

Rüdiger Scholz (Hrsg.)

Analyse und Präsentation von Messdaten

Gottfried Wilhelm Leibniz Universität Hannover

Inhaltsverzeichnis

Zusammenfassung.....	3
Vorbemerkung	4
1 Messdaten sammeln und darstellen	4
1.1 Grundideen	4
1.2 Diagramme zeichnen.....	5
2 Quellen und Ursachen von Messungenauigkeit	6
2.1 Typ A-Unsicherheiten	6
2.2 Typ B-Unsicherheiten	6
2.3 Der Messwert liegt zwischen zwei Skalenstrichen – was gilt jetzt?	8
2.3 Geltende Ziffern	8
2.4 Diskrepanz und Konsistenz	8
3 Mittelwert und Standardabweichung	9
3.1 Ein Maß für die Messunsicherheit	9
3.2 Das gewichtete Mittel	11
3.3 σ -Umgebungen – Vertrauensintervalle.....	12
3.4 Korrektur-Faktoren bei kleinem Stichprobenumfang.....	13
4 Fortpflanzung der Messunsicherheit.....	14
5 Auswertung von Messreihen	16
5.1 ... durch scharfes Hingucken.....	16
5.2 ... durch Rechnen: Methode der kleinsten Quadrate	16
5.3 Lineare Regression beim Fadenpendel.....	18
5.4 Nichtlineare Zusammenhänge.....	19
6. Grenzen des Vertrauens – Ausreißeranalyse	22
7 χ^2-Test.....	23
Anhang: Messprozess und Wahrscheinlichkeitsverteilung.....	24
A1 Der Zentrale Grenzwertsatz (ZGS).....	24
A2 Integrale der Gaußschen Normalverteilung	25
A3 Standardabweichung des Mittelwertes bei M Messungen nach der Gaußformel.....	26
A4 Die Binomialverteilung	27
A5 Die Poissonverteilung	29
Literatur	31
Impressum	31

Zusammenfassung

Messgröße	die spezielle Größe, der die Messung gilt
Messergebnis	(Schätz-)Wert, den die Messgröße durch Auswertung einer Messung bekommt
arithmetischer Mittelwert $\langle X \rangle$	Schätzwert für den wahren Wert einer Messgröße aus einer Messreihe $\langle X \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i ; X_i \text{ Messwerte; } M \text{ Anzahl der Messwerte}$
Messunsicherheit $u(X)$	Wichtiger Bestandteil des Messergebnisses; sie charakterisiert einen Vertrauensbereich, der der Messgröße zugeschrieben werden kann: $\langle X \rangle \pm u(X)$.
relative Messunsicherheit	Messunsicherheit dividiert durch den Betrag des Erwartungs-(Mittel-)wertes: $u(X) = \frac{u(X)}{ \langle X \rangle }$
Mittlere quadratische Abweichung $V'(X)$	Ein Maß für die Messunsicherheit: Der arithmetische Mittelwert der Quadrate der Abweichungen der Messwerte vom arithmetischen Mittelwert der Messreihe $V'(X) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2$
Standardabweichung $s'(X)$	Wurzel aus der mittleren quadratischen Abweichung: $s'(X) = \sqrt{V'(X)} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2}$
empirische Varianz $V(X)$	Schätzung der Varianz bezogen auf den <i>wahren</i> Wert (nicht auf den Mittelwert der Messreihe!) der Messgröße: $V(X) = \frac{M}{M-1} \cdot V'(X) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2$
empirische Standardabweichung $s(X)$	Wurzel aus der empirischen Varianz: $s(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2}$
Wahrscheinlichkeitsverteilung $dP(x)$	Funktion, die die Wahrscheinlichkeit dafür angibt, dass eine Messgröße X durch eine Messung einen bestimmten Wert $X_i + dx$ erhält: $dP(X) = X_i + dx = p(X_i) dx$
Indizes – Verabredung	Wenn nichts anderes angegeben ist, zählt $i = 1, \dots, M$ die unterschiedlichen Messergebnisse durch, die durch Wiederholung der Messung entstanden sind

Vorbemerkung

Viele Studierende erleben im Physikpraktikum erstmalig die Forderung nach einer begründbaren und nachvollziehbaren Auswertung und Darstellung eigener Messungen. Im Studium, im Zusammenhang mit den nun folgenden Semester- und Abschlussarbeiten, mit Dissertationen und Publikationen ist die Beherrschung der sachgerechten Analyse und Präsentation von Messdaten unerlässlich. Dieses Skript stellt elementare aber notwendige mathematische Grundideen, Definitionen und Ableitungen zusammen. Um zugleich die Forderung nach möglichst vollständiger Begründung (oder wenigstens Plausibilitätskontrolle) aller Behauptungen und den Anspruch auf schnelle pragmatische Orientierung zu erfüllen, wurden einige mathematische Ableitungen angehängt.

1 Messdaten sammeln und darstellen

1.1 Grundideen

Einen beträchtlichen Teil der Experimentierzeit verbringen Experimentatoren neben der konkreten Durchführung mit der Vorbereitung und Planung, mit der Auswertung und Überprüfung und mit der Wiederholung, Darstellung und Veröffentlichung ihrer Experimente. Da eine Messung prinzipiell nicht die *wahren Werte* einer Größe liefert, ist man auf die Sorgfalt der Messung und Darstellung angewiesen. Um die Qualität einer Messung beurteilen zu können und damit diese Bewertung nicht „irgendwie“ nach Gutdünken geschehen muss, werden gut begründete Regeln verwendet, die es erlauben, Unsicherheiten quantitativ zu beziffern, darzustellen und so Kennziffern der Qualität zu gewinnen. Auf diese Weise können Sie jederzeit Rechenschaft ablegen und Ihre Position kritisch hinterfragen (lassen).

Planung Was soll gemessen werden? Was brauchen Sie dazu? Welche Störeinflüsse sind bekannt? Wo drohen systematische Fehlerquellen?

Durchführung Wurde möglichst *alles*, was von Bedeutung ist, protokolliert, in Tabellen zusammengefasst, aufgeschrieben, fotografiert, ...?

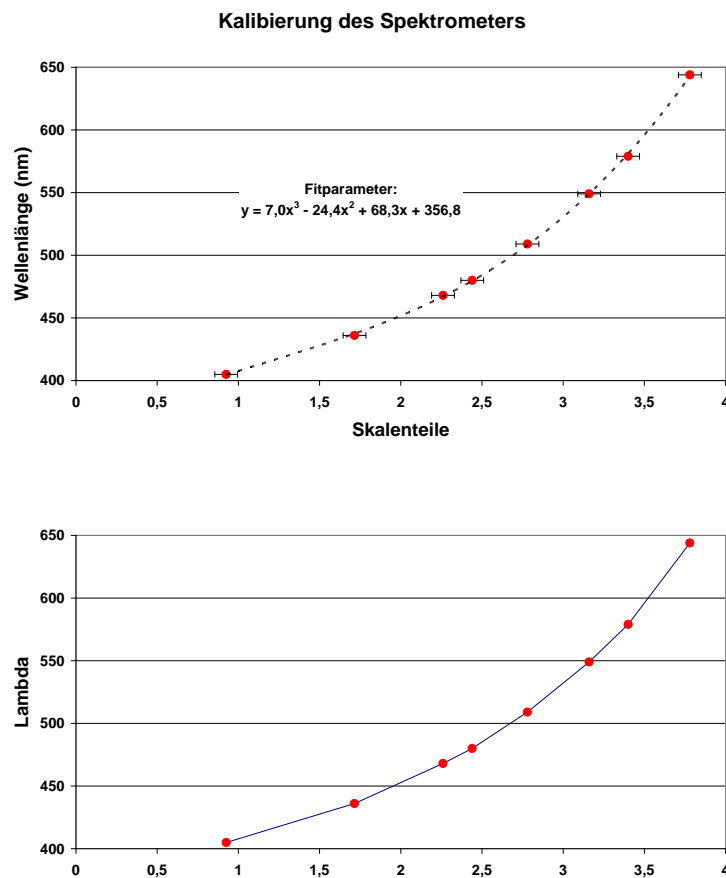
Auswertung Sind die Ergebnisse vollständig und übersichtlich zusammengestellt? Sind die Betrachtungen zu den zu erwartenden Unsicherheiten und Fehlern vollständig?

Konsistenzprüfung Gelingt der Abgleich mit den Planungen? Welche Konsequenzen ziehen Sie aus den Messwerten und Betrachtungen der Messunsicherheiten? Was sagen andere Autoren oder die Literatur?

Darstellung Die Angabe einer physikalischen Größe erfordert stets **Maßzahl** (Zahlenwert) und **Maßeinheit**. Ohne Anmerkungen zur **Messunsicherheit** ist auch diese Angabe wertlos. Verwenden Sie die wissenschaftliche Notation für die Zehnerpotenzen, um die Übersichtlichkeit zu verbessern: $12345 \text{ kg} = 1,2345 \cdot 10^4 \text{ kg}$. Verwenden Sie die *kohärenten Vorsilben* für die Einheiten (s. u.):

dezi	d	10^{-1}	deka	D	10^1
centi	c	10^{-2}	hekto	h	10^2
milli	m	10^{-3}	kilo	k	10^3
mikro	μ	10^{-6}	mega	M	10^6
nano	n	10^{-9}	giga	G	10^9
pico	p	10^{-12}	tera	T	10^{12}
femto	f	10^{-15}	peta	P	10^{15}
atto	a	10^{-18}	exa	E	10^{18}

1.2 Diagramme zeichnen



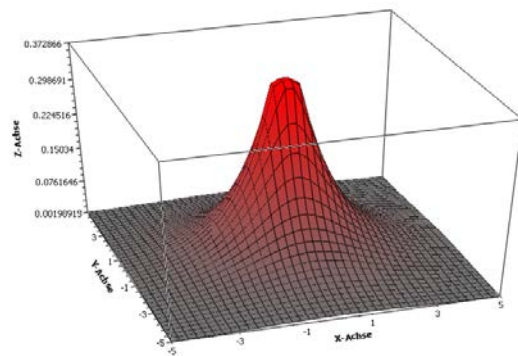
Zwei Darstellungen der Kalibrierungskurve eines Spektralapparates. Die untere Darstellung hat offensichtliche Mängel, vor allem ist die Verbindung der Messpunkte mit einem Polygonzug (gerade Streckenzüge von Punkt zu Punkt) für die Datenanalyse weniger brauchbar.

Fünf Grundregeln für die Darstellung

Diagramme sind Anschauungsobjekte und Analysehilfen, Betrachter sollen gut erkennen können, worum es geht.

- Beschriften Sie die Achsen richtig, eindeutig und vollständig; Physikalische Größe und Maßeinheit dürfen nicht fehlen;
- skalieren Sie sinnvoll: 1er-/2er-/5er-Schritte oder eine ganze Anzahl von Dekaden;
- markieren Sie Messpunkte, Linien etc. in geeigneter Größe;
- nutzen Sie passende Über-/Unterschriften;
- zeichnen Sie Punkte und Linien, die nicht gemessen wurden, sondern „nur“ Lesehilfe oder Kommentare bieten, besonders, geben Sie die Messunsicherheiten und die Funktionsterme für die Graphen und an.

Verwenden Sie für die Entwicklung Ihrer Diagramme Software für die Datenanalyse. Vor allem eine Fit-Analyse von Messdaten ist ohne diese Hilfsmittel kaum möglich (kostenloser Download des **Datenanalyseprogrammes Qti-plot** über die Homepage des PhysikPraktikums).



3D-Darstellung der Modellierung eines gaußschen Strahlprofils mit Qti-plot

2 Quellen und Ursachen von Messungenauigkeit

Auch wenn Sie *grobe Fehler* vermeiden, also falsch angeschlossene Messgeräte, Zählendreher beim Notieren von Messparametern oder ähnliche Irrtümer, bleiben spezifische Messunsicherheiten, die unlösbar mit dem Messprozess verbunden sind. Beim Experimentieren werden Sie feststellen, dass Messwiederholungen, selbst wenn Sie sorgfältig versuchen, identische Bedingungen herzustellen, nicht immer identische Messwerte liefern; es treten Abweichungen auf, die zu Unsicherheiten der Messung führen. Jede Messung einer physikalischen Größe X ist abhängig von den verwendeten Messgeräten, dem Messverfahren, dem Messobjekt, von Umwelteinflüssen (Temperatur, Feuchtigkeit, elektromagnetische Felder) und schließlich auch vom Beobachter (Müdigkeit, Sehschärfe, Übung). Messungen liefern daher lediglich Schätzwerte $X_{\text{Schätz}}$ für die wahren Werte X_{wahr} einer Größe. **Es gibt prinzipiell keine Möglichkeit, den wahren Wert einer Messgröße zu messen.** Im Rahmen internationaler Anstrengungen für eine einheitliche Bewertung von Einflussgrößen auf eine Messung werden zwei Kategorien von Methoden der Berechnung von Unsicherheiten unterschieden¹:

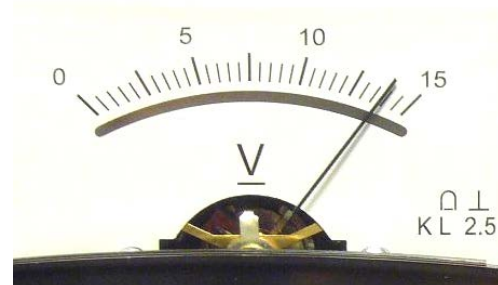
- Typ A: Berechnung der Messunsicherheit durch statistische Analyse der Messungen;
- Typ B: Berechnung der Messunsicherheit mit anderen Mitteln als der statistischen Analyse.

2.1 Typ A-Unsicherheiten

Damit sind Messabweichungen gemeint, die nicht einseitig gerichtet sind und zu einer zufälligen Streuung der Messergebnisse führen. Zur theoretischen Behandlung dieses Phänomens der Messwertstreuung nutzt man Werkzeuge der Stochastik (Wahrscheinlichkeitslehre und Statistik). Die Abschätzung einer Messunsicherheit erfordert daher stochastische Aussagen: Wie gewinnt man aus einer Messreihe $X_1, X_2, X_3, \dots, X_M$ einen Wert $X_{\text{Schätz}}$, der mit maximaler Wahrscheinlichkeit die beste Annäherung an den wahren Wert X_{wahr} der Messgröße bietet. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt das Messergebnis innerhalb eines vorgegebenen Intervalls ΔX um den wahren Wert: $X_{\text{Schätz}} = X_{\text{wahr}} \pm \Delta X$?

2.2 Typ B-Unsicherheiten

Hier werden Prozesse erfasst, die zu reproduzierbaren Abweichungen führen. Allgemeingültige Definitionen gibt es hier nicht, genauso wenig wie allgemeine Verfahren zur Korrektur. Sie müssen von Fall zu Fall gefunden werden. Hier finden Sie einige Beispiele aus dem Physikpraktikum für derart systematisch auftretende Abweichungen und Wege der Korrektur:



1 Ein Spannungsmessgerät der Güteklasse K 2,5

(1) Zu den Typ B-Unsicherheiten gehören **Anzeigefehler von Messgeräten**. Die Gerätehersteller geben an, welche Genauigkeitsgrenzen für den angezeigten Messwert X_{Mess} bei Verwendung des jeweiligen Messgerätes bestenfalls erwartet werden können. Die **Genauigkeitsklasse K 2,5** (Angabe auf der Messskala nach DIN EN 60051 Abb. 1) bedeutet: Ist der Endwert des eingestellten Messbereichs U_{end} , dann beträgt die Typ B-Unsicherheit *über den gesamten* Messbereich $u(U)_B = 0,025 \cdot U_{\text{end}}$. Bei $U_{\text{end}} = 15 \text{ V}$ also:

$$u(U)_B = 0,025 \cdot 15 \text{ V} = 0,375 \text{ V} \Rightarrow U_{\text{Schätz}} = U_{\text{Mess}} \pm u(U)_B = U_{\text{Mess}} \pm 0,375 \text{ V}.$$

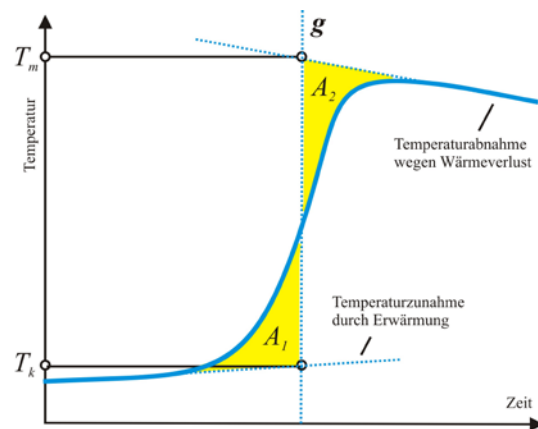
Dieser Wert von 0,375 V gilt unabhängig davon, wie groß der Zeigerausschlag beim Messgerät ist. Um die relative Unsicherheit $u(U)_B/U_{\text{Mess}}$ gering zu halten, wählen Sie daher den Messbereich möglichst so, dass Sie den Wert am *Skalenende* ablesen können.

¹ Siehe dazu: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, corrected and reprinted 1995, International Organization for Standardization, (Geneva, Switzerland); deutsche Übersetzung „Leitfaden für die Angabe der Unsicherheit beim Messen“, Hrsg. DIN e.V., Beuth Verlag GmbH, Berlin-Wien-Zürich 1995

(2) Das Fadenpendel ist kein mathematisches Pendel, die Rotation der Pendelmasse muss berücksichtigt werden. In manchen Fällen ist es sinnvoll, diesen Fehler durch Einführung einer „effektiven Länge“ zu berücksichtigen (vgl. Pendelversuch A05).

(3) Der Bauch stehender Welle in einem Resonanzrohr ist nicht genau bündig mit dem Rohrende. Abhängig vom Rohrdurchmesser D liegt der Schwingungsknoten „irgendwo ein Stück dahinter“. Die geometrische Länge ist daher kleiner als die akustische Länge. Die Korrektur dieses Fehlers erfolgt durch Einführung einer *Mündungskorrektur*, $L_{\text{akust}} = L_{\text{geo}} + \delta L$. Ein brauchbarer empirischer Wert ist $\delta L \approx 5/3 \cdot D^2$.

(4) Manchmal ist die Korrektur aufwändiger: Bei kalorischen Messungen beispielsweise treten Wärmeverluste auf, die die Ergebnisse verfälschen. Um systematische Abweichungen zu vermeiden, korrigieren Sie den Temperatur-Zeit-Verlauf der Wärmeabgabe beim Versuch B04/Spezifische Wärme durch eine *Wärmeaustauschkorrektur*. Abb. 2 zeigt, wie Sie vorgehen: Eine gute Näherung für die wahren Temperaturen T_k und T_m erhalten Sie durch graphische Extrapolation jeweils des (linearen) Anfangs- bzw. Endteils der Kurve, wobei eine vertikale Gerade g so gelegt wird, dass die Flächenstücke A_1 und A_2 (etwa) gleich groß sind.



2 Korrektur des Wärmeaustausches mit der Umgebung

Begründung: In einer Temperatur-Zeit-Darstellung entspricht die Fläche unter der Kurve der mit der Umgebung ausgetauschten Wärme. Um die unvermeidlichen Verluste an die Umgebung zu korrigieren, simulieren Sie mit der eingezeichneten vertikalen Geraden einen schlagartigen Temperatursprung von T_k auf T_m , zu schnell für einen Wärmeaustausch mit der Umgebung. Die beiden Flächenstücke A_1 und A_2 müssen jedoch gleich groß sein, damit die Gesamtflächen unter der wahren und der simulierten Kurve gleich groß sind. Die Ordinatenschnittpunkte ergeben die gesuchten Temperaturen T_k und T_m .

(5) Für ein Digitalvoltmeter finden Sie die Herstellerangabe für den 200 mV-Bereich: „Genauigkeit $a = \pm (0,5\% + 2 \text{ dgts})$ “; „dgts“ bezeichnet den Digitalstellenfehler. Bei einer vierstelligen Anzeige reicht die Darstellung also von 000,0 mV bis 199,9 mV mit einer Auflösung von 0,1 mV. Für 100,0 mV erhalten Sie die Messtoleranz $a = \pm (0,5 \text{ mV} + 2 \cdot \text{dgts} \cdot 0,1 \text{ mV}) = \pm 0,7 \text{ mV}$. Innerhalb dieses Bereiches der Breite $2 \cdot a$ unterstellt man eine Gleichverteilung der Messwerte und bekommt damit die Standardunsicherheit

$$u(U) = \frac{a}{\sqrt{3}} = \frac{0,7 \text{ mV}}{\sqrt{3}} \approx 0,4 \text{ mV}.$$

Ist nichts weiter bekannt, schätzt man die Unsicherheit über einen Mindestfehler von $a = \pm 1 \text{ dgts}$ ab.

(6) Für digitale Stoppuhren finden Sie typische Herstellerangaben der Eichfehlergrenze von $u(t) = 10 \text{ ms} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot t$. Eine Messzeit von 100 s hat danach eine Unsicherheit von

$$u(100 \text{ s}) = 10 \text{ ms} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \text{ s} = 10 \text{ ms} + 5 \cdot 10^{-4} \cdot 100 \text{ s} = 0,06 \text{ s}.$$

Sie merken, dass systematische Fehler sehr unangenehm sein können, da Gegenmaßnahmen fallabhängig entwickelt werden müssen. In einigen Fällen gelangen Sie zu einer brauchbaren Abschätzung der Unsicherheit, wenn Sie den „worst case“ annehmen.

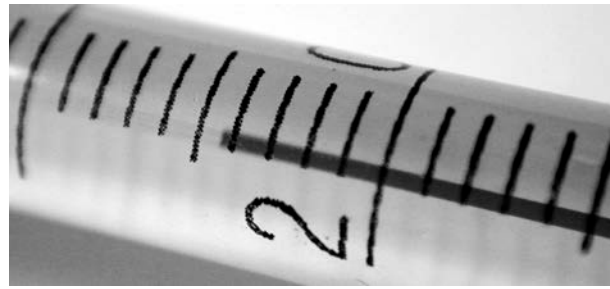
² Vgl. z. B. Bergmann/Schäfer Experimentalphysik, Band 1

2.3 Der Messwert liegt zwischen zwei Skalenstrichen – was gilt jetzt?

Welche Temperatur zeigt das Thermometer im Foto rechts?

Zunächst schätzen Sie den Messwert $T_{\text{Mess}} = 24,3^\circ\text{C}$. Im nächsten Schritt müssen Sie etwas über die Messunsicherheit herausfinden.

Die *Ableseungenauigkeit* führt zu einer zufälligen Messunsicherheit. Als erfahrungsbegründete Regel gilt eine Unsicherheit von $1/4$ des kleinsten Skalenabstandes: $u(T)_A = 0,25$ Grad.



Zu dieser zufälligen Unsicherheit kommt als Typischer Wert für das verwendete Laborthermometer ist $u(T)_B = 0,15$ Grad; diese Fehlergrenze steht auf der Thermometerskala. Als kombinierte Messunsicherheit erhalten Sie damit $u(T) = u(T)_A + u(T)_B = 0,25 \text{ Grad} + 0,15 \text{ Grad} = 0,4 \text{ Grad}$.

Ergebnis einer Messung (komplett): $T = T_{\text{Mess}} \pm u(T) = (24,3 \pm 0,4)^\circ\text{C}$

2.3 Geltende Ziffern

Geltende Ziffern (= signifikante Stellen) sind die angegebenen Ziffern ohne führende Nullen. Je mehr geltende Ziffern Sie angeben, desto größer ist die Genauigkeit, die Sie reklamieren. Um Unklarheiten mit Endnullen zu vermeiden, verwenden Sie die wissenschaftliche Schreibweise von Zahlen mithilfe von Zehnerpotenzen und verschieben das Komma so weit, wie Sie wollen, dass die angegebenen Endnullen gelten.

Beispiel: Die Zahl einhundert mit unterschiedlicher Genauigkeit: $1 \cdot 10^2$ hat eine geltende Ziffer, $10 \cdot 10^1$ hat zwei, $10,0 \cdot 10^1 = 100 \cdot 10^0$ hat drei, $100,0$ hat vier geltende Ziffern.

Für Rechenoperationen gelten folgende **Grundregeln** (DIN 1333):

- **Addition von Größen:** Das Ergebnis bekommt genauso viele Nachkommastellen wie die Zahl mit den wenigsten Nachkommastellen.
- **Multiplikation von Größen:** Das Ergebnis bekommt genauso viele signifikante Stellen wie die Zahl mit den wenigsten signifikanten Stellen:
- **Messunsicherheiten** werden auf eine signifikante Stelle gerundet. Ausnahme: Mehr als eine signifikante Stelle wird bei der Messunsicherheit nur angegeben, wenn die erste Ziffer eine „1“ ist:
 $u(g) = 0,01562 \text{ m/s}^2 = 0,016 \text{ m/s}^2$. Die Rundungsfehler werden andernfalls schnell zu groß.
 Die Darstellung $g = (9,76 \pm 0,03562) \text{ m/s}^2$ ist unsinnig. Auch wenn $u(g) = 0,03562 \text{ m/s}^2$ das Ergebnis der Fehlerrechnung sein sollte, ist die Genauigkeit auf zwei Nachkommastellen beschränkt (Additionsregel): $g = (9,76 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$.
- **Messwerte** werden so angegeben, dass die letzte signifikante Stelle dieselbe Größenordnung hat, wie die Messunsicherheit: Die Angabe $H = (12,78 \pm 1) \text{ m}$ ist sinnlos, richtig wäre $H = (13 \pm 1) \text{ m}$.

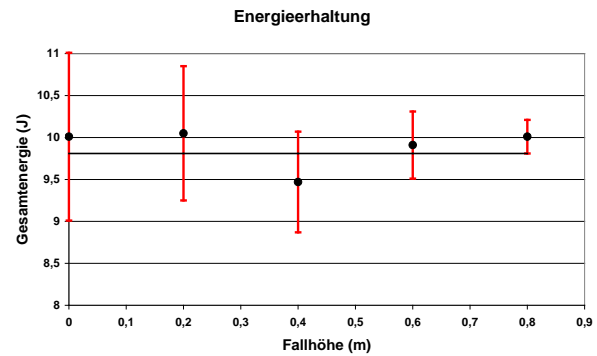
Um Rundungsfehler zu reduzieren, führen Sie in den Berechnungen soviel signifikante Stellen der Messunsicherheit mit, wie nötig.

2.4 Diskrepanz und Konsistenz

Die **Diskrepanz** zweier Messwerte derselben Größe ist der Absolutbetrag ihrer Differenz. Zwei Messungen sind **konsistent**, wenn ihre Diskrepanz geringer ist, als die (kleinere der) Messunsicherheiten:

- $g = (9,73 \pm 0,05) \text{ m/s}^2$ und $g = (9,76 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$ sind damit konsistent, nicht jedoch $g = (9,71 \pm 0,03) \text{ m/s}^2$ und $g = (9,76 \pm 0,04) \text{ m/s}^2$.

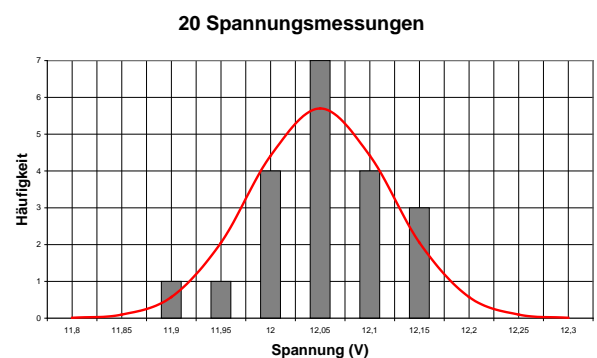
- Ist $g = (7,98 \pm 1,7) \text{ m/s}^2$ das Ergebnis einer Messung des Ortsfaktors, dann ist diese Messung zwar nicht sonderlich präzise aber mit dem Literaturwert von $9,81 \text{ m/s}^2$ vereinbar.
- Abb. 2 zeigt die Messung der Gesamtenergie in einem Fallexperiment. Die Messung ist konsistent mit der Aussage des Energieerhaltungssatzes, da die Diskrepanzen kleiner als die Messunsicherheiten sind.

2 Theoriekonsistente Messung der Gesamtenergie: $E_G = 9,8 \text{ J}$

3 Mittelwert und Standardabweichung

3.1 Ein Maß für die Messunsicherheit

Am Beginn der Analyse der Typ A-Unsicherheiten steht eine Beobachtung: Messwerte genügen in vielen Fällen (allerdings nicht immer!) einem einfachen Gesetz: Finden Sie durch wiederholte Messung die Messwerte X_i , so scharen sich diese um einen zentralen Wert $\langle X \rangle$ und die Häufigkeit, einen Messwert in einem Abstand $|X_i - \langle X \rangle|$ von diesem Zentralwert zu finden ist umso kleiner, je größer der Abstand ist (Abb. 3). Man spricht von einer *Häufigkeitsverteilung* der X_i .



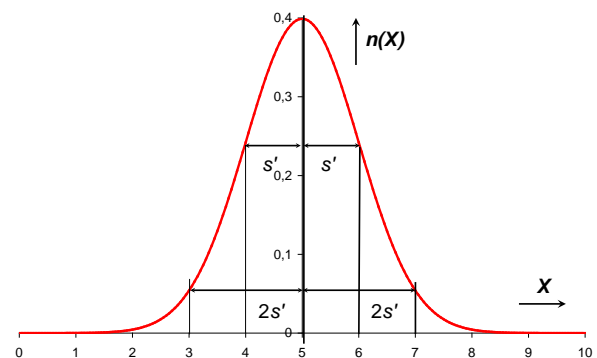
3 20 Messungen der Ausgangsspannung eines Netzgerätes; die durchgezogene Linie zeigt eine angepasste Normalverteilung

Mit größerer mathematischer Schärfe formuliert man: Die Wahrscheinlichkeit³, einen Messwert innerhalb eines kleinen Intervalls dX um den Wert X zu finden, ist⁴ $dP(X) = p(X) \cdot dX$. Die Erfahrung geht noch weiter: Je mehr zufällige Parameter den Messwert X bestimmen, desto mehr nähert sich die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(X)$ der so genannten **Gaußschen Normalverteilung** $\mathcal{N}(x)$ (Abb. 4) an⁵:

$$P(x) \rightarrow \mathcal{N}(x); d\mathcal{N}(X) = n(X) dX = \frac{1}{s' \sqrt{2\pi}} \cdot \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{X - \langle X \rangle}{s'} \right)^2 \right) dX. \quad (1)$$

Normalverteilte Messgrößen werden also von den zwei Parametern $\langle X \rangle$ und s' festgelegt. Der **arithmetische Mittelwert** $\langle X \rangle$ der Messgröße: M -fache Wiederholung einer Messung ergibt eine Messreihe aus M Messwerten X_i ($1 \leq i \leq M$), deren arithmetischer Mittelwert $\langle X \rangle$ ist:

$$\langle X \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i. \quad (2)$$

4 Gaußsche Normalverteilung mit $\langle X \rangle = 5$ und $s' = 1$

³ In der Stochastik wird gezeigt, unter welchen Bedingungen die „(relative) Häufigkeit“ eines Ereignisses ein Maß für seine „Wahrscheinlichkeit“ ist – und umgekehrt. Eigentlich nur im Grenzfall sehr großer Anzahl von Messungen ist die synonyme Nutzung der Begriffe gerechtfertigt.

⁴ Der Differentialquotient $p(X) = dP(X)/dX$ wird, analog zur Massendichte, als **Wahrscheinlichkeitsdichte** bezeichnet.

⁵ Im Anhang A1 wird der enge Zusammenhang zwischen Messprozess und Normalverteilung ausführlich diskutiert

Die **mittlere quadratische Abweichung** beschreibt, wie stark Ihre Messwerte X_i um diesen Mittelwert herum „streuen“. Offenbar charakterisiert das auch die Qualität Ihrer Messung. Betrachten Sie dazu die quadratische⁶ Abweichung des Messwerts X_i , $(X_i - \langle X \rangle)^2$. Der arithmetische Mittelwert all dieser Abweichungen ist:

$$V'(X) = \left\langle (X - \langle X \rangle)^2 \right\rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2.$$

Diese Größe wird als mittlere quadratische Abweichung oder **Varianz bezüglich des Mittelwertes** bezeichnet. Der arithmetische Mittelwert zeichnet sich dadurch aus, dass für diesen Wert die Summe der Abweichungsquadrate minimal ist. Die Varianz hängt nicht von der Anzahl der Messungen ab. Die Streuung kann allein durch ein besseres Messverfahren verkleinert werden. Anschaulich ist das direkt nachvollziehbar: Die „Punktwolke“ der Messergebnisse um den Mittelwert schmiegt sich nicht enger an den Mittelwert, nur weil häufiger gemessen wurde. Ein stark streuendes Messverfahren streut durch seine Wiederholung nicht weniger. Die **Standardabweichung** s' der Messwerte der Messreihe vom Mittelwert ist die Wurzel aus der Varianz:

$$s'(X) = \sqrt{V'(X)} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2}. \quad (3a)$$

Sie werden bei Ihren Messungen in der Regel weniger an der Streuung um den Mittelwert sondern mehr an der (geschätzten) Streuung der Messwerte um den (unbekannten) wahren Wert interessiert sein. Man schätzt diese Unsicherheit durch die **empirische Varianz** $V(X)$ der Messwerte der X_i ab. Diese ist etwas größer, um den Faktor $M/(M-1)$:

$$V(X) = \frac{M}{M-1} V' = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2.$$

Die **empirische Standardabweichung** $s(X)$ der Messwerte ist die Wurzel aus der empirischen Varianz

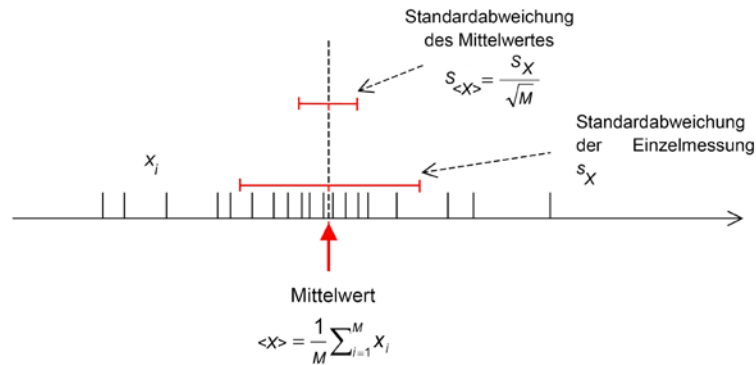
$$s(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2}. \quad (3b)$$

Welche der Größen s oder s' Sie sinnvoll verwenden, hängt vom Einzelfall ab – wichtig ist, dass Sie dazu schreiben, welchen Wert Sie verwenden, damit die Leser Ihre Argumentation nachvollziehen können. Ein wenig spricht für die Verwendung von Gl. 3b, da damit auch der etwas seltsame Fall einer Einzelmessung abgedeckt wird. Für $M = 1$ wäre $s' = 0$, s dagegen nicht definiert. Die zweite Aussage ist, bezogen auf die statistische Interpretation, sicher sinnvoller. Deshalb wird in diesem Skript s verwendet.

Auch die Messunsicherheit des Mittelwertes $\langle X \rangle$ selbst kann natürlich kritisch bewertet werden: Wie wirkt sich die zu erwartende Messunsicherheit der einzelnen Messwerte $u(X)$ auf die Unsicherheit des Mittelwertes $u(\langle X \rangle)$ der Messreihe aus? Wählen Sie als Unsicherheit die Standardabweichung, $u(\langle X \rangle) = s(\langle X \rangle)$, können Sie diese Frage direkt durch eine kleine Rechnung beantworten (Fehlerfortpflanzung, Anhang A3). Die **empirische Standardabweichung des arithmetischen Mittelwertes** $s(\langle X \rangle)$ (man spricht auch vom Standardfehler des arithmetischen Mittelwertes) ist um den Faktor $1/\sqrt{M}$ kleiner als die empirische Standardabweichung der Messwerte $s(X)$:

$$s(\langle X \rangle) = \frac{s(X)}{\sqrt{M}} = \sqrt{\frac{1}{M \cdot (M-1)} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2}. \quad (4)$$

⁶ Durch das Quadrat werden große Abweichungen höher zu gewichtet und positive und negative Abweichungen kompensieren sich nicht.



5 Standardabweichung der Einzelmesswerte und des Mittelwertes

Die Unsicherheit des Mittelwertes nimmt mit der Anzahl M der Messungen ab. Abb. 5 zeigt die Verhältnisse an einem Beispiel. Jeder einzelne Strich repräsentiert einen Messwert. Die Messungen sind um den Mittelwert normalverteilt. $s(X)$ und $s(\langle X \rangle)$ sind als rote Balken eingezeichnet. Bei einer großen Anzahl Messungen (>30) werden Sie stets finden, dass etwa 68 % der Messungen im Intervall $\pm s(X)$ um den Mittelwert der Messreihe liegen. Würden Sie den wahren Wert kennen, könnten Sie weiter herausfinden, dass etwa 68 % der Messwerte im Intervall $\pm s(X)$ um den wahren Wert und 68 % der Mittelwerte im Intervall $\pm s(\langle X \rangle)$ um den wahren Wert lägen.

Mit Angabe der Messunsicherheit $u(X) = s(X)$ bzw. $u(\langle X \rangle) = s(\langle X \rangle)$ wird das Messergebnis vollständig: $X = \langle X \rangle \pm u$.

Praktische Rechenhilfe: Die Berechnung der Standardabweichung nach Gl. 3 ist mühsam, da für jeden Messwert die Klammer $(X_i - \langle X \rangle)^2$ berechnet werden muss. Einfacher geht es z. B. so:

$$s^2(X) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2 = \frac{M}{M-1} \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (X_i^2 + \langle X \rangle^2 - 2X_i \langle X \rangle) = \frac{M}{M-1} \left(\left(\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i^2 \right) - \langle X \rangle^2 \right). \quad (5)$$

Bestimmen Sie also zuerst den Mittelwert und danach die Summe der Quadrate der Messwerte und daraus die Standardabweichung nach Gl. 5.

3.2 Das gewichtete Mittel

Der Mittelwert nach Gl. 1 gilt nur, wenn echte Wiederholungen, ohne Änderungen an der Apparatur, durchgeführt werden. Messen Sie dagegen beispielsweise den Ortsfaktor g aus der Pendelschwingung für *unterschiedliche* Längen L_i , bekommen Sie unterschiedliche Ergebnisse g_i , deren intrinsische Unsicherheit u_i für kleine Längen größer ist als für große. Wie kommen Sie hier zu *einem* Messergebnis?

In diesem Fall gewichtet man die Messungen X_i mit größerer Unsicherheit $u(X_i)$ geringer. Man führt dazu die Gewichtungsfaktoren w_i ein:

$$w_i = \left(\frac{1}{u(X_i)} \right)^2.$$

Damit berechnet sich der so genannte **gewichtete arithmetische Mittelwert** zu

$$\langle X \rangle = \frac{\sum_{i=1}^M w_i X_i}{\sum_{i=1}^M w_i}.$$

Beispiel: Fadenpendel**Längenabhängigkeit (T in s)**

$l(m)$	$T1$	$T2$	$T3$
0,1	0,618	0,632	0,619
0,2	0,897	0,899	0,906
0,3	1,107	1,103	1,099
0,4	1,280	1,288	1,267
0,5	1,432	1,423	1,423
0,6	1,559	1,563	1,560
0,7	1,692	1,686	1,683

$$g = 4\pi^2 \frac{l}{T^2}.$$

Beim Fadenpendel ist $w_i \propto l_i$. Der gewichtete Mittelwert des Ortfaktors ist also

$$\langle g \rangle = \frac{\sum_{i=1}^M w_i g_i}{\sum_{i=1}^M w_i} = \frac{\sum_{i=1}^M l_i g_i}{\sum_{i=1}^M l_i}.$$

Aus diesen Messungen erhalten Sie ein arithmetisches Mittel $\langle g \rangle = 9,78 \text{ m/s}^2$ und ein gewichtetes arithmetisches Mittel von $\langle g \rangle_{\text{gew}} = 9,73 \text{ m/s}^2$. Rechnen Sie nach! Dieser zweite Wert ist zwar weiter vom Literaturwert entfernt und seine Unsicherheit jedoch geringer. Damit werden möglicherweise systematische Fehler (Unterschätzung der Pendellänge, Überschätzung der Pendeldauer) deutlicher erkennbar.

3.3 σ -Umgebungen – Vertrauensintervalle

Hier finden Sie den Ursprung für die oben genannte Zahl „etwa 68 %“. Bei bekannter Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(X)$ der Messwerte X um den Mittelwert $\langle X \rangle$, lässt sich die Wahrscheinlichkeit dafür berechnen, einen Messwert im Intervall $[a, b]$ um den Mittelwert zu finden. Gehen Sie wieder von normalverteilten Messwerten aus. Dann ist die Wahrscheinlichkeit für

$$\text{einen Messwert } X \pm dX: d\mathcal{N}(X) = n(X) dX = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X - \langle X \rangle}{\sigma}\right)^2\right) dX$$

$$\text{irgendeinen Messwert zwischen } \pm \infty: P(-\infty < X < \infty) = \int_{-\infty}^{\infty} d\mathcal{N}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} dX n(X) = 1.$$

$$\text{einen Messwert im Intervall } [a, b]: P(a \leq X \leq b) = \int_a^b dX n(X).$$

Das hier auftretende Integral ist nicht elementar berechenbar (s. Anhang A2). Mit $a = \langle X \rangle - r \cdot \sigma$ und $b = \langle X \rangle + r \cdot \sigma$ finden Sie die Wahrscheinlichkeit $P(\mu - r \cdot \sigma \leq X \leq \mu + r \cdot \sigma)$ dafür, dass der Messwert innerhalb einer $r \cdot \sigma$ -Umgebung um den Mittelwert liegt:

r	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3	3,5
$P(r \cdot \sigma)/\%$	0	0,2	0,38	0,55	0,68	0,79	0,87	0,92	0,95	0,988	0,997	99,95

Im Bereich $\pm \sigma$ finden Sie also im Mittel 68% der Messwerte (vorausgesetzt, Sie haben genügend Messwerte).

Ein **Vertrauensintervall** von 60 % besagt, dass 60 % alle Messwerte erfasst sein sollen. Dazu müssen Messergebnisse im Bereich $\approx \pm 0,8 \sigma$ um den Mittelwert betrachtet werden. Im Bereich 3σ um den Mittelwert finden Sie bereits 99,7 % aller Messwerte – fast alle.

3.4 Korrektur-Faktoren bei kleinem Stichprobenumfang

Ist die Zahl der Messwerte nur klein ($M \leq 25$) werden die aus der Normalverteilung berechneten Parameter ziemlich unsicher. Anfang des 20. Jh. veröffentlichte WILLIAM SEALY GOSSET unter dem Pseudonym „Student“ eine Verteilungsfunktion, die eine zuverlässigere Parameterschätzung auch für kleine Stichprobengrößen erlaubt. Einzelheiten finden Sie in den Stochastik-Lehrbüchern. Für die Messwertanalyse ist folgender Teilaspekt von Bedeutung: Aus der Zahl M der Messwerte und einem vorgegebenen Vertrauensbereich berechnen Sie einen Faktor $t(P, M)$, der die Unsicherheitsintervalle aus der Normalverteilung korrigiert. Aus der empirischen Standardabweichung des Mittelwertes $s(\langle X \rangle)$ berechnen Sie beispielsweise:

$$u(\langle X \rangle) = t(P, M) \cdot s(\langle X \rangle) = t(P, M) \cdot \frac{s(X)}{\sqrt{M}}. \text{ Ausgewählte } t\text{-Faktoren:}$$

	$M = 2$	$M = 3$	$M = 4$	$M = 5$	$M = 6$	$M = 10$	$M = 100$	$M > 200$
$t(68\%, M)$	1,84	1,32	1,20	1,15	1,11	1,06	1,00	1,00
$t(95\%, M)$	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,26	1,98	1,96

Je größer M ist und je kleiner P , desto näher liegt der Student- t -Faktor bei 1. Ein Vertrauensniveau von $P \approx 68\%$ ist bereits mit $M \geq 5$ mit $t(P, M) \approx 1$ also mit der Normalverteilung beschreibbar (Gl. (3)).

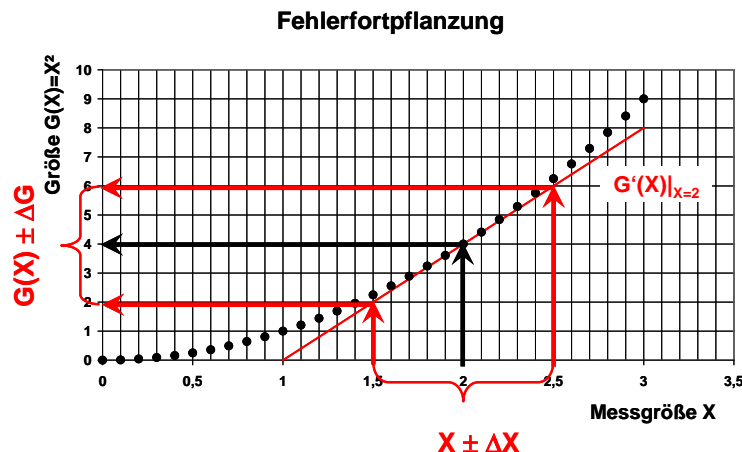
Beispiel: Messung einer elektrischen Spannung

Messung Nr.	Spannung U (V)	$U_i - \langle U \rangle$	$(U_i - \langle U \rangle)^2$
1	11,99	$-14,00 \cdot 10^{-3}$	$1,960 \cdot 10^{-4}$
2	12,10	$96,00 \cdot 10^{-3}$	$9,216 \cdot 10^{-3}$
3	12,09	$86,00 \cdot 10^{-3}$	$7,396 \cdot 10^{-3}$
4	11,94	$-64,00 \cdot 10^{-3}$	$4,096 \cdot 10^{-3}$
5	12,11	$106,0 \cdot 10^{-3}$	$1,124 \cdot 10^{-2}$
6	11,97	$-34,00 \cdot 10^{-3}$	$1,156 \cdot 10^{-3}$
7	11,95	$-54,00 \cdot 10^{-3}$	$2,916 \cdot 10^{-3}$
8	12,12	$116,0 \cdot 10^{-3}$	$1,346 \cdot 10^{-2}$
9	11,77	$-234,0 \cdot 10^{-3}$	$5,476 \cdot 10^{-2}$
10	12,00	$-40,00 \cdot 10^{-4}$	$1,600 \cdot 10^{-5}$
Summe	120,04		0,104452
Mittelwert	12,004		

$$\langle U \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = 12,0 \text{ V} \Rightarrow \begin{cases} s(U) = \sqrt{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (U_i - \langle U \rangle)^2} = 1,08 \cdot 10^{-1} \text{ V} \\ s(\langle U \rangle) = \frac{s(U)}{\sqrt{10}} = 3,41 \cdot 10^{-2} \text{ V.} \end{cases}$$

Vertrauensniveau P	95%	68,28%
t -Faktor für $M = 10$	2,26	1,06
Messunsicherheit $u(U)$	$2,26 \cdot s(\langle U \rangle) = 7,70 \cdot 10^{-2} \text{ V}$	$1,06 \cdot s(\langle U \rangle) = 3,61 \cdot 10^{-2} \text{ V}$
Messergebnis U	$(12,00 \pm 0,08) \text{ V}$	$(12,00 \pm 0,04) \text{ V}$

4 Fortpflanzung der Messunsicherheit



6 Die Grundidee zur Berechnung der Fehlerfortpflanzung: Eine Abweichung ΔX wirkt sich auf die Messgröße $G(X)$ aus

Die kinetische Energie W wird nicht direkt gemessen, sondern, nach der Messung von Masse m und Geschwindigkeit v aus der Formel $W = 1/2 \cdot m v^2$ berechnet. Wie wirken sich Messabweichungen Δm und Δv auf den Wert von W aus, wie groß ist ΔW ? Abb. 6 zeigt die Grundidee.

Das Intervall $\pm \Delta X = \pm 0,5$ um $X = 2,0$ wird durch die Funktion $G(X) = X^2$ auf das Intervall ΔG um $G(2,0) = 4,0$ abgebildet. Aus der Steigung des Grafen von G bei $X=2,0$, $dG/dX|_{X=2,0} = 4,0$ können Sie nach Abb. 6 direkt ablesen: $\Delta G \approx dG/dX|_{X=2,0} \cdot \Delta X = 4,0 \cdot 0,5 = 2,0$. Man sieht in Abb. 6 auch sehr gut, dass diese Abschätzung umso schlechter wird, je größer ΔX ist. Je nach Funktionstyp müssen höhere Ableitungen berücksichtigt werden (Taylorentwicklung von $G(X)$).

Diese Idee können Sie auf die Berechnung der Messunsicherheit $u(W) = u(1/2 \cdot m v^2)$ anwenden. Die Mittelwerte $\langle m \rangle$ und $\langle v \rangle$ sowie deren Messunsicherheiten $u(m)$, $u(v)$ seien bekannt.

(1) Arithmetischer Mittelwert $\langle W \rangle$

Man setzt in die Formel jeweils den Mittelwert der Messgrößen ein: $\langle W \rangle = 1/2 \langle m \rangle \langle v \rangle^2$.

Messunsicherheit $u(W)$

Nehmen Sie an, kleine Messabweichungen $\delta m \ll m$ und $\delta v \ll v$ wären aufgetreten. Setzen Sie nun diese für m und v ein und vernachlässigen Sie Terme, mit höherer Ordnung in δm und δv :

$$\begin{aligned}
 W(m + \delta m, v + \delta v) &= \frac{1}{2} (m + \delta m) \cdot (v + \delta v)^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} \left(2 m v \cdot \delta v + \underbrace{m \cdot \delta v^2}_{\ll \frac{1}{2} m v^2} + v^2 \cdot \delta m + \underbrace{\delta m \cdot \delta v^2}_{\ll \frac{1}{2} m v^2} \right) \\
 &\approx \underbrace{\frac{1}{2} m v^2}_W + \underbrace{\frac{1}{2} (2 m v \cdot \delta v + v^2 \cdot \delta m)}_{\delta W} = W(m, v) + \frac{\partial W}{\partial v} \cdot \delta v + \frac{\partial W}{\partial m} \cdot \delta m = W(m, v) + \delta W
 \end{aligned}$$

Diese Überlegung können Sie nun auf die Berechnung der Unsicherheit $u(W)$ anwenden. Zuerst berechnen Sie die Wirkung einer Abweichung von den Mittelwerten $m_i = \langle m \rangle + \delta m_i$ bzw. $v_i = \langle v \rangle + \delta v_i$

$$W_i = W(m_i, v_i) = W(\langle m \rangle + \delta m_i, \langle v \rangle + \delta v_i) = W(\langle m \rangle, \langle v \rangle) + \frac{\partial W}{\partial m} \delta m_i + \frac{\partial W}{\partial v} \delta v_i$$

und daraus die quadratische Abweichung des Größe W :

⁷ Man spricht hier auch von einer Taylorentwicklung um die Stelle (m, v) .

$$\begin{aligned}
 (\langle W \rangle - W_i)^2 &= (\langle W \rangle - W(m_i, v_i))^2 = \left(\frac{\partial W}{\partial m} \delta m_i + \frac{\partial W}{\partial v} \delta v_i \right)^2 \\
 &= \left(\frac{\partial W}{\partial m} \delta m_i \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \delta v_i \right)^2 + \underbrace{2 \frac{\partial W}{\partial m} \frac{\partial W}{\partial v} \delta m_i \delta v_i}_{\text{gemischte Terme}}.
 \end{aligned}$$

Sofern die Eingangsgrößen m und v nicht korreliert, also statistisch unabhängig sind, wirken sich die gemischten Terme im Mittel nicht aus und können vernachlässigt werden. Da die partiellen Ableitungen bekannt sind, können Sie die Standardabweichung der kinetischen Energie leicht berechnen:

$$\begin{aligned}
 s^2(W) &= \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\langle W \rangle - W_i)^2 = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M \left(\left(\frac{\partial W}{\partial m} \delta m_i \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \delta v_i \right)^2 \right) \\
 &= \left(\frac{\partial W}{\partial m} \right)^2 \underbrace{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\delta m_i)^2}_{s^2(m)} + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 \underbrace{\frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (\delta v_i)^2}_{s^2(v)} \\
 &= \left(\frac{\partial W}{\partial m} \right)^2 s^2(m) + \left(\frac{\partial W}{\partial v} \right)^2 s^2(v).
 \end{aligned}$$

Dies ist das **Gaußsche Fehlerfortpflanzungsgesetz**. Danach berechnen Sie allgemein das Messergebnis $G = \langle G \rangle \pm u(G)$ mithilfe von $u(G)$ und den Unsicherheiten $u(X)$, $u(Y)$, $u(Z)$, ... der Variablen:

$$u(G) = \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial X} \cdot u(X) \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial Y} \cdot u(Y) \right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial Z} \cdot u(Z) \right)^2 + \dots} \quad (7)$$

Beispiel: Die Dichte $\rho = \rho(m, r, h) = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi r^2 h}$ eines Zylinders mit dem Volumen $V = \pi r^2 h$.

Sie messen m , r und h : $m = \langle m \rangle \pm u(m) = (40,49 \pm 0,05) \text{ g}$; $r = \langle r \rangle \pm u(r) = (5,58 \pm 0,11) \text{ mm}$; $h = \langle h \rangle \pm u(h) = (21,52 \pm 0,12) \text{ mm}$. Daraus lässt sich das Messergebnis $\rho = \langle \rho \rangle \pm u(\rho)$ ableiten:

$$\langle \rho \rangle = \frac{\langle m \rangle}{\pi \langle r \rangle^2 \langle h \rangle} = \frac{40,49}{\pi \cdot 31,14 \cdot 21,52} \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} = 19,235 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}$$

$$\begin{aligned}
 u(\rho) &= \sqrt{\left(\frac{\partial \rho}{\partial m} \right)^2 u^2(m) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial r} \right)^2 u^2(r) + \left(\frac{\partial \rho}{\partial h} \right)^2 u^2(h)} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{1}{\pi \langle r \rangle^2 \langle h \rangle} \right)^2 u^2(m) + \left(2 \frac{\langle m \rangle}{\pi \langle r \rangle^3 \langle h \rangle} \right)^2 u^2(r) + \left(\frac{\langle m \rangle}{\pi \langle r \rangle^2 \langle h \rangle^2} \right)^2 u^2(h)} \\
 &= \frac{\langle m \rangle}{\pi \langle r \rangle^2 \langle h \rangle} \sqrt{\frac{u^2(m)}{\langle m \rangle^2} + 4 \frac{u^2(r)}{\langle r \rangle^2} + \frac{u^2(h)}{\langle h \rangle^2}} = \langle \rho \rangle \sqrt{\frac{u^2(m)}{\langle m \rangle^2} + 4 \frac{u^2(r)}{\langle r \rangle^2} + \frac{u^2(h)}{\langle h \rangle^2}}
 \end{aligned}$$

$$\frac{u(\rho)}{\langle \rho \rangle} = \sqrt{\frac{u^2(m)}{\langle m \rangle^2} + 4 \frac{u^2(r)}{\langle r \rangle^2} + \frac{u^2(h)}{\langle h \rangle^2}} = \sqrt{\left(\frac{0,05}{40,49} \right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{0,11}{5,58} \right)^2 + \left(\frac{0,12}{21,52} \right)^2} = 0,0398$$

$$u(\rho) = 0,0398 \cdot \langle \rho \rangle = 0,7663 \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{mm}^3} \text{ also } \rho = \langle \rho \rangle \pm u(\rho) = (19,2 \pm 0,8) \cdot 10^{-3} \frac{\text{g}}{\text{mm}^3}.$$

Das Beispiel macht Mut, dass für die Berechnung kombinierter Unsicherheiten einfache Regeln gelten:

Summen und Differenzen

Im Fall $G = c_1 X + c_2 Y + c_3 Z$ addieren sich die *absoluten Messunsicherheiten* der Einzelmessungen:

$$\langle G \rangle = c_1 \langle X \rangle + c_2 \langle Y \rangle + c_3 \langle Z \rangle; u(G) = \sqrt{c_1^2 u^2(X) + c_2^2 u^2(Y) + c_3^2 u^2(Z)}.$$

Produkte, Quotienten und Potenzen

Im Fall $G = C \cdot X^a \cdot Y^b$ addieren sich die *relativen Messunsicherheiten* der Einzelmessungen:

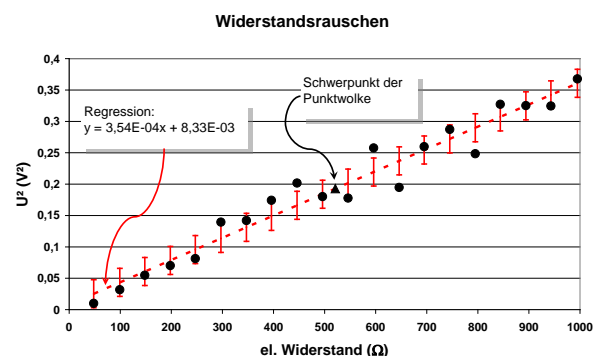
$$\langle G \rangle = C \cdot \langle X \rangle^a \langle Y \rangle^b; \frac{u(G)}{\langle G \rangle} = \sqrt{a^2 \left(\frac{u(X)}{\langle X \rangle} \right)^2 + b^2 \left(\frac{u(Y)}{\langle Y \rangle} \right)^2}.$$

5 Auswertung von Messreihen

Wenn es das Ziel des Experimentes ist, einen funktionalen Zusammenhang zwischen zwei physikalischen Größen X und Y zu ermitteln oder zu prüfen, kann man die Messpunkte als „Punktwolke“ in einem passenden Koordinatensystem darstellen. So ergibt sich der Zusammenhang aus einer theoretischen Analyse des Verlaufs, manchmal lässt er sich erraten oder Methoden einer grafischen Analyse liefern quantitative Resultate.

5.1 ... durch scharfes Hingucken

Erwartet man einen linearen Zusammenhang $Y = A \cdot X + B$ zwischen den beiden Größen X und Y , legt man eine *Ausgleichsgerade* durch die Punktwolke der Messpunkte. Manchmal reicht es, mit einem Lineal die bestangepasste Gerade „so gut wie möglich“ durch die Messpunkte zu legen. Wie ist „so gut wie möglich“ erreichbar? Zuerst bestimmt man den **Schwerpunkt S der Messpunkte** ($X_i | Y_i$) und zeichnet diesen zusätzlich in die grafische Darstellung ein.



$$S(X_i | Y_i); X_s = \langle X \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i; Y_s = \langle Y \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_i$$

Die Ausgleichsgerade; Fehlerbalken zeigen den Standardfehler der Regression

Darauf legt man das Lineal an S an, und dreht es um diesen Punkt, bis die bestangepasste Gerade gezeichnet werden kann. Steigung A und Achsenabschnitt B werden aus dem Diagramm bestimmt.

5.2 ... durch Rechnen: Methode der kleinsten Quadrate

Die Berechnung der Ausgleichsgeraden gelingt am einfachsten mittels Fitanalyse⁸. „Zu Fuß“ geht es allerdings auch. Die Parameter der Ausgleichsgeraden $Y = A \cdot X + B$ ergeben sich direkt aus der Minimierung der Summe der Abweichungsquadrate $(Y_i - (A \cdot X_i + B))^2$ der Messpunkte ($X_i | Y_i$) von der Ausgleichsgeraden. Gesucht sind die Parameter A und B , für die $D = \sum_{i=1}^M (Y_i - (A \cdot X_i + B))^2$ minimal wird (Methode der kleinsten Quadrate).

⁸ Z. B. Qti-plot der auch mit der Trendanalyse von Tabellenkalkulationssoftware

Vorweg das Ergebnis. Aus den Messpunkten erhalten Sie die Mittelwerte $\langle X \rangle$, $\langle Y \rangle$, $\langle X^2 \rangle$, $\langle Y^2 \rangle$ und $\langle XY \rangle$ und daraus die Parameter der Ausgleichsgeraden

$$A = \frac{\langle X \cdot Y \rangle - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle}{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \text{ und } B = \langle Y \rangle - A \langle X \rangle. \quad (8)$$

Und so können Sie das nachrechnen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial A} &= -2 \sum_i (Y_i - AX_i - B) \cdot X_i = -2 \cdot M \left(\underbrace{\frac{1}{M} \sum_i X_i \cdot Y_i}_{\langle X \cdot Y \rangle} - A \underbrace{\frac{1}{M} \sum_i X_i^2}_{\langle X^2 \rangle} - B \underbrace{\frac{1}{M} \sum_i X_i}_{\langle X \rangle} \right) \\ &= -2 \cdot M (\langle X \cdot Y \rangle - A \langle X^2 \rangle - B \langle X \rangle); \\ \frac{\partial D}{\partial B} &= -2 \sum_i (Y_i - AX_i - B) = -2 \cdot M \left(\underbrace{\frac{10}{M} \sum_i Y_i}_{\langle Y \rangle} - A \underbrace{\frac{1}{M} \sum_i X_i}_{\langle X \rangle} - B \underbrace{\frac{1}{M} \sum_i 1}_1 \right) \\ &= -2 \cdot M (\langle Y \rangle - A \langle X \rangle - B); \\ \frac{\partial D}{\partial A} = \frac{\partial D}{\partial B} = 0 &\Rightarrow \begin{cases} \langle X \cdot Y \rangle - A \langle X^2 \rangle - B \langle X \rangle = 0 & \text{(I)} \\ \langle Y \rangle - A \langle X \rangle - B = 0 & \text{(II)} \end{cases} \end{aligned}$$

Die Lösung dieses Gleichungssystems ist durch Gl. 8 gegeben.

Zum Ausprobieren: Bestimmen Sie die Ausgleichsgerade durch die Messpunkte (1|17), (2|30), (3|39).

- (1) Zuerst bestimmen Sie die statistischen Momente der Punktwolke

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i = 2; \quad \langle X^2 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i^2 = \frac{14}{3}; \\ \langle Y \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_i = \frac{86}{3}; \quad \langle Y^2 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M Y_i^2 = \frac{2710}{3}; \\ \langle X \cdot Y \rangle &= \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i \cdot Y_i = \frac{194}{3}. \end{aligned}$$

- (2) Daraus folgen die **Steigung A** und der **Achsenabschnitt B** nach Gl. 8

$$A = 11 \text{ und } B = 20/3$$

- (3) Schließlich berechnen Sie den **Korrelationskoeffizienten** r_{XY} als Maß für die Wahrscheinlichkeit, dass tatsächlich ein linearer Zusammenhang vorliegt

$$r_{XY}^2 = \frac{\langle X \cdot Y \rangle - \langle X \rangle \cdot \langle Y \rangle}{\sqrt{\langle X^2 \rangle - \langle X \rangle^2} \cdot \sqrt{\langle Y^2 \rangle - \langle Y \rangle^2}} = 0,989.$$

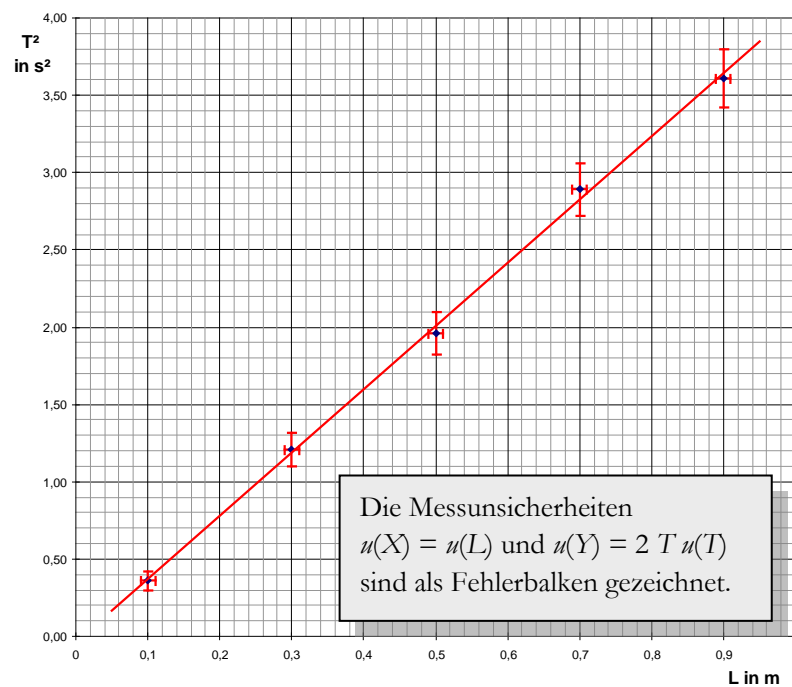
Ist $r = 1$, liegen alle Messwerte auf der Ausgleichsgeraden. Für $0,8 < r < 1,0$ besteht noch mit großer Wahrscheinlichkeit ein linearer Zusammenhang zwischen den Messgrößen. Falls $0 \leq r < 0,5$, ist ein linearer Zusammenhang unwahrscheinlich.

5.3 Lineare Regression beim Fadenpendel

Bei einem Fadenpendel der Länge L gilt für die Schwingungsdauer T näherungsweise $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$. In einem Experiment soll durch Messung der Periodendauern für unterschiedliche Fadenlängen L die Erdbeschleunigung g ermittelt werden. Dazu trägt man nicht die Messwerte T selbst, sondern T^2 über L auf.

	$X = L \text{ (m)}$	$T \text{ (s)}$	X^2	$Y = T^2$	$X \cdot Y$	$g \text{ (m/s}^2\text{)}$	$(Y - AX - B)^2$
	0,1	0,6	0,01	0,36	0,04	10,97	0,0001
	0,3	1,1	0,09	1,21	0,36	9,79	0,0005
	0,5	1,4	0,25	1,96	0,98	10,07	0,0021
	0,7	1,7	0,49	2,89	2,02	9,56	0,0044
	0,9	1,9	0,81	3,61	3,25	9,84	0,0010
Σ	2,5		1,65	10,03	6,65		0,0081
	$\langle X \rangle = 0,5$ $u(L) = 1 \text{ cm}$	$u(T) = 0,05 \text{ s}$	$\langle X^2 \rangle = 0,33$	$\langle Y \rangle = 2,00 \text{ s}^2$	$\langle X \cdot Y \rangle = 1,33$	$\langle g \rangle_g = 9,85$	
						$s(G) = 0,6 \text{ m/s}^2$	

Der Mittelwert $\langle g \rangle_g = 9,85 \text{ m/s}^2$ ist das gewichtete Mittel (ungewichtet erhalten Sie $\langle g \rangle = 10,05 \text{ m/s}^2$).



8 $T^2 = T^2(L)$ beim Fadenpendel

Damit ergeben sich die gesuchten Größen (ungerundet rechnen, gerundet aufschreiben!)

$$A = 4,09 \text{ s}^2/\text{m}; B = -0,039 \text{ s}^2; u(Y) = 0,05 \text{ s}; u(X) = 0,01 \text{ m}; r = 0,999.$$

Aus der Steigung A der Ausgleichsgerade lässt sich g bestimmen (vgl. Versuch A01)

$$\langle g \rangle = \frac{4\pi^2}{A} = 9,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2};$$

aus Gl. 8 (Fehlerfortpflanzung) folgt

$$\frac{u(g)}{\langle g \rangle} = \sqrt{\left(\frac{u(X)}{\langle X \rangle}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{u(T)}{\langle T \rangle}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{0,01}{0,5}\right)^2 + \left(2 \cdot \frac{0,05}{1,34}\right)^2} = 0,077$$

und damit $g \approx \langle g \rangle \pm u(g) = (9,65 \pm 0,75) \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Der Mittelwert aus der Ausgleichsgerade ($\langle g \rangle = 9,65 \text{ m/s}^2$) ergibt $s(g) = 0,7 \text{ m/s}^2$, das gewichtete Mittel ($\langle g \rangle = 9,85 \text{ m/s}^2$) liefert $s(g) = 0,6 \text{ m/s}^2$, das ungewichtete Mittel ($\langle g \rangle = 10,05 \text{ m/s}^2$) schließlich $s(g) = 0,5 \text{ m/s}^2$. Ein Regressionskoeffizient sehr nahe bei 1 weist eine ausgezeichnete lineare Anpassung aus.

5.4 Nichtlineare Zusammenhänge

Wählt man eine angemessene nichtlineare Transformation der Koordinatenachsen, lassen sich nichtlineare Zusammenhänge zwischen den Messgrößen linear darstellen. Das Beispiel mit dem Fadenpendel zeigt die Linearisierung für $Y = T^2$. Auch bei anderen nichtlinearen Zusammenhängen ist durch eine entsprechende Transformation eine lineare Darstellung möglich. Auch wenn die Datenanalyse-Software Ihnen hier viel Arbeit abnimmt, werden zwei besondere Fälle im Detail vorgestellt.

Funktion	$Y = A \cdot e^{B \cdot X}$	$Y = A \cdot X^B$
Koordinatentransformation	$\lg(Y) = \lg(A) + B \cdot X \cdot \lg(e)$ $U = \lg(Y); V = X \cdot \lg(e)$	$\lg(Y) = \lg(A) + B \cdot \lg(X)$ $U = \lg(Y); V = \lg(X)$
Neue Funktion	$U = B \cdot V + \lg(A)$	$U = B \cdot V + \lg(A)$
Darstellung	Gerade auf einfach logarithmischem Papier	Gerade auf doppelt logarithmischem Papier

Beispiel: Die Absorption von γ -Strahlen

Plattendicke x in mm	Messzeit t in s	Impulse Z	$\tilde{x} = \frac{Z}{t}$ in cps	$u(\tilde{x}) = \frac{s(Z)}{t} = \frac{\sqrt{Z}}{t}$
0	68,4	400	5,85	0,29
1,99	76,8	401	5,22	0,26
3,99	95,4	400	4,19	0,21
6,01	140,4	400	2,85	0,14
7,99	182,4	403	2,21	0,11
10,00	209,4	402	1,92	0,10
11,98	258,6	400	1,55	0,08

Auswertung

Die Messungen der Absorption von γ -Strahlen haben für Blei die obenstehenden Werte ergeben (Versuch D10 im Praktikum, hier ohne Nulleffekt, cps = counts per second). Auf der Abszisse ist die Dicke der Absorberplatten x linear aufgetragen. Die Ordinate ist logarithmisch skaliert, auch auf ihr wird die Zählrate \tilde{x} wie gemessen aufgetragen.

(1) Einzeichnen der Ausgleichsgeraden

(2) Berechnen der Geradenparameter ($\lg(z) = \mu \lg(e) \cdot x + \lg(z(0))$; der Achsenabschnitt ist $z(0) \approx 6,15$ cps. Die Steigung berechnen Sie aus zwei ausgezeichneten oder gut ablesbaren Punkten: Hier bieten sich die Punkte ($x = 1,7$ mm | $z = 5$) und ($x = 9,5$ mm | $z = 2$) an:

$$\mu = -m = \frac{\Delta U}{\Delta V} = \frac{\lg 5,0 - \lg 2,0}{7,8 \cdot \lg e} = 0,117 \text{ mm}^{-1}$$

Test: Die Halbwertsdicke $d_{1/2}$ wäre danach ($\lg(z(0)/2) = \mu \lg(e) \cdot d_{1/2} - \lg(z(0))$):

$d_{1/2} = \lg(2) / (\mu \lg(e)) = 5,9$ mm (vgl. Diagramm).

Beispiel: Fadenpendel

Mit den gleichen Messwerten wie im Beispiel oben soll die Proportionalität $T^2 \sim L$ überprüft werden. Auf doppeltlogarithmischem Papier aufgetragen, sollte sich theoretisch eine Ausgleichsgerade $\log(T) = \frac{1}{2} \log(L) + \log\left(\frac{2\pi}{\sqrt{g}}\right)$ mit der

Steigung $\frac{1}{2}$ ergeben. Die Steigung der Ausgleichsgerade, wird aus den Koordinaten der Punkte $P_1(0,5/1,4)$ und $P_2(0,9/1,9)$ ermittelt,

$$m = \frac{\log(1,9) - \log(1,4)}{\log(0,9) - \log(0,5)} = 0,52.$$

Mit einer Unsicherheit

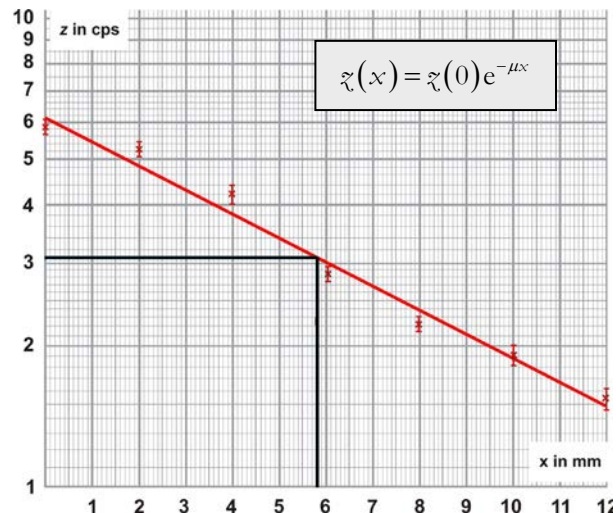
$$u(m)/m = 0,01/0,52 \approx 2\%$$

zeigt sich ein quadratischer Zusammenhang.

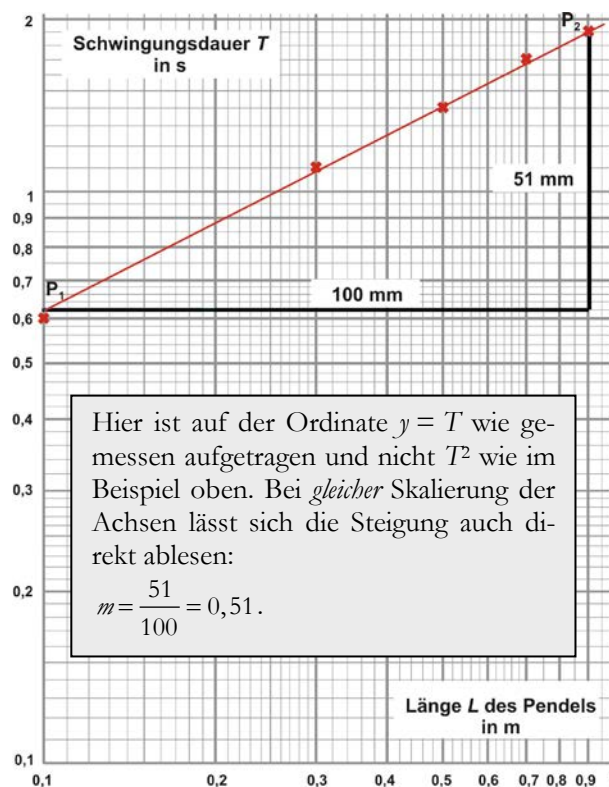
Test: Für den gut ablesbaren Wert bei $L = 0,1$ m liefert diese Näherung den Wert $T = 0,61$ s

Auch aus dieser Darstellung lässt sich g bestimmen: Für $L = 1$ m berechnen Sie $T = 2,3$ s und daraus $g = 9,6$ m/s².

Wie groß ist die zu erwartende Unsicherheit $u(g)$?

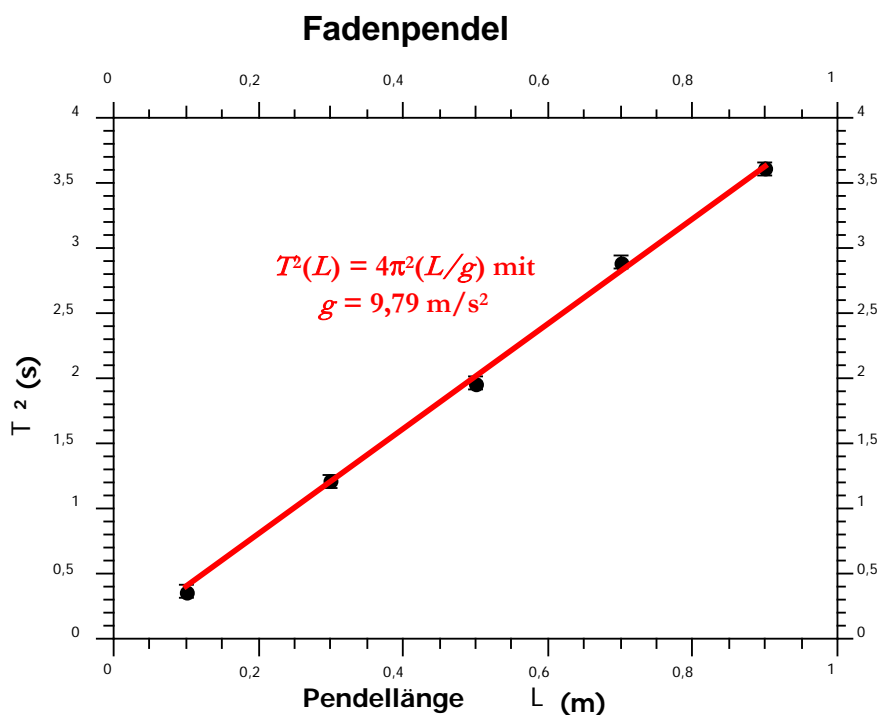
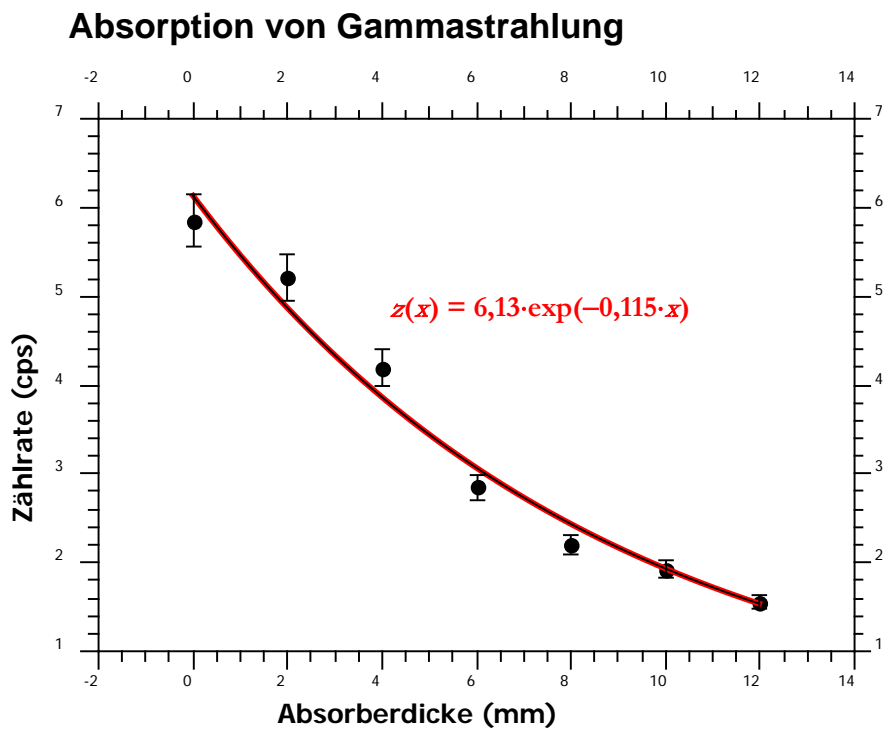


9 Darstellung des Absorptionsgesetzes auf einfach logarithmischem Papier; Fehlerbalken: Δx ist zu klein, um dargestellt zu werden, nach oben: $u(z)$



10 Darstellung auf doppeltlogarithmischem Papier

Beispiel: Anpassung der theoretischen Vorhersagen

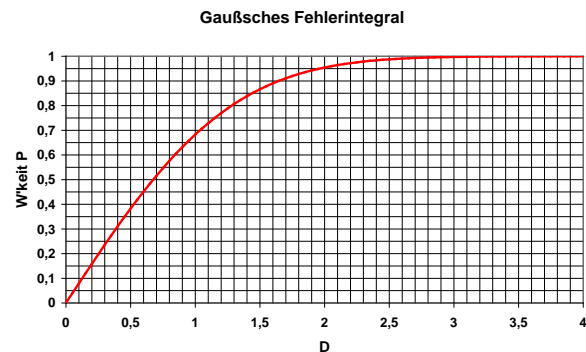


- 11 Fit-Analyse mithilfe *Qtiplot*; die Unsicherheiten („Fehlerbalken“) im oberen Diagramm sind die theoretischen Standardabweichungen der Zählrate, im unteren Diagramm entsprechen sie einer „Schrecksekunde“ $\mu(T) = 0,05 \text{ s}$

In einem dritten Beispiel wird hier die Auswertung mittels einer Fit-Software demonstriert. Dazu verwenden Sie direkt die Messwerte und suchen eine Bestanpassung der gewählten Parameter. Die Qualität der Messungen ist offensichtlich.

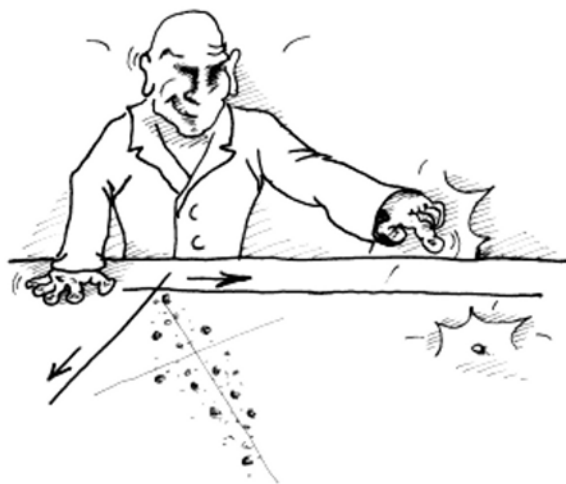
6. Grenzen des Vertrauens – Ausreißeranalyse

Aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Messgrößen leitet sich ein Vertrauensintervall für die Erwartbarkeit von Messwerten ab. Wegen der Vielzahl unterschiedlicher möglicher Grenzverteilungen finden Sie hier nur die Analyse für die Gaußsche Normalverteilung als häufiges Standardbeispiel. Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Messgröße X im Intervall $\pm D \cdot \sigma$ um den Mittelwert liegt, ist dann durch das gaußsche Fehlerintegral gegeben (Abb. 12). 68% aller Messwerte liegen danach im Intervall $|\langle X \rangle \pm \sigma|$, 50 % aller Messwerte im Intervall $|\langle X \rangle \pm 0,67 \cdot \sigma|$. Eine Abweichung von $\Delta X_{\text{PE}} = 0,67 \cdot \sigma$ wird auch **wahrscheinlicher Fehler** der Messung genannt.



12 Das gaußsche Fehlerintegral als „Graph des Vertrauens“

Was ist ein Ausreißer? Die Antwort auf diese Frage hängt sehr vom Zusammenhang, in dem sie gestellt wird, ab. Die Instrumente und Verfahren zu ihrer Identifikation sind in der beschreibenden Statistik andere als in der wissenschaftlichen Metrologie. Ausreißer können einfach fehlerhaft aufgenommene Daten sein (Typ B-Fehler), Hinweise auf besondere statistische Eigenschaften der Datensammlung oder sogar Hinweise auf eine gegen alle Erwartungen stehende neue wissenschaftliche Erkenntnis. Deshalb sollte die unreflektierte „Aussortierung“ auffälliger Daten unbedingt vermieden werden – schlechte wissenschaftliche Praxis!



Quelle: www.statistics4u.info

Für den Fall einer gaußschen Normalverteilung der Messwerte und bei nicht zu geringer Anzahl der Messpunkte können Hinweise auf Ausreißereigenschaften aus dem *Chauvenetschen Kriterium* gewonnen werden⁹.

Ist die erwartete Anzahl von Messwerten, deren Diskrepanz zum Erwartungswert ebenso groß ist wie des verdächtigen Messwerts, kleiner als 1/2, dann könnte der Verdacht begründet sein.

Beispiel: Sechs Messwerte für den Absorptionskoeffizienten nach Abb. 9:

$\mu = 0,06 | 0,08 | 0,12 | 0,12 | 0,11 | 0,11 \text{ mm}^{-1}$ liefern $\mu = (0,10 \pm 0,02) \text{ mm}^{-1}$. Die ersten beiden Werte scheinen etwas niedrig. Die Diskrepanzen sind jeweils 2σ bzw. σ . Beide Abweichungen sind tatsächlich größer als der wahrscheinliche Fehler. Die Wahrscheinlichkeiten für derartige Diskrepanzen sind jeweils (s. Abb. 12) $1 - P(2\sigma) \approx 0,05$ und $1 - P(\sigma) \approx 0,32$. Bei 6 Messungen hätten wir im Mittel also $0,05 \cdot 6 = 0,3$ bzw. $0,32 \cdot 6 \approx 2$ weit ab liegende Messwerte erwarten können. Der erste Wert könnte tatsächlich etwas zu niedrig sein. Die nichtlineare Regressionsanalyse von Abb. 9 liefert $\mu = (0,12 \pm 0,014) \text{ mm}^{-1}$; danach wäre ein Verwerfen gut begründet. Machen Sie sich jedoch keine Illusion: Das Verwerfen von Messdaten bleibt stets eine subjektive Entscheidung!

⁹ /1/, Seite 168 f.

7 χ^2 -Test

Die Idee hinter diesem Test ist eine Bewertung. Sie bewerten den Unterschied zwischen den Erwartungswerten, die eine ausgewählte Wahrscheinlichkeitsverteilung liefert, und den entsprechenden Messergebnissen. Dazu berechnen Sie die χ^2 -Funktion:

$$\chi^2 = \sum_1^N \left(\frac{\text{Messwert} - \text{Erwartungswert}}{\text{Standardabweichung}} \right)^2. \quad (9)$$

Die Summation umfasst alle unabhängigen Messergebnisse. Was genau „N“ bedeutet, hängt ebenso vom speziellen Problem ab, wie auch die Berechnung der anderen Größen. Deshalb soll hier ein konkretes Beispiel „durchgespielt“ werden, an dem die Vorgehensweise demonstriert wird.

Photonenstrom am Strahlteiler

Z	H(Z) Input	Poisson	$((X-E)/s)^2$	H(Z) rechts	Poisson	$((X-E)/s)^2$	H(Z) links	Poisson	$((X-E)/s)^2$
0	21	29	2,28	184	172	0,88	178	170	0,39
1	106	103	0,08	288	303	0,70	276	301	2,09
2	187	182	0,13	268	267	0,01	293	267	2,55
3	240	215	2,99	154	157	0,04	141	158	1,78
4	174	190	1,30	66	69	0,13	83	70	2,45
5	121	134	1,29	31	24	1,85	19	25	1,35
6	72	79	0,62	6	7	0,18	9	7	0,38
7	49	40	2,07	3	2	0,81	1	2	0,39
8	16	18	0,15	0	0	0,40	0	0	0,41
9	11	7	2,40	0	0	0,08	0	0	0,08
10	2	2	0,08	0	0	0,01	0	0	0,01
11	0	1	0,79	0	0	0,00	0	0	0,00
12	1	0	2,55	0	0	0,00	0	0	0,00
13	0	0	0,06	0	0	0,00	0	0	0,00
14	0	0	0,02	0	0	0,00	0	0	0,00
15	0	0	0,00	0	0	0,00	0	0	0,00
Mittelwert:		3,54			1,76			1,77	
Stabw:		1,89			1,36			1,32	
χ^2		16,81			5,08			11,90	

Die Tabelle zeigt die Häufigkeitsverteilungen $H(Z)$ von Photonenmessungen vor dem Strahlteiler (Input) und jeweils am Ausgang. N ist hier die Zahl möglicher Häufigkeiten einer Verteilung. Die Frage ist: Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung liegt hinter den beobachteten Häufigkeiten? Als Hypothese wurden jeweils Erwartungswerte nach der Poissonverteilung zu den beobachteten Mittelwerten berechnet. In der Spalte rechts neben diesen Erwartungswerten finden Sie die nach Gl. 9 berechneten Summanden, deren Summe gerade χ^2 ergibt. Die Standardabweichung wurde dabei nach Gl. 9 berechnet. Im Idealfall sind Messwert und Erwartungswert gleich und $\chi^2 = 0$. Liegen Mess- und Erwartungswert in der Größenordnung der Standardabweichung auseinander, ist die Abweichung noch vertretbar. In dem Fall hat jeder Summand die Größenordnung 1 und es gilt $\chi^2 \approx N$ als Grenze für eine gute Schätzung.

In dem Beispiel oben ist $N = 16$ und die Schätzung jeweils mithilfe der Poissonverteilung also akzeptabel bis gut. Zum Vergleich: Die Schätzung mit einer Normalverteilung ergibt für den Input-Strahl $\chi^2 \approx 177 \gg N$ – deutlich daneben.

Im Fall kontinuierlicher Messwerte, wenn also keine diskreten Häufigkeiten angegeben werden können, behilft man sich mit einer Klassenbildung. Dabei werden die verschiedenen Messwerte angemessen einer Folge von Größenklassen zugeordnet. In dem Fall zählt N die Anzahl der Klassen. Was „angemessen“ bedeutet, kann nur im konkreten Fall entschieden werden.

Anhang: Messprozess und Wahrscheinlichkeitsverteilung

A1 Der Zentrale Grenzwertsatz (ZGS)¹⁰

(1) Die Zufallsvariable X sei die Summe M identisch verteilter, statistisch unabhängiger Variablen $X = X_1 + X_2 + X_3 + \dots + X_M$.

(2) $\mu(X)$ sei der Erwartungswert, $\sigma^2(X)$ die Varianz von X .

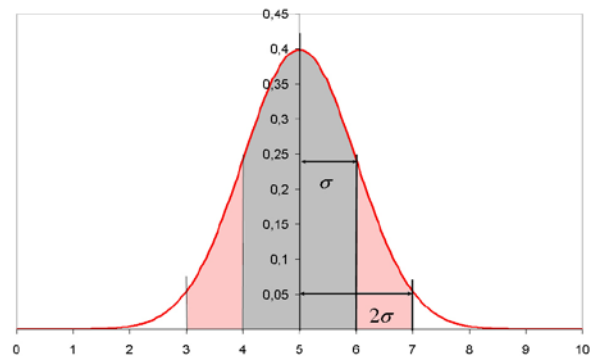
Wegen der Unabhängigkeit der Variablen ist
 $E(X) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3) + \dots + E(X_M)$
 $\sigma^2(X) = \sigma^2(X_1) + \sigma^2(X_2) + \sigma^2(X_3) + \dots + \sigma^2(X_M)$.

Dann nähert sich für $M \rightarrow \infty$ die Wahrscheinlichkeit $dP_M(X = x + dx)$, für X den Wert $x + dx$ zu finden, der Normalverteilung an:

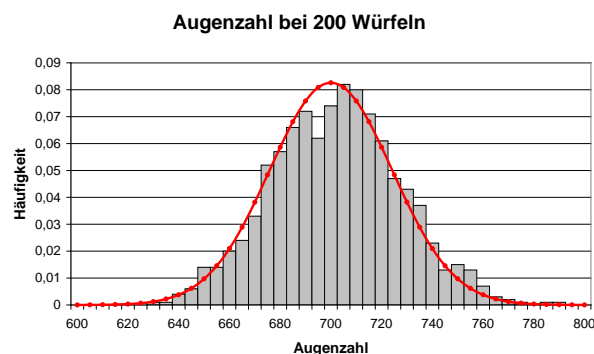
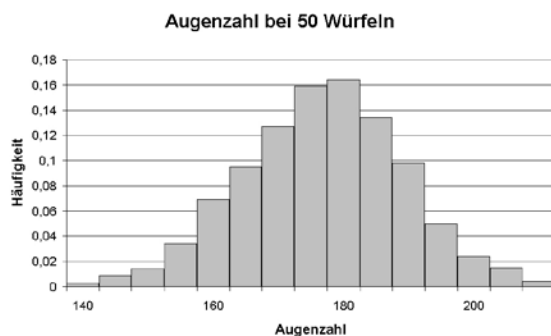
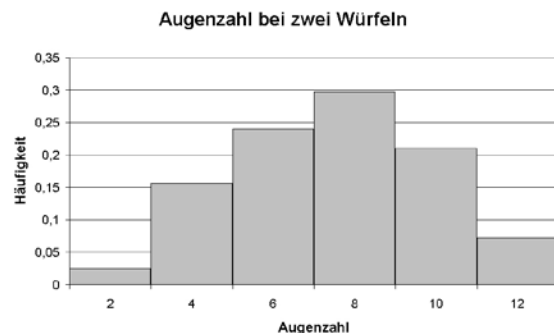
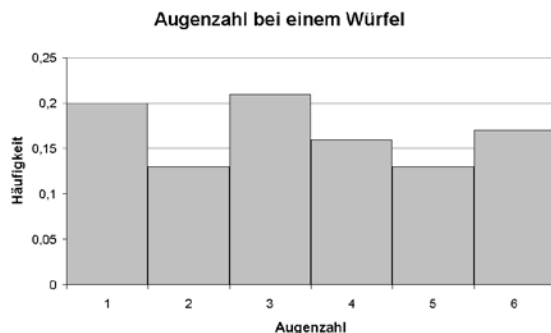
$$\lim_{M \rightarrow \infty} dP_M(X = x) = d\mathcal{N}(X) = n(X)dx = \frac{1}{\sigma(X)\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \mu(X)}{\sigma}\right)^2\right) dx.$$

In /3/ wird darauf verwiesen, dass X bereits für $n > 30$ annähernd normalverteilt ist.

An dem einfachen Beispiel eines Spielwürfels kann der ZGS demonstriert werden. X ist die gewürfelte Augenzahl. Die X_i sind bei jedem Würfel gleichverteilt (Teilbild 1): $E(X_1) = \mu_1 = 21/6$; $\sigma^2(X_1) = \sigma_1^2 = 35/12$ (relative Breite der Verteilung $\sigma(X_1)/E(X_1) = 49\%$). Beim Wurf mit zwei Würfeln ist $E(X) = 2 \cdot \mu_1 = 21/3 = 7$ und $\sigma^2(X) = 2 \cdot \sigma_1^2 = 35/6$ ($\sigma(X)/E(X) = 35\%$). Je mehr Würfel geworfen werden, desto (relativ) schmaler wird die Verteilung und nähert sich der Normalverteilung. Im vierten Teilbild ist $E(X) = 200 \cdot \mu_1 = 21/3 = 700$ und $\sigma^2(X) = 200 \cdot \sigma_1^2 = 3500/6$ ($\sigma(X)/E(X) = 3,4\%$); zur Illustration ist eine Normalverteilung mit $\mu(X) = 700$ und $\sigma^2(X) = 3500/6$ eingezeichnet.



Die Gaußsche Normalverteilung $n(x)$ für den Mittelwert $\mu(X) = 5$ und die Standardabweichung $\sigma(X) = 1$



13 Entwicklung zur Grenzverteilung ...

... die Normalverteilung wird erkennbar

¹⁰ Vgl. /3/, Seite 370 ff.

Ein anderer Grenzübergang zur Normalverteilung ist der Übergang von der Binomialverteilung für große Stichprobengrößen und konstante Trefferwahrscheinlichkeiten ($N \rightarrow \infty$; $p = \text{const.}$)¹¹. Je größer σ , desto besser ist die Näherung; schon für $\sigma = \sqrt{N \cdot p \cdot (1-p)} > 3$ (Laplace-Bedingung), ist die Normalverteilung eine gute Näherung für die Binomialverteilung.

Zusammenhang mit dem Messprozess

Der Zusammenhang mit Messprozessen wird auf folgende Weise erkennbar: X sei die Messgröße. Sie setzt sich aus dem wahren Wert X_{wahr} und einer zufälligen Messabweichungen δX zusammen: $X = X_{\text{wahr}} + \delta X$. In aller Regel wird die Messabweichung δX aus vielen unterschiedlichen Quellen gespeist. Sind diese Beiträge zu δX alle unabhängig und liegt keine systematische Messabweichung vor, heben sich die zufälligen Beiträge zur Messabweichung im Mittel heraus: $E(\delta X) = 0$. Damit gilt

$$E(X) = E(X_{\text{wahr}}) + E(\delta X) = X_{\text{wahr}}$$

Der Erwartungswert der Messreihe ist folglich der beste Schätzwert für den wahren Wert. Bei der mittleren *quadratischen* Abweichung heben sich die zufälligen Beiträge nicht heraus:

$$E((E(X) - X)^2) = E((X_{\text{wahr}} - \delta X)^2) = E(\delta X^2).$$

Die Schätzung ist also *erwartungstreu*. Die mittlere quadratische Abweichung vom Erwartungswert ist gleich der mittleren quadratischen Abweichung vom wahren Wert.

A2 Integrale der Gaußschen Normalverteilung

Der Umgang mit Verteilungen ist komfortabel. Kennt man die Wahrscheinlichkeitsverteilung $p(X)$ einer Größe X , errechnet sich der *Erwartungswert* einer beliebigen Funktion $f(X)$ der Größe nach

$$E(f(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} dX f(X) p(X).$$

Sie können also auf direkte Weise den Mittelwert als Erwartungswert $E(X)$ der Messgröße und die Varianz als Erwartungswert $E((X - \langle X \rangle)^2)$ der Messgröße berechnen – vorausgesetzt, Sie kennen $p(X)$. Beim Würfel ist $p(X)dX = 1/6$. Damit errechnen Sie sofort $E(X) = 1/6 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = 21/6$.

Bei der Berechnung dieser Größen mit der Normalverteilung, $p(X)dX = d\mathcal{N}(X)$ treten Integrale auf, die nicht elementar berechenbar sind. Deshalb seien Sie hier zusammengestellt. Das Grundintegral finden Sie in der Formelsammlung:

$$I_k = \int_0^{\infty} dx x^k \exp(-ax^2) = \begin{cases} I_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} & \text{für } k=0 \\ I_1 = \frac{1}{2a} & \text{für } k=1 \\ I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4a^3} & \text{für } k=2 \end{cases} \Rightarrow \left(\text{mit } a = \frac{1}{\sigma^2} \right).$$

Dieses wenden Sie nun auf die verschiedenen Erwartungswerte an.

¹¹ Näherung von Moivre-Laplace; vgl. /3/

$$(1) \int_{-\infty}^{\infty} dX n(X) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^{\infty} dX \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\langle X \rangle}{\sigma}\right)^2\right) = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot I_0 = \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\sigma\sqrt{2\pi}}{2} = 1$$

$$\begin{aligned} (2) \int_{-\infty}^{\infty} dX X \cdot n(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dX X \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{X-\langle X \rangle}{\sigma}\right)^2\right) \\ &\stackrel{Z=X-\langle X \rangle}{=} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dZ (Z + \langle X \rangle) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dZ Z \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma}\right)^2\right)}_{=0} + \langle X \rangle \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dZ \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma}\right)^2\right)}_{=2\langle X \rangle I_0} \right] \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot I_0 \cdot \langle X \rangle = \langle X \rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \int_{-\infty}^{\infty} dX (X - \langle X \rangle)^2 \cdot n(X) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dZ Z^2 \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{Z}{\sigma}\right)^2\right) \\ &= \frac{2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \cdot (\sigma\sqrt{2})^3 = \sigma^2 \end{aligned}$$

Konsequenzen sind:

- (1) $n(X)$ ist normiert; die „Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1“; in irgendeinem Abstand vom Mittelwert erscheint der Messwert – garantiert. So wie man es erwartet.
- (2) Der Erwartungswert der Messwerte ist bei der Normalverteilung der Mittelwert: $E(X) = \langle X \rangle$
- (3) Die Breite der Verteilung wird durch den Erwartungswert des Abstandes der Messpunkte vom Mittelwert gekennzeichnet. Hier finden Sie den zweiten Parameter der Normalverteilung wieder: $E((X - \langle X \rangle)^2) = \sigma^2$.

A3 Standardabweichung des Mittelwertes bei M Messungen nach der Gaußformel

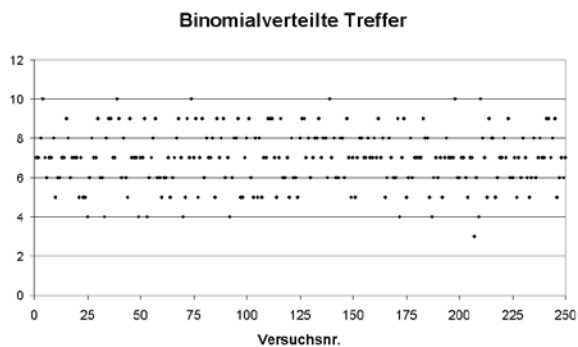
Gl. 4 fällt ziemlich vom Himmel. Warum ist die empirische Standardabweichung des arithmetischen Mittelwertes $s(\langle X \rangle)$ um den Faktor $1/\sqrt{M}$ kleiner als die empirische Standardabweichung der Messwerte $s(X)$? Mithilfe des Gaußschen Fehlerfortpflanzungsgesetzes berechnen Sie den Wert von $s(G(X)) = s(\langle X \rangle)$:

$$G(X) = \langle X \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i; s(X_i) = s(X) \text{ in Gl. 7 einsetzen liefert}$$

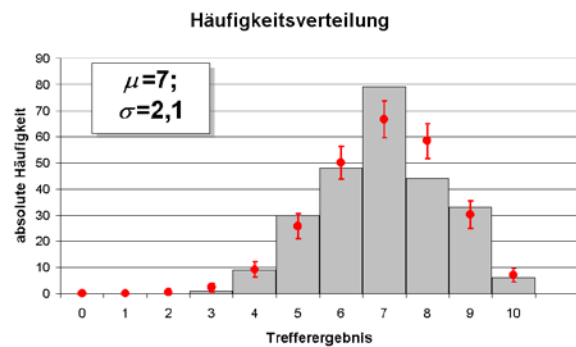
$$s(\langle X \rangle) = \sqrt{\sum_{i=1}^M \left(\frac{\partial \langle X \rangle}{\partial X_i} \underbrace{s(X_i)}_{s(X)} \right)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^M \frac{s^2(X)}{M^2}} = s(X) \cdot \sqrt{\frac{1}{M^2} \sum_{i=1}^M (1)^2} = \frac{s(X)}{\sqrt{M}}.$$

A4 Die Binomialverteilung

Physikalischer Messvorgang	Stochastische Perspektive
Messung Messgröße Messreihe	Statistische Erhebung Zufallsgröße Stichprobe
M Anzahl der Messpunkte einer Messreihe	M Stichprobenumfang
relative Häufigkeiten der Messwerte $h(X_i)$	Wahrscheinlichkeiten der Zufallsgröße $P(X_i)$
Häufigkeitsverteilung	Wahrscheinlichkeitsverteilung
arithmetischer Mittelwert einer Messreihe	Erwartungswert von X aus der Stichprobe ¹²
$\langle X \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M X_i$	$\mu = E(X) = \sum_k P(X_k) \cdot X_k$
Empirische Varianz Messreihe	Varianz einer Stichprobe
$s^2(X) = \frac{1}{M-1} \sum_{i=1}^M (X_i - \langle X \rangle)^2$ ¹³	$\sigma^2(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_k P(X_k) \cdot (X_k - \mu)^2$



13 Binomialverteilte Treffer in einem 10-stufigen Bernoulli-Versuch; $M = 250$ Wiederholungen des Versuchs ...



...und die abgeleitete Häufigkeitsverteilung; die theoretische Verteilung verwendet $N = 10$; $p = 0,7$

Ein Bernoulli-Versuch hat nur die beiden Ausgänge „Treffer“ oder „Fehlschlag“. Bezeichnet man mit „1“ den Treffer und mit „0“ den Fehlschlag, dann kann beispielsweise ein 10-stufiger Bernoulli-Versuch (also 10 Wiederholungen) mit 6 Treffern durch $(1|0|0|1|1|1|1|0|1|0)$ repräsentiert werden. Jede Eins habe die Wahrscheinlichkeit p , jede Null die Wahrscheinlichkeit $(1-p)$. Die Wahrscheinlichkeit eines solchen 10-Bit-Wortes ist also $p^6 \cdot (1-p)^{10-6}$. X sei nun die Messgröße, die die gesamte Anzahl der Treffer nach 10 Wiederholungen misst. Zur Berechnung der Gesamtwahrscheinlichkeit für genau 6 Treffer, also $P_{10}(X=6)$ müssen Sie noch die Anzahl der möglichen Verteilungen von 6 Einsen auf 10 Plätze berücksichtigen: $(10 \cdot 9 \cdot 8 \dots 5/6!)$. Sie bekommen also

$$P_{10}(X=6) = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} \cdot (1-p)^{10-6} \cdot p^6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} (1-p)^{10-6} \cdot p^6 = \binom{10}{6} (1-p)^{10-6} \cdot p^6.$$

Für $p = 0,1$ ergibt das $P_{10}(X=6) = 0,000137781$, für $p = 0,7$ erhalten Sie $P_{10}(X=6) = 0,200120949$. Die Verallgemeinerung auf N Wiederholungen mit n Treffern ergibt die so genannte **Binomialverteilung** $\mathcal{B}_N(n)$:

¹² Die Summation erstreckt sich über die Menge der möglichen Werte von X

¹³ Mit dem Nenner $(M-1)$ ist die so definierte empirische Standardabweichung erwartungstreu: Erwartungswert(s^2) = σ^2

$$\mathcal{B}_N(X=n) = \mathcal{B}_N(n) = \binom{N}{n} \cdot (1-p)^{N-n} \cdot p^n; n=0, \dots, N.$$

$\mu = N \cdot p$ ist der Mittelwert und $\sigma^2 = N \cdot p \cdot (1-p)$ die Varianz der Zufallsgröße X :

$$\begin{aligned} \mu &= E(X) = \sum_{n=0}^N \mathcal{B}_N(n) \cdot n = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} \cdot (1-p)^{N-n} \cdot p^n \cdot n = N \cdot p \cdot \sum_{l=0}^{N-1} \binom{N-1}{l} \cdot (1-p)^{N-1-l} \cdot p^l \\ &= N \cdot p \\ \sigma^2 &= E((X-\mu)^2) = \sum_{n=0}^N \mathcal{B}_N(n) \cdot (n-\mu)^2 = \sum_{n=0}^N \mathcal{B}_N(n) \cdot (n^2 - 2n\mu + \mu^2) = \sum_{n=0}^N \mathcal{B}_N(n) \cdot n^2 - \mu^2 \\ &= \mu \cdot \left(1 - \frac{\mu}{N}\right) = N \cdot p \cdot (1-p). \end{aligned}$$

In der praktischen Laborarbeit sind die Wahrscheinlichkeiten in der Regel nicht bekannt. In diesem Fall schätzen Sie diese mithilfe der relativen Häufigkeiten der Messwerte in Messreihen ab. Die Wahrscheinlichkeit $P_N(n)$ schätzen Sie aus der mittleren relativen Häufigkeit in M Versuchswiederholungen:

$$\mathcal{B}_N(n) \approx b_N(n) = \frac{\langle H_N(n) \rangle}{M}; \langle H(n) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M H_i(n).$$

Abb. 13 zeigt das Ergebnis der 250-fachen Wiederholung eines 10-stufigen Bernoulli-Versuchs. Aus der Stichprobe entnehmen Sie (jeweils $n = 1$ bis 10):

$$\langle H_N(n) \rangle = 0 | 0 | 0 | 1 | 9 | 30 | 48 | 79 | 44 | 33 | 6;$$

$$\mathcal{B}_N(n) \approx \langle b_N(n) \rangle = \langle H(n) \rangle / 250 = 0 | 0 | 0 | 0,004 | 0,036 | 0,120 | 0,192 | 0,316 | 0,176 | 0,132 | 0,024$$

Daraus ergeben sich die Parameterschätzungen der Verteilung (Mittlere Trefferzahl $\langle X \rangle$, Standardabweichung $s(X)$):

$$\begin{aligned} \langle X \rangle &= \sum_{n=1}^N b_N(n) \cdot n = \sum_{n=1}^N \frac{\langle H_N(n) \rangle}{M} \cdot n \approx 6,96 \\ s^2(X) &= \sum_{n=1}^N b_N(n) \cdot (n - \langle X \rangle)^2 = \sum_{n=1}^N \frac{\langle H_N(n) \rangle}{M} \cdot (n - \langle X \rangle)^2 \approx 2 \end{aligned}$$

Da die Binomialverteilung eine diskrete Verteilung ist, muss μ ganzzahlig sein. Aus dem nahe liegenden Schätzwert $\mu = N \cdot p = 7$ ergibt sich $\sigma^2 = N \cdot p \cdot (1-p) = 2,1$. In rot sind die Ergebnisse einer Binomialverteilung mit diesen Parametern eingezeichnet. Für jeden Wert von n erhalten Sie die theoretischen Häufigkeiten $H_{th}(n)$ und Standardabweichungen (rote Fehlerbalken):

$$H_{th}(n) = M \cdot \mathcal{B}_N(n) \text{ und } s_{th}(n) = \sqrt{M \cdot \mathcal{B}_N(n) \cdot (1 - \mathcal{B}_N(n))} = \sqrt{H_{th}(n) \cdot \left(1 - \frac{H_{th}(n)}{M}\right)}.$$

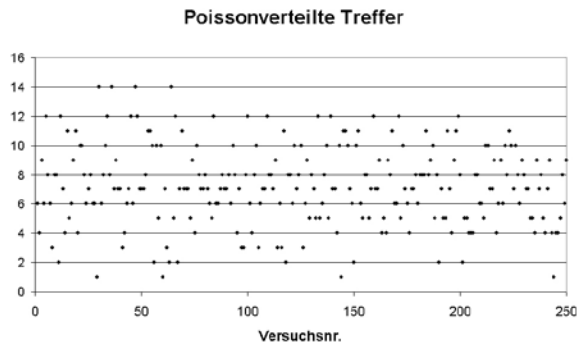
In der praktischen Experimentierarbeit können Sie Schätzwerte dieser Parameter auch direkt aus den Messreihen ableiten:

$$H_{th}(n) \approx \langle H(n) \rangle \text{ und also } \sigma_{th}(n) \approx \sqrt{\langle H(n) \rangle \cdot \left(1 - \frac{\langle H(n) \rangle}{M}\right)}.$$

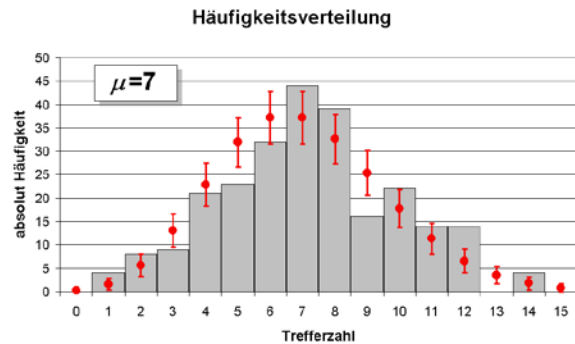
Grenzfälle der Binomialverteilung

Zwei Grenzfälle der Binomialverteilung spielen in der Physik eine besondere Rolle: **Gaußsche Normalverteilung** und **Poissonverteilung**. Letztere ergibt sich als Grenzfall extrem seltener Ereignisse bei gleichzeitig endlichem Erwartungswert μ (also z. B. sehr großer Stufenzahl N).

A5 Die Poissonverteilung



14 Poissonverteilte Treffer in $M = 250$ Versuchen ...



... und die abgeleitete Häufigkeitsverteilung

Angenommen also, dass eine extrem kleine Trefferwahrscheinlichkeit ($p \rightarrow 0$) durch eine entsprechend große Zahl von Stufen im Bernoulli-Versuch ($N \rightarrow \infty$) so kompensiert wird, dass $p \cdot N = \mu = \text{const.}$ ist.

Für den Fall $p = \frac{\mu}{N} \ll 1$ können Sie die Approximation $(1 - \frac{\mu}{N})^{N-n} \approx e^{-\mu}$ verwenden und für $N \gg n$ gilt

$\binom{N}{n} \approx N^n$. Damit vereinfacht sich die Binomialverteilung zur **Poissonverteilung**, die nur noch von einem Verteilungsparameter μ abhängt:

$$\mathcal{B}_N(n) = \binom{N}{n} \cdot (1-p)^{N-n} \cdot p^n = \binom{N}{n} \left(1 - \frac{\mu}{N}\right)^{N-n} \cdot p^n \approx \binom{N}{n} e^{-\mu} \cdot p^n \approx \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \mathcal{P}_\mu(n).$$

$$\mu(X) = E(X) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \mathcal{P}_\mu(n) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \dots = \mu \quad (9)$$

$$\sigma^2(X) = E((X - \mu)^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \mu)^2 \mathcal{P}_\mu(n) = \sum_{n=0}^{\infty} (n - \mu)^2 \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu} = \dots = \mu.$$

Die dritte Zeile zeigt als besondere Eigenschaft der Poissonverteilung $\mu = \sigma^2$. Die drei Pünktchen stehen jeweils für elementare aber etwas unübersichtliche Manipulationen mit unendlichen Reihen. Wer das nachvollziehen will: /3/, Seite 319. Die Formel suggeriert eine kontinuierliche Verteilung, die Poissonverteilung ist jedoch eine diskrete Abzähl-Verteilung. Aus einer Messung schätzen Sie ab: $\mu = \langle X \rangle$.

Beispiel: Photonen

In der Quantenelektrodynamik wird Licht durch die Besetzung von Zuständen mit Photonen beschrieben. Eine besondere Rolle spielen dabei kohärente Zustände (Licht von einem idealen Laser weit oberhalb der Schwelle betrieben). Im Licht stark abgeschwächter Laser können Sie – im Prinzip – Photonen zählen. In einem Laserstrahl mit einer Leistung von $P_{\text{Laser}} = 1 \text{ pW}$ mit einer Wellenlänge von $\lambda = c/f = 630 \text{ nm}$ treffen im Mittel $dN/dt = 3,17 \cdot 10^6 \text{ Photonen/s}$ mit der Photonenenergie $h \cdot f = h \cdot c / \lambda$ ein:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{P_{\text{Laser}} \lambda}{h \cdot c} = \frac{10^{-12} \frac{\text{J}}{\text{s}} \cdot 630 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{6,62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \cdot 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}} = 3,17 \cdot 10^6 \text{ s}^{-1}.$$

Im Mittel wird also alle $317 \mu\text{s}$ ein Photon registriert. Da die einzelnen Photonen statistisch unabhängig sind, finden Sie als Erwartungswert der Photonenzahl in einer Sekunde $\mu = N$ und können die Wahrscheinlichkeit angeben, während der Messzeit t genau n Photonen zu messen:

$$P_N(n) = \frac{(N)^n}{n!} \exp(-N); \quad \mu = \sigma^2 = N.$$

Wenn die Lichtintensität des Lasers nicht noch zusätzlich schwankt, ist die Breite σ der Verteilung die geringste Messunsicherheit bei der Bestimmung der Photonenzahl. Man bezeichnet sie als das „Schrotrauschen“ der Photonen. Dieses Rauschen zu unterdrücken, also unter die Quantengrenze kohärenter Zustände zu gehen, ist die Aufgabe beim „gequetschtem Licht“. Abb. 15 zeigt den Unterschied zwischen der Wahrscheinlichkeitsverteilung von monochromatischem thermischem Licht und kohärentem Licht für die identische mittlere Photonenzahl.

Radioaktiver Zerfall

Im Jahre 1910 veröffentlichten RUTHERFORD und GEIGER eine Messung zur Statistik des α -Zerfalls von Polonium¹⁴. Über einen Beobachtungszeitraum von 326 Minuten wurde die Häufigkeit von Szintillationsereignissen während definierter Zeitintervalle τ gezählt. Der gesamte Zeitraum wurde dazu in $M = 2608$ gleiche Zeitintervalle von $\tau = 7,5 \text{ s}$ Länge zerlegt. Die Tabelle zeigt die Häufigkeitsverteilung $\langle H(n) \rangle$ von n Lichtblitzen (Histogramm in Abb. 16).

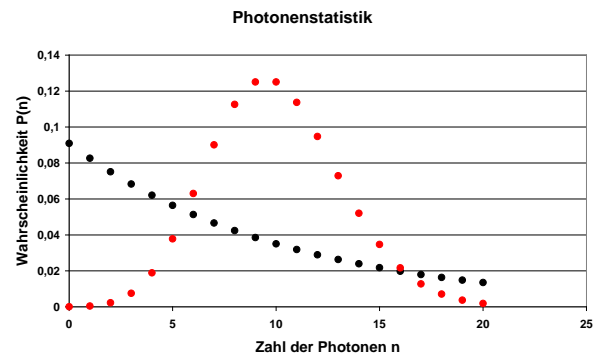
Aus den Messwerten errechnen sich Schätzungen der Standardabweichung der Häufigkeiten $\sigma(H)$, des Verteilungsmittelwerts $\mu(n) \approx \langle n \rangle$ und daraus die angepasste Poissonverteilung $\mathcal{P}_\mu(n)$:

$$\sigma(H) = \sqrt{\langle H(n) \rangle \cdot \left(1 - \frac{\langle H(n) \rangle}{M} \right)}$$

$$\mu(n) = E(n) \approx \langle n \rangle = \sum_{n=0}^{14} n \cdot \frac{H(n)}{M} = 3,87 \Rightarrow$$

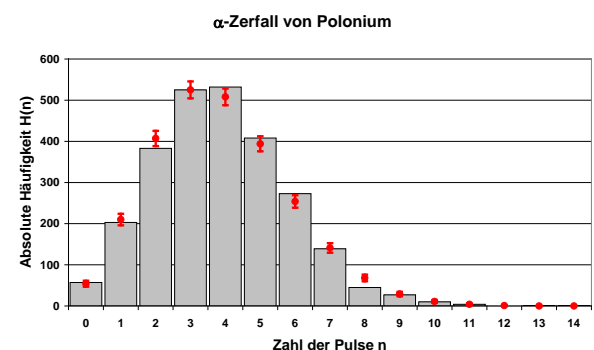
$$P_\mu(n) = \frac{\mu^n}{n!} e^{-\mu}$$

Warum ist die Poissonverteilung $P_\mu(n)$ theoretisch zu erwarten? Die Wahrscheinlichkeit $p(\tau)$ für einen Zerfall im Zeitraum τ ist für kurze Beobachtungszeiträume ($\tau \ll T_{1/2}$) für jeden einzelnen Kern sehr klein („Verteilung der seltenen Ereignisse“). Da die Anzahl N Atomkerne jedoch sehr groß ist, werden während der Zeitspanne τ messbar viele, nämlich im Mittel $\langle n \rangle = N \cdot p(\tau)$, zerfallen. Die Randbedingungen für eine Anwendung der Poissonverteilung sind damit gegeben.



15 Vergleich der Photonenstatistik Einzelmode thermischen Lichts und kohärentem Licht mit $N = 10$; die geringe Unsicherheit (Photonenrauschen) beim kohärenten Licht ist augenfällig

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$H(n)$	57	203	383	525	532	408	273	139
n	8	9	10	11	12	13	14	
$H(n)$	45	27	10	4	0	1	1	



16 Häufigkeitsverteilung der Zählpulse beim Polonium-Zerfall

¹⁴ Rutherford, E. and Geiger, H. (1910) The Probability Variations in the Distribution of alpha Particles, Philosophical Magazine, 20, 698–704.

Literatur

- /1/ Eine gut lesbare Darstellung zur Fehleranalyse:
John R. Taylor: Fehleranalyse; VCH 1988; ISBN 978-3527268788
- /2/ Aktuelle Hintergrundinformationen:
Wolfgang Kessel: Messunsicherheit, ein wichtiges Element der Qualitätssicherung
<http://www.ptb.de/de/publikationen/download/pdf/kessel.pdf>
- /3/ Eine gut lesbare Einführung in die Stochastik:
A. Bücher/H. W. Henn: Elementare Stochastik; Springer Berlin Heidelberg New York; ISBN 978-3-540-45381-9
- /4/ Antworten auf Rundungsfragen gibt die DIN 1333.

Bildquellen

Titelbild	Hohenpeissenberg Jahresmitteltemperatur seit 1780 geglättet mit multi-dekadischem Filter. Quelle: www.scienceblogs.de/primaklima/HPtrend_Page_1.jpg
Bild 19	Quelle: www.statistics4u.info
alle anderen	Archiv R. Scholz/PhysikPraktikum

Impressum

Analyse und Präsentation von Messdaten

herausgegeben und bearbeitet von
Dr. Rüdiger Scholz

© 2013 R. Scholz · Leibniz Universität Hannover
www.uni-hannover.de

Das Werk und seine Teile sind urheberrechtlich geschützt. Jede Nutzung in anderen als den gesetzlich zugelassenen Fällen bedarf der vorherigen schriftlichen Genehmigung des Herausgebers.

Hinweis zu §52a: Weder das Werk noch seine Teile dürfen ohne eine solche Einwilligung gescannt und in ein Netzwerk gestellt werden. Dies gilt auch für Intranets von Schulen und Hochschulen und andere Bildungseinrichtungen.

Trotz sorgfältigster Bearbeitung sind Fehler nie auszuschließen. Für Schäden, die durch Fehler im Werk oder seinen Teilen entstanden sind, kann keine Haftung übernommen werden.

Trotz sorgfältigster Bearbeitung sind Fehler nie auszuschließen. Für Schäden, die durch Fehler im Werk oder seinen Teilen entstanden sind, kann keine Haftung übernommen werden.