ラムダ計算って何だっけ？
関数型の神髄に迫る

関数型プログラミング言語の始まり

川頭信之

@nkawagashira

概要

1. 自己紹介
2. 計算理論の始まり
3. チューリングマシン
4. ラムダ計算とは
5. ラムダ計算の関数
6. ラムダ計算の加法・乗法
7. 論理積・論理和・否定演算子のラムダ式
8. プログラミング言語の潮流
9. まとめ

自己紹介

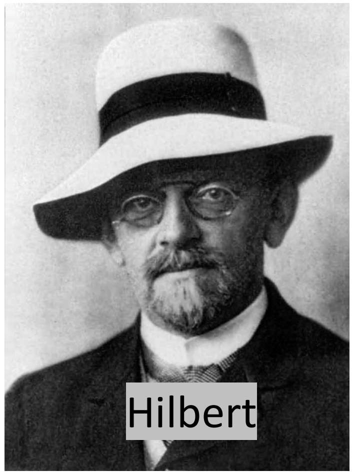
- 川頭信之（かわがしら のぶゆき）
- データサイエンティスト
- 元リクルート
  プログラミング問題出題者
- 関数型まつり運営メンバー
- 興味：ラムダ計算、コンビネータ理論、数理論理学、記号処理、Haskell
- 趣味：PCゲーム（Apex, Farlight 84）、ハンググライダー、歴史言語学

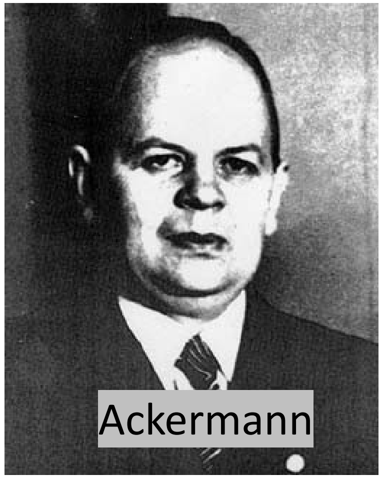
計算理論の始まり

- Entscheidungsproblem（決定問題）

  By Hilbert & Ackermann (1928)

- 「任意の形式的な数学的命題について、機械的な手順（アルゴリズム）でその真偽を常に決定できるか」



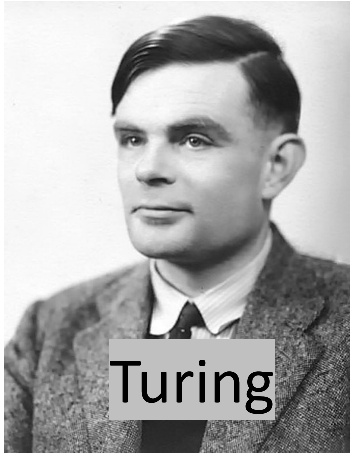


だが、そのようなアルゴリズムは不可能であることが証明された！

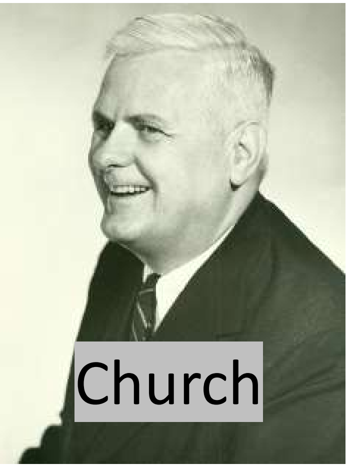
計算機の理論

計算の理論は否定的に証明された

i.　チューリングマシン
　（Alan Turing, 1936/37）
- Von Neumann型、命令型プログラミング
- Fortran, Pascal, Assemblerなど

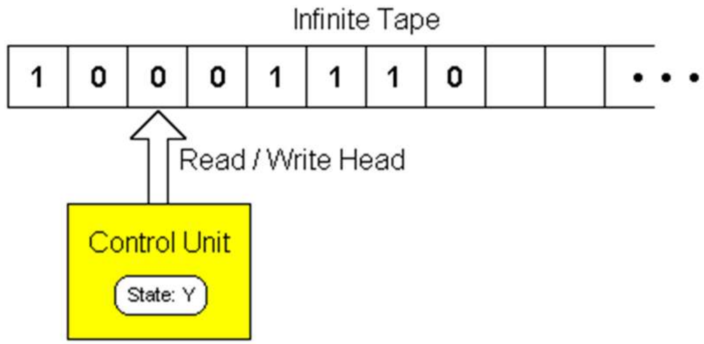


ii.　λ計算（Alonzo Church, 1936）
- 関数型プログラミング
- Miranda, ML



チューリングマシン

- 1/0の情報を格納することのできる無限に長い記憶セルが存在する。
- 一つの制御ユニットがある。
- 記憶セルのテープ上を移動できる。
- 0あるいは1のマスの状態に従って、0あるいは1に書き換えることができる。



ラムダ計算とは

計算の概念を抽象化したものの一つ（他にはTuring機械）
最小のプログラミング言語と言われている。

特徴

i. 通常の数学的関数の記述の曖昧性を排除できる。
関数の定義と関数の値を区別できる。
ii. 多変数関数は、単一変数の関数に変換できる。（カリー化）
iii. 関数と変数（値）の区別がない。関数の引数として関数を取ることができる。

ラムダ計算の関数について

ラムダ式　$\lambda <$ 引数の列 $>.<$ 式 $>$

$$f(x,y) = x - y + c$$

$$f = (\lambda xy.\, x - y + c)$$

$$f\ 5\ 3 = (\lambda xy.\, x - y + c)5\ 3$$

$$= 5 - 3 + c = 2 + c$$

$x = 5, y = 3$とすると
$f(5,3) = 2 + c$となる。
cは自由変数なので外部的に決定される。

x, y：束縛変数（ローカル変数）

c　：自由変数（外部変数）

λ適用（λ-applicative）

fは1変数の関数

f	$\lambda x. f(x)$	
fa	$f(a)$	

fは３変数の関数

f	$\lambda xyz. f(x, y, z)$	$\lambda x. (\lambda y. (yz. f(x, y, z)))$
fa	$\lambda yz. f(a, y, z)$	
fab	$\lambda z. f(a, b, z)$	
$fabc$	$f(a, b, c)$	
$f(ga)b$	$\lambda z. f(g(a), b, z)$	

$$fabc = \big((fa)b\big)c$$

加法と乗法のラムダ式

$A \equiv \lambda xy.\, x + y$　加法

$M \equiv \lambda xy.\, x \cdot y$　乗法

$N \equiv \lambda x.\, (-x)$　マイナス化

$A1$	$\lambda x.\, 1 + x$
Aab	$a + b$
$A(Mab)(N(Mac))$	$ab + (-ac)$

論理値のラムダ式

論理値は関数として表す！

$\boldsymbol{T} \equiv \lambda xy.x$　true　一つ目の変数を取り出す

$\boldsymbol{F} \equiv \lambda xy.y$　false　二つ目の変数を取り出す

$$\boldsymbol{T}10 = (\lambda xy.x)10 \to 1$$

$$\boldsymbol{F}10 = (\lambda xy.y)10 \to 0$$

論理積のラムダ式

論理積(AND)

$$\wedge \equiv \lambda xy.xy\boldsymbol{F}$$

$\wedge\,\boldsymbol{FF} \equiv (\lambda xy.xy\boldsymbol{F})\boldsymbol{FF} \equiv \boldsymbol{FFF} \equiv (\lambda xy.y)\boldsymbol{FF} \rightarrow \boldsymbol{F}$

$\wedge\,\boldsymbol{FT} \equiv (\lambda xy.xy\boldsymbol{F})\boldsymbol{FT} \equiv \boldsymbol{FTF} \equiv (\lambda xy.y)\boldsymbol{TF} \rightarrow \boldsymbol{F}$

$\wedge\,\boldsymbol{TF} \equiv ?$

$\wedge\,\boldsymbol{TT} \equiv (\lambda xy.xy\boldsymbol{F})\boldsymbol{TT} \equiv \boldsymbol{TTF} \equiv (\lambda xy.x)\boldsymbol{TF} \rightarrow \boldsymbol{T}$

a	b	a∧b
F	F	F
F	T	F
T	F	F
T	T	T

論理和∨のラムダ式

論理和(OR)

$$\lor \equiv \lambda xy.x\boldsymbol{T}y$$

$\lor\ \boldsymbol{FF} \equiv (\lambda xy.x\boldsymbol{T}y)\boldsymbol{FF} \equiv \boldsymbol{FTF} \equiv (\lambda xy.y)\boldsymbol{TF} \rightarrow \boldsymbol{F}$

$\lor\ \boldsymbol{FT} \equiv (\lambda xy.x\boldsymbol{T}y)\boldsymbol{FT} \equiv \boldsymbol{FTT} \equiv (\lambda xy.y)\boldsymbol{TT} \rightarrow \boldsymbol{T}$

$\lor\ \boldsymbol{TF} \equiv ?$

$\lor\ \boldsymbol{TT} \equiv (\lambda xy.x\boldsymbol{T}y)\boldsymbol{TT} \equiv \boldsymbol{TTT} \equiv (\lambda xy.x)\boldsymbol{TT} \rightarrow \boldsymbol{T}$

a	b	a∨b
F	F	F
F	T	T
T	F	T
T	T	T

否定演算子¬

否定演算子(NOT)

$$\neg \equiv \lambda x.x\boldsymbol{FT}$$

$$\neg\boldsymbol{T} \equiv (\lambda x.x\boldsymbol{FT})\boldsymbol{T} \equiv \boldsymbol{TFT} \equiv (\lambda xy.x)\boldsymbol{FT} \rightarrow \boldsymbol{F}$$

$$\neg\boldsymbol{F} \equiv (\lambda x.x\boldsymbol{FT})\boldsymbol{F} \equiv \boldsymbol{FFT} \equiv (\lambda xy.y)\boldsymbol{FT} \rightarrow \boldsymbol{T}$$

a	b
T	F
F	T

演習問題　$\lambda xy.(xyx)\boldsymbol{FT}$はどんなラムダ関数になるか？

チャーチ数と後者関数(successor)

$\bar{0} \equiv \lambda sz.z$
$\bar{1} \equiv \lambda sz.s(z)$
$\bar{2} \equiv \lambda sz.s(s(z))$
$\bar{3} \equiv \lambda sz.s(s(s(z)))$
$\bar{3}fa \to (\lambda sz.s\left(s\left(s(z)\right)\right))\,fa \to f(f\left(f(a)\right))$

$S \equiv \lambda nab.a(nab)$　後者関数

$S\bar{1} \equiv \left(\lambda nab.a(nab)\right)\bar{1} \equiv (\lambda \boldsymbol{n}.\left(\lambda ab.a(\boldsymbol{n}ab)\right))\bar{\mathbf{1}} \to \lambda ab.a(\bar{\mathbf{1}}ab)$

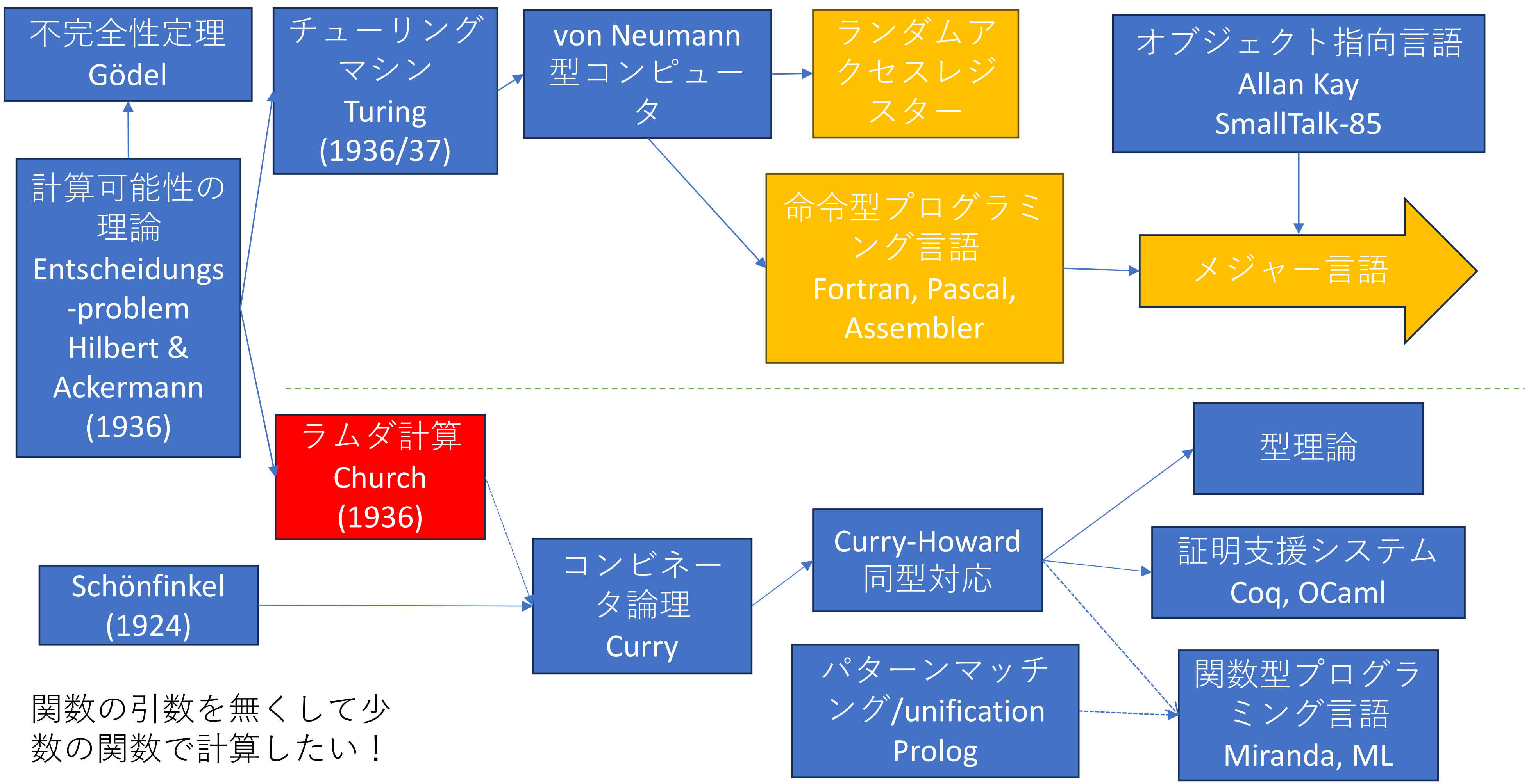
$\equiv \lambda ab.a((\lambda sz.s(z))ab) \to \lambda ab.a(a(b)) \equiv \bar{2}$

従って$S\bar{1} \to \bar{2}$

$\bar{2}S\bar{3} \to \overline{2+3} \equiv \bar{5}$　Sで加算も定義できる

演習問題　$S\bar{0} \to \bar{1}$を確認せよ

プログラミング言語の潮流



まとめ

- 計算の理論には、チューリングマシンとラムダ計算の2つの流れがある。両者は数学的に同一。
- ラムダ計算は、関数の引数に関数を取ることができる（高階述語論理）。
- ラムダ計算からコンビネータ論理へ、更にCurry-Howard同型対応へと繋がり、関数型プログラミング言語が作られてきた。

参考文献

- J. Roger Hindley & Jonathan P. Seldin (2008)
  Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction
- Greg Michaelson (1988)
  An Introduction to Functional Programming through Lambda Calculus
- Henk Barendregt & Erik Barendsen (2000)
  Introduction to Lambda Calculus
- Haskell B. Curry & Robert Feys (1958)
  Combinatory Logic, Volume I
- 関数型プログラミングの推薦図書：理論編（川頭）
  https://qiita.com/Trubetzkoy/items/6593edb4bd3d0c69fbde