s) = \frac{R}{R + Ls + (1/sC)} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

Ressonância: $H_{\max} = |H(j\omega_0)| = 1 \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

Meia-potência: $\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} = |H(j\omega_c)|$

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_{c1} \cdot \omega_{c2}} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L}$$

$$Q = \omega_0 / \beta = \sqrt{\frac{L}{CR^2}}$$

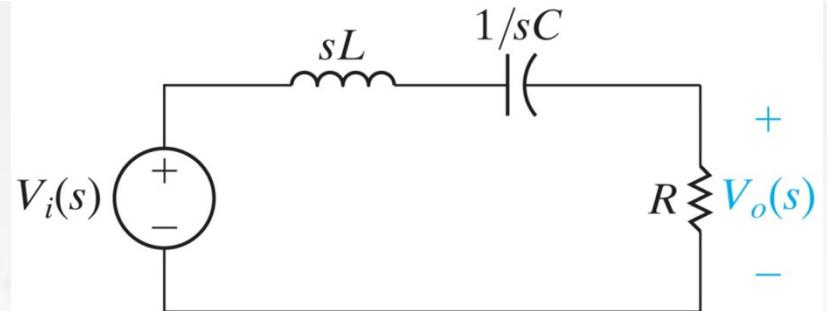


Figure: 14-21
Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

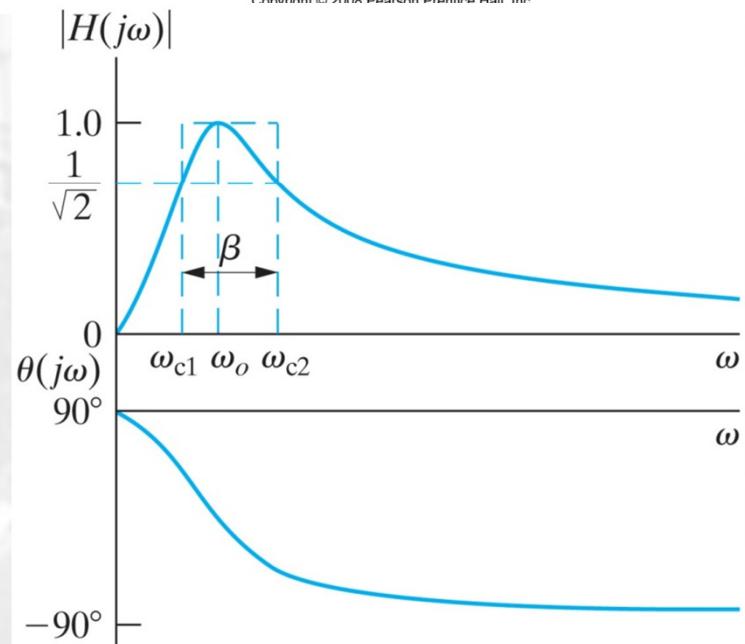


Figure: 14-20
Copyright © 2008 Pearson Prentice Hall, Inc.

4.1 Filtro Passa Faixa – RLC Série

■ Exemplo:

Projete um FPF RLC em série que transmita sinais de frequências entre 1 kHz e 10 kHz. Use capacitor de 1 μF .

□ Cálculo da frequência central: $f_0 = \sqrt{f_{c1} \cdot f_{c2}} = \sqrt{1k \cdot 10k} = 3162,3 \text{ Hz}$

□ Cálculo do Indutor: $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 3162,3)^2 \cdot 1\mu} = 2,53 \text{ mH}$

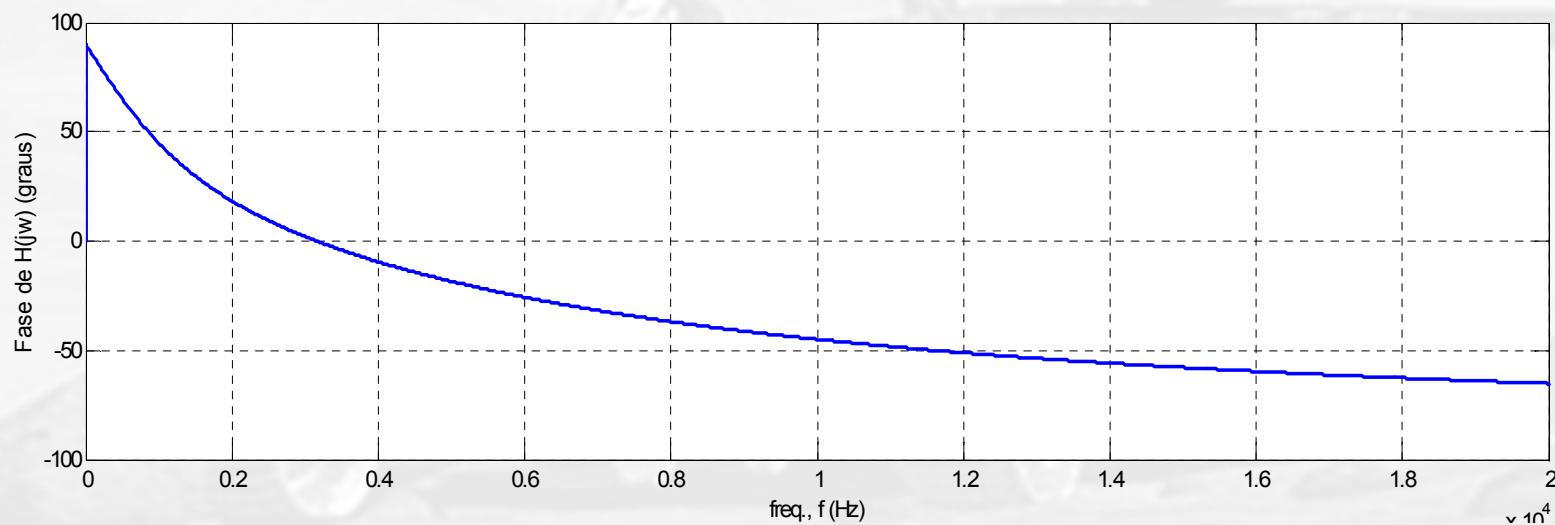
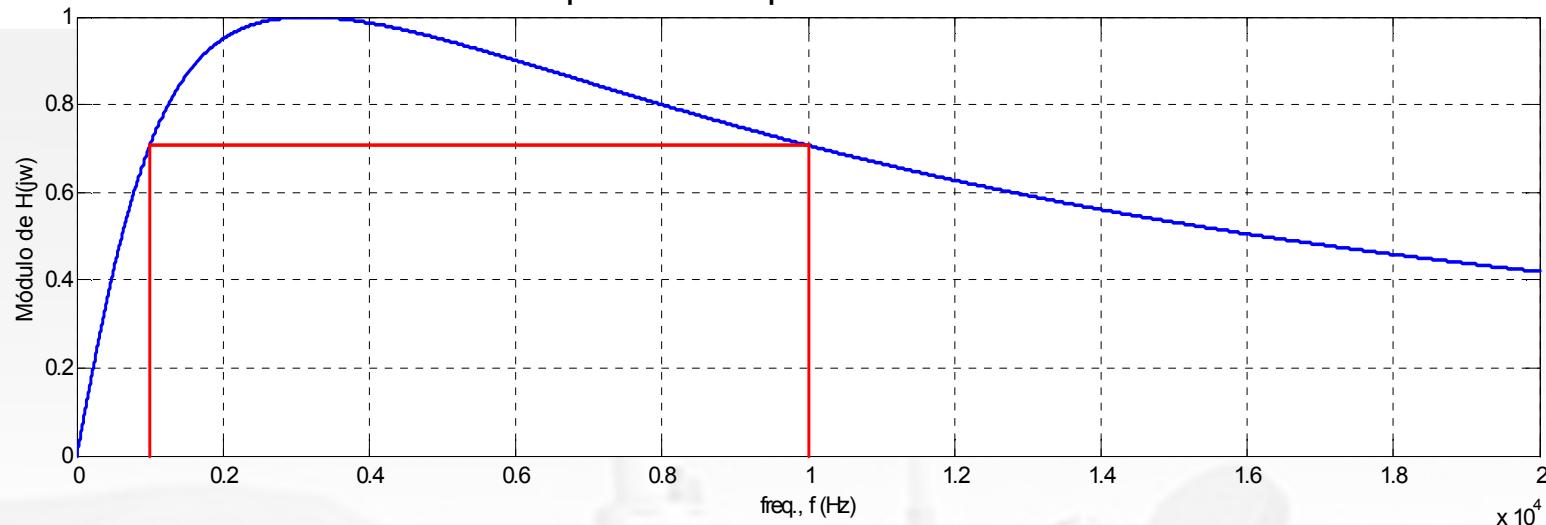
□ Fator de Qualidade: $Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{3162,3}{10k - 1k} = 0,35$

□ Cálculo do Resistor: $Q = \sqrt{\frac{L}{C \cdot R^2}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C \cdot Q^2}} = \sqrt{\frac{0,00253}{10^{-6} \cdot 0,35^2}} = 143,2 \Omega$

4.1 Filtro Passa Faixa – RLC Série

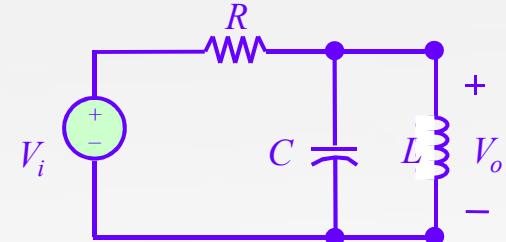
Resposta em Freq. do FPF RLC em Série

$N = 2$

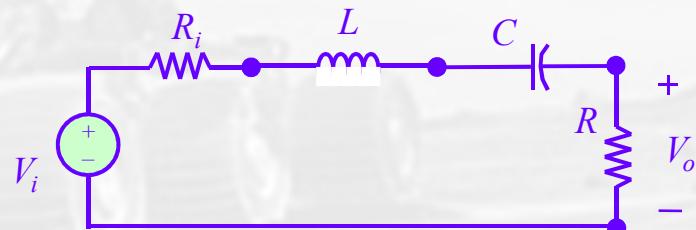


Exercícios 3

1. Para o circuito mostrado, calcule:
 - a) A função de transferência $H(s)$
 - b) A frequência central ω_0
 - c) As frequências de corte, a banda passante e o fator de qualidade do filtro
 - d) R e L para que o filtro tenha frequência central em 5 kHz e banda passante de 200 Hz, com $C = 5 \mu\text{F}$.



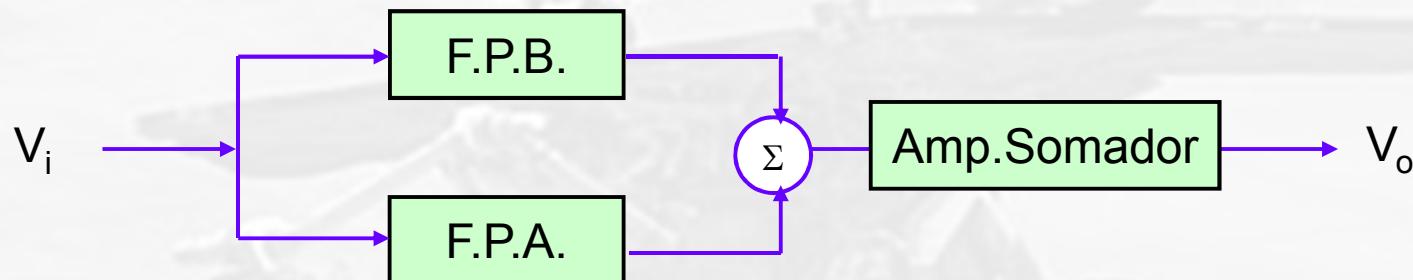
2. Investigue o efeito da Resistência Interna R_i da fonte do sinal sobre as características de um filtro passa-faixa RLC em série com carga R.



4.2 Filtro Rejeita Faixa (FRF)

Notch*

- Filtro complementar ao FPF
- O FRF pode ser dividido em três componentes
 - Um FPB de ganho unitário e freq. de corte ω_{C1}
 - Um FPA de ganho unitário e freq. de corte ω_{C2}
 - Um amplificador de ganho desejado para a resposta em frequência fora da banda de rejeição
- Conexões em paralelo e cascata (composição das resp.s em frequência)

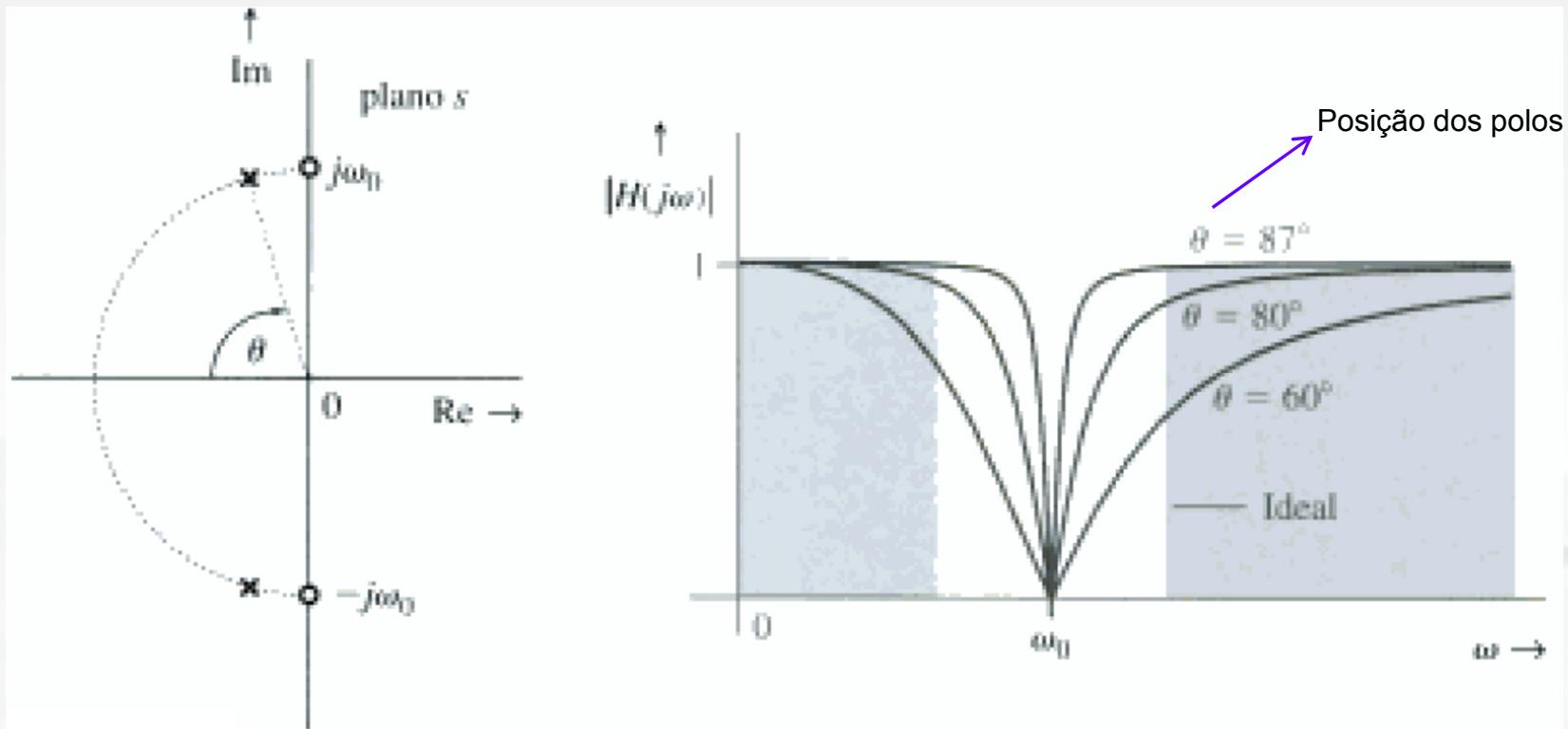


$$H(s) = \left(\frac{\omega_{C1}}{s + \omega_{C1}} + \frac{s}{s + \omega_{C2}} \right) \left(\frac{-R_f}{R_i} \right) = K \left(\frac{s^2 + 2\omega_{C1}s + \omega_{C1}\omega_{C2}}{s^2 + (\omega_{C1} + \omega_{C2})s + \omega_{C1}\omega_{C2}} \right)$$

onde : $K = R_f / R_i$ e $\omega_{C1} = 1/(R_1 C_1)$, $\omega_{C2} = 1/(R_2 C_2)$

* fenda, entalhe, corte em forma de V

4.2 Filtro Rejeita Faixa



Zeros: $j\omega_0, -j\omega_0$

Polos: $-\omega_0(\cos\theta + j\sin\theta), -\omega_0(\cos\theta - j\sin\theta)$

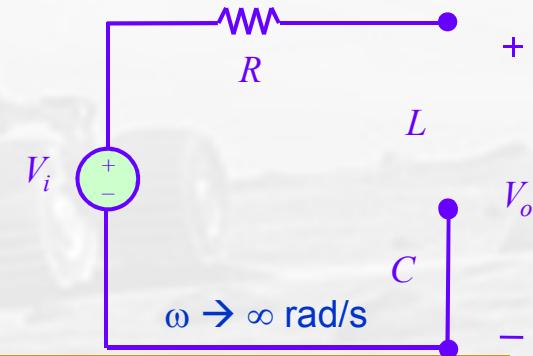
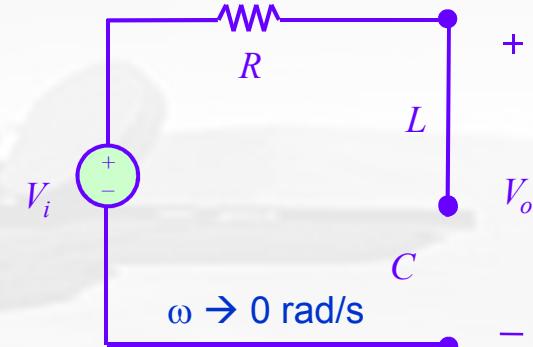
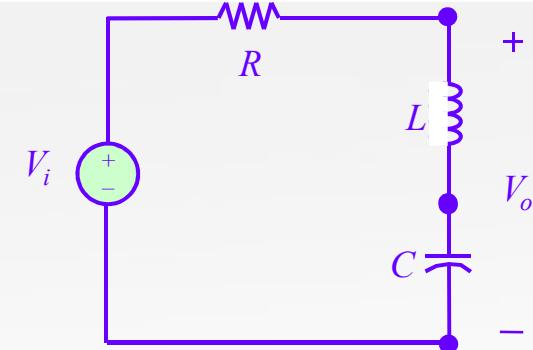
$$H(s) = \frac{(s - j\omega_0)(s + j\omega_0)}{(s + \omega_0 \cos\theta + j\omega_0 \sin\theta)(s + \omega_0 \cos\theta - j\omega_0 \sin\theta)} = \frac{s^2 + \omega_0^2}{s^2 + (2\omega_0 \cos\theta)s + \omega_0^2}$$

4.2 Filtro Rejeita Faixa – RLC Série

- Circuito RLC em Série

- Impedância: $Z = R + j(X_L - X_C)$
- Em frequências baixas: $X_L \rightarrow 0$ e $X_C \rightarrow \infty$
Tensão de saída é igual à tensão de entrada
- Em frequências altas: $X_L \rightarrow \infty$ e $X_C \rightarrow 0$
Tensão de saída é igual à tensão de entrada
- Na frequência de Ressonância ω_0 : $X_L = X_C = 0$
Tensão de saída é nula

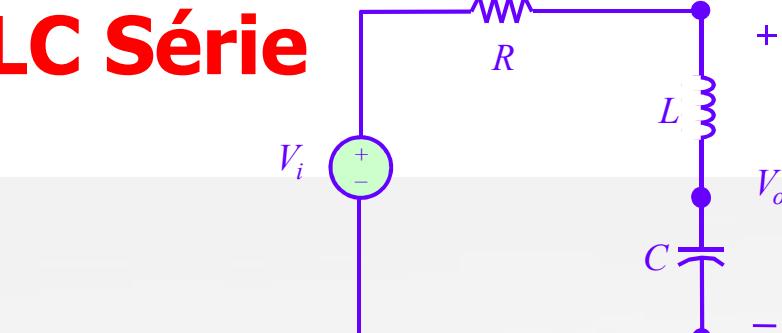
- Permite a passagem de duas faixas de frequências e bloqueia uma frequência específica (frequência de ressonância)



4.2 Filtro Rejeita Faixa – RLC Série

■ Circuito RLC em Série

□ Frequência Central:



$$j\omega_0L + \frac{1}{j\omega_0C} = 0 \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

□ Função de Transferência

$$H(s) = \frac{sL + 1/(sC)}{R + sL + 1/(sC)} = \frac{s^2 + 1/(LC)}{s^2 + sR/L + 1/(LC)}$$

□ Resposta em Frequência

$$\omega_{c1} = -\frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)^2}$$

$$\omega_{c2} = \frac{R}{2L} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2 + \left(\frac{1}{LC}\right)^2}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{R}{L} \quad \text{e} \quad Q = \omega_0 / \beta = \sqrt{\frac{L}{C.R^2}}$$

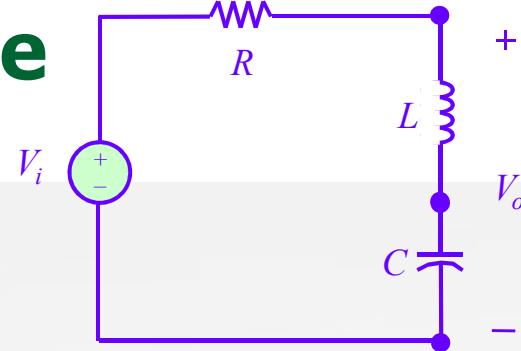
MÓDULO

$$|H(j\omega)| = \frac{|1/(LC) - \omega^2|}{\sqrt{(1/(LC) - \omega^2)^2 + (\omega R/L)^2}}$$

FASE

$$\angle H(j\omega) = -\arctg\left(\frac{\omega R/L}{1/(LC) - \omega^2}\right)$$

4.2 Filtro Rejeita Faixa – RLC Série



Círculo RLC em Série

$$H(s) = \frac{sL + \frac{1}{sC}}{R + sL + \frac{1}{sC}} = \frac{s^2 + \frac{1}{LC}}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\frac{1}{LC} - \omega^2}{\frac{1}{LC} - \omega^2 + j\frac{R}{L}\omega}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\left| \frac{1}{LC} - \omega^2 \right|}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2 \right)^2 + \left(\frac{R}{L}\omega \right)^2}} \quad \text{e} \quad \theta(j\omega) = -\tan^{-1} \left(\frac{\frac{R}{L}\omega}{\frac{1}{LC} - \omega^2} \right)$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{c1} = -\frac{1}{RL} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}} \quad \text{e} \quad \omega_{c2} = \frac{1}{RL} + \sqrt{\left(\frac{R}{2L} \right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\beta = R/L$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \sqrt{\frac{L}{R^2 C}}$$

4.2 Filtro Rejeita Faixa – RLC Série

■ Exemplo:

Projete um FRF RLC em série com banda rejeitada de 250 Hz e uma Frequência central de 750 Hz. Use capacitor de 100 nF .

□ Fator de Qualidade:

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = \frac{750}{250} = 3$$

□ Cálculo do Indutor:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow L = \frac{1}{\omega_0^2 \cdot C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 750)^2 \cdot 100n} = 450 \text{ mH}$$

□ Cálculo do Resistor:

$$Q = \sqrt{\frac{L}{C \cdot R^2}} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{L}{C \cdot Q^2}} = \sqrt{\frac{0,450}{10^{-7} \cdot 3^2}} = 707 \Omega$$

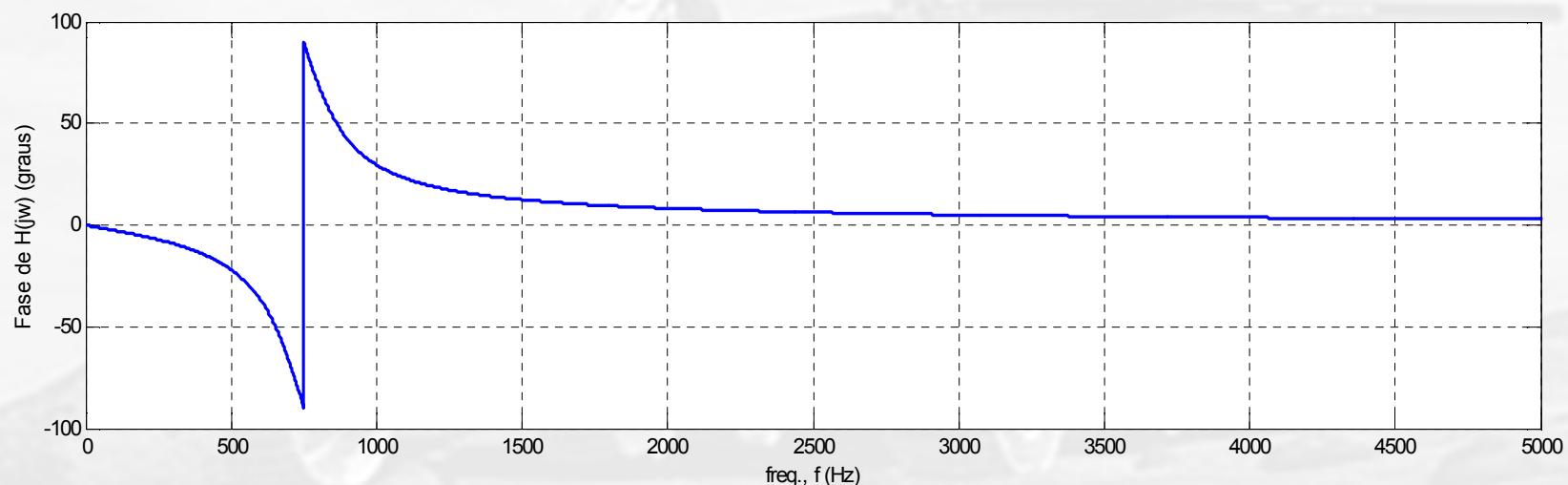
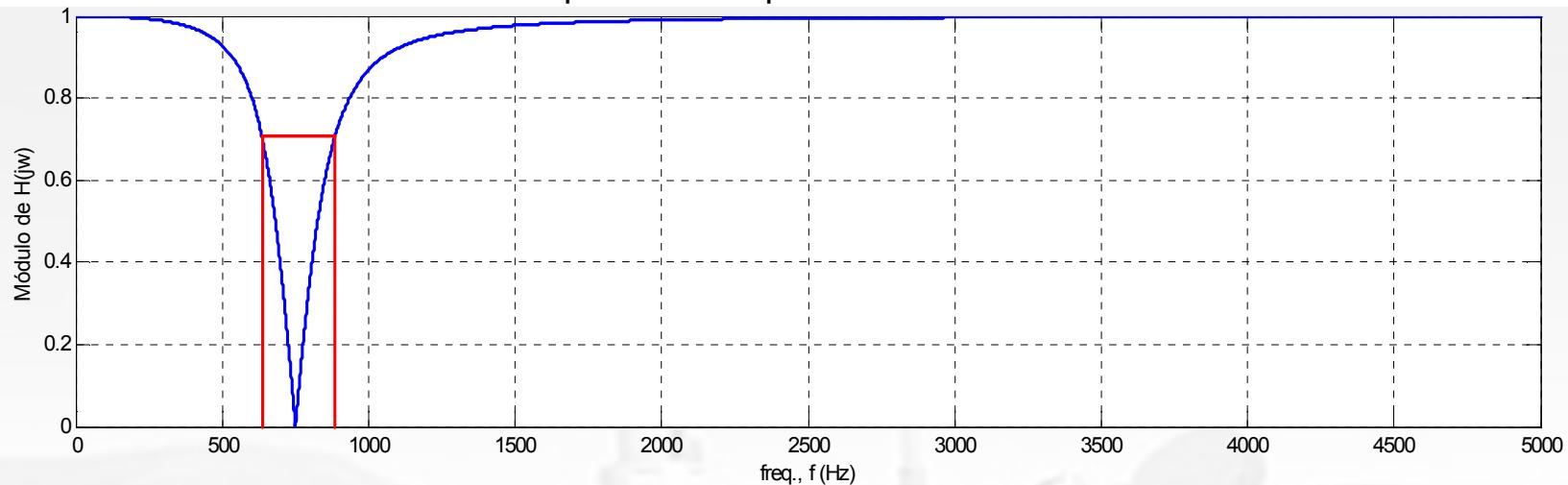
□ Cálculo das Frequência de corte:

$$\omega_{c1} = -\frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_0^2} = 3992,0 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{c2} = \frac{\beta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\beta}{2}\right)^2 + \omega_0^2} = 5562,8 \text{ rad/s}$$

4.2 Filtro Rejeita Faixa – RLC Série

Resposta em Freq. do FRF RLC em Série

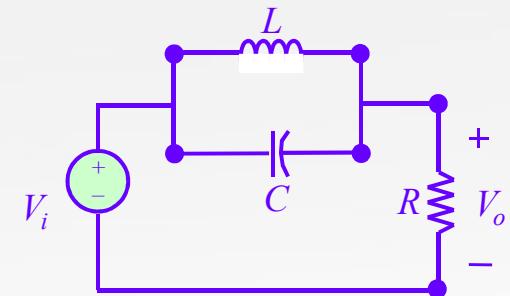


4.2 Filtro Rejeita Faixa

■ Exercício 4:

Para o circuito mostrado, calcule:

- a) A função de transferência $H(s)$
- b) A frequência central ω_0
- c) As frequências de corte, a banda passante e o fator de qualidade do filtro
- d) R e L para que o filtro tenha frequência central em 4 kHz e fator de qualidade igual a 5, e $C = 500 \text{ nF}$.

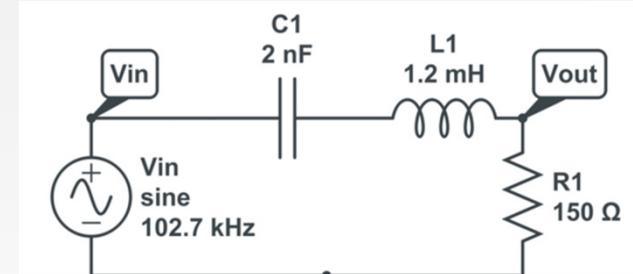


4.2 Filtro Rejeita Faixa

■ Exercício 5:

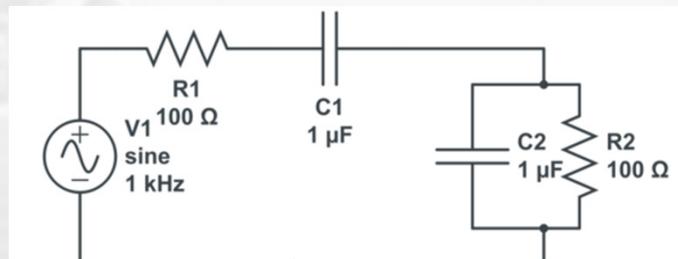
Para o circuito mostrado, calcule:

- A função de transferência $H(s)$
- A frequência central ω_0
- As frequências de corte, a banda passante e o fator de qualidade do filtro
- R e L para que o filtro tenha frequência central em 4 kHz e fator de qualidade igual a 5, e $C = 500 \text{ nF}$.

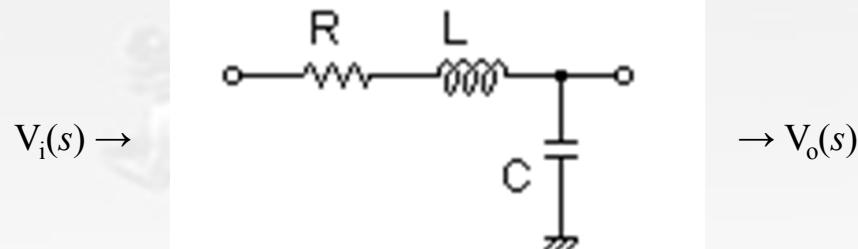


■ Exercício 6:

Idem ao Exercício 5.



4.3 Filtro Passa Baixa RLC Série



$$\text{LKT: } v_g(t) = R.i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + v_C(t)$$

$$v_C(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \Leftrightarrow V_C(s) = \frac{1}{C} \cdot \frac{I(s)}{s} \Rightarrow I(s) = C \cdot s \cdot V_C(s)$$

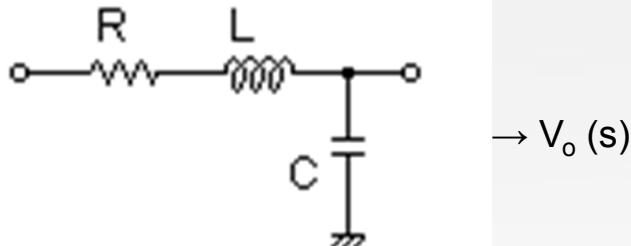
$$V_g(s) = R \cdot C \cdot s \cdot V_C(s) + L \cdot s \cdot C \cdot s \cdot V_C(s) + V_C(s) = (R \cdot C \cdot s + L \cdot C \cdot s^2 + 1) V_C(s)$$

$$H(s) = \frac{V_C(s)}{V_g(s)} = \frac{1}{L \cdot C \cdot s^2 + R \cdot C \cdot s + 1}$$

$$H(s) = \frac{1/(L \cdot C)}{s^2 + (R/L) \cdot s + 1/(L \cdot C)}$$

4.3 Filtro Passa Baixa RLC Série

$V_i(s) \rightarrow$



Resposta em Frequência:

$$H(\omega) = \frac{1/(L.C)}{1/(L.C) - \omega^2 + j\omega R/L}$$

Frequência de Corte:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Fator de Qualidade:

$$Q = \frac{1}{R\sqrt{LC}}$$

Exemplo: $R = 100$ Ohm, $L = 100$ mH, $C = 10$ μ F

$$f_c = 1 / [2\pi \cdot (0,1 \cdot 10 \cdot 10^{-6})^{0,5}] = 5,03 \text{ Hz}$$

$$Q = 1 / [100 \cdot (0,1 \cdot 10 \cdot 10^{-6})^{0,5}] = 1/3,166 = 0,316$$

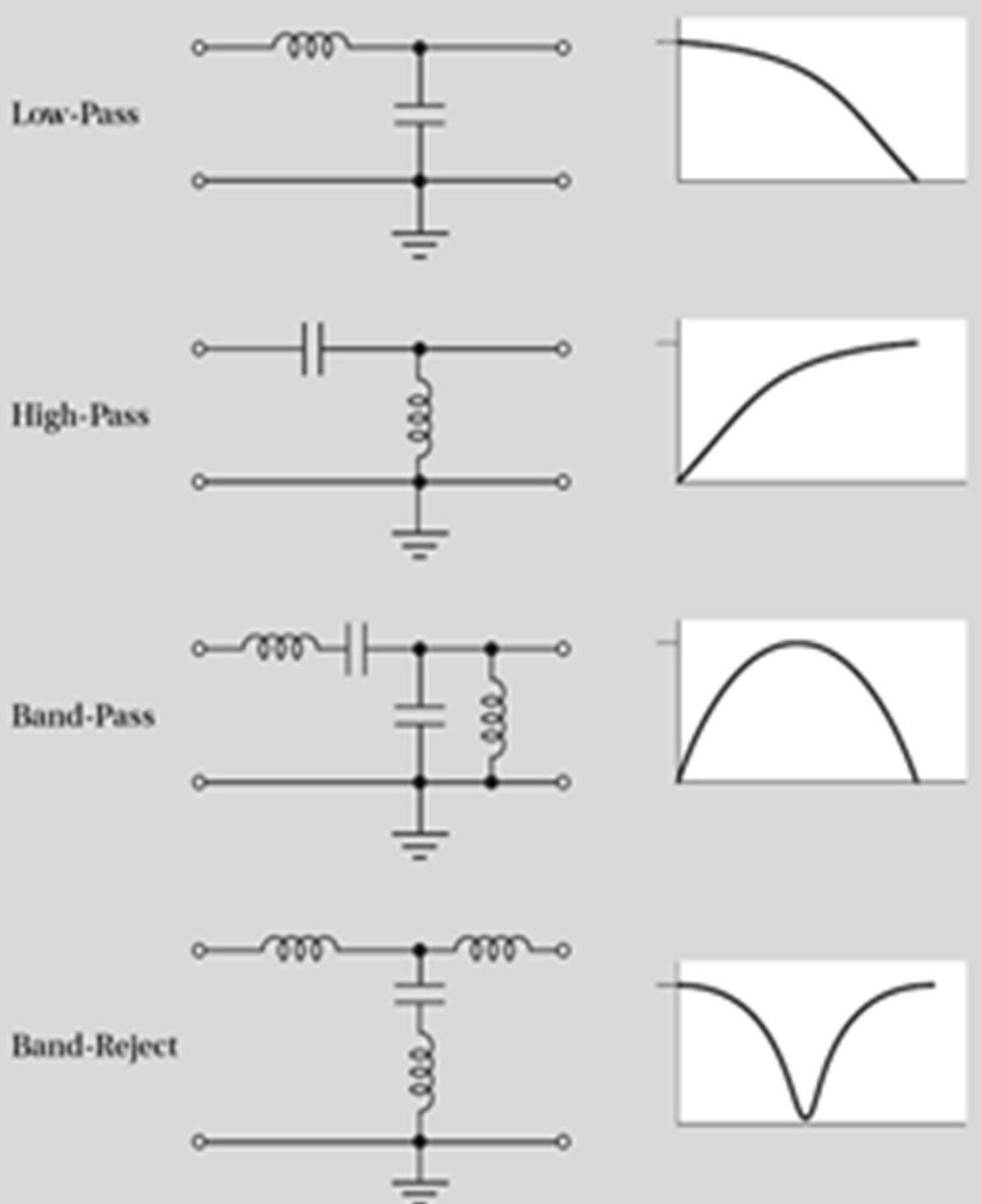
4.4 Filtros LC

Circuitos Básicos para filtros de -12 dB/oitava ou **-40 dB/déc** (ordem 2)

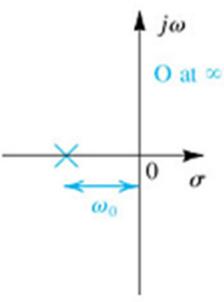
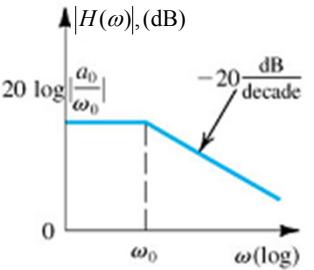
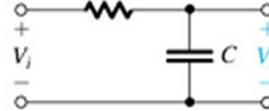
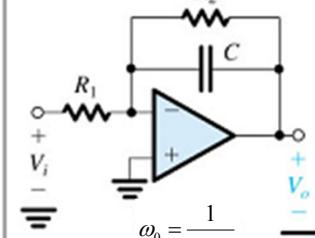
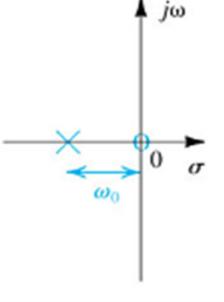
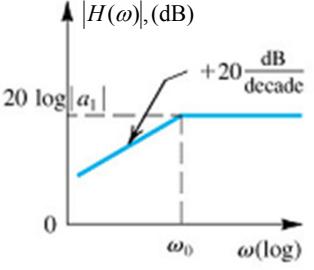
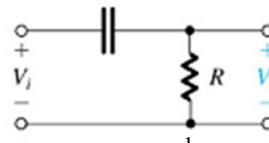
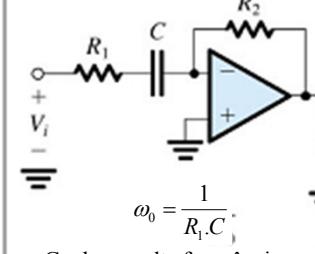
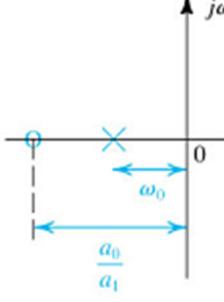
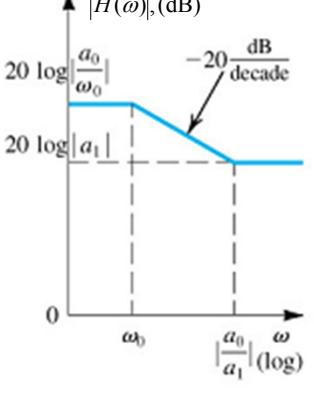
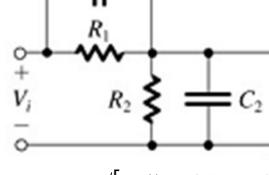
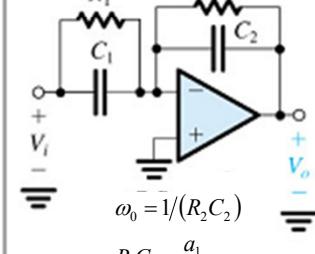
Filtros Passivos são úteis para situações de até -18 dB/oitava ou **-60 dB/déc** (ordem 3).

Filtros Ativos possuem curvas com até **-80 dB/oitava**.

Estes filtros passivos funcionam bem em altas frequências, mas em baixas frequências (de DC a 100 kHz) os indutores são grandes (volumosos, pesados, caros) e são impossíveis de serem fabricados em circuitos integrados.



4.5 Filtros Analógicos

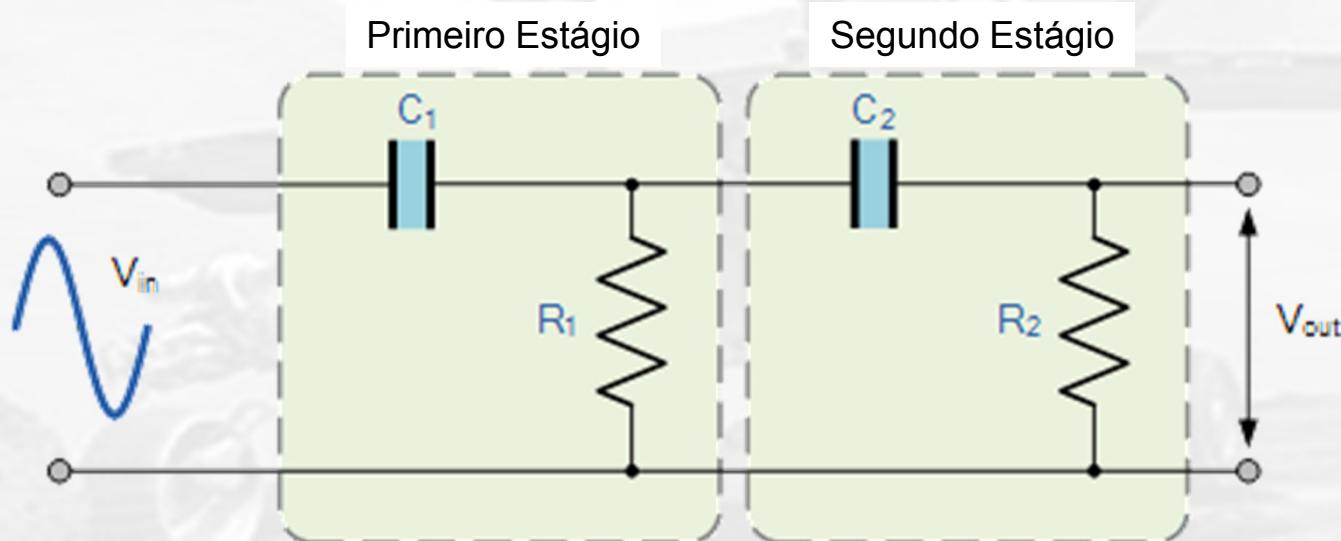
Tipo do Filtro	Plano s	Resposta em Frequência	Realização Passiva	Realização Ativa (Amp-Op)
Passa baixas	$H(s) = \frac{a_0}{s + \omega_0}$ 		 <p>$\omega_0 = \frac{1}{R.C}$</p> <p>Ganho DC : $H(\omega = 0) = 1$</p>	 <p>$\omega_0 = \frac{1}{R_2.C}$</p> <p>Ganho DC : $H(\omega = 0) = -\frac{R_2}{R_1}$</p>
Passa altas	$H(s) = \frac{a_1 s}{s + \omega_0}$ 		 <p>$\omega_0 = \frac{1}{R.C}$</p> <p>Ganho em alta frequência : $H(\omega \rightarrow \infty) = 1$</p>	 <p>$\omega_0 = \frac{1}{R_1.C}$</p> <p>Ganho em alta frequência : $H(\omega \rightarrow \infty) = -R_2 / R_1$</p>
Passa Faixa Rejeita Faixa	$H(s) = \frac{a_1 s + a_0}{s + \omega_0}$ 		 <p>$\omega_0 = 1/[R_1 // R_2.(C_1 + C_2)]$</p> <p>$R_1 C_1 = \frac{a_1}{a_0}$</p> <p>Ganho DC : $H(\omega = 0) = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$</p> <p>Ganho em HF : $\frac{C_1}{C_1 + C_2}$</p>	 <p>$\omega_0 = 1/(R_2 C_2)$</p> <p>$R_1 C_1 = \frac{a_1}{a_0}$</p> <p>Ganho DC : $H(\omega = 0) = -\frac{R_2}{R_1}$</p> <p>Ganho em HF : $-\frac{C_1}{C_2}$</p>

5. Filtros de Ordem Superior

- Cascateamento de circuitos (células) de 1^a e/ou 2^a ordem
- Células posteriores funcionam como cargas para a célula anterior

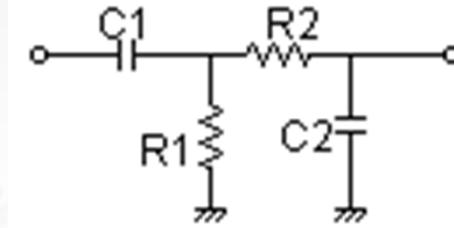
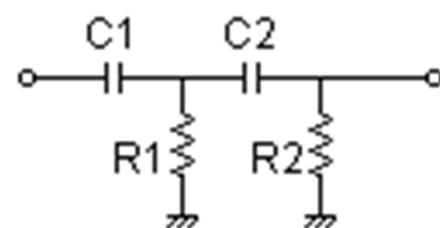
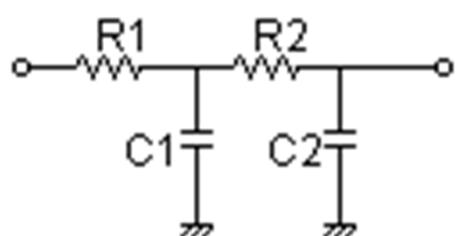
2^a ordem: -40 dB/década (ou -12 dB/oitava)

$$f_C = \frac{1}{2\pi\sqrt{R_1 C_1 R_2 C_2}} \text{ Hz}$$



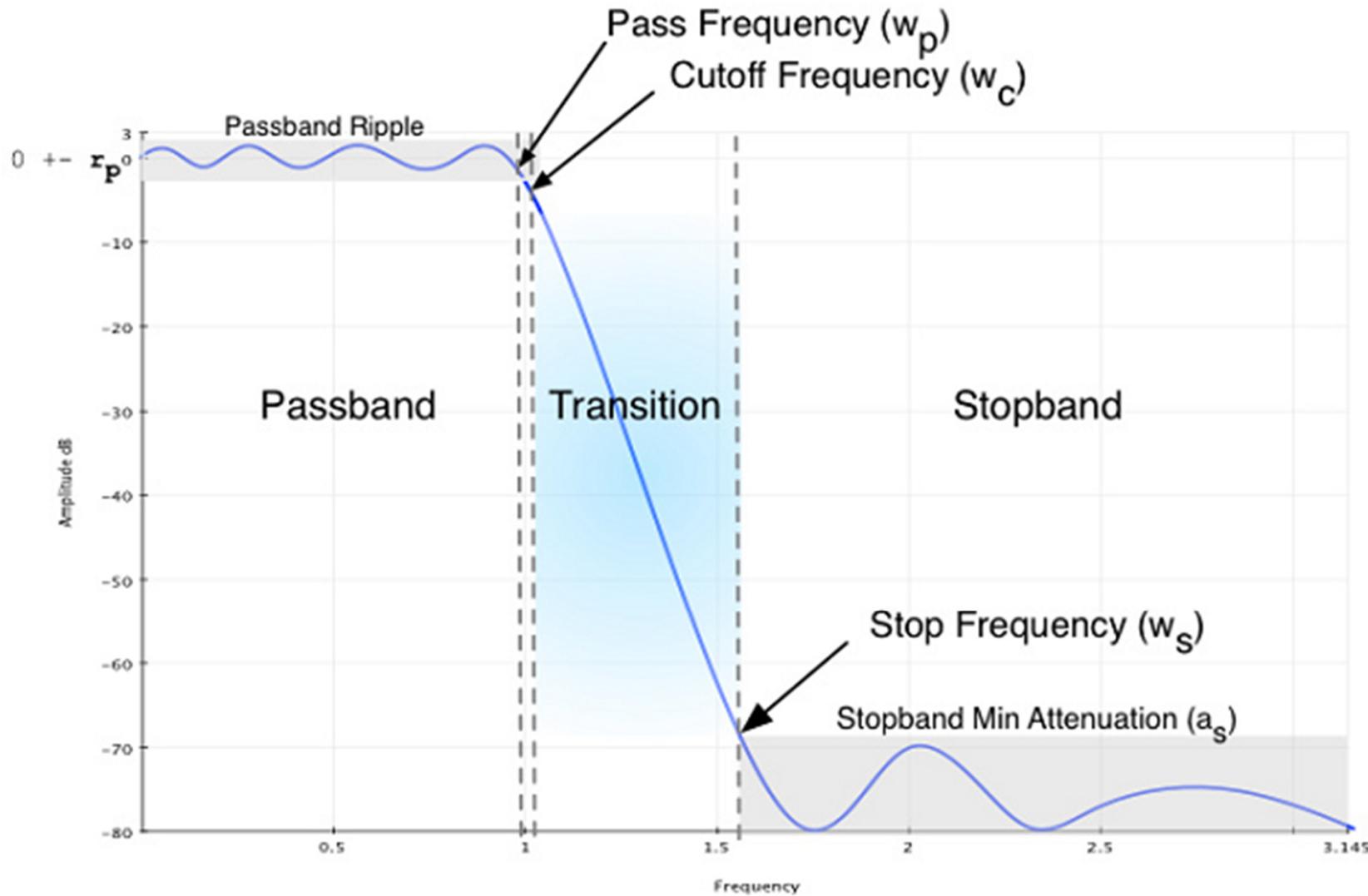
5. Filtros de Ordem Superior

- Exercício: determine a F.T. e o tipo de filtro para cada um dos circuitos de segunda ordem mostrados a seguir:



6. Aproximações Polinomiais

Banda Passante (BP)
Banda de Transição (BT)
Banda de Rejeição (BR)

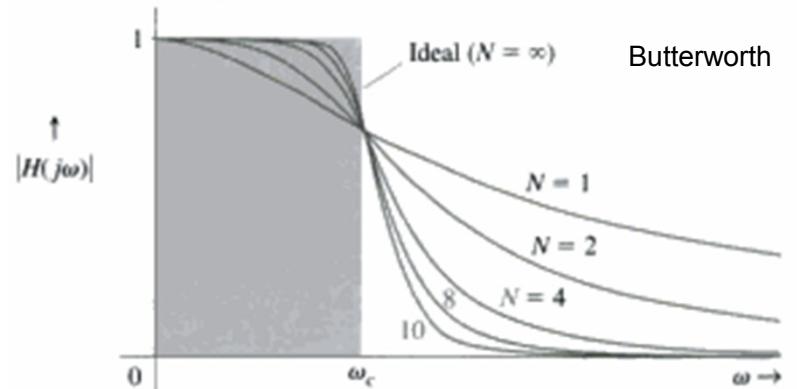
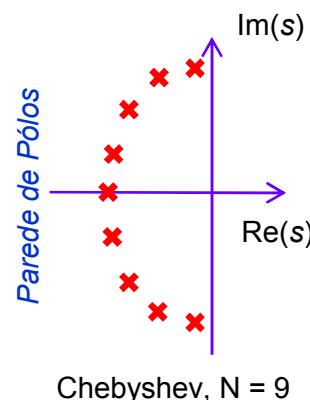
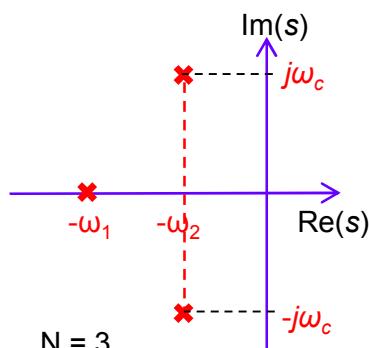


6. Aproximações Polinomiais

Banda Passante (BP)
Banda de Rejeição (BR)
Banda de Transição (BT)

■ Disposição dos polos da Função de Transferência no plano s

- Polos dispostos em um semicírculo  R.F. maximamente plana na BP (0 a ω_c): **Filtros de Butterworth**
- Polos dispostos em uma semi-elipse  ripple na BP ou na BR, maior atenuação na BR e menor BT: **Filtros de Chebyshev**



6. Aproximações Polinomiais

■ Filtro Analógico Protótipo (P)

- Simplicidade da função de transferência
- Características
 - Passa Baixa
 - Frequência de corte: $\omega_c = 1 \text{ rad/s}$

$$H_P(s) = \frac{1}{s + 1} \quad \longrightarrow$$

Função de Transferência

$$H_P(j\omega) = \frac{1}{j\omega + 1}$$

Resposta em Frequência

6. Aproximações

- Projeto de filtros analógicos passivos, usando transformação do filtro protótipo
 - Filtro protótipo (normalizado) de primeira ordem com função de transferência $H_P(s)$ e $\omega_c = 1$ rad/s

$$H_P(s) = \frac{1}{s+1} \longrightarrow H_P(j\omega) = \frac{1}{j\omega+1} \longrightarrow |H_P(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

Função de Transferência

Resposta em Frequência

Freq. ω (rad/s)	Ganho
0	1
1	$1/\sqrt{2}$
100	0,01
10000	0,0001

- Transformação da função de transferência do *fap* para o filtro **passa baixa** desejado:

$s \rightarrow s/\omega_c$



$$H_P(s) = \frac{1}{s+1} \xrightarrow{s \rightarrow \frac{s}{\omega_c}} H_{PB}(s)$$

$$H_{PB}(s) = \frac{1}{s/\omega_c + 1} = \frac{\omega_c}{s + \omega_c}$$

6. Aproximações

- Projeto usando transformação do filtro protótipo

- Tabela-Resumo

Tipo do Filtro	Transformação do FPB Protótipo: $s \rightarrow$ <input type="text"/>
passa baixa	s/ω_c onde ω_c é a frequência de corte
passa alta	ω_c/s onde ω_c é a frequência de corte
passa faixa	$(s^2+\omega_o^2)/(s \cdot W)$ onde $\omega_o = (\omega_l \cdot \omega_h)^{1/2}$, $W = \omega_h - \omega_l$
rejeita faixa	$(s \cdot W)/(s^2+\omega_o^2)$ onde $\omega_o = (\omega_l \cdot \omega_h)^{1/2}$, $W = \omega_h - \omega_l$

6. Aproximações com Polinômios

■ Butterworth

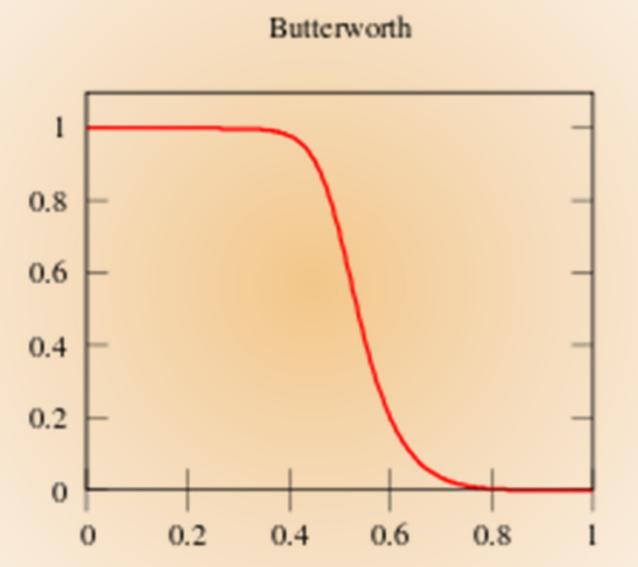
$$H(s) = \frac{1}{D(s)}$$

- F.T. all-pole¹ distribuídos circularmente em torno da origem
- FPB, ordem N, freq. de corte ω_c

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + (s / j\omega_c)^{2N}}$$

$$\Rightarrow |H(0)| = 1 \text{ e } |H(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \quad (= -3 \text{ dB})$$

- **Vantagem:**
Resposta em Frequência
maximamente plana
na Banda Passante
 - As n primeiras derivadas de $|H(\omega)|$ são nulas na origem ($\omega = 0$)



- **Desvantagem:**
Descida lenta na
Banda de Transição
 - BT larga => baixa seletividade

¹ só polos

6. Aproximações

■ Butterworth

□ Polinômios do Denominador de $H_P(s)$

- Filtro **Passa Baixa**, com frequência de corte $\omega_c = 1$ rad/s

Ordem	Polinômio de <i>Butterworth</i>
1	$s+1$
2	$s^2 + 1.414s + 1$
3	$(s + 1)(s^2 + s + 1)$
4	$(s^2 + 0.7654s + 1)(s^2 + 1.8478s + 1)$
5	$(s + 1)(s^2 + 0.618s + 1)(s^2 + 1.618s + 1)$
6	$(s^2 + 0.5176s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.9318s + 1)$
7	$(s + 1)(s^2 + 0.445s + 1)(s^2 + 1.247s + 1)(s^2 + 1.8022s + 1)$
8	$(s^2 + 0.3986s + 1)(s^2 + 1.111s + 1)(s^2 + 1.663s + 1)(s^2 + 1.9622s + 1)$
9	$(s + 1)(s^2 + 0.347s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1.532s + 1)(s^2 + 1.879s + 1)$
10	$(s^2 + 0.313s + 1)(s^2 + 0.908s + 1)(s^2 + 1.414s + 1)(s^2 + 1.782s + 1)(s^2 + 1.975s + 1)$

6. Aproximações

■ Butterworth

□ Equações

- Função de Transferência:

$$H(s) = K \frac{\omega_0^N}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)}$$

- Resposta em Frequênciа:

$$|H(\omega)| = \frac{\omega_0^N}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 (\omega/\omega_P)^{2N}}}$$

- Atenuação Máxima na Banda Passante: $A_{máx}(\text{dB}) = 20 \cdot \log \sqrt{1 + \varepsilon^2}$, pois: $\omega = \omega_P$

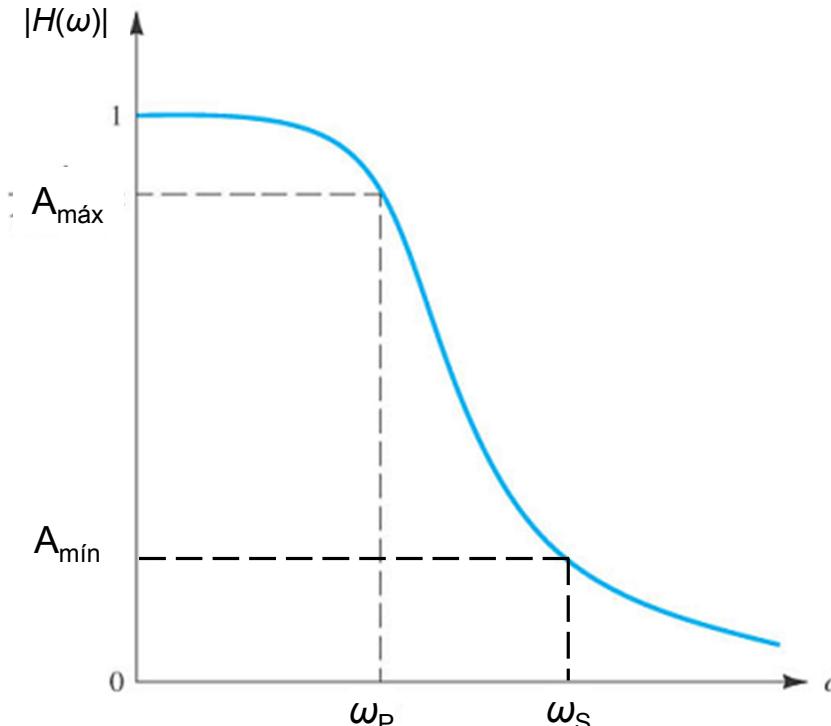
- Atenuação Mínima na Banda de Bloqueio: $A_{mín}(\text{dB}) = 10 \cdot \log [1 + \varepsilon^2 (\omega_S/\omega_P)^{2N}]$

- Desvio da Banda de Passagem:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_{máx}/10} - 1}$$

- Frequência de Corte:

$$\omega_0 = \omega_P (1/\varepsilon)^{1/N}$$



6. Aproximações

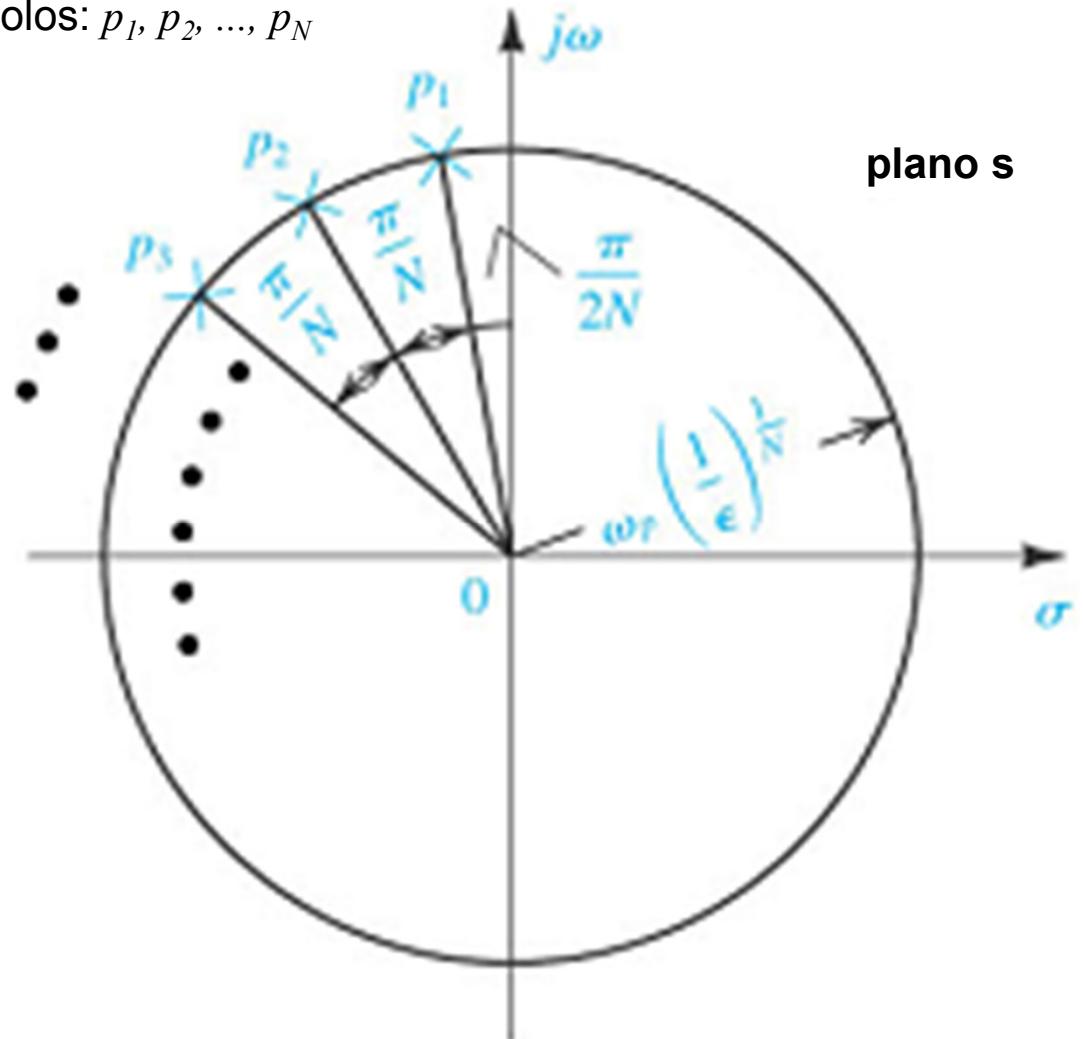
■ Butterworth

$$H_P(s) = 1/D(s)$$

$$\omega_0 = \omega_P \left(\frac{1}{\epsilon} \right)^{1/N}$$

$$\epsilon = \sqrt{10^{A_{máx}/10} - 1}$$

N polos: p_1, p_2, \dots, p_N



6. Aproximações

- **Exemplo:** Projete um FPB **Butterworth** de 3^a ordem e $\omega_C = 500$ rad/s

Filtro Protótipo ($\omega_c = 1$ rad/s): $H_p(s) = \frac{1}{(s+1)(s^2 + s + 1)}$

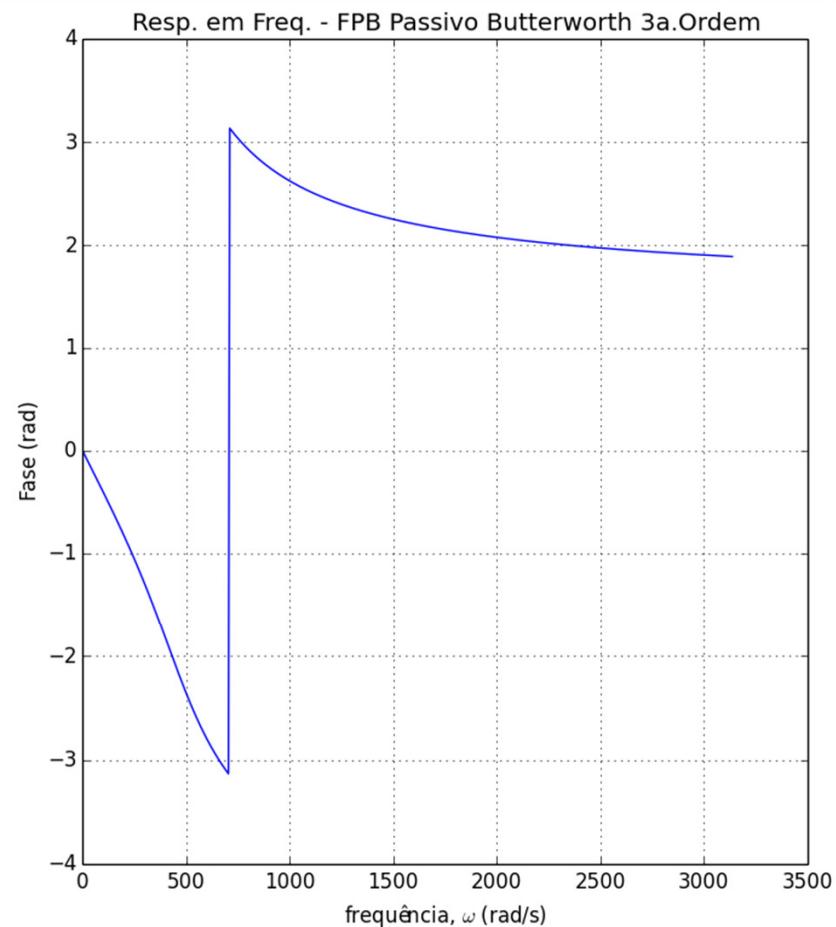
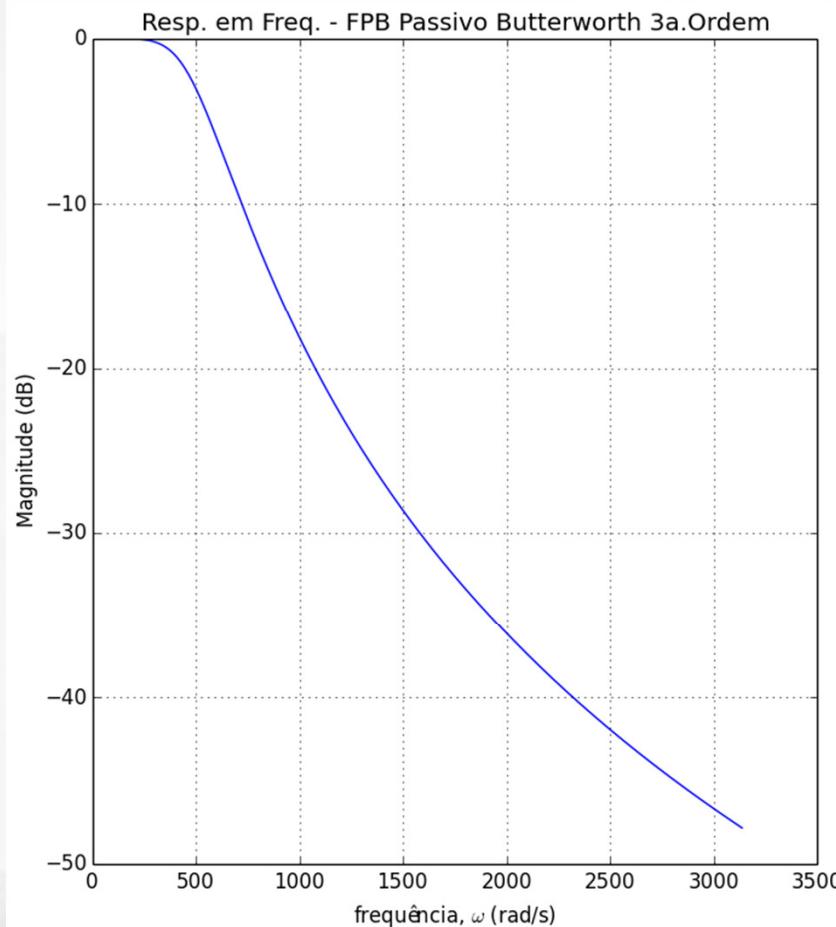
Mudança de escala de Frequência: $s \rightarrow \frac{s}{\omega_c}$

$$H(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_c} + 1\right)\left(\left(\frac{s}{\omega_c}\right)^2 + \frac{s}{\omega_c} + 1\right)} = \frac{1}{\left(\frac{s}{500} + 1\right)\left(\left(\frac{s}{500}\right)^2 + \frac{s}{500} + 1\right)}$$

$$H(s) = \frac{500^3}{(s + 500)(s^2 + 500s + 500^2)}$$

6. Aproximações

- **Exemplo:** Projete um FPB Butterworth de 3^a ordem e $\omega_C = 500$ rad/s



6. Aproximações

- **Exemplo:** Projete um FPB Butterworth: $f_p = 10 \text{ kHz}$, $A_{\max} = 1 \text{ dB}$, $f_s = 15 \text{ kHz}$, $A_{\min} = 25 \text{ dB}$, $G_{DC} = 1$.

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0,5088$$

Estimativa da ordem do Filtro de Butterworth :

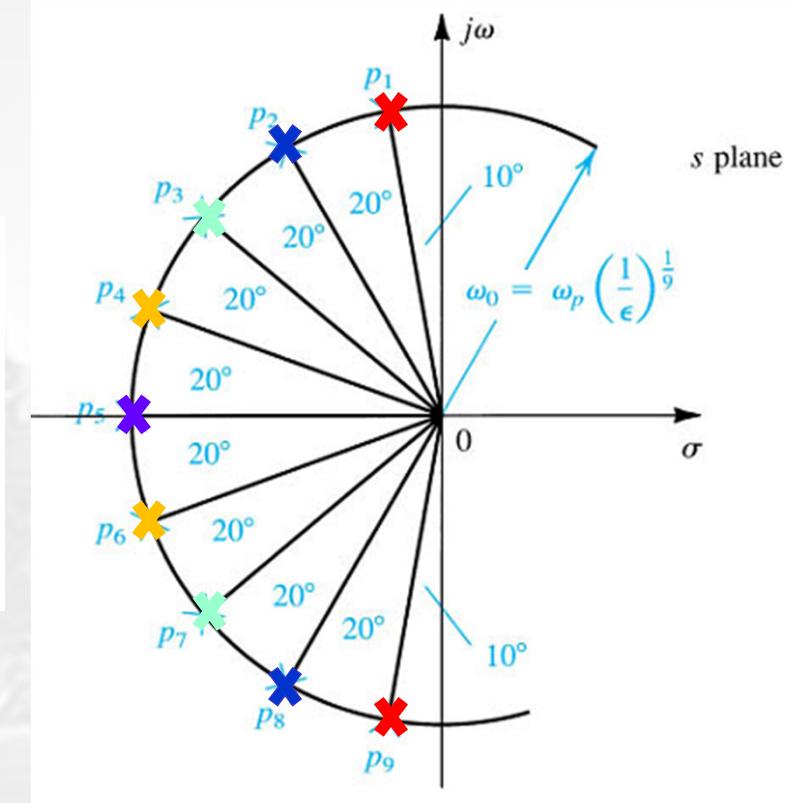
$$A_{\min}(\text{dB}) = 10 \cdot \log \left[1 + \varepsilon^2 (\omega_s / \omega_p)^{2N} \right]$$

$$10^{25/10} = 1 + 0,5088^2 (15000/10000)^{2N}$$

$$315,23/0,259 = 1,5^{2N}$$

$$\log 1217,1 = 2N \cdot \log 1,5$$

$$2N = 3,085/0,176 \Rightarrow N = \lceil 8,76 \rceil = 9 \Rightarrow \theta = 180^\circ / N = 20^\circ$$



6. Aproximações

- **Exemplo:** Projete um FPB **Butterworth**: $f_p = 10 \text{ kHz}$, $A_{\max} = 1 \text{ dB}$, $f_s = 15 \text{ kHz}$, $A_{\min} = 25 \text{ dB}$, $G_{DC} = 1$.

$$\omega_0 = \omega_p (1/\varepsilon)^{1/N} = 2\pi \cdot 10000 (1/0,5088)^{1/9} = 67730 \text{ rad/s}$$

Logo, o primeiro polo será : $p_1 = \omega_0(-\cos 80^\circ + j\sin 80^\circ)$

Polo conjugado de p_1 : $p_9 = p_1^*$: $(s - p_1)(s - p_1^*) = s^2 + 0,3472\omega_0 \cdot s + \omega_0^2$

Repetindo o procedimento para os demais 6 polos complexos,

e considerando o polo real $p_5 = -\omega_0$, teremos a função de transferência :

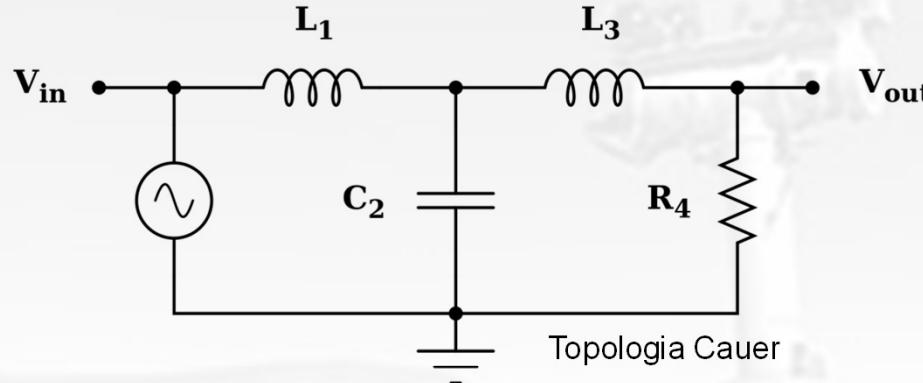
$$H(s) = \frac{\omega_0^9}{(s + \omega_0)(s^2 + 0,347\omega_0 \cdot s + \omega_0^2)(s^2 + \omega_0 \cdot s + \omega_0^2)(s^2 + 1,532\omega_0 \cdot s + \omega_0^2)(s^2 + 1,8794\omega_0 \cdot s + \omega_0^2)}$$

Denominador do filtro protótipo de ordem 9 (tabela):

$$(s + 1)(s^2 + 0,347s + 1)(s^2 + s + 1)(s^2 + 1,532s + 1)(s^2 + 1,879s + 1)$$

6. Aproximações

- Exemplo: FPB Butterworth Passivo, de 3^a ordem.



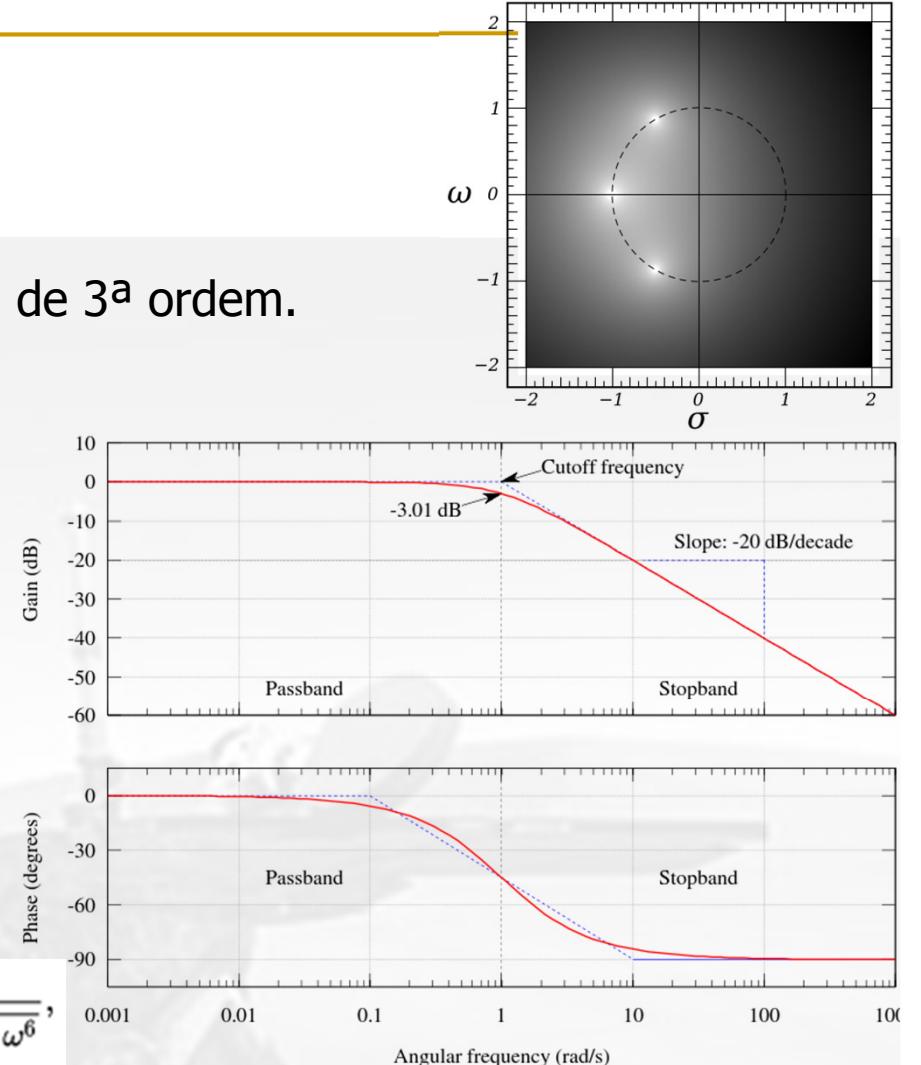
$$\frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{R}{s^3(L_1 C_2 L_3) + s^2(L_1 C_2 R) + s(L_1 + L_3) + R}.$$

$\omega_c = 1$ rad/s quando $C_2 = 4/3$ F, $R_4 = 1$ Ohm, $L_1 = 3/2$ H e $L_3 = 1/2$ H

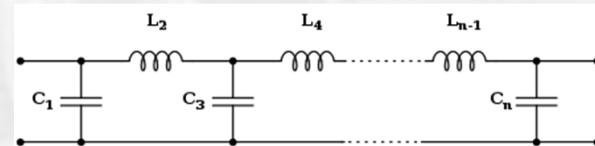
$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{1 + 2s + 2s^2 + s^3}.$$

$$G(\omega) = |H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^6}},$$

$$G^2(\omega) = |H(j\omega)|^2 = H(j\omega)H^*(j\omega) = \frac{1}{1 + \omega^6},$$



A topologia Cauer utiliza componentes passivos (capacitores e indutores em série) para implementar um filtro analógico linear.



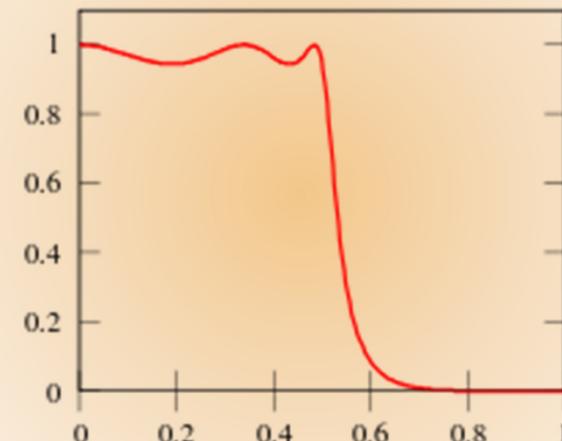
6. Aproximações

■ Chebyshev

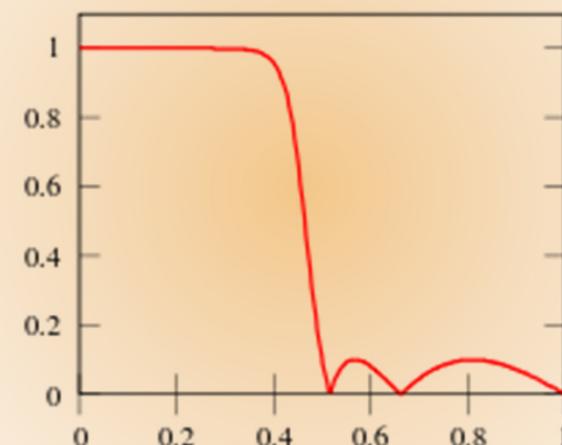
- Aproximação que **minimiza o erro na BP**
- **Resposta equiripple** (ondulação uniforme) na BP (até ω_c) e monotonicamente decrescente na BR
- **Tipo 1:** FT somente com polos
- **Tipo 2:** FT com polos e zeros

Matemático russo **Tchebychev** foi quem estudou estes polinômios. No ocidente aceitou-se o nome **Chebychev** por ter sido um francês quem primeiro traduziu os trabalhos dele.

Chebyshev type 1



Chebyshev type 2



6. Aproximações

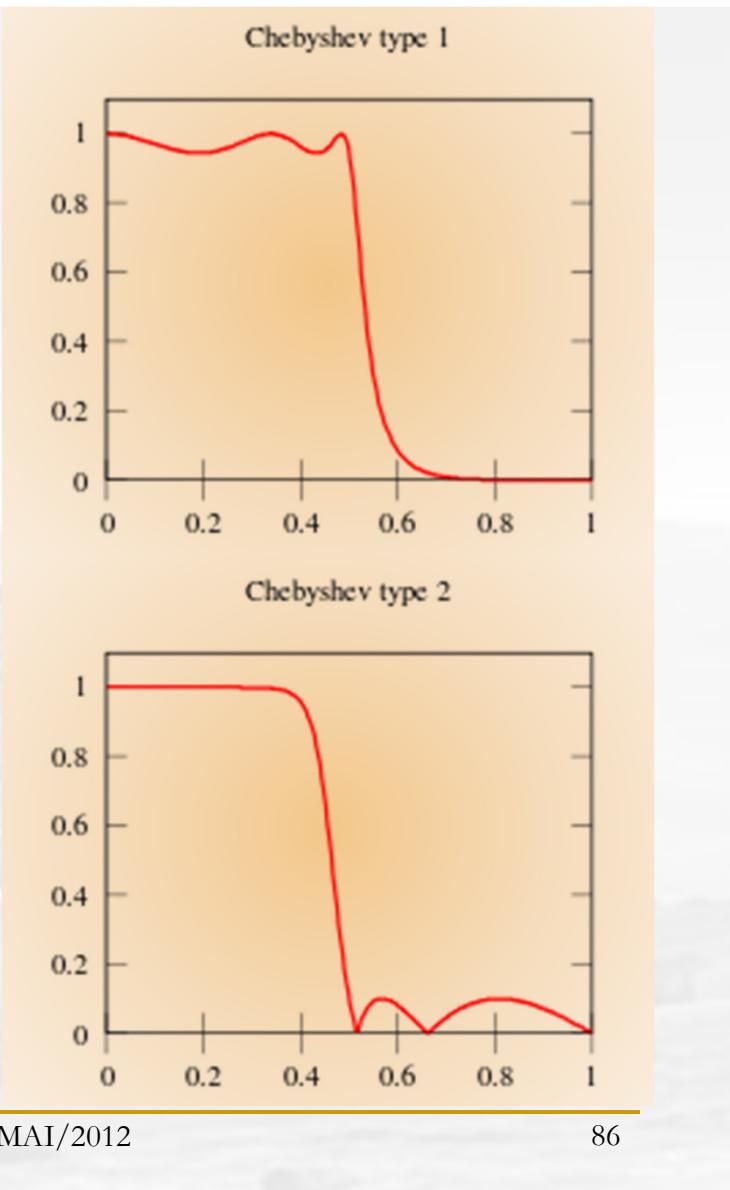
■ Chebyshev

- Resposta em Frequência quadrática:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} [T_n(\omega)]^2}$$

onde : $T_n(\omega)$ - polinômio de Chebyshev de grau n

- **Vantagem:** Banda de Transição mais estreita que a do filtro Butterworth
- **Desvantagem:** ondulação uniforme (*equiripple*) somente em uma das bandas
 - **Tipo 1** - na Banda Passante
 - **Tipo 2*** - na Banda de Rejeição



6. Aproximações

■ Polinômios de Chebyshev

$$T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = x$$

$$T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x$$

$$T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$$

$$T_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$$

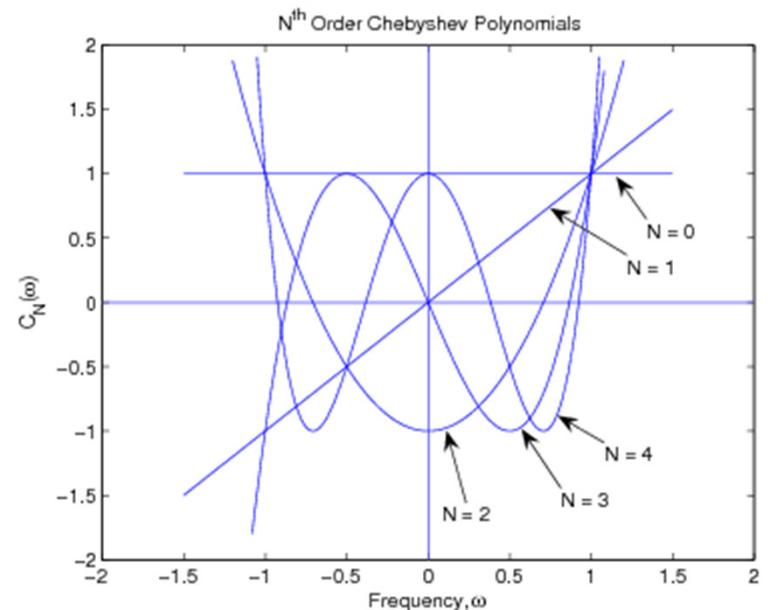
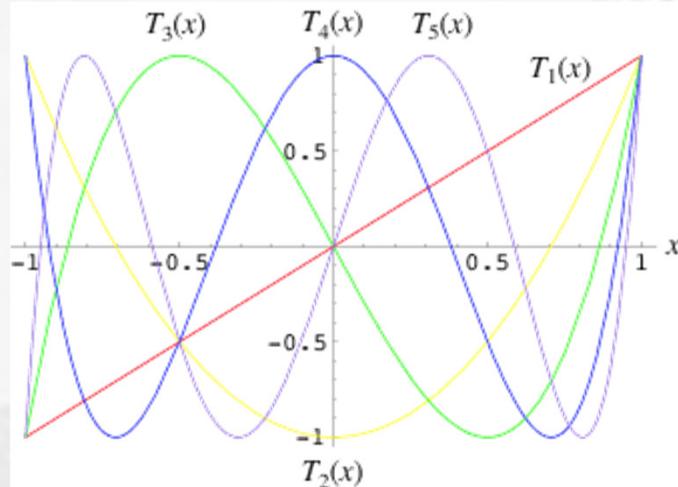
$$T_6(x) = 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1$$

$$T_7(x) = 64x^7 - 112x^5 + 56x^3 - 7x$$

$$T_8(x) = 128x^8 - 256x^6 + 160x^4 - 32x^2 + 1$$

$$T_9(x) = 256x^9 - 576x^7 + 432x^5 - 120x^3 + 9x$$

$$T_{10}(x) = 512x^{10} - 1280x^8 + 1120x^6 - 400x^4 + 50x^2 - 1$$



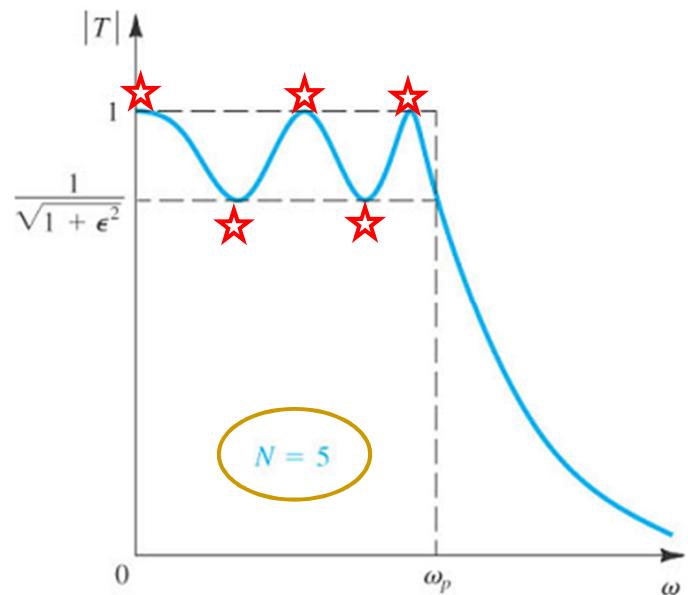
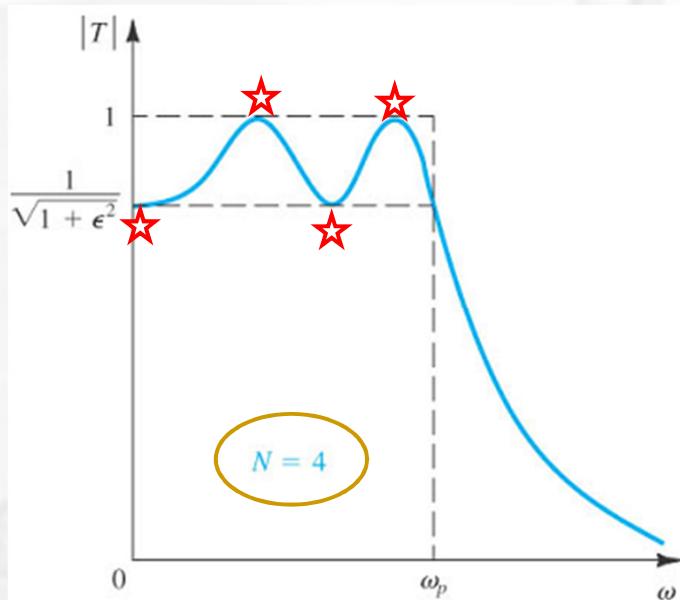
Estas são funções notáveis, pois oscilam entre 1 e -1 para $-1 < \omega < 1$ e vão monotonicamente a $\pm\infty$ fora desse intervalo.

Polinômio de Chebyshev de grau n tem $n-1$ pontos de máximo e/ou mínimo.

6. Aproximações

■ Chebyshev Tipo 1

- ❑ Filtro de Ordem Ímpar $\rightarrow |H(0)| = 1$
- ❑ Filtro de Ordem Par \rightarrow desvio máximo do módulo da RF em $\omega = 0$: $|H(0)| = 1/(1+\epsilon^2)^{1/2}$
- ❑ Quantidade de pontos de máximos e mínimos na BP é igual à ordem N do filtro
- ❑ Filtro (F.T.) só com polos, assim como na aproximação de *Butterworth*

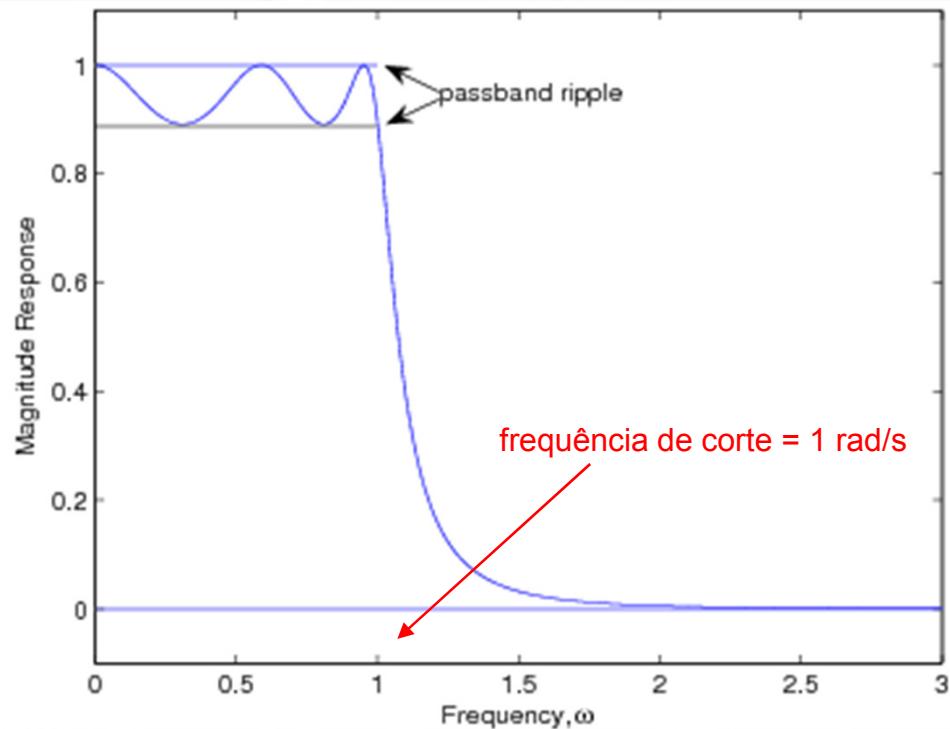


6. Aproximações

■ Chebyshev Tipo 1

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k \frac{1}{(s - p_1).(s - p_2) \cdots (s - p_N)}$$

- Exemplo: filtro passa baixas de 5^a ordem



6. Aproximações

■ Chebyshev Tipo 1

□ Equações

- Função de Transferência:

$$H_1(s) = \frac{K}{\varepsilon \cdot 2^{N-1}} \cdot \frac{\omega_p^N}{(s - p_1)(s - p_2) \dots (s - p_N)}$$

- Resposta em Frequênciа:

$$|H_1(\omega/\omega_p)|^2 = \frac{1}{1 + [\varepsilon \cdot T_N(\omega/\omega_p)]^2}$$

$$T_N(\omega/\omega_p) = \begin{cases} \cos[N \arccos(\omega/\omega_p)], & \text{para } 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \cosh[N \arccos(\omega/\omega_p)], & \text{para } \omega > \omega_p \end{cases}$$

- Atenuação Máxima na Banda Passante (ripple): $A_{máx}(\text{dB}) = 10 \cdot \log(1 + \varepsilon^2)$, para $\omega = \omega_p$
- Atenuação Mínima na Banda de Bloqueio: $A_{min}(\text{dB}) = 10 \cdot \log[1 + \varepsilon^2 \cosh^2(N \cdot \text{arccosh}(\omega_s/\omega_p))]$
- Fator de escala ε : $\varepsilon = \sqrt{10^{A_{máx}/10} - 1}$
- Frequência de Corte: $\omega_0 = \omega_p (1/\varepsilon)^{1/N}$
- Localização dos polos: $p_k = -\omega_p \sin\left(\frac{2k-1}{N} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{N} \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$

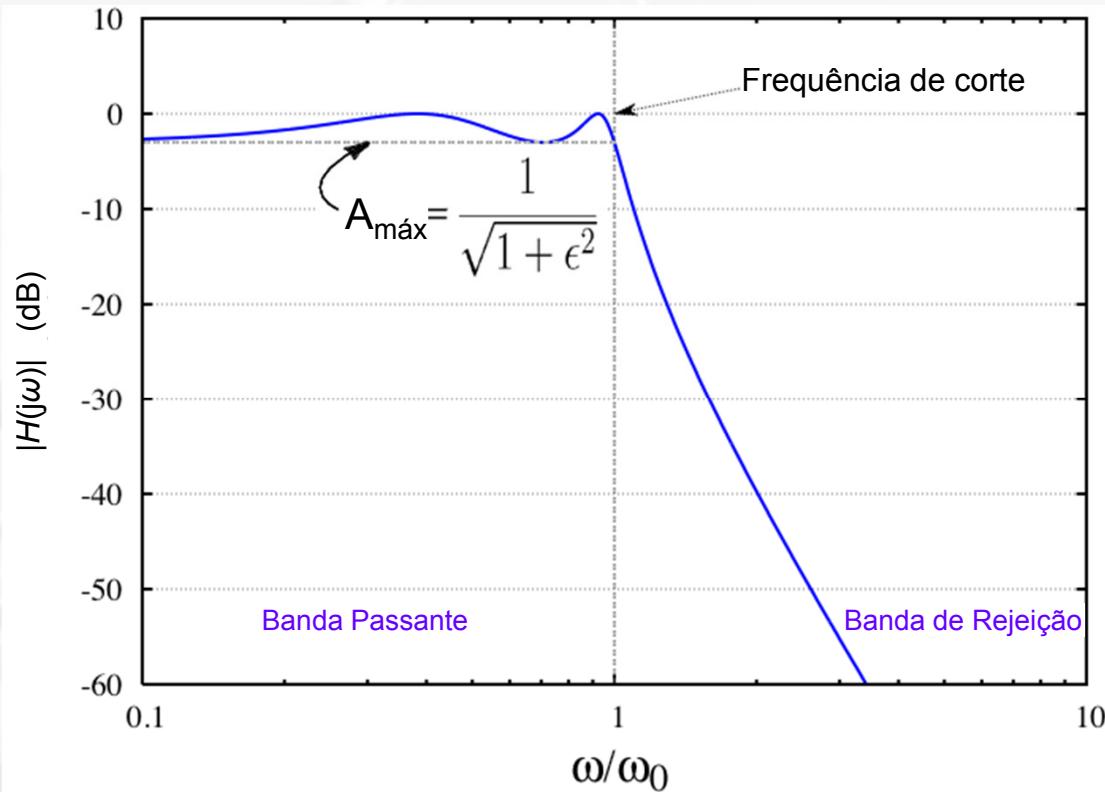
6. Aproximações

■ Chebyshev Tipo 1

□ Gráfico

- Magnitude da Resp. em Freq.

$$|H_1(j\omega)| = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cos^2[N.\arccos(\omega/\omega_p)]}}, & \text{para } 0 \leq \omega \leq \omega_p \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \cosh^2[N.\operatorname{arccosh}(\omega/\omega_p)]}}, & \text{para } \omega > \omega_p \end{cases}$$



6. Aproximações

- **Exemplo:** Projete um FPB **Chebyshev** Tipo 1: $f_p = 10 \text{ kHz}$, $A_{\max} = 1 \text{ dB}$, $f_s = 15 \text{ kHz}$, $A_{\min} = 25 \text{ dB}$, $G_{DC} = 1$. (idem ao filtro anterior)

$$\varepsilon = \sqrt{10^{A_{\max}/10} - 1} = \sqrt{10^{1/10} - 1} = 0,5088$$

$$A_{\min}(\text{dB}) = 10 \cdot \log[1 + \varepsilon^2 \cosh^2(N \cdot \operatorname{arccosh}(\omega_s/\omega_p))] = 25 \text{ dB}$$

$$\frac{10^{2,5} - 1}{0,5088^2} = \cosh^2(N \cdot \operatorname{arccosh}(1,5))$$

$$\sqrt{312,36} = \cosh(N \cdot \operatorname{arccosh}(1,5))$$

$$17,67 = \cosh(N \cdot 0,962) \Rightarrow N = 3,564/0,962 = \lceil 3,7 \rceil = 4$$

Mas para $N = 4$: $A(\omega_s) = 21,6 \text{ dB}$ e não atende a especif. do filtro.

Com $N = 5$: $A(\omega_s) = 29,9 \text{ dB}$ (atende à especificação)

Substituindo os parâmetros do filtro em $p_k = -\omega_p \operatorname{sen}\left(\frac{2k-1}{N} \cdot \frac{\pi}{2}\right) \operatorname{senh}\left(\frac{1}{N} \operatorname{arcseh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)$:

$$p_1, p_5 = \omega_p(-0,0895 \pm j0,9901); \quad p_2, p_4 = \omega_p(-0,2342 \pm j0,6119); \quad p_3 = \omega_p(-0,2895)$$

$$H(s) = \frac{\omega_p^5}{8,1408(s + 0,2895\omega_p)(s^2 + 0,4684\omega_p s + 0,4293\omega_p^2)(s^2 + 0,1789\omega_p s + 0,9883\omega_p^2)}$$

$$\omega_p = 20000\pi \text{ rad/s}$$

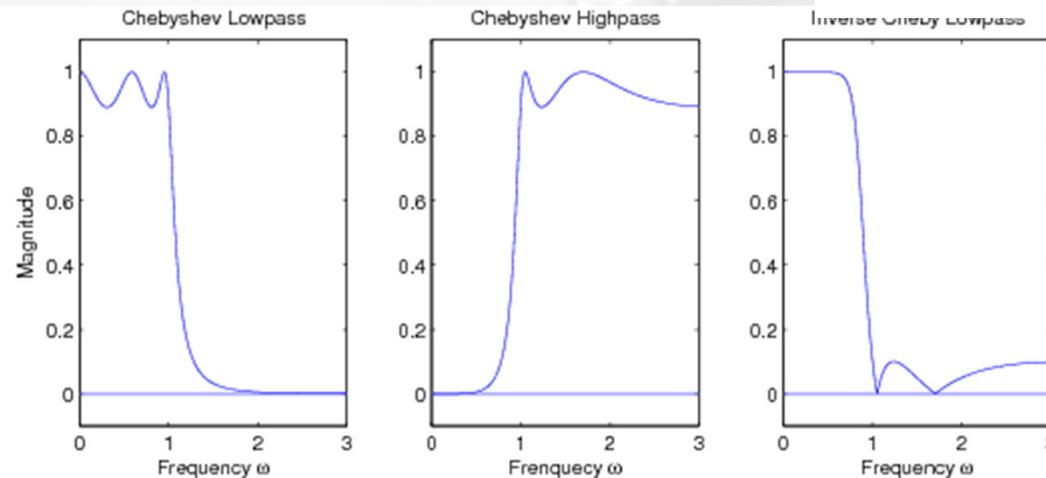
6. Aproximações

■ Chebyshev Tipo 2 (Chebyshev Inverso)

- Busca-se minimizar o erro máximo na banda de rejeição
- Cálculo da aproximação de Chebyshev tipo 2 à resp. em freq. do FPB Ideal
 - A partir da resposta em frequência do Chebyshev Tipo 1
 - Inverta a variável frequência angular¹ (transformação de FPB para FPA): $1/\omega$
 - Subtraia a resposta em frequência resultante da unidade

Resposta Quadrática Normalizada ($\omega_c = 1 \text{ rad/s}$):

$$|H_2(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left[\varepsilon \cdot \frac{T_N(\omega_S/\omega_P)}{T_N(\omega_S/\omega)} \right]^2}$$



$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{A_{máx}/10} - 1}}$$

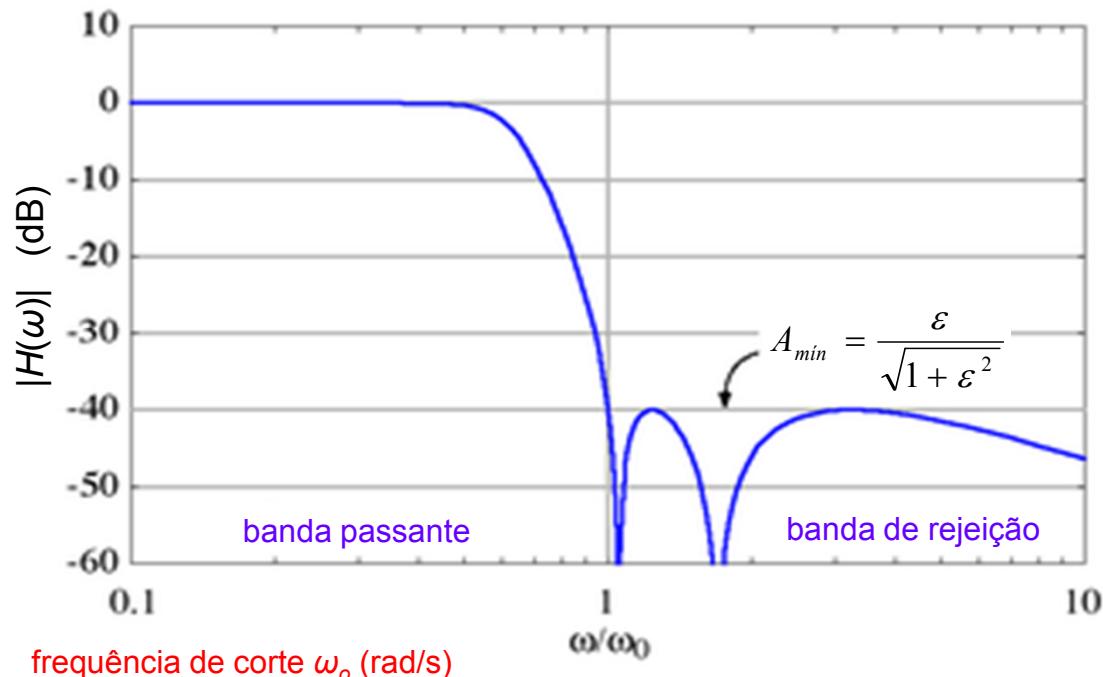
¹ muda características em $\omega = 0$ e $\omega \rightarrow \infty$, não altera o desempenho em $\omega = 1 \text{ rad/s}$

6. Aproximações

■ Chebyshev Tipo 2

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = k \frac{(s - z_1).(s - z_2) \cdots (s - z_N)}{(s - p_1).(s - p_2) \cdots (s - p_N)}$$

- Exemplo: filtro passa baixas de 5^a ordem



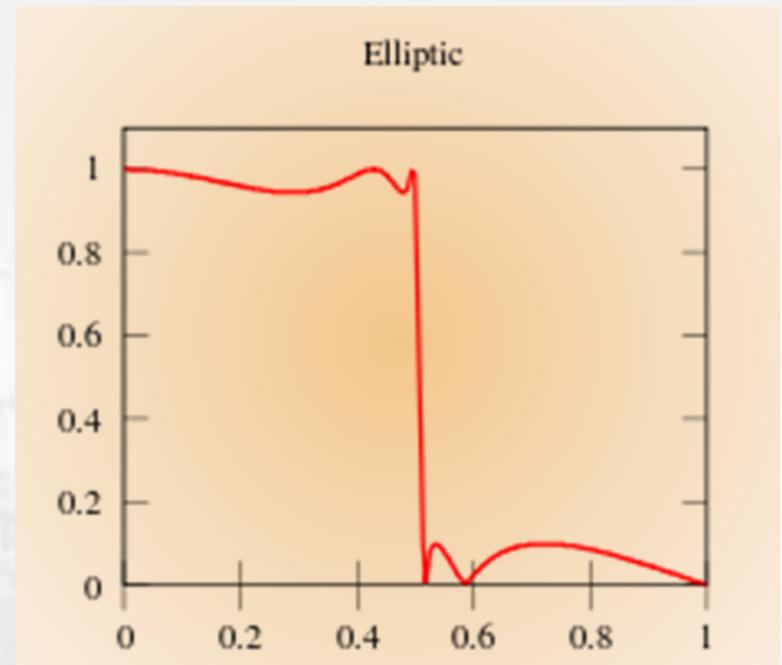
6. Aproximações

■ Elíptico (Cauer)

- ❑ *Equiripple* nas bandas passante e de rejeição (ajustes independentes)
- ❑ Decaimento mais acelerado que nos outros dois tipos de filtros (BT mais estreita)
- ❑ Resposta em Frequência quadrática:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + [\mu \cdot E(\omega)]^2}$$

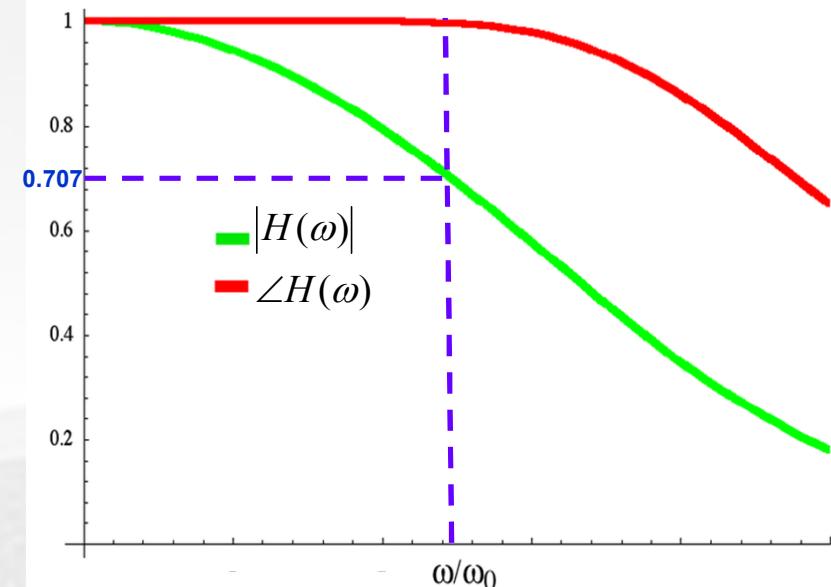
onde : $E(\omega)$ - é uma razão específica de polinômios



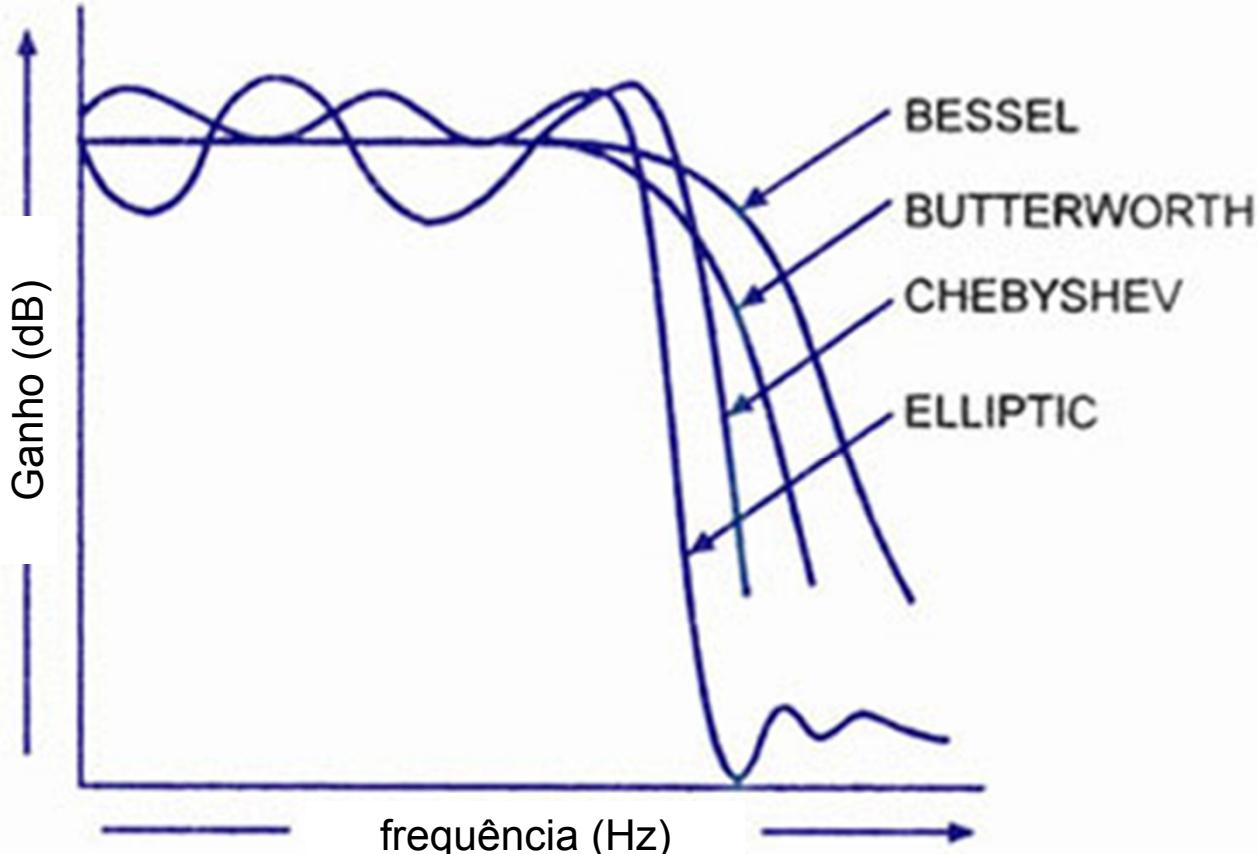
6. Aproximações

■ Bessel

- Atraso de Grupo constante em toda a Banda Passante
(preserva a forma de onda dos sinais que atravessam o filtro • não provoca distorções de fase)
- Muito usado em sistemas de áudio (crossover)
- Banda de transição é a mais larga entre todas as famílias



6.1 Comparação entre Famílias de Filtros



Resposta em Frequência

7. Resumo

- Formas fechadas de filtros analógicos
 - All-pole¹: Butterworth e Chebyshev I
 - Resposta monotônica: Butterworth, Chebyshev e Bessel
 - Equiripple: Chebyshev e Elíptico
- Cada aproximação envolve diferentes graus de flexibilidade e compromissos entre a **largura da banda de transição**, a **amplitude de oscilação** nas bandas passante e de rejeição e a **linearidade da fase**
- Dada a especificação de frequências, *ripples* e ordem do filtro, a **largura de banda de transição** mais estreita sempre confronta-se com a piora da **linearidade da fase**

¹ só polos

Gabarito dos Exercícios

■ Exercícios 1

1. $\omega_c = 1 / (R \cdot C) \Rightarrow C = 1.25 \text{ nF}$
2. $\omega_L = R / L \Rightarrow L = 397,8 \text{ mH}$
módulo = 0,04 e fase = $-87,7^\circ$ para $f = 50 \text{ kHz}$

■ Exercícios 2

- a) 10000 rad/s; b) 200 rad/s; c) 33,33 rad/s
- $H(s) = (1/(R \cdot C)) / (s + 1/(K \cdot R \cdot C))$, onde $K = R_L / (R + R_L)$

Gabarito dos Exercícios

■ Exercícios 3

1.a) Função de Transferência: $H(s)$

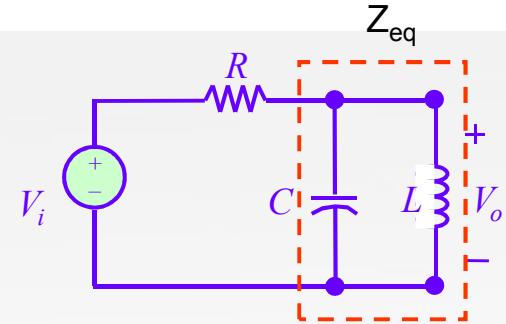
Divisor de Tensão em Z_{eq} :

$$V_o(s) = V_i(s) \frac{Z_{eq}}{R + Z_{eq}} \quad \text{onde: } Z_{eq} \text{ é o paralelo de } sL \text{ e } \frac{1}{sC}$$

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{sL} + \frac{1}{1/(sC)} = \frac{sL + 1/(sC)}{L/C} \Rightarrow Z_{eq} = \frac{L/C}{sL + 1/(sC)}$$

$$\text{Logo: } V_o(s) = V_i(s) \frac{\frac{L/C}{sL + 1/(sC)}}{R + \frac{L/C}{sL + 1/(sC)}} = V_i(s) \frac{\frac{L/C}{sL + 1/(sC)}}{\frac{sRL + R/(sC) + L/C}{sL + 1/(sC)}}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Ks}{s^2 + Ks + \omega_0^2} \quad \text{onde: } K = \frac{1}{RC} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$



Gabarito dos Exercícios

■ Exercícios 3

1.b) Frequência Central ω_0 : $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$

1.c) As frequências de corte*, a banda passante e o fator de qualidade do filtro:

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega/(RC)}{\sqrt{\left(\frac{1}{LC} - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{RC}\right)^2}}$$

$$\beta = \omega_{c2} - \omega_{c1} = \frac{1}{RC}$$

$$\omega_{c1} = \frac{1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$\omega_{c2} = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 + \frac{1}{LC}}$$

$$Q = \frac{\omega_0}{\beta} = \sqrt{\frac{R^2 C}{L}}$$

1.d) R e L para que o filtro tenha Frequência central em 5 kHz e banda passante de 200 Hz, com C = 5 μ F.

$$R = \frac{1}{\beta C} = \frac{1}{2\pi \cdot 200 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 159,9 \Omega \quad L = \frac{1}{\omega_0^2 C} = \frac{1}{(2\pi \cdot 5000)^2 \cdot 5 \cdot 10^{-6}} = 202,6 \mu\text{H}$$

* freq. de corte: $|H(j\omega)| = 1/\sqrt{2}$

Gabarito dos Exercícios

■ Exercícios 3

2. Função de Transferência $H(s)$:

Divisor de Tensão em R:

$$V_o(s) = V_i(s) \frac{R}{Z_{eq}} \quad \text{onde: } Z_{eq} \text{ é o série de } R_i, sL \text{ e } \frac{1}{sC}$$

$$Z_{eq} = R_i + sL + 1/(sC) = \frac{sR_i C + s^2 LC + 1}{sC}$$

$$\text{Logo: } V_o(s) = V_i(s) \frac{R}{R + \frac{s^2 LC + sR_i C + 1}{sC}} = V_i(s) \frac{sRC}{s^2 LC + sC(R + R_i) + 1}$$

$$H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{Ks}{s^2 + (K + R_i/L)s + \omega_0^2} \quad \text{onde: } K = \frac{R}{L} \quad \text{e} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$