

**Vorlesungsskript**

# **GRUNKURS EXPERIMENTALPHYSIK**

Prof. Dr. Frank Richter

Skript angefertigt von cand. phys. Stefan Welzel

**Technische Universität Chemnitz**

Fakultät für Naturwissenschaften  
Institut für Physik

# VORWORT

Das vorliegende Skript basiert auf der Vorlesung in Experimentalphysik für Studenten des 1. und 2. Semesters des Diplomstudiengangs Physik. Die Vorlesung ist, anschließend an eine Einleitung, in vier große Teilbereiche gegliedert:

- **Mechanik**
- **Thermodynamik**
- **Elektrizitätslehre**
- **Optik**

Zur besseren Orientierung finden sich am Rand folgende Symbole:

!	Definitionen/Merksätze
■	Beispiele
◆	Kommentare/Interpretationen/Diskussionen
SI	Definition von Einheiten nach dem SI-System
(..)	Gleichungsnummerierung
⋈	Nebenrechnung

Wird im Rahmen der Erläuterungen auf eine Gleichung aus einem vorangegangenen Kapitel Bezug genommen, so geschieht dies durch Voranstellen der jeweiligen Kapitelnummer vor die entsprechende Gleichungsnummer (z.B. verweist die Angabe „(11 - 6)“ auf Gl. (6) in Kapitel 11)

Desweiteren werden im Text wichtige *physikalische Grundbegriffe* gesondert hervorgehoben, die dann auch im Sachregister aufgelistet sind.

Weitere im Text verwendete Symbole sind:

⇒	Schlussfolgerungen
<..>	Verweis auf andere Kapitel
{..}	Quellenangabe

# INHALTSVERZEICHNIS

<b>VORWORT.....</b>	<b>I</b>
<b>INHALTSVERZEICHNIS.....</b>	<b>II</b>
 <b>A. EINLEITUNG .....</b>	 <b>1</b>
<b>1. Einleitung.....</b>	<b>2</b>
1.1. Was ist Physik.....	2
1.2. Die Rolle des Experimentes.....	2
1.3. Physikalische Modelle und Theorien.....	4
1.4. Der „Stammbaum der Physik“.....	5
1.5. Wichtige Größen und Maßeinheiten.....	5
 <b>B. MECHANIK .....</b>	 <b>8</b>
<b>2. Kinematik.....</b>	<b>9</b>
2.1. Ortsvektor.....	9
2.2. Geschwindigkeit.....	9
2.3. Beschleunigung.....	10
2.4. Beschreibung der Kreisbewegung.....	11
2.5. Überlagerung von Bewegungen.....	13
<b>3. Dynamik.....</b>	<b>15</b>
3.1. Trägheit.....	15
3.2. Kräfte .....	15
3.3. Kraft und Masse.....	16
3.4. Die NEWTONSchen Axiome.....	17
3.5. Impulserhaltung.....	18
3.6. Einfache Bewegungen.....	19
3.7. Reibungskräfte .....	21
<b>4. Arbeit und Energie.....</b>	<b>23</b>
4.1. Mechanische Energie .....	23
4.2. Potentielle Energie .....	25
4.3. Feldkraft und potentielle Energie.....	26
4.4. Der Energiesatz der Mechanik.....	27
<b>5. Gravitation.....</b>	<b>28</b>
5.1. Drehimpuls und Drehmoment.....	28
5.2. Das Gravitationsgesetz.....	30
5.3. Potentielle Energie und Gravitationspotential .....	32

5.4.	Planetenbewegung.....	32
<b>6.</b>	<b>Schwingungen I .....</b>	<b>34</b>
6.1.	Der Federschwinger .....	34
6.2.	Das Pendel.....	37
6.3.	Gedämpfte Schwingungen .....	38
<b>7.</b>	<b>Systeme von Massenpunkten; Stöße .....</b>	<b>41</b>
7.1.	Der Schwerpunkt.....	41
7.2.	Stöße: Grundlagen.....	42
7.3.	Elastische Stöße im Laborsystem.....	43
7.4.	Stöße im Schwerpunktsystem .....	45
7.5.	Inelastische Stöße.....	45
7.6.	Nichtzentrale Stöße .....	46
<b>8.</b>	<b>Bewegte Bezugssysteme .....</b>	<b>47</b>
8.1.	Vorbemerkungen.....	47
8.2.	Bezugssysteme mit konstanter Relativgeschwindigkeit $u \ll c$ .....	47
8.3.	Linear beschleunigte Bezugssysteme.....	48
8.4.	Rotierende Bezugssysteme.....	49
<b>9.</b>	<b>Der starre Körper; Rotation I.....</b>	<b>52</b>
9.1.	Einleitung .....	52
9.2.	Kräfte und Drehmoment an starren Körpern .....	53
9.3.	Trägheitsmoment.....	53
9.4.	Dynamik bei der Rotation .....	55
9.5.	Zusammenstellung wichtiger formaler Analogien.....	58
<b>10.</b>	<b>Rotation II.....</b>	<b>59</b>
10.1.	Trägheitstensor .....	59
10.2.	Trägheitsellipsoid.....	60
10.3.	Symmetrischer Kreisel .....	62
<b>11.</b>	<b>Deformierbare Festkörper .....</b>	<b>65</b>
11.1.	Dehnung und Kompression.....	65
11.2.	Scherung.....	67
11.3.	Der gebogene Balken .....	69
11.4.	Inelastisches Verhalten.....	71
<b>12.</b>	<b>Flüssigkeiten .....</b>	<b>73</b>
12.1.	Einleitung .....	73
12.2.	Statischer Druck .....	73
12.3.	Schweredruck.....	75
12.4.	Auftrieb und Schwimmen .....	76
12.5.	Oberflächenspannung.....	77
12.6.	Fest-flüssig-Grenzflächen .....	79

<b>13. Gase .....</b>	<b>82</b>
13.1. Kompressibilität .....	82
13.2. Schweredruck in Gasen .....	83
<b>14. Strömende Flüssigkeiten und Gase .....</b>	<b>85</b>
14.1. Vorbemerkungen .....	85
14.2. Innere Reibung .....	86
14.3. Beispiele für laminare Strömungen .....	87
14.4. Turbulente Strömungen, Ähnlichkeit, Strömungsgrenzschicht .....	89
14.5. Reibungsfreies Fluid: BERNOULLISCHE Gleichung .....	92
14.6. Strömungswiderstand .....	95
<b>15. Schwingungen II .....</b>	<b>97</b>
15.1. 2D-Überlagerung von Schwingungen .....	97
15.2. Schwebungen .....	97
15.3. Die FOURIER-Analyse .....	98
15.4. Gekoppelte Schwinger .....	100
15.5. Erzwungene Schwingungen .....	101
<b>16. Wellen .....</b>	<b>104</b>
16.1. Einleitung .....	104
16.2. Wellengleichungen .....	106
16.3. Arten von Wellen .....	106
16.4. Wellenausbreitung in verschiedenen Medien .....	107
16.5. Überlagerung von Wellen; Gruppengeschwindigkeit .....	110
<b>17. Wellenausbreitung .....</b>	<b>113</b>
17.1. Streuung .....	113
17.2. Das HUYGENSSCHE Prinzip .....	113
17.3. Das FERMATSche Prinzip .....	114
17.4. Beugung .....	115
17.5. DOPPLER-Effekt; MACHSche Wellen .....	116
17.6. Intensität einer Welle .....	118
17.7. Reflexion und Transmission an einer Grenzfläche .....	119
<b>18. Akustik .....</b>	<b>121</b>
18.1. Einleitung .....	121
18.2. Töne und Klänge .....	121
18.3. Stehende Wellen; Musikinstrumente .....	123
<b>LITERATURLISTE .....</b>	<b>V</b>
<b>QUELLENVERZEICHNIS .....</b>	<b>VI</b>
<b>SACHREGISTER .....</b>	<b>VII</b>

## **A. EINLEITUNG**

# 1. Einleitung

## 1.1. Was ist Physik

- $\varphi\upsilon\sigma\iota\zeta$  = Ursprung, Naturordnung, das Geschaffene lt. den griechischen Naturphilosophen, z.B. Aristoteles (384 - 322 v.d.Z.)
- im Gegensatz zur Metaphysik (das, was im Aristoteleschen System **nach** der Physik behandelt wird, also die gesamte ideelle Welt)
- griechische Naturphilosophie:
  - Beginn des naturwissenschaftlichen Denkens; Entmythologisierung der Natur
  - Natur als (sehr komplizierter) Mechanismus, den man im Prinzip verstehen kann; Gesetzmäßigkeiten statt undurchschaubares Wirken von Göttern und Dämonen
- weitere Etappen:
  - klassische Physik
  - moderne Physik (Quantenphysik, Relativität) ~ 1920
- „Verständnis der Natur“ = Erkennen von Gesetzmäßigkeiten
- → Naturbeobachtung ⇒ Schlussfolgerung (z.B. Gesetze der Planetenbewegung)
- Bloßes Beobachten reicht oft nicht aus, da die Natur zu kompliziert ist (Überlagerung von Einflüssen), und man z.B. auch optischen Täuschungen zum Opfer fallen kann
- ⇒ (gezieltes) **Experiment** = „Frage an die Natur“  
= Ausschluss störender Einflüsse, ggf. Verstärkung des gewünschten/interessierenden Effektes
- Mit dem Experiment eng verknüpft sind zwei weitere Komplexe:
  - physikalische Größen, Maßeinheiten, Messung, Messfehler (vgl. <1.2.>)
  - physikalische Modelle, Theorien, Rolle der Mathematik (vgl. <1.3.>)

## 1.2. Die Rolle des Experimentes

- Wesen des Experimentes ist die **Messung** (= Vergleich zweier Größen)

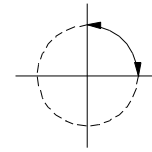
### Beispiel:

Physikalische Größe Länge hat Maßeinheit Meter (m). Vergleich einer gegebenen Distanz mit dieser Maßeinheit ⇒ „Distanz beträgt 1,54 m“

- **Maßeinheiten** sind durch **Normale** oder **Standards** definiert; Messgeräte müssen regelmäßig mit diesen verglichen (geeicht, kalibriert) werden
- Die verwendeten Normale hängen vom Entwicklungsstand von Wissenschaft und Technik ab.

**Beispiel: Meter**

1799: 1/10.000.000 des Erdquadranten



1875: Urmeter (Pt-Ir-Stab mit Strichen)

$$\Delta x = 10^{-3} \text{ mm}$$

$$\frac{\Delta x}{x} = 10^{-6}$$

1960: über die Wellenlänge einer bestimmten Strahlung, die Krypton-86-Atome aussenden

$$\frac{\Delta x}{x} = 10^{-8}$$

1983: (wegen der inzwischen erreichten enormen Genauigkeit der Zeitmessung)

$$\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-14}$$

„1 m ist die Strecke, die das Licht im Vakuum in  $\frac{1}{299792458} \text{ s}$  zurücklegt“.

!

Damit ist  $c$  keine Messgröße mehr und beträgt definitionsgemäß  $299.792.458 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ !

!

– **Grundgrößen** und **abgeleitete Größen**, z.B.

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \text{Länge } s & \} & \text{Geschwindigkeit } v = \frac{s}{t} \\ \text{Zeit } t & & \end{array}$$

– Über die Auswahl der Grundgrößen sind bestimmte **Maßsysteme** definiert. Seit 1960 in vielen Ländern verbindlich: **SI-System** (le Système International d' Unités)

7 Grundgrößen	mit der entsprechenden SI-Basiseinheit	
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunde	s
Masse	Kilogramm	kg
elektrische Stromstärke	Ampere	A
Temperatur	Kelvin	K
Stoffmenge	Mol	mol
Lichtstärke	Candela	cd

SI

**Kommentar:**

- Alle anderen Größen sind aus den Grundgrößen abgeleitet, ebenso ihre Maßeinheiten aus den Basiseinheiten. Allerdings haben manche abgeleiteten Einheiten eigene Namen (N, J, W, V, ...)
- Die Auswahl der Grundgrößen erfolgt nach Zweckmäßigkeit. Prinzipiell würden drei Grundgrößen, z.B. Länge, Zeit, Masse reichen!





- Es gibt immer noch/immer wieder:
  - \* SI-fremde Maßeinheiten, z.B. Torr, atm, cal, yard, inch, ...
  - \* andere Maßsysteme

↓

ggf. anderes Aussehen von Formeln;  
z.B. tritt beim CGS-System (cm-g-sec) das  $1/4\pi\epsilon_0$  in den Gleichungen der Elektrodynamik
  
- **Messgenauigkeit**                      und                      **-reproduzierbarkeit**

↓

wie groß ist der maximal mögliche Fehler?

↓

liefert Wiederholung der Messung zu anderer Zeit und/oder anderen Bedingungen dasselbe Ergebnis?
  
- ⇒ Dies nicht so wichtig für die Schauversuche der Vorlesung, jedoch sehr für wissenschaftliche Arbeit.
- ⇒ siehe Praktikum!

### 1.3. Physikalische Modelle und Theorien

- Experimente meist so gestaltet, dass bestimmte Einflüsse deutlich messbar sind, andere (störende) Einflüsse dagegen unterdrückt werden.

#### Beispiel:

- Fallgesetz:
- Körper mit hoher Massendichte
  - kein Wind u.a.
  - am besten Vakuumturm

⇒ Fall-Verhalten nur von Masse des Körpers abhängig, alle sonstigen Eigenschaften (Dichte, Form, ....) sind unerheblich

⇒ Bild (Modell) der **Punktmasse**

- **Physikalische Gesetze**, die in der Regel durch Formeln ausgedrückt werden, sind den Vereinfachungen des Modells angepasst, d.h., Dinge, die in dem betrachteten Zusammenhang keine Rolle spielen, kommen nicht mehr vor.

⇒ Einfachheit und Klarheit. Man muss aber immer wieder überprüfen, ob die Voraussetzungen des Modells im konkreten Fall gelten

- **Hypothesen**

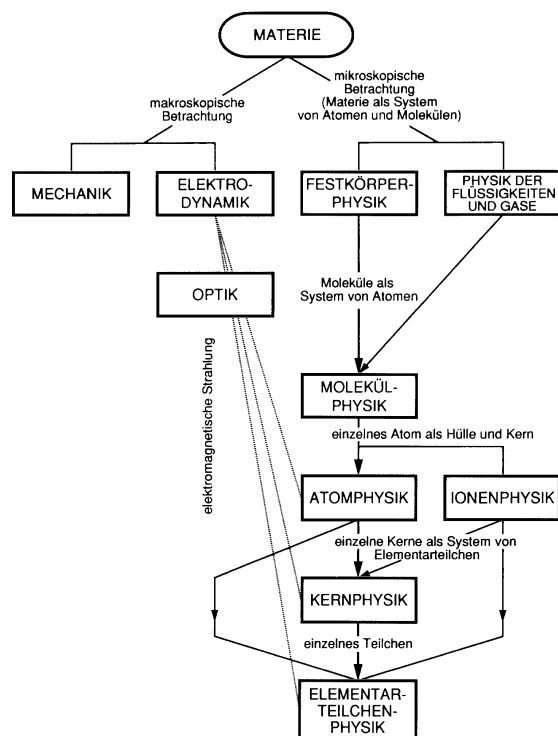
- sind mehr oder weniger („Arbeitshypothese“) begründete Vermutungen
- dienen oft dem Entwurf von Experimenten („Wenn ... so ist, dann müsste doch ...“)
- sind die Vorstufen von Gesetzmäßigkeiten

Prinzipiell ist die Physik natürlich immer offen für unerwartete experimentelle Ergebnisse, insofern ist keine Gesetzmäßigkeit „absolut“. Mit zunehmender Vervollständigung des Bildes von der Welt, der zunehmenden Menge von zusammenpassenden und sich gegenseitig stützenden Befunden, steigt natürlich

das Zutrauen in die gefundenen Gesetzmäßigkeiten. Deshalb wird z.B. die Suche nach einem perpetuum mobile als Zeitverschwendung abgelehnt.

- **Theorien** sind die (überwiegend mathematische) Formulierung gefundener oder hypothetischer<sup>1</sup> Gesetzmäßigkeiten. Sie beziehen sich auf ein bestimmtes physikalisches Modell, d.h., bestimmte Bedingungen (z.B. das Fehlen von Reibung beim Fallgesetz).
  - wichtige Rolle der Mathematik und der Computertechnik
  - Arbeitsteilung Experimentalphysik - Theoretische Physik wegen des enormen Wissensvolumens (Kepler, Newton, Galilei waren nicht spezialisiert!)
  - „Experimente mit dem Computer“ = Herausfinden der wesentlichen Gesetzmäßigkeiten/Theoriebildung anhand experimentell überprüfter Konstellationen und Berechnung experimentell praktisch unzugänglicher Konstellationen

## 1.4. Der „Stammbaum der Physik“



Bedeutung der Mechanik:

- grundlegend für vieles andere
- beispielhaft (z.B. bezüglich Modellbildung)

({1}, S. 14)

## 1.5. Wichtige Größen und Maßeinheiten

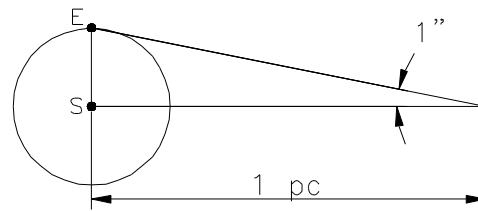
### 1.5.1. Länge: m

		Vorsilbe lt. SI-System	
$10^3$ m	1 km	kilo	
$10^{-3}$ m	1 mm	milli	
$10^{-6}$ m	1 $\mu$ m	mikro	
$10^{-9}$ m	1 nm	nano	} $\rightarrow$ feinstbearbeitete Oberfläche
$10^{-12}$ m	1 pm	pico	
$10^{-15}$ m	1 fm	femto	$\rightarrow$ Atomkern-Durchmesser

<sup>1</sup> Es gibt auch Theorien, die zunächst hypothetisch sind!

$10^{-10}$  m      1 Å      Angström      →      Atom-Durchmesser

1 Lichtjahr      1 Lj      =  $9,465 \cdot 10^{15}$  m  
1 Parsec      1 pc      =  $3 \cdot 10^{16}$  m



### 1.5.2. Zeit: s

Die Sekunde ist definiert als das 9.192.631.770-fache der Periodendauer eines bestimmten Übergangs zwischen Energieniveaus des  $^{133}\text{Cs}$ -Atoms. !

$5 \cdot 10^{17}$  s      Alter des Universums  
 $1 \cdot 10^{17}$  s      Alter der Erde

$2 \cdot 10^{13}$  s      Zeit seit der Entwicklung des ersten Menschen

$10^{-3}$  s      1 ms  
 $10^{-6}$  s      1  $\mu$ s  
 $10^{-9}$  s      1 ns      →      Anregungsdauer eines Atoms  
 $10^{-12}$  s      1 ps      →      ultrakurzer Laserpuls; „Ultrakurzzeitphysik“  
 $10^{-15}$  s      1 fs      →      Periodendauer einer Lichtwelle

### 1.5.3. Masse: kg

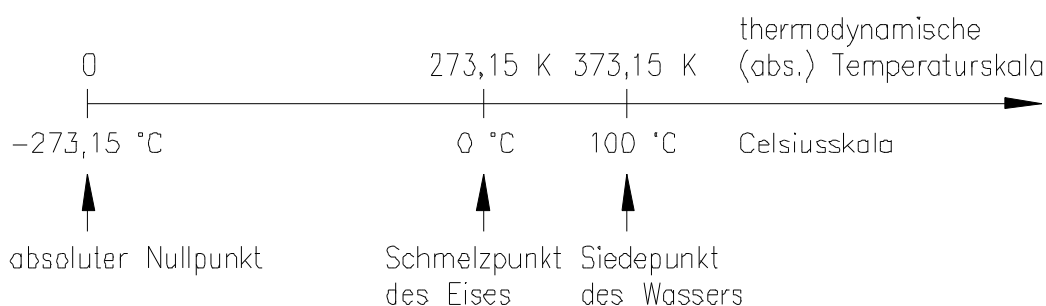
Masse (zur Zeit noch) definiert über den in Paris aufbewahrten 1 kg-Pt-Ir-Zylinder (früher: 1 dm<sup>3</sup> H<sub>2</sub>O bei 4 °C). !

Angestrebt: Übergang zu Si-Einkristallkugel mit definierter Atomanzahl (= Anschluss an genauer messbare atomare Einheiten)

extreme Beispiele:      Masse eines Elektrons:       $10^{-30}$  kg  
                                    Masse der Sonne:       $10^{30}$  kg  
                                    Masse der Milchstraße:       $10^{42}$  kg

### 1.5.4. Temperatur: K

Ein Kelvin ist der 273,16te Teil der thermodynamischen Temperatur am Tripelpunkt des Wassers. (Der Tripelpunkt des Wassers liegt bei 273,16 K = 0,01 °C.) !



### 1.5.5. Winkel

Im Alltag, in der Geographie usw.:

$$1^\circ = \frac{1}{360} \text{ Vollkreis}$$

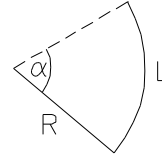
$$1^\circ = 60' = 60 \cdot 60''$$

(Bogenminute) (Bogensekunde)

!

zweckmäßig:

$$\text{Bogenmaß} = \frac{\text{Bogenlänge } L}{\text{Radius } R}$$



!

$$\text{Dann ist der Vollkreis} = \frac{2\pi R}{R} = 2\pi.$$

Streng genommen hat der Winkel im Bogenmaß auch eine Maßeinheit:  
SI-Einheit: der Radiant;  $[\alpha] = \text{rad} = \text{m} \cdot \text{m}^{-1}$

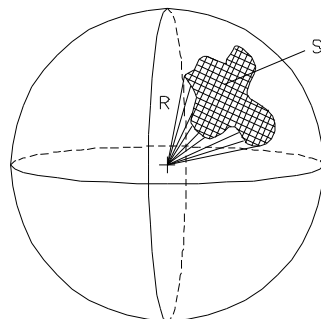
SI

Der Vollkreis ist also  $2\pi \text{ rad} \approx 6,28 \text{ rad}$ ;  $1 \text{ rad} \approx 57^\circ$   
Der Physiker spricht aber von „Winkel  $3/4\pi$ “ o.ä.

### 1.5.6. Raumwinkel

Der Raumwinkel ist definiert über die eingeschlossene Fläche S auf der Kugeloberfläche, geteilt durch das Quadrat des Kugelradius.

!



$$\Omega = \frac{S}{R^2}$$

$$\text{Der Vollwinkel ist daher } \Omega = \frac{4\pi R^2}{R^2} = 4\pi.$$

#### Kommentar:

- Die Fläche S ist ein beliebiger (in sich geschlossener) Teil der Kugeloberfläche.
- Der Raumwinkels u.a. wichtig für die Beschreibung von Strahlungsemission.
- SI-Einheit: der Steradian;  $[\Omega] = \text{sr} = \text{m}^2 \cdot \text{m}^{-2}$

◆

SI

## **B. MECHANIK**

## 2. Kinematik

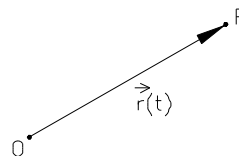
... ist die Lehre von der Bewegung. Sie beschreibt Bewegungen, ohne nach den Ursachen zu fragen.

!

### 2.1. Ortsvektor

- Der Ort eines **Massepunktes** P zum Zeitpunkt t wird beschrieben durch den **Ortsvektor**  $\vec{r}(t)$  mit dem Ursprung 0:

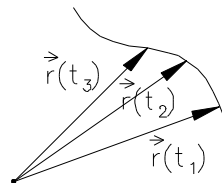
!



Der Ursprung wird entsprechend dem physikalischen Problem zweckmäßig gewählt, z.B.: Abwurfstelle beim Wurf, Rotations-Mittelpunkt bei Rotation.

- Wenn sich P relativ zu 0 bewegt, ist  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ . Die Gesamtheit der Endpunkte von  $\vec{r}$  heißt **Bahnkurve**:

!



- Je nach dem physikalischen Problem wird man  $\vec{r}$  in unterschiedlicher Weise in Komponenten zerlegen:

- im allgemeinen Fall entsprechend den kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad (1)$$

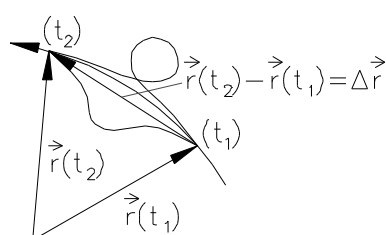
$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  ... Einheitsvektoren in x-, y-, und z- Richtung,

- bei einer Rotationsbewegung wird man oft Polarkoordinaten wählen (vgl. <2.4.>).

### 2.2. Geschwindigkeit

- ... ist die Änderung des Ortsvektors mit der Zeit:

!



$$\bar{\vec{v}}(t_1, t_2) = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad (2)$$

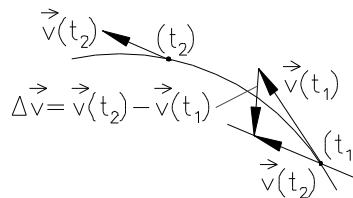
- $\bar{\vec{v}}$  ist die **mittlere Geschwindigkeit** im Intervall  $(t_1, t_2)$ . Beliebige Eskapaden innerhalb dieses Intervalls (siehe Abbildung) bleiben unbemerkt/unberücksichtigt!

⇒ Die **Momentangeschwindigkeit** zu einem bestimmten Zeitpunkt erhält man durch Grenzübergang  $t_2 \rightarrow t_1$ :

$$\vec{v}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{r}}{dt}(t_1) = \dot{\vec{r}}(t_1) \quad (3)$$

### 2.3. Beschleunigung

- ... ist die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit („ $\vec{v}$  ist Tangente an die Bahnkurve“):



Man sieht, dass sich  $\vec{v}$  im Allgemeinen sowohl im Betrag als auch in der Richtung ändert! Die Beschleunigung ist ein Vektor.

Maßeinheit:  $[a] = \frac{m}{s^2}$

SI

- **mittlere Beschleunigung** im Intervall  $(t_1, t_2)$ :

$$\bar{\vec{a}}(t_1, t_2) = \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad (4)$$

- Analog zu Gl. (3) erhalten wir die **(momentane) Beschleunigung** zum Zeitpunkt  $t_1$ :

$$\vec{a}(t_1) = \lim_{t_2 \rightarrow t_1} \frac{\vec{v}(t_2) - \vec{v}(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d\vec{v}}{dt}(t_1) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}(t_1) = \ddot{\vec{r}}(t_1) \quad (5)$$

- **2 Grenzfälle der Beschleunigung** (bzw. Komponenten im allgemeinen Fall):

a) **Tangentialbeschleunigung** (tangential zur Bahnkurve)

$\vec{a} \sim \Delta \vec{v}$  wirkt parallel (oder antiparallel) zu  $\vec{v}$  ( $\Delta \vec{v} \parallel \vec{v}$ )

⇒ es ändert sich nur  $|\vec{v}|$ , nicht die Richtung

- b) **Normalbeschleunigung** (normal zur Bahnkurve)  
 $\vec{a} \sim \Delta \vec{v}$  wirkt senkrecht zu  $\vec{v}$  ( $\Delta \vec{v} \perp \vec{v}$ )  
 $\Rightarrow$  es ändert sich nur die Richtung, nicht  $|\vec{v}|$

### Beispiel:

Auf der Erde unterliegt jeder nicht fixierte Körper einer Beschleunigung.

$$a \approx 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \equiv g \dots \text{Erdbeschleunigung}$$

$\Rightarrow$   $v$  nimmt zeitlinear zu:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \\ v(t) &= \int_0^t 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} dt' \\ \Rightarrow v(t) &= 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t \end{aligned}$$

Fallstrecke  $s$ :

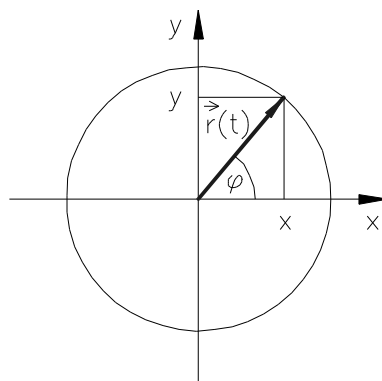
$$\begin{aligned} \frac{ds(t)}{dt} &= v(t) \\ s(t) &= \int_0^t v(t') \cdot dt' = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \int_0^t t' \cdot dt' \\ \Rightarrow s(t) &= \frac{9,81}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot t^2 \end{aligned}$$

$t$	$v(t)$	$s(t)$	
1 s	$9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	4,9 m	(= $1 \cdot 4,9$ )
2 s	$19,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	19,6 m	(= $4 \cdot 4,9$ )
3 s	$28,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	44,1 m	(= $9 \cdot 4,9$ )

## 2.4. Beschreibung der Kreisbewegung

- Bei der Kreisbewegung ist der Abstand  $r$  konstant.

$\Rightarrow$  Einführung von **Polarkoordinaten** zweckmäßig

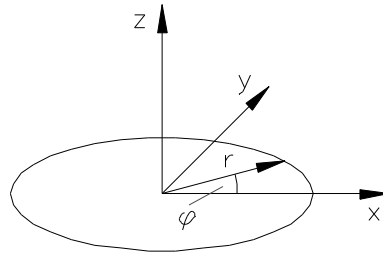




$$\left. \begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 \\ \frac{y}{r} &= \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sin \varphi \end{aligned} \right\} \text{Transformations-} \\ \text{gleichungen}$$

$$\{x, y\} \leftrightarrow \{r, \varphi\}$$

⇒ Verallgemeinerung: **Zylinderkoordinaten** (für rotationssymmetrische Probleme)



$$\{x, y, z\} \leftrightarrow \{r, \varphi, z\}$$

**Nun zur Kreisbewegung** (hier ist  $r = |\vec{r}| = \text{const.}!$ ):

– **Winkelgeschwindigkeit**  $\omega$

$$\omega = \frac{d\varphi(t)}{dt} = \dot{\varphi}(t) \quad (6)$$

– **Winkelbeschleunigung**  $\alpha$

$$\alpha = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2} = \ddot{\varphi}(t) \quad (7)$$

– Zusammenhang mit **Umlaufgeschwindigkeit, -beschleunigung**:

$$\left. \begin{aligned} s &= r \cdot \varphi \\ \dot{s} &= v = r \cdot \dot{\varphi} = r \cdot \omega \\ \ddot{s} &= a = \dot{v} = r \cdot \dot{\omega} = r \cdot \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

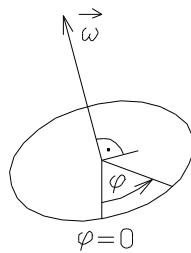
– Bis hierher: Rotation in der Ebene. Im 3D betrachtet man  $\omega$  und  $\alpha$  zweckmäßigerweise als Vektoren.

Richtung → durch Rotationsebene festgelegt

Beträge:

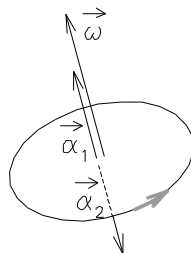
$$|\vec{\omega}| = \omega \quad \text{lt. Gl. (6)}$$

$$|\vec{\alpha}| = \alpha \quad \text{lt. Gl. (7)}$$



Rechte-Hand-Regel!

- $\vec{\alpha}$  kann bei gegebener Rotationsrichtung nach oben oder unten zeigen:



$\vec{\alpha}_1 \sim \vec{\omega} \rightarrow$  Beschleunigung  
 $\vec{\alpha}_2 \sim -\vec{\omega} \rightarrow$  Abbremsung

- Vektorschreibweise von Gl. (8) (dann stimmen Betrag **und** Richtung):

$$\left. \begin{aligned} \vec{v} &= \vec{\omega} \times \vec{r} \\ \vec{a} &= \vec{\alpha} \times \vec{r} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

## 2.5. Überlagerung von Bewegungen

- Die Zusammenhänge zwischen Ort, Geschwindigkeit und Beschleunigung gelten für jede Komponente einzeln. Dies erleichtert vieles! !

z.B. in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k} \quad (1)$$

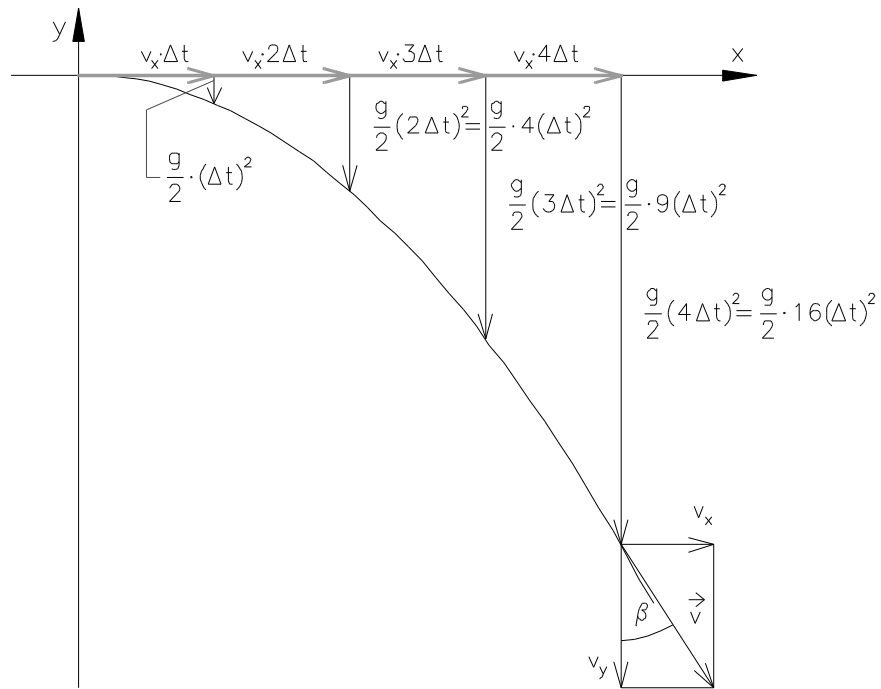
$$\left. \begin{aligned} \vec{v} = \dot{\vec{r}} &= \dot{x} \cdot \vec{i} + \dot{y} \cdot \vec{j} + \dot{z} \cdot \vec{k} \\ &= v_x \vec{i} + v_y \vec{j} + v_z \vec{k} \\ \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} &= \ddot{x} \cdot \vec{i} + \ddot{y} \cdot \vec{j} + \ddot{z} \cdot \vec{k} \\ &= a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

### Beispiel:

Waagerechter Wurf ■

$$\vec{v}_0 = v_x \cdot \vec{i}$$

Waagrecht findet eine gleichförmige Bewegung statt ( $v_x = \text{const.}$ ) und senkrecht eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung (freier Fall, d.h.  $a = g = \text{const.}$ ), die sich überlagern.



Man kann natürlich auch für jeden Zeitpunkt Betrag und Richtung der resultierenden Geschwindigkeit ermitteln:

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{v_x^2(t) + v_y^2(t)} = \sqrt{v_x^2 + g^2 t^2}$$

$$\tan \beta = \frac{v_x}{v_y}$$

### 3. Dynamik

Jetzt fragen wir nach der Ursache der Änderung des Bewegungszustandes, also nach der Ursache der Beschleunigung.

!

#### 3.1. Trägheit

Änderung des Bewegungszustandes heißt Änderung der Geschwindigkeit.

!

Schon Galilei (1564 - 1642) hat erkannt, dass eine geradlinig gleichförmige Bewegung, d.h.  $\vec{v} = \text{const.}$ , von sich aus fortbesteht, also keiner besonderen Ursache bedarf. Ruhe ist ein Sonderfall davon.

Man bezeichnet dies als *Trägheitsprinzip*.

#### 3.2. Kräfte

- Eine Änderung des Bewegungszustandes eines Körpers setzt eine Wechselwirkung voraus → Konzept der **Kräfte**

!

$$\left. \begin{array}{l} \text{Änderung des Be-} \\ \text{wegungszustandes} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{„am Körper greift} \\ \text{eine Kraft an“} \end{array} \right.$$

Kräfte können die verschiedenartigsten Ursachen haben.

- Eigenschaften von Kräften

- Kräfte sind Vektoren, also bestimmt durch Betrag und Richtung
- Bei mehreren Kräften überlagern sich alle Komponenten einzeln, z.B. für kartesische Koordinaten:

!

$$\left. \begin{array}{l} \vec{F}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_i \\ \vec{F}_{x,\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_{x,i} \\ \vec{F}_{y,\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_{y,i} \\ \vec{F}_{z,\text{ges}} = \sum_i \vec{F}_{z,i} \end{array} \right\} \quad (1)$$

Auch hier gelten natürlich wieder (vgl. Gl. (2 - 10)) die Zusammenhänge für jeder Koordinate einzeln!

- Ein Körper oder Massepunkt mit  $\vec{F}_{\text{ges}} = 0$  heißt „frei“, d.h., er ändert seinen Bewegungszustand nicht .

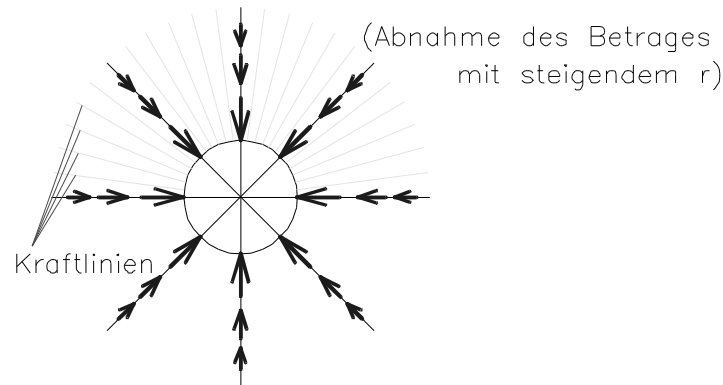
- In vielen Fällen hängt die Kraft vom Ort ab, d.h.

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}),$$

also Betrag und Richtung der Kraft sind eindeutig dem Ort zugeordnet.

Eine solche jedem Raumpunkt zugeordnete Kraft wird als **Kraftfeld** bezeichnet.

**Beispiel:**  
Gravitation/Erde



Also: Jeder Punkt  $\vec{r}$  in der Umgebung der Erde besitzt die Eigenschaft, auf eine bestimmte Masse eine ganz bestimmte Kraft  $\vec{F}(\vec{r})$  auszuüben.

Diese Eigenschaft hat der Punkt auch dann, wenn keine zweite Masse dort ist.

### 3.3. Kraft und Masse

- Unterschiedliche Körper reagieren auf ein und dieselbe Kraft unterschiedlich. !  
z.B.:
  - Ziehen am Handwagen  $\Leftrightarrow$  an einem PKW
  - Abbremsen eines großen Schiffes
- Die Eigenschaft, sich der Einwirkung der Kraft zu widersetzen und den alten Bewegungszustand möglichst beizubehalten (Trägheit) wird durch die **träge Masse** beschrieben. Es gilt: !

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \quad (= m\dot{\vec{v}} = m\ddot{\vec{r}}) \quad (2)$$

Dies ist das **NEWTONsche Aktionsprinzip**.

- **Es kann in dreierlei Weise interpretiert werden:** ◆

- $\vec{F} = m \cdot \vec{a}$  (Gl. (2)): Bestimmung von  $\vec{F}$ ;  
„Wenn ein Körper der Masse  $m$  eine Beschleunigung  $\vec{a}$  erfährt, wie groß ist dann die wirkende Kraft?“  
(z.B.: Ermittlung der Erdschwerkraft aus Fallexperiment)

- b)  $m = \frac{|\vec{F}|}{|\vec{a}|}$ : Charakterisierung der Trägheit;  
„Wie viel Kraft muss pro Beschleunigung aufgewandt werden?“
- c)  $\ddot{\vec{r}} = \vec{a} = \frac{1}{m} \cdot \vec{F}$ : Bestimmungsgleichung für  $\vec{a}$ . Damit kann letztlich bei gegebener Kraft  $\vec{F}(t)$  für eine bestimmte Masse  $m$  die Bahnkurve  $\vec{r}(t)$  durch Integration bestimmt werden.
- Lesart a) bzw. Gl. (2) führen zur Definition der Maßeinheit für die Kraft aus den SI-Grundgrößen Masse, Länge und Zeit:

$$1 \text{ Newton} = 1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad \text{SI, (3)}$$

Also: 1 N ist die Kraft, die einer Masse von 1 kg die Beschleunigung  $|\vec{a}| = 1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  verleiht.

- Die Beschleunigung durch die Erdschwerkraft auf der Erdoberfläche beträgt  $g \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ .  
 $\Rightarrow$  1 kg besitzt auf der Erdoberfläche die Gewichtskraft

$$\vec{F}_G = 9,81 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 9,81 \text{ N} = 1 \text{ kp}$$

Die Gewichtskraft darf nicht mit der Masse verwechselt werden.  
 Die Maßeinheit Kilopond ist über  $g$  definiert. Daher besser N verwenden!

### 3.4. Die NEWTONSchen Axiome

Die Grundgesetzmäßigkeiten der Bewegung von Körpern unter dem Einfluss von Kräften hat Newton (1643 - 1727) in folgenden Axiomen formuliert:

1. (**Trägheitsprinzip**): Jeder Körper verharrt in Ruhe oder der gleichförmigen geradlinigen Bewegung, solange keine Kraft auf ihn einwirkt. !
2. (**Aktionsprinzip**): Wenn eine Kraft  $\vec{F}$  auf einen Körper mit der Masse  $m$  wirkt, beschleunigt sie ihn mit: !

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \frac{\vec{F}}{m} \quad (4)$$

3. (**Reaktionsprinzip**): Bei zwei Körpern, die nur miteinander wechselwirken ist die Kraft  $\vec{F}_1$  auf Körper A entgegengesetzt der Kraft  $\vec{F}_2$  auf Körper B: !

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad (5)$$

„Actio = Reactio“

Newton hatte 2. anders formuliert, und zwar unter Zuhilfenahme des **Impulses**:

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} \quad (6)$$

Der Impuls ist ein Vektor  $\sim \vec{v}$ .

!

Maßeinheit:  $[p] = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}}$

SI

Newton schrieb: Eine Kraft  $\vec{F}$  ändert bei ihrer Einwirkung auf einen Körper dessen Impuls entsprechend.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m \cdot \vec{v})}{dt} \quad (7)$$

Anwendung der bekannten Differentiations-Regeln liefert:

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \cdot \frac{dm}{dt} \\ \vec{F} &= m \cdot \vec{a} + 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Nur für konstantes } m \text{ folgt Gl. (4)!} \end{aligned}$$

Als ob Newton die Relativitätstheorie geahnt hätte!

### 3.5. Impulserhaltung

- Das 2. NEWTONSche Axiom besagt:

$\Rightarrow$  **Ein** Teilchen, auf das keine Kraft wirkt, ändert seinen Impuls nicht.

Gegeben ist nun: **System aus vielen Teilchen, keine Kraft von außen:**

$\Rightarrow$  keine von außen aufgeprägten Impulsänderungen

- Welche Rolle spielen innere Wechselwirkungen (zwischen den Teilchen)?

Betrachtung am Beispiel zweier Teilchen:

Teilchen 1 verursacht  $F_1$  auf Teilchen 2:

$$\Rightarrow \Delta p_2 = F_1 \cdot \Delta t$$

aber: Teilchen 2 verursacht ebenfalls eine Kraft,  $F_2$ , auf Teilchen 1:

$$\Rightarrow \Delta p_1 = F_2 \cdot \Delta t$$

Wegen des 3. NEWTONSchen Axioms ist:

$$\begin{aligned} F_1 &= -F_2 \\ \Rightarrow \Delta p_1 &= -\Delta p_2, \text{ also} \end{aligned}$$

$$\Delta p_1 + \Delta p_2 = \Delta p_{\text{ges}} = 0$$

– **Fazit/Verallgemeinerung auf viele Teilchen:**

In einem **abgeschlossenen System**, d.h. einem System ohne Wechselwirkung mit äußeren Kräften, ist der Gesamtimpuls konstant:

!

$$\vec{p}_{\text{ges}} = \sum_i \vec{p}_i = \text{const.} \quad (8)$$

Die Bedingung „abgeschlossenes System“ lässt Reibung ohne weiteres zu!

### 3.6. Einfache Bewegungen

#### 3.6.1. Die gleichmäßig beschleunigte Bewegung

- In der Nähe der Erdoberfläche ist  $\vec{g}$  einigermaßen konstant  $\Rightarrow$  alle Wurfbewegungen sind gleichmäßig beschleunigt (Luftreibung vernachlässigt):

!

$$\vec{a} = \vec{g} = \text{const.} \quad (\text{Erdbeschleunigung})$$

**Beispiel:**

senkrechter Wurf nach oben mit:

$$\uparrow \vec{v}(0) \equiv \vec{v}_0, \downarrow \vec{g}$$

$\Rightarrow$  skalare Schreibweise<sup>1</sup>:

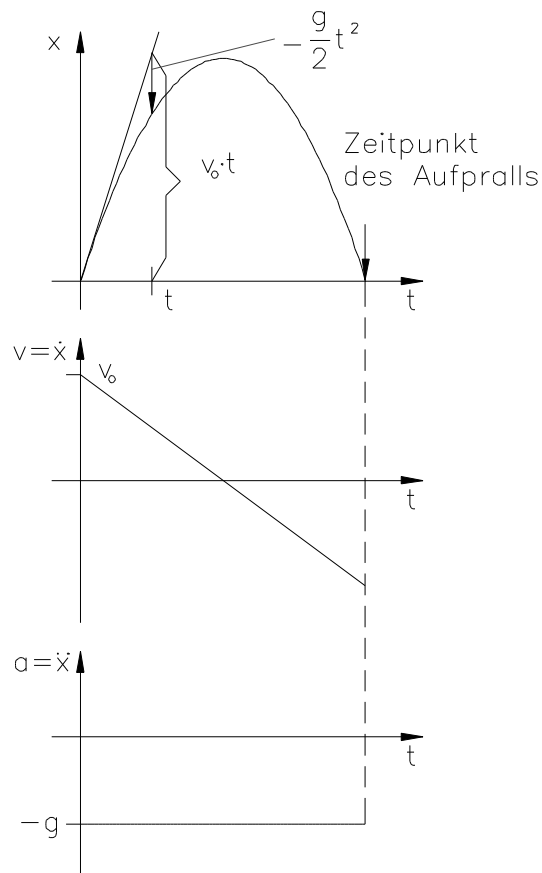
$$-g = \frac{dv}{dt}$$

$$\Rightarrow v(t) = \int_0^t -g \cdot dt'$$

$$v(t) = v_0 - gt$$

$$\Rightarrow x(t) = \int_0^t v(t') \cdot dt'$$

$$x(t) = x_0 + v_0 t - \frac{g}{2} t^2$$



<sup>1</sup> Unter  $g$  verstehen wir jetzt  $|\vec{g}| = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Das negative Vorzeichen entspricht der Tatsache, dass  $g$  in die negative Koordinatenrichtung zeigt.



- Wie hier nicht bewiesen werden soll, gelten für beliebige Richtungsbeziehungen zwischen  $\vec{a} = \text{const.}$  und  $\vec{v}_0 = \text{const.}$  die analogen Vektorbeziehungen:

$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t \quad (9)$$

$$\text{und} \quad \vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 \cdot t + \frac{\vec{a}}{2} t^2 \quad (10)$$

### 3.6.2. Die gleichförmige Kreisbewegung

- Wir hatten in <2.4.> die Winkelgeschwindigkeit eingeführt:

$$\omega = \dot{\varphi} \quad (2 - 6)$$

- Die **Umlaufzeit**  $T$  für eine Umdrehung, d.h. für  $\Delta\varphi = 2\pi$ , ergibt sich wie folgt:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{2\pi}{T} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (11)$$

- Damit folgt für die **Umdrehungsfrequenz**  $\nu$  (in 1/Zeiteinheit):

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (12)$$

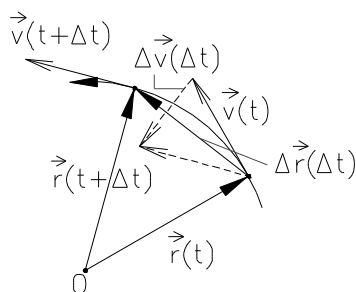
also ist

$$\omega = 2\pi \cdot \nu \quad (13)$$

Die Winkelgeschwindigkeit (sogenannte „**Kreisfrequenz**“) ist also das  $2\pi$ -fache der Umdrehungsfrequenz (weil pro Umdrehung ein Winkel von  $2\pi$  überstrichen wird).

!

- Welche Beschleunigung erfährt eine rotierende Masse?



Wir betrachten die Beträge:

$$|\vec{r}| = r, \quad |\vec{v}| = v, \quad |\vec{a}| = a, \quad |\Delta\vec{r}| = \Delta r, \quad |\Delta\vec{v}| = \Delta v$$

$$a = \frac{dv}{dt} \quad (14)$$

Wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke ist:

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta v}{v} \quad \Rightarrow \quad \Delta v = \frac{v}{r} \cdot \Delta r$$

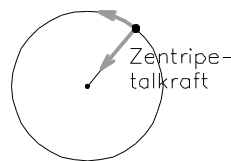
Dies in (14) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad a &= \frac{v}{r} \cdot \frac{\Delta r}{\Delta t} & \frac{\Delta r}{\Delta t} &= r \cdot \frac{d\varphi}{dt} = r \cdot \omega \\ & & \frac{v}{r} &= \omega & (2 - 8) \\ a &= \omega \cdot r \cdot \omega \\ a &= \omega^2 \cdot r \end{aligned} \quad (15)$$

- Um eine Masse  $m$  auf einer Kreisbahn zu halten, braucht man die Kraft:

$$F = m \cdot a, \text{ d.h. mit Gl. (15)}$$

$$\vec{F} = -m\omega^2 \vec{r}$$



(16)

Dies ist die **Zentripetalkraft**, die z.B. durch ein Seil aufgebracht werden muss, um einen Körper auf einer Kreisbahn zu halten. (vgl. <8.4.>)

!

### 3.7. Reibungskräfte

#### 3.7.1. Reibung zwischen festen Körpern

Reibung hat negative und positive Seiten, wie jeder bei Glatteis merkt!

- a) **Gleitreibung:**  
empirisch findet man:

$$F_R = \mu \cdot F_N \quad (17)$$

$\mu$  ... **Reibkoeffizient**

**Kommentar:**

- $\mu$  gilt für bestimmte Materialpaarung
  - Deutung: mikroskopische Oberflächen-Rauheit
  - unabhängig von Auflagefläche/-druck
  - unabhängig von Geschwindigkeit
- } Näherung!

b) **Haftreibung:**

$$F_H = \mu_H \cdot F_N \quad (\mu_H > \mu) \quad (18)$$

$\mu_H$  ... **Haftreibungskoeffizient**

**Deutung:** „Herausheben aus Anfangs-Verhakung“

**Kommentar zur Reibung zwischen Festkörpern:**

- Reduzierung der Reibung durch Schmierung
- Vermeiden der Reibung (Kugellager)
- in der Realität beliebig kompliziert:
  - Luftsauerstoff  $\Rightarrow$  chemische Reaktionen,
  - Schmiermittel,
  - Oberflächengestalt.
- Bezug zur Kontaktmechanik

**3.7.2. Reibung in Flüssigkeiten oder Gasen**

- Ein Körper, der sich durch ein zähes Medium bewegt, wird ebenfalls gebremst. (vgl. <14.>) !
- Hier soll zunächst nur die Formel gegeben werden. Für eine Kugel gilt:

(Der Faktor  $6\pi r$  ist spezifisch für die Kugel)



$$F_R = -6\pi r \cdot \eta \cdot v \quad (19)$$

$\eta$  ... **Viskosität** (Zähigkeit)  
 $v$  ... Geschwindigkeit

**Wichtig:**  $|F_R| \sim v \Rightarrow$  Sättigung der Geschwindigkeit bei konstanter Kraft (z.B. freier Fall).

## 4. Arbeit und Energie

### 4.1. Mechanische Energie

- **Goldene Regel der Mechanik:**

Was man an Kraft gewinnt, muss man an Weg zusetzen (und umgekehrt).

!

Offensichtlich ändert es das Ergebnis nicht, wenn sich Kraft und Weg ändern, solange nur das Produkt aus Kraft und Weg konstant ist.

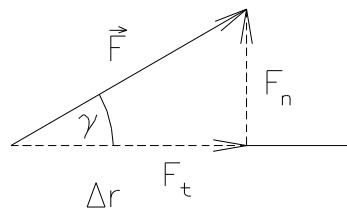
- Definition: **mechanische Arbeit**

$$\Delta W = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} \quad (1)$$

- Arbeit ist ein Skalar

!

entscheidend ist die Kraftkomponente in Wegrichtung:



$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} &= |\vec{F}| \cdot |\Delta \vec{r}| \cdot \cos \gamma \\ &= F_t \cdot |\Delta \vec{r}| \end{aligned}$$

$F_t$  ... Tangentialkomponente

Kräfte  $\perp$  Wegelement ( $F_n$ ) leisten keine Arbeit (sogenannte Zwangskräfte)

- Für einen makroskopischen Weg erhält man statt (1) verallgemeinert:

$$W = \int_{\text{Weg}} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (2)$$

- Maßeinheit für die Arbeit ist das Joule:  $[W] = J$

SI

$$1 \text{ J} = 1 \text{ Nm} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}$$

– **Beispiel:** Beschleunigungsarbeit ■

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (2. \text{ NEWTONSches Axiom})$$

Die Kraft ist der Trägheitskraft entgegengerichtet, die ihrerseits der Beschleunigung entgegengerichtet ist.

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad \begin{array}{l} \text{\\\\\\\\} \\ \text{\\\\\\\\} \end{array} d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$$

$$W = \int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2} m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} dt$$

$$W = \frac{m}{2} \vec{v}_2^2 - \frac{m}{2} \vec{v}_1^2 = \Delta E_{\text{kin}}$$

mit  $E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} \vec{v}^2$  (3)

$E_{\text{kin}}$  ... **kinetische Energie**, Bewegungsenergie

Die beim Beschleunigen des Teilchens aufgewandte Arbeit steckt als Änderung der kinetischen Energie in der bewegten Punktmasse.

– **Beispiel:** Hubarbeit ■

$$\vec{F} = -m \cdot \vec{g}$$

(Minuszeichen, weil die aufzuwendende Kraft der Erdschwerkraft entgegengerichtet ist!)

$$W = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} -m \cdot \vec{g} \cdot d\vec{r}$$

skalar:  $W = \int_0^h m \cdot g \cdot dr$

(Bei skalarer Schreibweise fällt das Minuszeichen weg, weil  $d\vec{r}$  und  $\vec{g}$  entgegengerichtet sind.)

$$W = m \cdot g \cdot h = \Delta E_{\text{pot}} \quad (4)$$

$\Delta E_{\text{pot}}$  ... Änderung der **potentiellen Energie** (von 0 auf h)

## 4.2. Potentielle Energie

- gegeben: Kraftfeld lt. <3.2.>, also  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$
- Wenn man die Punktmasse quasistatisch mit der Kraft  $\vec{F}_a$  gegen die Feldkraft  $\vec{F}$  verschiebt, wird die folgende Arbeit geleistet:

$$dW = \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (5)$$

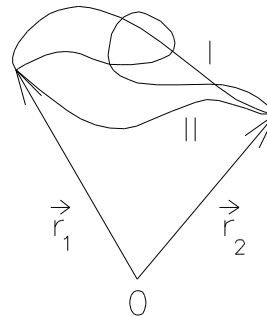
Integration ergibt für den Weg  $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$ :

$$W(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (6)$$

- Es zeigt sich, dass diese Arbeit für wichtige Kraftfelder unabhängig vom Weg  $\vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}_2$  ist:

Solche Kraftfelder heißen **konservative Kraftfelder** oder **Potentialfelder**.

Beispiele dafür sind die Gravitations- sowie die elektrostatischen Felder.



Beide gehören zu den **Zentralfeldern**:

$$\vec{F} = f(r) \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (7)$$

$\nwarrow \quad \nearrow$   
 $|\vec{F}| = f(r) \quad \exists \text{ nur Radialkomponente}$

Alle Zentralfelder lt. Gl. (7) sind konservativ, und zwar im Prinzip mit beliebigem  $f(r)$ . In der Realität existieren aber eben nur bestimmte.

- Wegunabhängigkeit heißt also:

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Big|_I = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Big|_{II} \quad (8)$$

$$\Rightarrow \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Big|_I + \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_1} \vec{F} \cdot d\vec{r} \Big|_{II} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0 \quad (9)$$

- Definition: **potentielle Energie**,  $E_{\text{pot}}$

$$dW = dE_{\text{pot}} = -\vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (10)$$

bzw. in Integralform:

$$W = - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = E_{\text{pot}}(\vec{r}_2) - E_{\text{pot}}(\vec{r}_1) \quad (11)$$

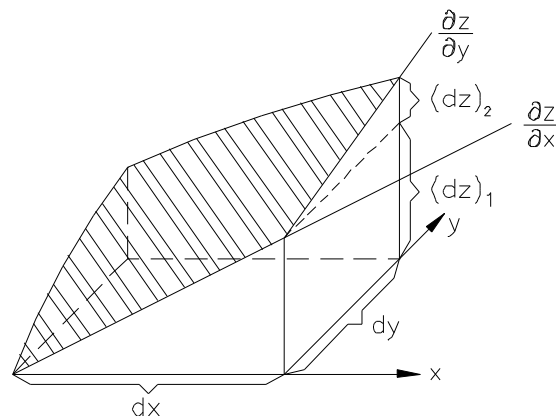
Vorzeichenwahl: Bewegung gegen die Feldkraft, d.h.  $\vec{F} \cdot d\vec{r} < 0$  führt zu  $\Delta E_{\text{pot}} > 0$  bzw.  $W > 0$ .

Bemerkung:  $\vec{r}_1$  und  $E_{\text{pot}}(\vec{r}_1)$  können dem Problem angepasst frei gewählt werden.

### 4.3. Feldkraft und potentielle Energie

- das totale Differential:

gegeben: Funktion  $z = f(x,y)$



Es gilt:  $dz = (dz)_1 + (dz)_2$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$   
 (partielle Ableitungen)

- analog im 3D ist  $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}(x,y,z)$ :

$$\Rightarrow dE_{\text{pot}} = \frac{\partial E_p}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} \cdot dz \quad (12)$$

- andererseits ist lt. Gl. (10):

$$dE_{\text{pot}} = -F_x \cdot dx - F_y \cdot dy - F_z \cdot dz \quad (10')$$

- Gleichsetzung von (10') und (12) liefert:

$$\vec{F} = - \left( \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) E_p$$

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p = -\nabla E_p \quad (13)$$

mit  $\nabla \dots$  **Nabla-Operator**

#### 4.4. Der Energiesatz der Mechanik

- Multiplikation von Gl. (13) mit  $\dot{\vec{r}} = \dot{\vec{v}}$ :

$$\begin{aligned}\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} &= -\text{grad } E_{\text{pot}} \cdot \dot{\vec{r}} \\ &= -\left[ \vec{i} \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial E_{\text{pot}}}{\partial z} \right] \cdot \left[ \vec{i} \frac{dx}{dt} + \vec{j} \frac{dy}{dt} + \vec{k} \frac{dz}{dt} \right] \\ \text{mit (12):} \quad &= -\frac{d}{dt} E_{\text{pot}}\end{aligned}\quad (14)$$

- andererseits ist nach dem 2. NEWTONschen Axiom:

$$\begin{aligned}\vec{F} &= m\ddot{\vec{r}} & |\cdot \dot{\vec{r}} & \quad (3 - 2) \\ \vec{F} \cdot \dot{\vec{r}} &= m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} & & \quad (15)\end{aligned}$$

- Es lässt sich leicht zeigen, dass:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} E_{\text{kin}} &= \frac{d}{dt} \left( \frac{m}{2} \dot{\vec{r}}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \cdot m \cdot 2 \cdot \ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = m\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}\end{aligned}\quad (16)$$

- Der Vergleich von (14), (15) und (16) liefert:

$$-\frac{d}{dt} E_{\text{pot}} = \frac{d}{dt} E_{\text{kin}} \quad \text{bzw.} \quad \frac{d}{dt} E_{\text{pot}} + \frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = 0 \quad (17)$$

Die mechanische Energie (= Summe aus  $E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}}$ ) ist in einem konservativen Kraftfeld (Potentialfeld) konstant. !

- **Zur Rolle der Reibung:**

Reibung verwandelt  $E_{\text{kin}}$  in Wärme (= ungeordnete Teilchenbewegung)  
 $\Rightarrow$  Verletzung des Energieerhaltungssatzes **der Mechanik** !

(Wenn man die Wärmeenergie mit einbezieht, bleibt die Energie natürlich wieder erhalten.)

Reibung stört **nicht** die Impulserhaltung. !

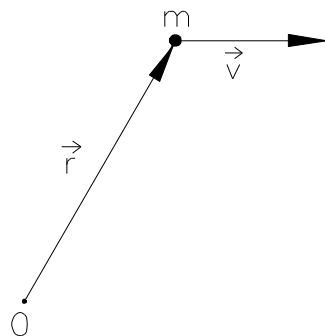


## 5. Gravitation

### 5.1. Drehimpuls und Drehmoment

- Der **Drehimpuls** tritt bei Drehbewegungen an die Stelle des Impulses. Wir betrachten zunächst den Drehimpuls eines Teilchens (später werden wir den Drehimpuls auch für rotierende starre Körper betrachten):

!



- Wir definieren als Drehimpuls bezüglich des Ursprungs 0:

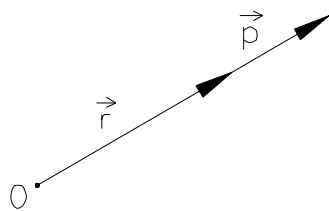
$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (1)$$

(also:  $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin(\vec{r}, \vec{p})$ )

- Untersuchung der so definierten Größe:

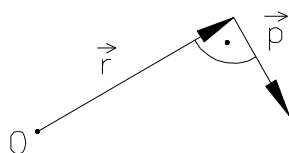
$\vec{L}$  steht  $\perp$  auf der Ebene, in der die Drehung erfolgt.

!



„Davonfliegen“, keine Drehung um den Ursprung

$$\sin(\vec{r}, \vec{p}) = 0 \Rightarrow |\vec{L}| = 0$$



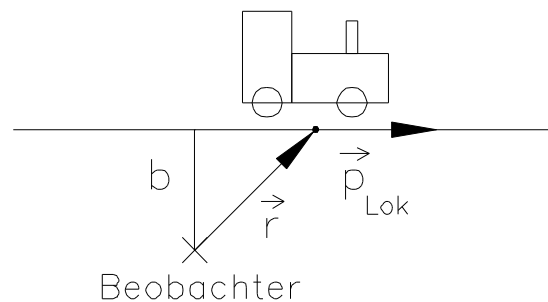
$$\sin(\vec{r}, \vec{p}) = 1 \Rightarrow |\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}|$$

„maximale Drehung“

$\Rightarrow$  Größe hängt plausibel mit der „Intensität“ der Drehbewegung zusammen!

- Drehimpuls ist eine allgemeine Größe und nicht an die Existenz einer Rotation gebunden, z.B.:

!



Auch hier existiert ein (konstanter) Drehimpuls:

$$|\vec{L}| = |\vec{p}_{\text{Lok}}| \cdot \underbrace{|\vec{r}| \cdot \sin(\vec{p}, \vec{r})}_b$$

$$|\vec{L}| = |\vec{p}_{\text{Lok}}| \cdot b = \text{const.} !$$

- Änderung von  $\vec{L}$ :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt} (m \cdot \vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \quad (2)$$

$$= m \cdot \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + m \cdot \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \equiv \vec{M} \quad (3)$$

mit:  $M$  ... **Drehmoment**

Maßeinheit:  $[M] = \text{N} \cdot \text{m}$

SI

Das Drehmoment ist der Kraft beim Impuls analog! Zur Erinnerung:

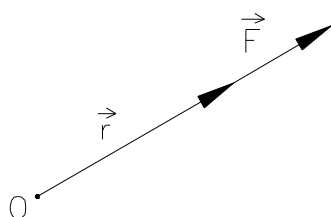
!

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \quad (3 - 7)$$

Plausibilitätserklärung:  $\vec{M} = \text{Kraft} \times \text{wirksamer Kraftarm}$

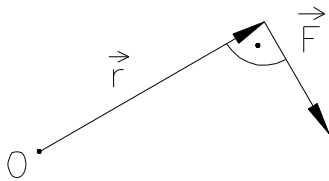
!

Untersuchung der Größe:



$$|\vec{r} \times \vec{F}| = 0, \text{ d.h. } \vec{L} = \text{const.}$$

keine Änderung der  
„Intensität der Drehung“



$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \rightarrow \max.$$

maximale Änderung!

- Zentralfeld (z.B. Gravitation):

$$\vec{F} \sim \vec{r}$$

$$\Rightarrow \vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = 0, \text{ d.h. } \frac{d\vec{L}}{dt} = 0, \text{ d.h. } \vec{L} = \text{const.}$$

Im Zentralfeld ist  $\vec{L} = \text{const.}$ , sofern keine äußeren Drehmomente angreifen.

!

## 5.2. Das Gravitationsgesetz

- Newton 1665/66, „Apfel“
- Wahrscheinliche Logik der Herleitung:
  - a) Beobachtung, dass alle Körper gleich schnell fallen  
 $\Rightarrow$  Beschleunigung,  $m\ddot{x}$  = Gravitationskraft  $\sim m$  des fallenden Körpers
  - b) Reaktionsprinzip  
 $\Rightarrow$  gegenseitige Anziehung; Gesetz sollte bezüglich  $m_1$  und  $m_2$  symmetrisch sein
  - c) Abstandsabhängigkeit?  $\rightarrow$  Betrachtung der Mondrotation um die Erde:



Für den Mond muss die Gravitationskraft die notwendige Zentripetalbeschleunigung aufbringen;

Zentripetalbeschleunigung lt. Gl. (3 - 15):

$$a = \omega^2 r = \left[ \frac{2\pi}{27,3 \cdot 86400} \right]^2 \cdot 6,37 \cdot 10^6 \cdot 60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2,73 \cdot 10^{-3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$\downarrow$   $\downarrow$   
 (86400 s/Tag) (Erdradius = 6370 km)

Auf der Erdoberfläche ist  $|\vec{g}| \approx 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , also 3600 Mal größer:

$$\frac{9,81}{2,73 \cdot 10^{-3}} = 3600 = 60^2 \Rightarrow \text{Gravitationskraft fällt mit } \frac{1}{r^2} !$$

⇒ **Gravitationskraft**

$$\vec{F}_G = -\gamma \cdot \frac{m_1 \cdot m_2}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (4)$$

$\gamma$  ... Proportionalitätskonstante (Gravitationskonstante)

$\gamma$  wird experimentell bestimmt (Drehwaage) zu:

$$\gamma = (6,6720 \pm 0,0004) \cdot 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$$

– **träge** und **schwere** Masse:

Masse verkörpert

- die Trägheit (Widerstand gegen Bewegungszustandsänderung) und
- sie ist Gegenstand der Gravitationskraft

!

Dies zunächst zwei verschiedene Dinge!

Fallexperimente:  $|\vec{F}| = \gamma \cdot \frac{m_s \cdot M}{r^2} = m_T \cdot \ddot{x}$

$M$  ... Erdmasse

$m_s$  ... schwere Masse

$m_T$  ... träge Masse

Alle Körper haben (innerhalb von  $10^{-12}$ ) gleiche Beschleunigung.

⇒ Träge und schwere Masse sind innerhalb dieser Grenzen gleich  
(eigentlich proportional zueinander, entsprechende Festlegung von  $\gamma$ , s.o.)

Inzwischen hat Einstein die Gleichheit von träger und schwerer Masse postuliert und als Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie genommen.

– Obwohl Gravitation immer eine **beiderseitige** Anziehung ist, ist es oft zweckmäßig, für eine der Massen das Kraftfeld zu betrachten:

$$\left. \begin{aligned} \vec{F}_G &= m \cdot \left( -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \right) \equiv m \cdot \vec{G} \\ \text{mit: } \vec{G} &= -\frac{\gamma \cdot M}{r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

$G$  ... **Gravitationsfeldstärke**

Also: Zu gegebenem  $\vec{G}$ -Feld ergibt sich Gravitationskraft auf  $m$  einfach als  $m \cdot \vec{G}$ .

### 5.3. Potentielle Energie und Gravitationspotential

- Wir wählen in Gl. (4 - 11)  $r_1 = \infty$  und bilden:

$$W = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{F} d\vec{r} = \gamma m M \int_{\infty}^r \frac{1}{r^2} dr = -\gamma \frac{mM}{r} \quad (6)$$

Dies ist gleich  $E_{\text{pot}}(r) - E_{\text{pot}}(\infty)$ , vgl. (4 - 11).

- Wenn wir vernünftigerweise  $E_{\text{pot}}(\infty) = 0$  setzen, folgt

$$E_{\text{pot}}(r) = -\gamma \frac{mM}{r} \quad (7)$$

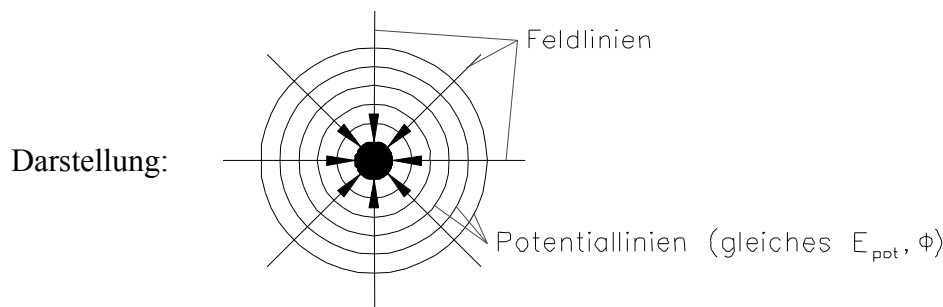
für die potentielle Energie der Masse  $m$  im Schwerefeld der Masse  $M$ .

- **Gravitationspotential:** Wir können analog zu  $\vec{F}_G \rightarrow \vec{G}$  auch  $E_{\text{pot}}$  in eine  $m$ -unabhängige Größe umwandeln, das Gravitationspotential  $\Phi$

Es ist definiert:

$$\Phi = \frac{E_{\text{pot}}}{m}$$

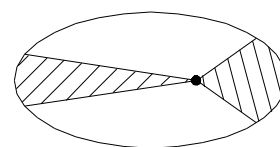
also:  $\Phi(r) = -\gamma \frac{M}{r} \quad (8)$



### 5.4. Planetenbewegung

Die **KEPLERSchen Gesetze** (1609/21) lauten:

- 1) Die Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.
- 2) Der Fahrstrahl überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen.
- 3) Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen.



!

!

!



## 6. Schwingungen I

### 6.1. Der Federschwinger

- Eine Feder setzt ihrer Verformung eine **Federkraft** entgegen, die der Verformung proportional ist. !

$$F_F = -D \cdot x \quad (1)$$

mit:  $D$  ... **Federkonstante**

Maßeinheit:  $[D] = \frac{N}{m}$  SI

- Eine an der Feder befestigte Masse wird nach dem Loslassen beschleunigt:

$$F_F = m \cdot a = m \cdot \ddot{x} \quad (3-2)$$

⇒ mit (1):

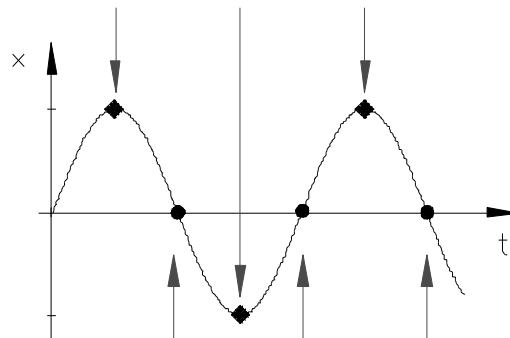
$$-D \cdot x = m \cdot \ddot{x} \quad \text{bzw.}$$

$$D \cdot x + m \cdot \ddot{x} = 0 \quad | :m$$

$$\frac{D}{m} \cdot x + \frac{d^2}{dt^2} x = 0 \quad (2)$$

Dies ist die **Bewegungsgleichung** des Federschwingers, eine lineare Differentialgleichung 2. Ordnung.

- Gl. (2) beschreibt den dynamischen Vorgang der Bewegung der Masse. Sie gilt zu jedem Zeitpunkt  $t$ , in allen „Stadien“, z. B. denen maximaler Geschwindigkeit der Masse (= ●) oder maximaler Verformung der Feder (= ◆), aber auch allen Zwischenstadien:



- Mathematische Lösung für Gl. (2)?  $\ddot{x} \sim -x \Rightarrow$  Es kommen sin- oder cos-Funktion in Frage.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ansatz:} \quad x(t) = x_0 \cdot \cos \omega_0 t \\ \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t \\ \Rightarrow \quad \ddot{x}(t) = -x_0 \omega_0^2 \cdot \cos \omega_0 t \end{array} \right\} \quad (3)$$

(3) in (2):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \frac{D}{m} \cdot x_0 \cos \omega_0 t - x_0 \omega_0^2 \cdot \cos \omega_0 t = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{D}{m} = \omega_0^2, \text{ d.h. } \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \end{aligned}$$

Also ergibt sich als Lösung für Gl. (2)

$$\left. \begin{array}{l} x(t) = x_0 \cos \omega_0 t \\ \text{mit:} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \end{array} \right\} \quad (4)$$

$\nu$  ... Frequenz  
 $T$  ... Schwingungsdauer

ω lt. Gl. (4) ist plausibel:

- straffe Feder/kleine Masse → schnelle Bewegung
- weiche Feder/große Masse → langsame Bewegung

- Gl. (3) ist auch bezüglich der Anfangsbedingungen  $x(0) = x_0$  gut gewählt. Die Funktion  $x = x_0 \sin \omega_0 t$  erfüllt die Differentialgleichung (2) ebenfalls, entspricht aber nicht der Anfangsbedingung. Sie wäre richtig, wenn wir bei  $x = 0$  mit einem „Schubs“ starten! Für „Schubs“ + Auslenkung brauchen wir die allgemeine Lösung  $x(t) = x_0 [c_1 \sin \omega_0 t + c_2 \cos \omega_0 t]$  (Linearkombination der beiden unabhängigen Lösungen), die lt. Mathematik hier eigentlich gilt.
- kinetische Energie:

$$E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} \dot{x}^2 \quad (4-3)$$

mit Gl. (4)

$$\left. \begin{array}{l} \Rightarrow \quad \dot{x}(t) = -x_0 \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t \\ \Rightarrow \quad E_{\text{kin}} = \frac{m}{2} x_0^2 \omega_0^2 \sin^2 \omega_0 t \\ \\ E_{\text{kin}} = \frac{D}{2} x_0^2 \sin^2 \omega_0 t \\ \text{mit:} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \end{array} \right\} \quad (5)$$



- potentielle Energie: vgl. Gl. (4 - 11)

$$W = -\int_0^x F_F dx = E_{\text{pot}}(x) - E_{\text{pot}}(0) \quad (4 - 11)$$

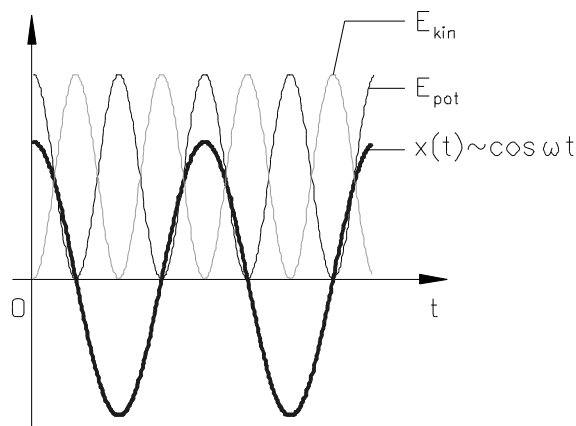
(W ist die beim Verformen der Feder, also gegen die Federkraft geleistete Arbeit.  $E_{\text{pot}}(0)$  wird zweckmäßiger Weise gleich Null gesetzt.)

Gl. (1) in (4 - 11):

$$\begin{aligned} \Rightarrow E_{\text{pot}}(x) &= -\int_0^x (-D \cdot x') dx' \\ &= \frac{D}{2} x^2 \end{aligned} \quad (6)$$

Gl. (4) in (6):

$$E_{\text{pot}}(x) = \frac{D}{2} x_0^2 \cos^2 \omega_0 t \quad \left. \begin{array}{l} \\ \text{mit: } \omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}} \end{array} \right\} \quad (7)$$



- Wir haben also ein ständiges „Hin- und Herfluten“ von  $E_{\text{kin}} \leftrightarrow E_{\text{pot}}$ . Die Gesamtenergie ist natürlich konstant:

$$\begin{aligned} E_{\text{ges}} &= \frac{D}{2} x_0^2 \underbrace{(\sin^2 \omega_0 t + \cos^2 \omega_0 t)}_{=1} \\ &= 1 \end{aligned} \quad (6)$$

- Schwingungen in Systemen mit  $|\text{Kraft}| \sim \text{Auslenkung}$  (Gl. (1)), die also sin- oder cos-Verlauf haben, heißen **harmonische Schwingungen**.

!

Sie haben große Bedeutung, weil bei ihnen ja  $E_{\text{pot}} \sim \text{Auslenkung}^2$  ist und sich jedes Potentialminimum als Parabel annähern lässt. Jede Schwingung um irgendein Potentialminimum kann also in gewissem Maße durch eine harmonische Schwingung angenähert werden.

Ein Beispiel für eine näherungsweise harmonische Schwingung ist das Pendel.

## 6.2. Das Pendel

- Gewichtskraft:

$$\vec{G} = \vec{G}_{\parallel} + \vec{G}_{\perp}$$

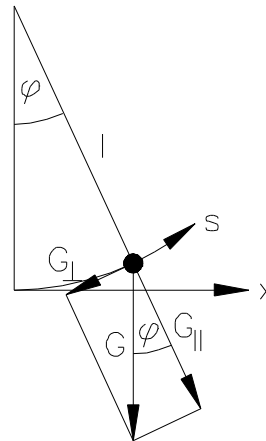
spannt den Faden wirkt rücktreibend

Man erkennt leicht, dass

$$G_{\perp}(\varphi) = -G \cdot \sin \varphi$$

mit  $G = m \cdot g$  folgt

$$G_{\perp}(\varphi) = -m \cdot g \cdot \sin \varphi \quad (9)$$



- Diese Kraft beschleunigt die ausgelenkte Masse:

$$G_{\perp}(\varphi) = m \cdot \ddot{s}(\varphi) = m \cdot l \cdot \ddot{\varphi}(\varphi) \quad (10)$$

- (10) und (11) ergibt:

$$m \cdot l \cdot \ddot{\varphi} = -m \cdot g \cdot \sin \varphi$$

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (11)$$

- (12) ist nicht mehr exakt lösbar. Wir beschränken uns auf kleine Winkel, dann ist:

$$\varphi \approx \sin \varphi$$

und (12) wird zu:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0 \quad (12)$$

- Gl. (13) entspricht völlig Gl. (2), das Pendel für kleine  $\varphi$  (sogenanntes **mathematisches Pendel**) vollführt eine harmonische Schwingung mit der Kreisfrequenz:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \quad (13)$$

**Kommentar:**

- Durch Messung von T und l ist g bestimmbar!
- $\omega_0 \neq f(m)$ !
- langes Pendel  $\Rightarrow$  großes T  $\left( T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{l}{g}} \right)$

### 6.3. Gedämpfte Schwingungen

- Bisher haben wir ungedämpfte Schwingungen betrachtet. In der Realität  $\exists$  Reibung:  
 $\Rightarrow$  Außer der Federkraft wirkt auch noch eine Reibungskraft, d.h. wir müssen das NEWTONsche Grundgesetz (Gl. (3 - 2)) ansetzen als:

$$F_{\text{ges}} = F_F + F_R = m\ddot{x} \quad (15)$$

- Die Reibungskraft  $F_R$  setzen wir wieder v-proportional an lt. Gl. (3 - 19):

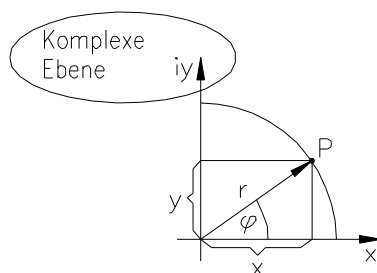
$$\Rightarrow -D \cdot \dot{x} - k \cdot x = m\ddot{x}$$

- An Stelle von Gl. (2) tritt also:

$$\frac{D}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x + \ddot{x} = 0 \quad (16)$$

**Exkurs:**

Darstellung von Schwingungen mittels komplexer Zahlen



$$P \rightarrow x + iy$$

$$x + iy = r[\cos \varphi + i \sin \varphi]$$

Betrachtet wird eine Rotation in der komplexen Ebene

Physikalisch relevant ist natürlich nur der Realteil  $x(t)$ , also die Projektion auf die x-Achse. Warum macht man das so kompliziert?  $\rightarrow$  In der komplexen Ebene ist jede Schwingung ein rotierender Vektor (Zeiger), die Überlagerung mehrerer Schwingungen ist einfach die Addition mehrerer Vektoren (Zeiger) zu jedem Zeitpunkt). Haben die überlagerten Schwingungen gleiches  $\omega_0$ , ergibt sich ein Summenvektor, der mit diesem  $\omega_0$  rotiert. Wenn man die Addition in der komplexen Ebene vollzogen hat, muss man auf den Realteil zurückgehen.

Man schreibt:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad (17)$$

- Lösung von Gl. (16) auf diese Weise:

Wir setzen als Lösung für Gl. (16) an:  $x = x_0 e^{\lambda t} \Rightarrow \dot{x} = \lambda x_0 e^{\lambda t}, \ddot{x} = \lambda^2 x_0 e^{\lambda t}$

Dies in Gl. (16) eingesetzt:

$$\Rightarrow x_0 e^{\lambda t} \left[ \frac{D}{m} + \frac{k}{m} \lambda + \lambda^2 \right] = 0 \quad (18)$$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow & & \uparrow \\ \neq 0 \forall t & & q + p\lambda + \lambda^2 = 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$  Wir müssen nur die quadratische Gleichung lösen<sup>1</sup> und erhalten:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m}} \quad (19)$$

- Wir betrachten den Fall relativ geringer Dämpfung (d.h., es soll überhaupt noch eine Schwingung stattfinden). Dann ist der Radikand negativ:

$$\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m} < 0$$

Umformung entsprechend dem physikalisch allein sinnvollen  $\omega^2 > 0$  ergibt:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{k}{2m} \pm \sqrt{-\left[\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2\right]} = -\delta \pm \sqrt{-\omega^2} \quad (20)$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = -\delta + i\omega \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = x_0 e^{(-\delta + i\omega)t} \quad (21a)$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = -\delta - i\omega \quad \Rightarrow \quad \hat{x} = x_0 e^{(-\delta - i\omega)t} \quad (21b)$$

Beide Gleichungen führen, wenn wir den Realteil bilden, auf dasselbe, nämlich

$$x = x_0 e^{-\delta t} \cdot \cos \omega t \quad (22a)$$

Anders als Gl. (4) klingt die Schwingung mit  $e^{-\delta t}$  ab, wobei lt. Gl. (20) gilt:

$$\delta = \frac{k}{2m} \quad (22b)$$

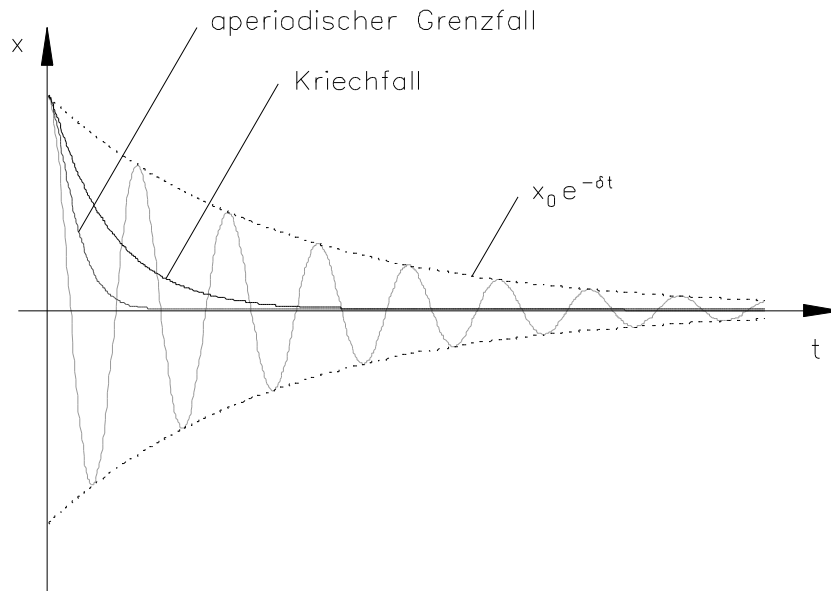
D.h. schnelles Abklingen für großes  $k$ , also großes  $F_R$ , sowie kleines  $m$ !

---

<sup>1</sup> Lösungsformel:  $\lambda_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$

Ferner ist  $\omega = \sqrt{\frac{D}{m} - \delta^2}$ , (22c)

d.h., die Frequenz  $\omega$  ist gegenüber der Frequenz  $\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$  reduziert.



- Im Grenzfall verschwindet die Wurzel in Gl. (20), d. h.:

$$\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m} = 0$$

Dadurch vereinfacht sich die Lösung zu:

$$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = -\delta$$

Es lässt sich zeigen, dass die allgemeine Lösung dann lautet:

$$x = x_0(1 + \delta \cdot t) \cdot e^{-\delta t} \quad (23)$$

Dies ist der sogenannte **aperiodische Grenzfall**, d.h. das schnelle Einschwenken in die Nulllage. !

- Für noch stärkere Dämpfung folgt entsprechend:

$$\left(\frac{k}{2m}\right)^2 - \frac{D}{m} > 0$$

Hier kann man von Schwingung nicht mehr sprechen. Die Auslenkung geht ebenfalls asymptotisch gegen Null, aber langsamer als lt. Gl. (23). Dies ist der sogenannte **Kriechfall** !

## 7. Systeme von Massenpunkten; Stöße

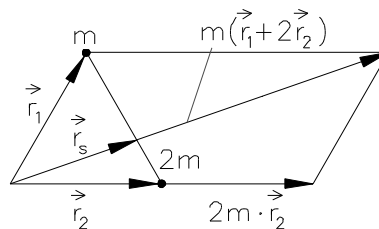
### 7.1. Der Schwerpunkt

- Wir definieren den **Schwerpunkt**  $\vec{r}_s$  eines Systems:

$$\vec{r}_s = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_i \quad \left. \vphantom{\sum_i m_i \vec{r}_i} \right\} \quad (1)$$

mit:  $M = \sum_i m_i$  ... Gesamtmasse

Veranschaulichung:



$$\vec{r}_s = \frac{1}{3}(\vec{r}_1 + 2\vec{r}_2)$$

- aus (1) folgt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow M \cdot \vec{r}_s &= \sum_i m_i \vec{r}_i \\ M \cdot \dot{\vec{r}}_s &= \vec{p}_s = \sum_i m_i \dot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{p}_i \end{aligned} \quad \left| \frac{d}{dt} \right. \quad (2)$$

Der Gesamtimpuls des Systems ist das Produkt aus Gesamtmasse und Schwerpunktgeschwindigkeit. !

- nochmalige Differentiation von (2) ergibt:

$$\Rightarrow M \cdot \ddot{\vec{r}}_s = \dot{\vec{p}}_s = \vec{F}_s = \sum_i m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_i \vec{F}_i \quad (3)$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als wenn dort die Summe aller Einzelkräfte an der Gesamtmasse angreifen würde. !

Also: Keine äußere Kraft, d.h.  $\vec{F}_s = \sum_i \vec{F}_i = 0 \Rightarrow$  Schwerpunkt bewegt sich gleichförmig, oder (Sonderfall) ruht. !

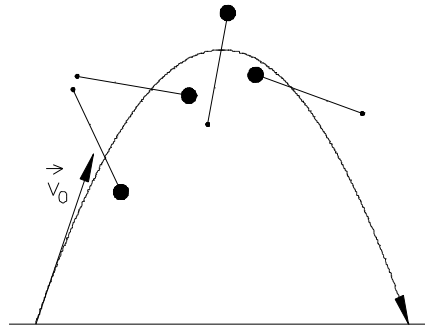
Mit anderen Worten: Gesamtimpuls im abgeschlossenen System = const.

oder:  $\exists$  äußere Kräfte  $\vec{F}_i$ , dann ergänzen sich diese in ihrer Wirkung so, als ob  $\vec{F}_s = \sum_i \vec{F}_i$  am Schwerpunkt angreifen würde.

!

**Beispiel:**

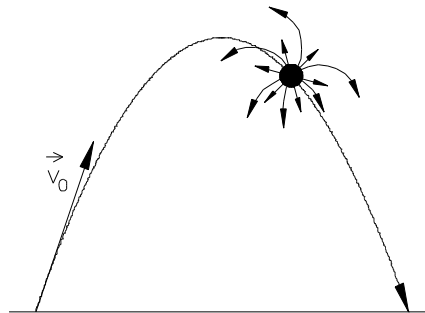
Geworfene Hantel:



Letzteres gilt auch dann, wenn innere Kräfte auftreten:

**Beispiel:**

Explodierende Granate:



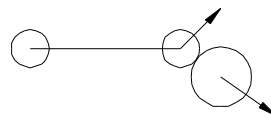
Die inneren Kräfte zwischen den Bruchstücken ergänzen sich jeweils zu Null (Actio = Reactio!), der Schwerpunkt folgt seiner eigenen Trägheit sowie der Erdbeschleunigung und bewegt sich weiter auf der Wurfparabel.

## 7.2. Stöße: Grundlagen

- Stöße = gegenseitige Ablenkung von sich bewegenden Teilchen

!

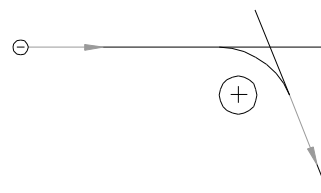
- hier: Experimente meist mit harten Kugeln



- Bedeutung der Stöße jedoch besonders wichtig für die Atomphysik, wo die Ablenkung entsprechend dem Kraftfeld bzw. dem Wechselwirkungs-Potential allmählich erfolgt.

**Beispiel:**

Coulombablenkung eines  $e^-$  an einem Atomkern



- Im abgeschlossenen System<sup>1</sup> gilt beim Stoß von 2 Partnern:

$$\frac{m_1}{2} \bar{v}_1^2 + \frac{m_2}{2} \bar{v}_2^2 = \frac{m_1}{2} \bar{v}_1'^2 + \frac{m_2}{2} \bar{v}_2'^2 + Q \quad \text{Energiesatz} \quad (5)$$

$Q = 0 \Rightarrow$  *elastischer Stoß*,  $E_{\text{kin}}$  bleibt erhalten,

### 7.3. Elastische Stöße im Laborsystem

- !

- 

- Wir betrachten den Sonderfall, dass der gestoßene Körper vor dem Stoß ruht:

$$\frac{m_1}{2} v_1'^2 = \frac{m_1}{2} v_1'^2 + \frac{m_2}{2} v_2'^2 \quad (5')$$

$$\Rightarrow m_2 v_2' = m_1 (v_1 - v_1') \quad (4'')$$

$$\Rightarrow m_2 v_2'^2 = m_1 (v_1^2 - v_1'^2) = m_1 (v_1 - v_1')(v_1 + v_1') \quad (5'')$$

$$\Rightarrow \quad v_1 + v_1' = v_2' \quad (6)$$

$$\text{bzw.} \quad v_1' = v_2' - v_1 \quad (6')$$

---

43



(6) in (4'):

$$\begin{aligned}\Rightarrow m_1 v_1 &= m_1 v_1' + m_2 (v_1 + v_1') \\ \Rightarrow v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \cdot v_1\end{aligned}\quad (7)$$

(6') in (4'):

$$\begin{aligned}\Rightarrow m_1 v_1 &= m_1 (v_2' - v_1) + m_2 v_2' \\ \Rightarrow v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \cdot v_1\end{aligned}\quad (8)$$

**Sonderfälle:**

(1)  $m_1 = m_2$

$$\Rightarrow v_1' = 0; \quad v_2' = v_1$$

(2)  $m_1 = 2m_2$ , also stoßender Körper doppelt so schwer

$$\Rightarrow v_1' = \frac{1}{3} v_1; \quad v_2' = \frac{4}{3} v_1$$

stoßender Körper läuft gestoßenem (langsamer) hinterher

(3)  $m_1 = m_2/2$ , also stoßender Körper halb so schwer

$$\Rightarrow v_1' = -\frac{1}{3} v_1; \quad v_2' = \frac{2}{3} v_1$$

stoßender Körper läuft rückwärts!

(3')  $m_1 \ll m_2$ , also „Stoß gegen die Wand“

$$\Rightarrow v_1' = -v_1; \quad v_2' \approx 0$$

Trotzdem bleibt der Gesamtimpuls unverändert  $= m_1 v_1$ , d.h.,  $m_2$  bewegt sich schon in  $v_1$ -Richtung, aber eben sehr langsam. Dennoch ergibt sich wegen des großen  $m_2$  der richtige Impuls.

- Energieübertrag auf  $m_2$ : Ist für  $m_1 = m_2$  maximal, d.h. vollständig, für alle anderen Fälle geringer. Genauer mit (8):

(Terminologie:  $E'_{\text{kin},2}$  ... kinetische Energie von  $m_2$  nach dem Stoß)

$$\begin{aligned}E'_{\text{kin},2} &= \frac{m_2}{2} v_2'^2 = \frac{m_2}{2} \frac{(2m_1)^2}{(m_1 + m_2)^2} \cdot v_1^2 \\ &= \underbrace{\frac{m_1}{2} v_1^2}_{E_{\text{kin},1}} \cdot \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} \\ E'_{\text{kin},2} &= E_{\text{kin},1} \cdot \frac{4m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2}\end{aligned}\quad (9)$$

⇒ · Verhältnis der Massen entscheidend ( $m_1 = n \cdot m_2$  und  $\frac{1}{n} \cdot m_2$  liefern gleiches Ergebnis)

· Übertragung beliebig klein:  $\frac{1}{2}$  bzw. 2  $\Rightarrow$  89 %  
 $\frac{1}{100}$  bzw. 100  $\Rightarrow$  4 %

- Wichtig für Teilchenphysik (Abbremsung), z.B. Neutronenmoderierung

## 7.4. Stöße im Schwerpunktsystem

- **Schwerpunktsystem** = System, in dem der Schwerpunkt ruht. Günstig, wenn die gestoßene Masse vor dem Stoß nicht ruht. !

- Gl. (2) war:

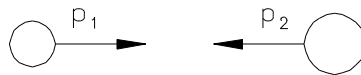
$$M \cdot \vec{v}_s = \vec{p}_s = \sum_i \vec{p}_i \quad (2)$$

Wenn der Schwerpunkt also ruht ( $\vec{v}_s = 0$ ) muss  $\sum_i \vec{p}_i = 0$  sein.

**Beispiel:**

elastischer Stoß zweier Teilchen ■

vorher:



$$p_1 + p_2 = 0$$



nachher:



$$p_1' + p_2' = 0$$

$$p_1' = -p_1$$

$$p_2' = -p_2$$

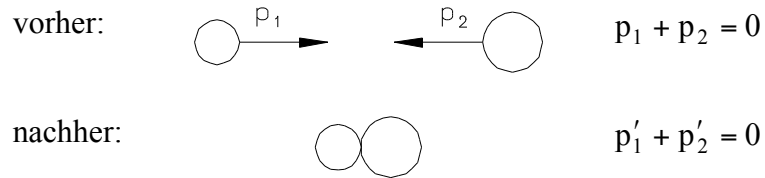
- Also: Problem im Schwerpunktsystem einfach zu behandeln!
- Man muss natürlich alle Bewegungen wieder ins Laborsystem zurücktransformieren. Da sich aber in abgeschlossenen Systemen der Schwerpunkt geradlinig gleichförmig bewegt, ist das einfach. !

## 7.5. Inelastische Stöße

- Ein Teil der  $E_{\text{kin}}$  wird aufgezehrt (Wärme, Verformung, ...)  $\rightarrow$  keine  $E_{\text{kin}}$ -Erhaltung mehr
- Dennoch wird die Abbremsung begrenzt, da der Impuls erhalten bleiben muss.

⇒ Was ist das Maximum der Umwandlung von  $E_{\text{kin}}$  in  $Q$ ?

Schwerpunktsystem: Im Schwerpunktsystem ist die Summe aller Impulse = 0 (s.o.). Dies kann auch erfüllt werden, indem alle Teilchen im Schwerpunktsystem zur Ruhe kommen.



Der Gesamtimpuls ist nach wie vor der des Schwerpunktes, also  $M \cdot \vec{v}_s = \vec{p}_s$  lt. Gl. (2)!

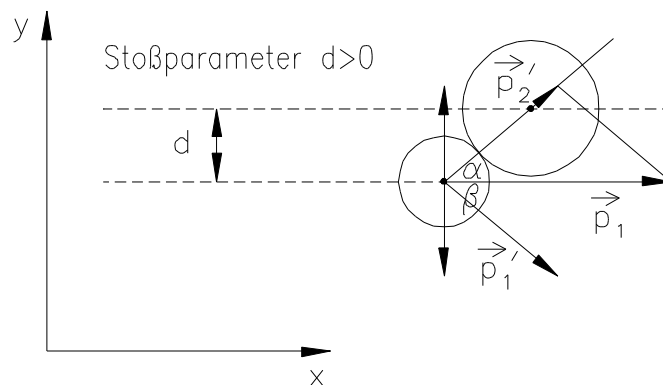
⇒ Die maximal mögliche Abbremsung, ohne den Impulssatz zu verletzen, ist das völlige Zur-Ruhe-Kommen im Schwerpunktsystem. !

Mit anderen Worten:

Alle beteiligten Teilchen bleiben aneinander kleben und bewegen sich mit einer gemeinsamen Geschwindigkeit, der des Schwerpunktes.

## 7.6. Nichtzentrale Stöße

- ... bringen physikalisch nichts grundsätzlich Neues, man muss das Problem lediglich mehrdimensional (es ist 2D) lösen. Beispiel Stoß in x-Richtung:



- $\alpha$  ist geometrisch determiniert:

$$\sin \alpha = \frac{d}{r_1 + r_2} \quad (r_1, r_2 \dots \text{Kugelradien})$$

- $\beta$  stellt sich so ein, dass  $p_{\text{ges},y}$  weiterhin gleich Null ist, d.h.

$$p'_{2,y} - p'_{1,y} = 0$$

- Ansonsten muss der Gesamtimpuls erhalten bleiben ( $\vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2$ ) sowie gegebenenfalls (elastisch - inelastisch) die kinetische Energie.

## 8. Bewegte Bezugssysteme

### 8.1. Vorbemerkungen

- Die grundlegenden Gesetze der Mechanik haben wir bisher ohne Bezug auf ein spezielles Bezugssystem definiert. **Grund**gesetze sollen ja auch unabhängig vom Bezugssystem gelten!
- Wir betrachten im Folgenden:
  - Bezugssysteme mit konstanter Relativgeschwindigkeit  $u \ll c$
  - Linear beschleunigte Bezugssysteme
  - Rotierende Bezugssysteme
- Die Relativitätstheorie ist nicht Gegenstand dieses Kapitels.

### 8.2. Bezugssysteme mit konstanter Relativgeschwindigkeit $u \ll c$

- **Beispiel:**

Mach-3-Düsenjäger  $3600 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$

Erdsatellit

$=$

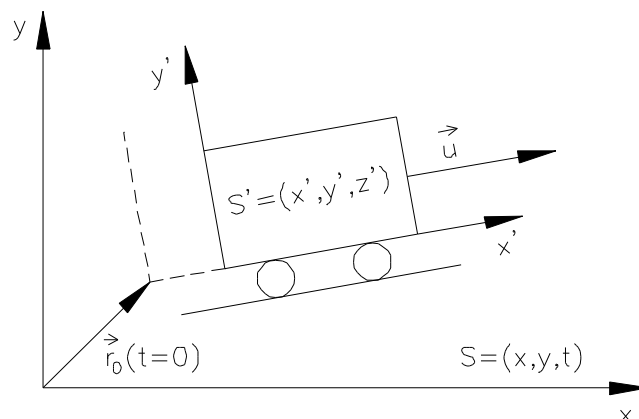
$1 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

$8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$

}

$< 10^{-4} \cdot c$

$u \ll c$  bedeutet also in der Regel keine ernste Einschränkung!
- betrachtet werden nun die Systeme S und S':



$$\left. \begin{array}{l} \text{Ortsvektor in S':} \quad \vec{r}' \\ \text{Ortsvektor in S:} \quad \vec{r} \end{array} \right\} = \vec{r}_0 + \vec{u} \cdot t + \vec{r}' \quad (1)$$

- Transformation mit konstantem  $\vec{u} \equiv \text{Galilei-Transformation}$
- Geschwindigkeit in S':  $\vec{v}$
- Geschwindigkeit in S:  $\vec{v}' = \frac{d\vec{r}_0}{dt} + \frac{d(\vec{u} \cdot t)}{dt} + \dot{\vec{r}}'$ 

$$= \vec{0} + \vec{u} + \dot{\vec{r}}'$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bzw.} \\ \vec{v} = \vec{v}' + \vec{u} \\ \vec{p} = \vec{p}' + \vec{u} \cdot m \end{array} \right\} \quad (2)$$

Also einfacher additiver Zusatzterm, der Impulserhaltung nicht beeinträchtigt.

$$\begin{aligned} - \text{ Beschleunigung in } S': \quad \vec{a}' &= \frac{d^2 \vec{r}'}{dt^2} = \frac{d\vec{v}'}{dt} \\ \text{Beschleunigung in } S: \quad \vec{a} &= \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + \frac{d\vec{u}}{dt} \\ &= \frac{d\vec{v}'}{dt} + 0 \\ \vec{a} &= \frac{d\vec{v}'}{dt} = \vec{a}' \end{aligned} \quad (3)$$

also

$$\vec{F}' = m \cdot \vec{a} = m \cdot \vec{a}' = \vec{F}' \quad (4)$$

⇒ Alle Galilei-transformierten Systeme sind in der Beschreibung der physikalischen Gesetze äquivalent. Die Gesetze der klassischen Mechanik sind Galilei-invariant. Die Gesamtheit der Galilei-transformierten Systeme heißt **Inertialsysteme**.

!

### 8.3. Linear beschleunigte Bezugssysteme

- System  $S'$  bewege sich nun beschleunigt mit  $\vec{a}_s$  relativ zum  $S$ :

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ortsvektor in } S': \quad \vec{r}' \\ \text{Ortsvektor in } S: \quad \vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{\vec{a}_s}{2} t^2 + \vec{u} \cdot t + \vec{r}' \end{array} \right\} \quad (5)$$

- wir fragen nach den Beschleunigungen in beiden Systemen:

$$\begin{aligned} - \text{ Beschleunigung in } S': \quad \vec{a}' &= \ddot{\vec{r}}' \\ \text{Beschleunigung in } S: \quad \vec{a} &= \ddot{\vec{r}} \\ &= \frac{d^2 \vec{r}_0}{dt^2} + \frac{d^2 (\vec{u} \cdot t)}{dt^2} + \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\vec{a}_s}{2} t^2 \right) + \ddot{\vec{r}}' \\ &= 0 + 0 + \vec{a}_s + \vec{a}' \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{bzw.} \\ \vec{a} = \vec{a}_s + \vec{a}' \\ \vec{a}' = \vec{a} - \vec{a}_s \end{array} \right\} \quad (6)$$

- multipliziert mit m:

$$\begin{array}{rcl}
 m \cdot \vec{a}' & = & m \cdot \vec{a} - m \cdot \vec{a}_s \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 \text{– Kraft in S':} & \vec{F}' & = \vec{F} + \vec{F}_{\text{tr}} \\
 \text{mit:} & \vec{F}_{\text{tr}} & = -m\vec{a}_s \dots \text{Trägheitskraft}
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{rcl} m \cdot \vec{a}' & = & m \cdot \vec{a} - m \cdot \vec{a}_s \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{– Kraft in S':} & \vec{F}' & = \vec{F} + \vec{F}_{\text{tr}} \\ \text{mit:} & \vec{F}_{\text{tr}} & = -m\vec{a}_s \dots \text{Trägheitskraft} \end{array}} \right\} \quad (7)$$

Die Trägheitskraft spürt man nur im beschleunigt bewegten System. Für sie ist dort keine materielle Ursache (wie z. B. Feder, Gravitation, Triebwerk) zu erkennen, sie rührt nur von  $\vec{a}_s$  her.

Man muss sie aber berücksichtigen, damit im beschleunigten Bezugssystem (wo diese Beschleunigung **nicht** existiert) "die Mechanik wieder stimmt". Ohne diese „Scheinkräfte“ wäre dies nicht der Fall.

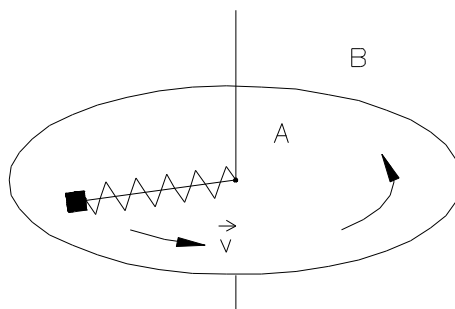
⇒ Beschleunigte Bezugssysteme sind keine Inertialsysteme.

#### Beispiel:

startendes Flugzeug:	ruhender Beobachter	→	Triebwerk "schiebt"
	Beobachter in Kabine	→	keine Ursache für die Kraft!



## 8.4. Rotierende Bezugssysteme



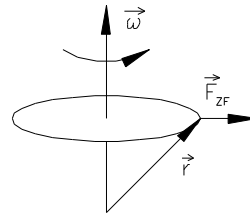
- Beobachter B (ruhend): Auf m wirkt ständig die Federkraft  $F_F$ , die die Masse auf die Kreisbahn zwingt, indem sie eine ständige Änderung der Richtung von  $\vec{v}$  hervorruft (Zentripetalkraft, -beschleunigung (vgl. <3.6.>)).
- Beobachter A (mitbewegt): Für ihn ruht die Masse! Sie wird durch eine für ihn unerklärliche Kraft nach „außen“ gezogen, welche durch die Federkraft kompensiert werden muss, weil sonst die Masse an die Außenwand geschleudert würde.
- Diese „unerklärliche Kraft“, die nur im rotierenden Bezugssystem wirkt, ist die **Zentrifugalkraft**. Sie ist betragsmäßig gleich der Zentripetalkraft (lt. Gl. (3 - 15)), aber nach außen gerichtet ( $\sim \vec{r}$ ).



$$\vec{F}_{ZF} = m\omega^2 \vec{r} \quad (8)$$

Im allgemeinen Fall, d. h. „ $\vec{r}$  nicht  $\perp \vec{\omega}$ “, erhält man:

$$\vec{F}_{ZF} = m \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r} \times \vec{\omega})$$



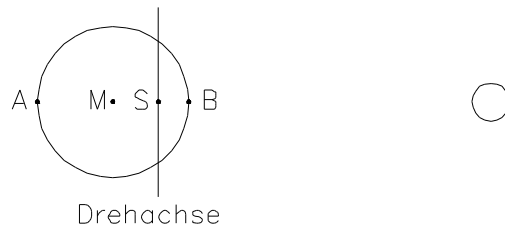
(8')

Zentripetalkraft bewirkt eine Beschleunigung im Laborsystem, Zentrifugalkraft kompensiert im rotierenden System (wo es keine Bewegung gibt) die Federkraft.

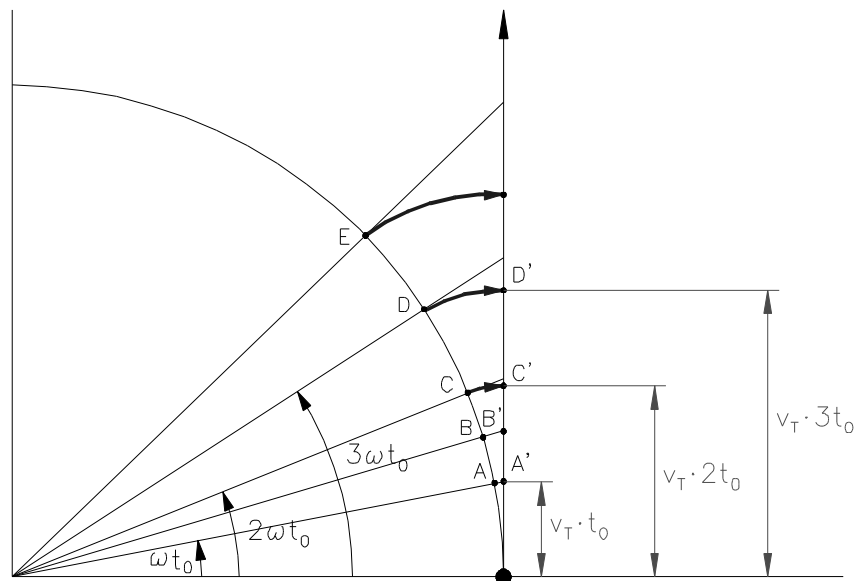
### Beispiel:

Gezeitenkräfte

- Erdrotation um sich selbst ist hier unerheblich, da sie die „Normalgestalt“ der Erde (Abplattung, usw.) bestimmt.
- Erde und Mond rotieren um den gemeinsamen Schwerpunkt S, der noch innerhalb der Erde liegt:



- Für M kompensieren sich Anziehung durch den Mond und Zentrifugalkraft genau.
- Bei A ist Anziehungskraft kleiner und Zentripetalkraft größer  $\Rightarrow$  „Wasserberg“
- Bei B ist Anziehungskraft größer und Zentripetalkraft kleiner  $\Rightarrow$  „Wasserberg“
- Wenn „Anziehung des Mondes“ alleinige Ursache wäre, dürfte bei A kein Flutberg auftreten!
- Wir kehren zur rotierenden Masse zurück und knipsen jetzt die Feder durch:



- ruhender Beobachter : Masse fliegt geradlinig gleichförmig weiter (A', B', C', ...)

- bewegter Beobachter: Masse fliegt radial nach außen ( $A \rightarrow A'$ ,  $B \rightarrow B'$ ), da ja nun die Gegenkraft der Feder fehlt - **zunächst!**

genauere Betrachtung: Masse fliegt nicht geradlinig, sondern die Bahnkurve ist im rotierenden Bezugssystem gekrümmt ( $C \rightarrow C'$ ,  $D \rightarrow D'$ , ...)

- Im rotierenden Bezugssystem **muss** man die Krümmung der Bahnkurve auf eine Kraft zurückführen, damit die Mechanik wieder stimmt  $\Rightarrow$  **Corioliskraft**

!

$$\vec{F}_c = 2m \cdot (\vec{v}' \times \vec{\omega}) \quad (9)$$

$\vec{v}'$  ... Geschwindigkeit im bewegten System!

- Bei einem „Schuss || zur Drehachse“ ist die Corioliskraft also Null.

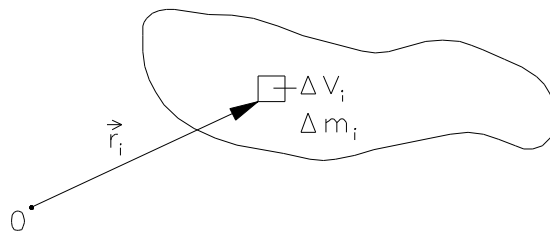


## 9. Der starre Körper; Rotation I

### 9.1. Einleitung

- bisher: (Systeme von) Punktmassen
- jetzt: Betrachtung ausgedehnter Körper, über die die Masse gleichmäßig verteilt ist (keine Atome!). Körper soll sich unter äußerer Kraft nicht verformen → **starrer Körper**

!



- **Dichte**  $\rho$ :

$$\rho = \frac{\Delta m}{\Delta V} \quad (1)$$

Maß-  
einheit:  $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$  SI

- **Gesamtmasse**  $M$ :

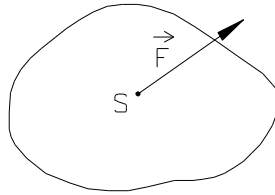
$$\begin{aligned} M &= \sum_i \rho_i \Delta V_i \\ M &= \int_{\text{Vol}} \rho \, dV \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} M &= \sum_i \rho_i \Delta V_i \\ M &= \int_{\text{Vol}} \rho \, dV \end{aligned}} \right\} \quad (2)$$

- Ortsvektor des **Schwerpunktes**  $S$   $\vec{r}_s$ :  
analog zu Gl. (7 - 1) schreiben wir:

$$\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{1}{M} \int_{\text{Masse}} \vec{r} \, dm \\ \vec{r}_s &= \frac{1}{M} \int_{\text{Vol}} \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \, dV \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \vec{r}_s &= \frac{1}{M} \int_{\text{Masse}} \vec{r} \, dm \\ \vec{r}_s &= \frac{1}{M} \int_{\text{Vol}} \vec{r} \cdot \rho(\vec{r}) \, dV \end{aligned}} \right\} \quad (3)$$

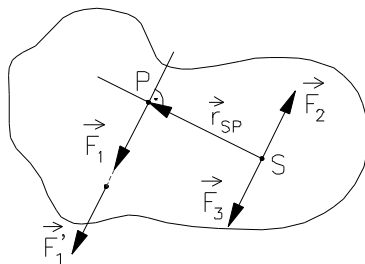
## 9.2. Kräfte und Drehmoment an starren Körpern

- Wiederholung zum System mehrerer Punktmassen (vgl. <7.1.>):  
Kraft  $\vec{F}$  greife an Schwerpunkt S eines starren Körpers der Masse M an:



$$\Rightarrow \text{Bewegung des Körpers gemäß:} \quad \vec{F} = M \cdot \vec{a} \quad (3-2)$$

- Kraft  $\vec{F}_1'$  greife **nicht** am Schwerpunkt S an:



$$\begin{aligned} |\vec{F}_1| &= |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| \\ \vec{F}_2 + \vec{F}_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\vec{F}_1' = \vec{F}_1 = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

(4)

$\downarrow \quad \downarrow$   
 Kräftepaar    Kraft, die an Schwerpunkt angreift  
 $\Rightarrow$  Translation, kein Drehmoment

- Kräftepaar** = Paar zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte, die an zwei **verschiedenen** Punkten (hier: S, P) angreifen  $\Rightarrow$  Drehmoment, und zwar:

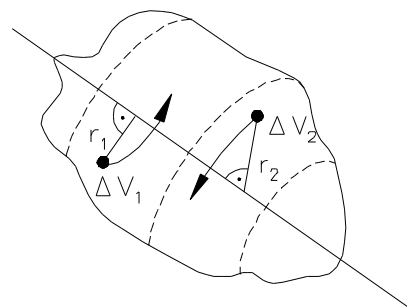
$$\vec{M} = \vec{r}_{sp} \times \vec{F}_1 \quad (M \text{ hier bezogen auf } S) \quad (5)$$

$\Rightarrow$  „Nicht-Schwerpunkt-Kraft“ bewirkt Translation und Rotation!  
 „Reines Kräftepaar“ bewirkt nur Rotation.

- Damit ein Körper in Ruhe bleibt, müssen sowohl  $\vec{F}_{ges} = 0$  als auch  $\vec{M}_{ges} = 0$  sein. Dann gibt es weder Translation noch Rotation.

## 9.3. Trägheitsmoment

- gegeben: um bestimmte Achse rotierenden Körper
- gesucht:  $E_{kin}$  der Rotation



- kinetische Energie eines Volumenelementes  $\Delta V_i$  im (senkrechten) Abstand  $r_i$  von der Achse ist

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{\Delta m_i}{2} \cdot v_i^2$$

↓

Tangentialgeschwindigkeit von  $m_i$

$$\Delta m_i = \rho_i \Delta V_i$$

$$v_i = \omega \cdot r_i$$

↓

Winkelgeschwindigkeit

$\frac{m}{2} v^2$  gilt natürlich weiterhin. Wir formen nur zweckmäßig um und erhalten

$$\Delta E_{\text{kin}} = \frac{\rho_i \Delta V_i}{2} \cdot \omega^2 r_i^2$$

$$E_{\text{kin}} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum_i \rho_i \Delta V_i r_i^2$$

bzw. in Integralform:

$$E_{\text{kin}} = \frac{\omega^2}{2} \int_{\text{Volumen}} r^2 \cdot \rho \, dV \quad (6)$$

- Die Größe

$$J = \int_{\text{Volumen}} r^2 \rho \, dV \quad (7)$$

heißt **Trägheitsmoment**.

- Mit  $J$  ergibt sich  $E_{\text{kin}}$  dann als

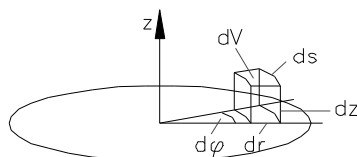
$$E_{\text{kin}} = \frac{J}{2} \omega^2 \quad (8)$$

- Analogien:  $\{v\} \rightarrow \{\omega\}$   
 $\{m\} \rightarrow \{J\}$

- Rotierender Körper lässt sich schwer in Drehung versetzen (d.h. ist träge) bzw. hat drehend viel Energie, wenn  $J$  groß ist, d.h. die gegebene Masse „außen sitzt“.

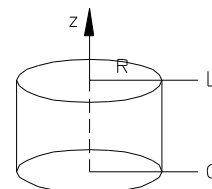
- **Beispiel:**

Berechnung von  $J$  für homogenen Zylinder ( $\rho = \text{const.}$ ) mit der Länge  $L$ :



$$dV = ds \cdot dr \cdot dz$$

$$ds = r \cdot d\varphi$$



aus (7) folgt damit:

$$J = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L r^2 \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz$$

$$J = \rho \cdot \frac{R^4}{4} \cdot 2\pi \cdot L$$

mit:  $M = \rho \cdot V = \rho \cdot \pi R^2 L$

$$J = \frac{1}{2} MR^2 \quad (9)$$

bzw.  $J = \frac{MV}{2\pi} \cdot \frac{1}{L} \quad (9')$

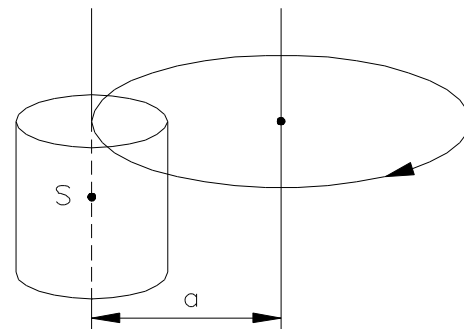
Also: Bei gegebener Masse bzw. ( $\rho = \text{const!}$ ) Volumen kann über  $R$  bzw.  $L$  das  $J$  beliebig zwischen 0 und  $\infty$  eingestellt werden (Draht bis „ $\infty$ “ ausgedehnte Platte“)

– **STEINERScher Satz:**

gegeben:  $J$  um Achse, die durch den Schwerpunkt geht ( $\equiv J_s$ )

gesucht:  $J$  um Achse, die um die Strecke  $a$  von  $S$  entfernt ist ( $\equiv J_a$ )

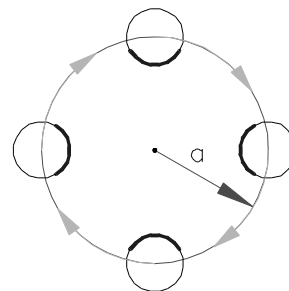
$$J_a = J_s + M \cdot a^2$$



(10)

Plausibilitätserklärung:

Rotation um „a-Achse“  $\Rightarrow$  Bewegung des Schwerpunktes um diese + Rotation des Körpers um die Schwerpunktachse



## 9.4. Dynamik bei der Rotation

### 9.4.1. Bewegungsgleichung

– Für die Translation war (vgl. <3.3.>):

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad (3-6)$$

bzw.  $\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{\vec{v}} = m \cdot \ddot{\vec{r}} \quad (3-2)$

- Analog ergibt sich für die Rotation:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (5-3)$$

bzw. für  $J = \text{const.}$  unter Verwendung von  $\alpha$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  (vgl. <2.4.>):

$$\vec{M} = J \cdot \vec{\alpha} = J \cdot \dot{\vec{\omega}} = J \cdot \ddot{\vec{\varphi}} \quad (11)$$

- In völliger Analogie zur Translation gibt es nun die verschiedenen Bewegungstypen, z.B. gleichmäßig beschleunigte Drehbewegung mit konstantem  $\vec{M}$  und  $\vec{\alpha}$  (was zu linear ansteigendem  $\vec{\omega}$  führt), usw.

#### 9.4.2. Drehschwingungen (1D)

- ...ist dem Federschwinger völlig analog (vgl. <6.1.>)
- Verformung eines Torsionsstabes führt zu entgegengewirktem Drehmoment

$$M_T = -D^* \cdot \varphi \quad (12)$$

mit:  $D^*$  ... **Richtmoment**,  $[D^*] = \text{N m}$

Maß-  $[D^*] = \text{N} \cdot \text{m}$  (= Federkonstante) SI  
einheit:

- (12) in (11) liefert als Bewegungsgleichung:

$$J \cdot \ddot{\varphi} = -D^* \cdot \varphi \quad (13)$$

völlig analog zur Gl. (6 - 2) für den Federschwinger!

- Als Lösung folgt, wieder analog (diesmal zu Gl. (6 - 4)):

$$\left. \begin{array}{l} \varphi(t) = \varphi_0 \cos \omega_0 t \\ \text{mit: } \omega_0 = \sqrt{\frac{D^*}{J}} = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \end{array} \right\} \quad (14)$$

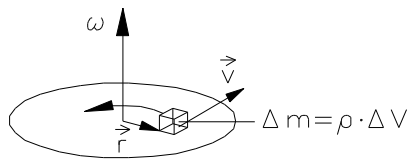
Also: steifer Stab/kleines  $J$   $\rightarrow$  schnelle Schwingung  
nachgiebiger Stab/großes  $J$   $\rightarrow$  langsame Schwingung

Diese **Torsionsschwingung** ist harmonisch.

- Auch die gedämpfte Schwingung ist völlig analog.

### 9.4.3. Drehimpulserhaltung

- Drehimpuls eines Volumenelementes eines rotierenden Körpers:



$$\begin{aligned}\vec{L} &= \vec{r} \times \vec{p} \\ \Delta \vec{L} &= \Delta m \cdot \vec{r} \times \vec{v}\end{aligned}\quad (5-1)$$

Wegen  $v \perp r$  rechnen wir skalar weiter:

$$\begin{aligned}\Delta L &= \Delta m \cdot r \cdot v & \begin{cases} v &= \omega \cdot r \\ \Delta m &= \rho \Delta V \end{cases} \\ \Delta L &= \omega r^2 \rho \Delta V\end{aligned}\quad (15)$$

- Gl. (15) gilt für ein Volumenelement eines Körpers. Für den Gesamtkörper müssen wir aufsummieren:

$$L = \omega \sum_i r_i^2 \rho_i \Delta V_i$$

bzw. integrieren:

$$\begin{aligned}L &= \omega \int_{\text{Volumen}} r^2 \rho \, dV \\ &\quad \downarrow \\ &\equiv J\end{aligned}\quad (16)$$

Vergleich mit (7) zeigt, dass (wir schreiben wieder als Vektoren)

$$\vec{L} = \vec{\omega} \cdot J \quad \text{ist.} \quad (17)$$

- Natürlich ist weiterhin gültig, dass für  $\vec{M} = 0$   $\vec{L} = \text{const.}$  ist (abgeschlossenes System), und zwar !

$$\text{wegen} \quad \vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (5-3)$$

- Dies gilt, analog zur Impulserhaltung, unabhängig von eventuellen inneren Reibungskräften. !

## 9.5. Zusammenstellung wichtiger formaler Analogien

- |  |   |
|--|---|
| – Ortsvektor:<br>$\vec{r}$   | Drehwinkel:<br>$\varphi$  |
| – Geschwindigkeit:<br>$\vec{v} = \dot{\vec{r}}$                            | Winkelgeschwindigkeit:<br>$\vec{\omega}$                                      |
|  | · Betrag<br>$\omega = \dot{\varphi}$  |
|  | · Richtung<br>Drehachse (Recht-Hand-Regel)                                    |
| – Beschleunigung:<br>$\vec{a} = \dot{\vec{v}}$                             | Drehbeschleunigung:<br>$\vec{\alpha} = \dot{\vec{\omega}}$                    |
| – kinetische Translationsenergie:<br>$E_{\text{trans}} = \frac{m}{2} v^2$  | kinetische Rotationsenergie:<br>$E_{\text{rot}} = \frac{J}{2} \omega^2$       |
| – Masse:<br>$m$  | Trägheitsmoment:<br>$J = \int r^2 \rho \, dV$                                 |
| – Kraft:<br>$\vec{F}$  | Drehmoment:<br>$\vec{M}$  |
| – Impuls:<br>$\vec{p} = m \cdot \vec{v}$                                   | Drehimpuls:<br>$\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$                               |
| – Bewegungsgleichung:<br>$\vec{F} = \dot{\vec{p}} = m \cdot \dot{\vec{v}}$ | Bewegungsgleichung:<br>$\vec{M} = \dot{\vec{L}} = J \cdot \dot{\vec{\omega}}$ |
| – Im abgeschlossenen System bleiben $\vec{p}$ und $\vec{L}$ erhalten       |   |

## 10. Rotation II

### 10.1. Trägheitstensor

– bisher:  $\vec{L} = J \cdot \vec{\omega}$  (9-17)

mit:  $J = \int r^2 \rho \, dV$  (9-7)

J war bezogen auf eine bestimmte Achse (mit Abstand r von dieser) und skalar,  $\vec{L} \sim \vec{\omega}$ .

Achse war fest zum Körper („aufgespießt“) (a), und  
fest im Raum („gelagert“) (b).

- Jetzt werden (a) und (b) in Frage gestellt.
- Aufhebung v. (a): freie Rotation eines Quaders  $\rightarrow \exists$  stabile + instabile Achsen
- Aufhebung v. (b): Fahrradkreisel  $\wedge$  Momentanstoß  $\rightarrow$  Präzession von  $\vec{\omega}$ ,  
 $\vec{L}$  weiter const.

Illustration Handel  $\Rightarrow J = f(\text{Achsenrichtung})!$

- weiter mit Plausibilitätserklärung:  
Es zeigt sich, dass es nicht ausreicht, einfach nur für jede Achsenrichtung ein  
anderes (skalares) J zu nehmen. J ist kein Skalar mehr, auch kein richtungsab-  
hängiger! !

Im allgemeinen Fall ist J ein **Tensor**:  $\underline{\underline{J}}$  !

$$\vec{L} = \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega} \quad (1)$$

- Multiplikation eines Tensors mit einem Vektor ergibt einen neuen Vektor:

Dies ist eine Transformation bezüglich Betrag und Richtung, d.h.  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  sind  
nicht mehr proportional! !

- verwendete Komponentenschreibweise in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{L} = \vec{L}_x + \vec{L}_y + \vec{L}_z = L_x \vec{i} + L_y \vec{j} + L_z \vec{k} \equiv (L_x, L_y, L_z)$$

In dieser Schreibweise wird (1) zu:

$$(L_x, L_y, L_z) = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \quad (2)$$



- zum Glück ist  $\underline{\underline{J}}$  ein symmetrischer Tensor:

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{xy} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{xz} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \quad (3)$$

- Wenn wir das Bezugssystem auf den Körper beziehen (körperfestes Bezugssystem) lässt sich **immer** eines finden, in dem sich der Tensor noch mehr vereinfacht (In diesem System gelten statt x, y, z die Achsen 1, 2, 3):

$$\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \quad (4)$$

Diejenigen Achsen, für die das gilt, heißen **Hauptträgheitsachsen**.  
 $J_1, J_2, J_3$  heißen **Hauptträgheitsmomente**.

Im Allgemeinen sind die Hauptträgheitsmomente ungleich. Wir setzen:  $J_1 \leq J_2 \leq J_3$ .

## 10.2. Trägheitsellipsoid

- $E_{\text{rot}}$  war:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} J \omega^2 \quad (9-8)$$

- wenn J ein Tensor ist, müssen wir schreiben:

$$\begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega} \\ &\quad \downarrow \\ &\equiv \vec{L} \quad (\text{lt. Gl.(9-14)}) \end{aligned} \quad (5)$$

- Wir beziehen jetzt auch  $\vec{\omega}$  auf das körperfeste Bezugssystem mit den Achsen 1, 2, 3:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 + \vec{\omega}_3 = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3 \equiv (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \quad (6)$$

Aus (5) folgt damit:

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (\omega_1, \omega_2, \omega_3) \cdot \begin{pmatrix} J_1 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 \\ 0 & 0 & J_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \quad (7)$$

ausmultipliziert folgt:

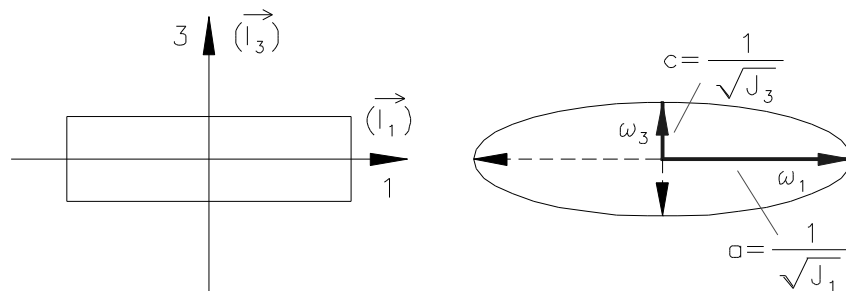
$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) \quad (8)$$

- Gl. (8) ist die Bestimmungsgleichung für ein Ellipsoid! (8) lässt sich umformen:

$$\left. \begin{aligned} E_{\text{rot}} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\omega_1^2}{a^2} + \frac{\omega_2^2}{b^2} + \frac{\omega_3^2}{c^2} \right) \\ \text{mit: } a &= \frac{1}{\sqrt{J_1}}, \quad b = \frac{1}{\sqrt{J_2}}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{J_3}} \\ a, b, c &\dots \text{Hauptachsen des Ellipsoids} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

- Anschaulich: Der Ellipsoid gibt bei gegebenen Trägheitseigenschaften (d.h. gegebenem Trägheitstensor) für jede Richtung an, wie groß  $|\vec{\omega}|$  sein muss, um einen bestimmten konstanten  $E_{\text{rot}}$ -Wert zu erreichen. !

**Beispiel:** ■



Rotation um 3 hat großes J ( $J_3 = J_{\text{max}}$ )  $\Rightarrow \omega_3$  kann klein sein  
 Rotation um 1 hat kleines J ( $J_1 = J_{\text{min}}$ )  $\Rightarrow \omega_1$  muss groß sein } \text{ für bestimmtes } E\_{\text{rot}}

- (In der Regel wird versucht, die Form des Ellipsoids aus den Trägheitseigenschaften heraus zu erklären. Dies ist aber ziemlich verwickelt wegen  $a, b, c = \frac{1}{\sqrt{J_{1,2,3}}}$ ).

- Also:  $\exists$  3 ausgezeichnete Achsen, davon einem mit  $J_{\text{max}}$ , eine mit  $J_{\text{min}}$ , diese  $\perp$  aufeinander. Für alle anderen Richtungen hochsymmetrisches Verhalten, so, dass alle  $\vec{\omega}$  für ein bestimmtes  $E_{\text{rot}}$  ein Ellipsoid formen. !

Dies gilt für **alle** starren Körper! (anschaulich schwer einleuchtend)

- Wir bilden  $\vec{L} = \underline{\underline{J}} \cdot \vec{\omega}$  in Komponentenschreibweise lt. Gl. (7), multiplizieren aus und erhalten

$$\vec{L} = J_1 \vec{\omega}_1 + J_2 \vec{\omega}_2 + J_3 \vec{\omega}_3 \quad (10)$$

⇒ Für unterschiedliche  $J_1, J_2, J_3$  kann  $\vec{L} \sim \vec{\omega}$  nur erreicht werden, wenn Rotation um eine der drei Hauptachsen erfolgt

- Also:  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_1 \Rightarrow \vec{L} = J_1 \cdot \vec{\omega}$   
Entweder
- oder  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_2 \Rightarrow \vec{L} = J_2 \cdot \vec{\omega}$
- oder  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_3 \Rightarrow \vec{L} = J_3 \cdot \vec{\omega}$

- Dabei ist die Rotation um die Achse mit:
  - maximalem  $J$  (hier  $J_3$ ) → **stabil**
  - minimalem  $J$  (hier  $J_1$ ) → **mäßig stabil**
  - mit mittlerem  $J$  (hier  $J_2$ ) → **instabil**

!

- Wenn  $\vec{\omega}$  und  $\vec{L}$  nicht mehr  $\parallel$  sind, gibt es Probleme:

a) freie Rotation:  $\vec{L} = \text{const.} \Rightarrow \vec{\omega}$  ändert sich ständig (relativ zum Körper)

b) Rotation mit

fixierter Achse:  $\vec{\omega} = \text{const.} \Rightarrow \vec{L}$  ändert sich ständig und erzeugt ein Drehmoment, das die Lager beansprucht:

$$|\vec{M}| = \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| > 0$$

⇒ Unwucht

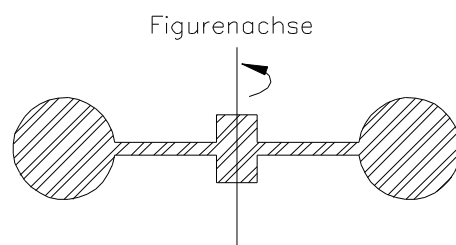
### 10.3. Symmetrischer Kreisel

- **Kreisel** = rotierender Körper, symmetrisch<sup>1</sup>, Rotation erfolgt um Achse durch Schwerpunkt, Lagerung reibungsfrei<sup>2</sup>. (Dies ist keine strenge Definition!)
- **kardanisch gelagerter Kreisel** = reibungsfrei im Schwerpunkt gelagert (Geronimo Cardano, 1501 - 1576).
- **Nutation**: Wir betrachten einen Kreisel, der um seine Figurenachse, die das **maximale  $J$**  besitzt, rotiert:

!

!

!



FA  $\parallel \vec{L} \parallel \vec{\omega} \equiv z$ -Achse

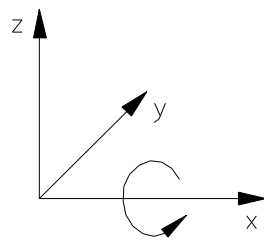
Für den Drehimpuls gilt:

$$\vec{L} = \vec{L}_z = J_{\parallel \text{FA}} \cdot \vec{\omega}_z = J_{\max} \cdot \vec{\omega}_z \quad (11)$$

<sup>1</sup> Damit sich Symmetrie des Trägheitsellipsoids auch äußerlich zeigt, also Figurenachse existiert.

<sup>2</sup> Damit Gesetzmäßigkeiten gut erkennbar sind.

- Nunmehr lassen wir für eine bestimmte Zeit  $\Delta t$  ein zusätzliches Drehmoment  $\vec{M}_x$  wirken (= Momentenstoß):



$$\vec{M}_x \Delta t = \vec{L}_x = J_{\perp FA} \cdot \vec{\omega}_x \quad (12)$$

Durch den Stoß wird der Drehimpuls des Kreisels um  $\vec{L}_x$  verändert und beträgt nunmehr:

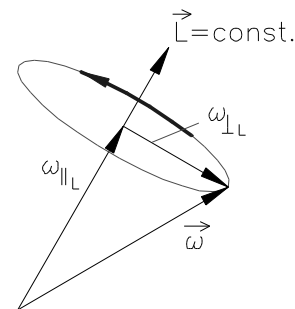
$$\vec{L} = \vec{L}_z + \vec{L}_x = J_{\parallel FA} \cdot \vec{\omega}_z + J_{\perp FA} \cdot \vec{\omega}_x = \text{const.} \quad (13)$$

Dieser neue Gesamtimpuls  $\vec{L}$  bleibt nunmehr erhalten.  $\vec{\omega}$  bleibt nicht erhalten, weder  $\vec{\omega}_x$ , noch  $\vec{\omega}_z$ , noch  $\vec{\omega} = \vec{\omega}_x + \vec{\omega}_z$ !

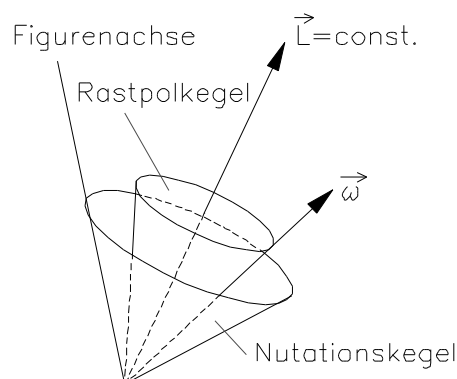
- Wir betrachten  $E_{\text{rot}}$  (lt. Gl. (5))

$$E_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \underline{J} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L} = \frac{1}{2} \omega_{\parallel L} \cdot L = \text{const.} \quad (14)$$

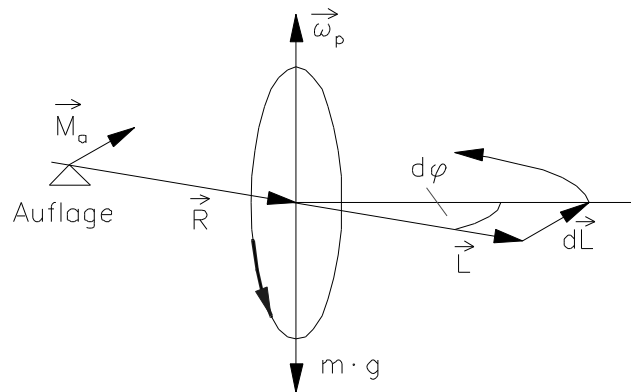
⇒ Die Komponente von  $\vec{\omega} \parallel \vec{L}$  ( $\equiv \omega_{\parallel L}$ ) ist konstant, die  $\perp$  dazu rotiert:



- Beachte:  $\vec{\omega}$  ist das „Gesamt- $\vec{\omega}$ “ (**momentane Drehachse**)
- Was ins Auge springt, sind zwei andere Dinge: Die Rotation um die Figurenachse und deren **Umlauf um die  $\vec{L}$ -Achse** ( $\equiv$  **Nutation**).
- Es lässt sich zeigen, dass beim symmetrischen Kreisel  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{L}$  und Figurenachse in einer Ebene liegen:



- **Präzession:** Nunmehr setzen wir den Kreisel einem ständigen Drehmoment aus, am einfachsten durch Lagerung entfernt vom Schwerpunkt: !



$$\vec{M}_a = \frac{d\vec{L}}{dt} \quad (5-3)$$

$\Rightarrow \vec{M}_a = \vec{R} \times m \cdot \vec{g}$  bewirkt also Rotation von  $\vec{L}$  um Achse  $\parallel \vec{g}$  (senkrechte Achse).

- Betrag von  $\omega_p$  (Präzessionsbewegung):

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{dt} \cdot \frac{1}{L} \quad (15)$$

$\omega_p \dots$  **Präzessionsfrequenz**

mit (5 - 3) ist:

$$\frac{dL}{dt} = \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = |\vec{M}_a|$$

$$\Rightarrow \omega_p = \frac{M_a}{L} \quad (16)$$

Präzessionsfrequenz bei gegebenem Kreisel (d.h.  $M_a = \text{const}$ )  $\sim \frac{1}{L}$ ;

also: schnelle Rotation  $\rightarrow$  kleine  $\omega_p$ , usw.

### Beispiele:

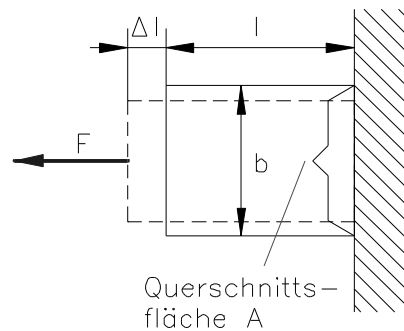
- (1)  $\vec{L} = \text{const} \Rightarrow$  Stabilität beim Diskus- bzw. Speerwerfen.
- (2) „ansatzweise“ Präzession beim freihändigen Radfahren: Kippen nach rechts führt automatisch zum Lenken nach links (vgl. Abbildung oben).
- (3) atomare Kreisel: magnetische Momente  $\wedge$  äußeres Magnetfeld  $\Rightarrow$  Präzessionsbewegung

## 11. Deformierbare Festkörper

→ „Segen der Verformung“ (kipplender Stuhl, usw.)

### 11.1. Dehnung und Kompression

- Hier steht die Kraft  $\perp$  auf der Bezugsfläche!



- In Experimenten zeigt sich:

$$\Delta l = \frac{1}{E} \cdot \frac{l \cdot F}{A}$$

mit: E ... **Elastizitätsmodul** (materialspezifisch)

Umformung ergibt:

$$\varepsilon \equiv \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{E} \cdot \frac{F}{A} \quad (1)$$

mit:  $\varepsilon$  ... **Dehnung**

Mit  $\frac{F}{A} = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} = \sigma \dots$  (**Normal-Spannung**)

folgt schließlich:

$$\varepsilon = \frac{1}{E} \cdot \sigma \quad \text{bzw.} \quad \varepsilon \cdot E = \sigma \quad (2)$$

Also: Dehnung  $\sim$  Spannung; **HOOKESches Gesetz** (gilt innerhalb bestimmter Grenzen) **!**

Betrachtungsweisen:

- bestimmtes aufgeprägtes  $\sigma$  induziert  $\varepsilon$
- bestimmtes aufgeprägtes  $\varepsilon$  induziert (inneres)  $\sigma$

Maßeinheit:  $[E] = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \equiv \text{Pa} \dots$  Pascal

SI

⇒ E hat Dimension einer Spannung, also Kraft/Fläche

Konvention: Zug  $\rightarrow \sigma > 0, \varepsilon > 0$   
 Druck  $\rightarrow \sigma < 0, \varepsilon < 0$

- der gezogene/gestauchte Körper versucht, sein Volumen konstant zu halten  
 $\Rightarrow$  Querverformung / „**Querkontraktion**“:  $b \rightarrow b - \Delta b$

!

**POISSON[sche Querkontraktions]zahl  $\mu$**

$$\mu \equiv \left| \frac{\Delta b}{b} \right| \left/ \left| \frac{\Delta l}{l} \right| \right| \quad (3)$$

- Es zeigt sich, dass

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\sigma}{E} (1 - 2\mu) \quad (4)$$

### Diskussion

◆

Für Zugspannungen ( $\sigma > 0$ ) ist  $\Delta V \geq 0 \Rightarrow \mu \leq 0,5$

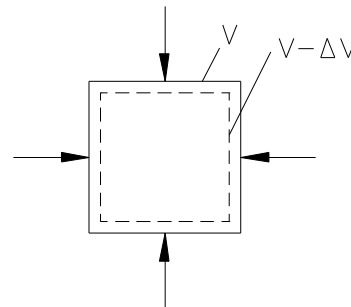
Extrema:  $\mu = 0,5 \Rightarrow \Delta V = 0$  (keine Volumenänderung;  $\Delta l$  wird voll durch  $\Delta b$  ausgeglichen)

$\mu = 0 \Rightarrow \Delta V$  maximal (keine Querverformung)

reale FK haben häufig  $\mu = 0,2 \dots 0,3$

- allseitiger Druck  $\Delta p \Rightarrow$  jede der drei Dimensionen trägt  $\frac{\Delta V}{V}$  lt. Gl. (4) bei!

$$\left| \frac{\Delta V}{V} \right| = \left| \frac{3 \cdot \Delta p}{E} (1 - 2\mu) \right|$$



### Erläuterung:

Schreibweise  $\Delta p$  (nicht  $p$ ) deshalb, weil in der Praxis der hydrostatische Druck in der Regel zum stets vorhandenen Luftdruck hinzukommt.

Vorzeichenkonvention: „Druck nach innen“ =  $p > 0$  (anders als bei  $\sigma$ ):

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{3 \cdot \Delta p}{E} (1 - 2\mu) \quad (5)$$

$$\frac{\Delta V}{V} = - \frac{\Delta p}{K} \quad (6)$$

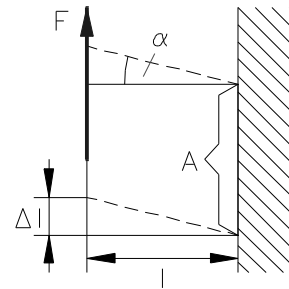
mit:  $K = \frac{E}{3(1 - 2\mu)}$  ... **Kompressionsmodul**

$\frac{\Delta V}{V}$  hängt also von  $E$  und  $\mu$  ab!

!

## 11.2. Scherung

- Im Gegensatz zu <11.1.> liegt hier der Kraftvektor in der Bezugsfläche!



- Ansonsten gilt völlig analog zu Gl. (1):

$$\Delta l = \frac{1}{G} \cdot \frac{l \cdot F}{A} \quad (7)$$

mit:  $G$  ... **Schermodul** (materialspezifisch)

Mit

$$\frac{F}{A} = \tau \text{ ... } \textbf{Scherspannung}$$

folgt schließlich:

$$\Rightarrow \quad \frac{\Delta l}{l} = \frac{1}{G} \cdot \tau \quad \frac{\Delta l}{l} = \tan \alpha \approx \alpha \text{ (für kleine } \alpha \text{)}$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{1}{G} \cdot \tau \text{ bzw. } G \cdot \alpha = \tau \quad (8)$$

$\alpha$  ... **Scherwinkel**

- **Kommentar:** ◆  
!  
Der Scherwinkel  $\alpha$  beschreibt die spezifische Verformung bei der Scherdeformation und tritt an die Stelle der Dehnung  $\epsilon$  in <11.1.>.

- Es lässt sich zeigen, dass auch zwischen  $G$  und  $E$  eine Beziehung besteht (analog Gl. (6)):

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)} \quad (9)$$

- **Kommentar:** ◆

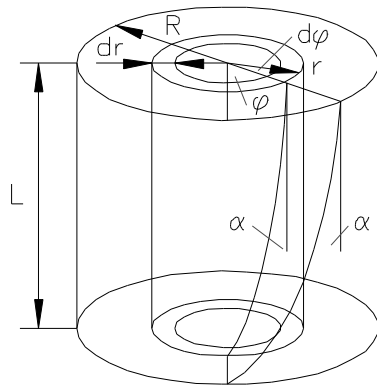
Von den vier Konstanten  $E$ ,  $G$ ,  $K$ ,  $\mu$  sind nur jeweils zwei unabhängig (vgl. die Gl. (6), (9) und analoge Zusammenhänge).

Wir haben hier Spezialfälle betrachtet! Im allgemeinen Fall gilt:

$$\begin{array}{lll} \tau, \sigma & \rightarrow & \textbf{Spannungstensor} \\ \epsilon, \alpha & \rightarrow & \textbf{Verzerrungstensor} \\ \mu, E, K, G & \rightarrow & \textbf{Elastizitätstensor} \end{array}$$



- Wichtige Anwendung der Scherung: **Drillung** (vgl. <9.4.>)



$\varphi$  ... **Torsionswinkel**

Der Scherungswinkel  $\alpha$  für ein bestimmtes Volumenelement des Materials nimmt mit  $r$  zu!

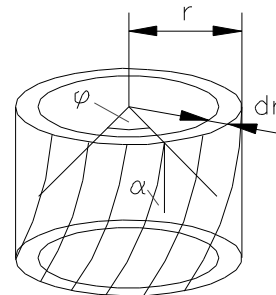
Für kleine  $\alpha$  gilt:

$$\alpha = r \cdot \frac{\varphi}{L} \quad (10)$$

Wir betrachten einen dünnen Hohlzylinder:

Seine Verdrillung liefert ein Rückstellmoment<sup>1</sup>

$$dM = r \cdot dF \quad (11)$$



Die Kraft  $dF = |d\vec{F}|$  wird durch die Scherspannung  $\tau$  aufgebracht. Es gilt:

$$\tau = \frac{dF}{dA} = G \cdot \alpha \quad (8)$$

mit  $dA = 2\pi r \cdot dr$  sowie Gl. (10) folgt für  $dF$ :

$$dF = G \cdot r \cdot \frac{\varphi}{L} \cdot 2\pi r \cdot dr \quad (12)$$

Damit erhalten wir für das Rückstellmoment  $dM(r)$  des Hohlzylinders mit dem Radius  $r$ :

$$dM(r) = \frac{2\pi \cdot G \cdot \varphi}{L} r^3 \cdot dr \quad (13)$$

<sup>1</sup> Wir rechnen jetzt mit Beträgen!

Wenn wir alle Teil-Hohlzylinder aufintegrieren, folgt:

$$M = \int_0^R dM(r) = \frac{\pi}{2} \cdot G \cdot \frac{R^4}{L} \cdot \varphi \equiv D^* \cdot \varphi \quad (14)$$

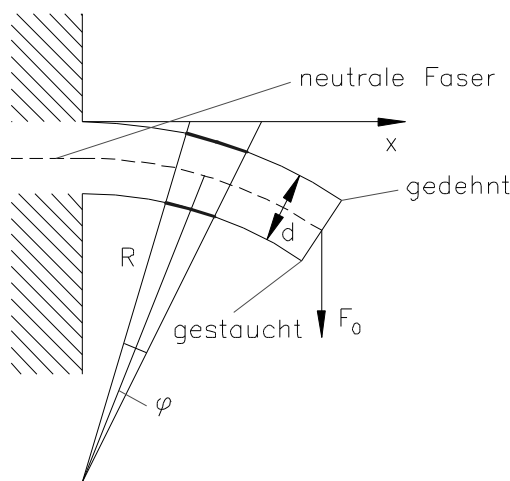
mit:  $R$  ... Radius des Vollzylinders

$D^*$  ist das Richtmoment lt. Gl. (9 - 12)!

In <9.> hatten wir nur gesagt, dass  $|\vec{M}| = D^* \cdot \varphi$ .

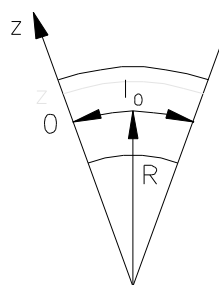
Jetzt wissen wir, wie  $D^*$  von Geometrie ( $R$ ,  $L$ ) und Material ( $G$ ) abhängt!

### 11.3. Der gebogene Balken



Der Krümmungsradius  $R$  ändert sich längs des Balkens, wir betrachten ein kurzes Stück, für das  $R \approx \text{const.}$  ist.

Wir nehmen an, dass die neutrale Faser in der Mitte liegt, dort sei  $z = 0$ .



Es gilt  $\frac{l(z)}{l_0} = \frac{z + R}{R}$

$$\Rightarrow l(z) = l_0 \cdot \frac{z + R}{R}$$

$$\Delta l(z) = l(z) - l_0 = l_0 \cdot \frac{z}{R} \quad (15)$$

- In einer Faser im Abstand  $z$  von der neutralen Faser baut sich also die folgende Spannung auf:

$$\sigma(z) = E \cdot \varepsilon = E \cdot \frac{\Delta l(z)}{l_0}$$

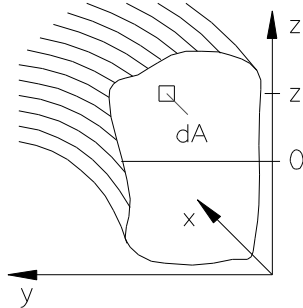
Mit (15) folgt:

$$\sigma(z) = E \cdot \frac{z}{R} \quad (16)$$

**Kommentar:**

Oberhalb der neutralen Faser herrscht Zugspannung, unterhalb Druckspannung, vergleiche Vorzeichenkonvention in <11.1.>, die auch hier gilt.

- Blick auf einen Balkenquerschnitt:



Das Flächenelement  $dA = dz \cdot dy$  erfährt eine Kraft

$$dF = \sigma(z) \cdot dA$$

Mit (16) erhält man:

$$dF = E \cdot \frac{z}{R} dz \cdot dy \quad (17)$$

Diese Kraft bewirkt ein Drehmoment:

$$dM = z \cdot dF$$

$$dM = \frac{E}{R} \cdot z^2 dz \cdot dy \quad (18)$$

Das gesamte in der Querschnittsfläche wirkende Drehmoment folgt als:

$$\left. \begin{aligned} M &= \frac{E}{R} \cdot \iint_{\text{gesamte Quer-}} z^2 dz' \cdot dy' \\ \text{mit: } I &= \iint_{\text{gesamte Quer-}} z^2 dz' \cdot dy' \\ \text{Es gilt: } M &= \frac{E}{R} \cdot I \quad \text{bzw.} \quad R = \frac{E}{M} \cdot I \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

$I$  heißt **Flächenträgheitsmoment**.

**Kommentar:**

- Ein äußeres Drehmoment biegt den Balken; andererseits wird durch eine von außen aufgeprägte Biegung ein inneres (entgegengerichtetes) Drehmoment induziert.
- $I$  ist **formal** analog zum Trägheitsmoment bei der Rotation. Es beschreibt die Steifigkeit des Balkens (Beispiel: Doppel-T-Träger!)

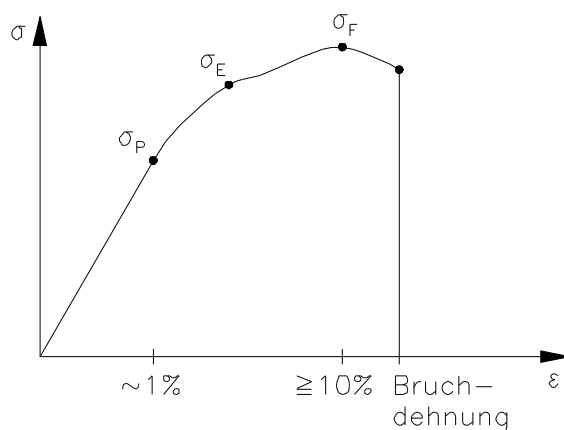
- Gl. (19) zeigt: großes  $M$  und/oder kleines  $I$  (= kleine Biegesteifigkeit) bewirken kleines  $R$ , d.h. große Biegung.

- Das Gleichgewicht des durchgebogenen Balkens ist wieder gekennzeichnet durch:

und	<ul style="list-style-type: none"> <li>* Kräftegleichgewicht</li> <li>* Drehmomentengleichgewicht</li> </ul>	$\left. \vphantom{\begin{matrix} * \\ * \end{matrix}} \right\}$ Wenn nicht $\vec{F}_{\text{ges}} = 0$ <b>und</b> $\vec{M}_{\text{ges}} = 0$ wären, würde Translation oder Rotation bewirkt.
-----	--	---

## 11.4. Inelastisches Verhalten

- Beispiel für ein reales **Spannungs-Dehnungs-Diagramm** (dennoch schematisch):



$\sigma_P$  ... Proportionalitätsgrenze (HOOKE)

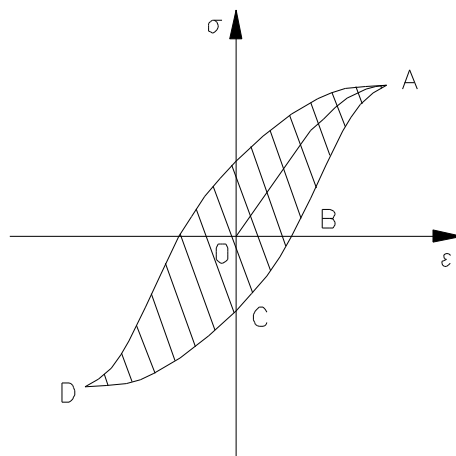
$\sigma_E$  ... Elastizitätsgrenze

$\sigma_F$  ... Festigkeitsgrenze

### Kommentar:

- für  $\sigma_P < \sigma < \sigma_E$  keine Linearität mehr, aber noch keine bleibenden Verformungen (gegebenenfalls dauert es eine Weile, bis alles zurückgeht)
- für  $\sigma > \sigma_E$  bleibende Verformungen, die bei Entlastung nicht mehr vollständig zurückgehen
- Die  $\varepsilon$ -Werte in der Abbildung sind typisch für viele Metalle.

- elastische Nachwirkung / **elastische Hysterese**:



**Kommentar:**

- 0A reiche schon in den inelastischen Bereich.
- B ... Restverformung trotz  $\sigma = 0$
- C ... notwendige „Gegenspannung“, um  $\varepsilon = 0$  zu erreichen
- Fläche innerhalb der Kurve repräsentiert die bei einem Umlauf durch die Verformung verbrauchte (= in Wärmeenergie umgewandelte) Energie W:

$$dW = F \cdot dx$$

$$\begin{aligned} F &= \sigma \cdot A \\ dx &= d(\Delta l) = l \cdot d\left(\frac{\Delta l}{l}\right) = l \cdot d\varepsilon \end{aligned}$$

$$\Rightarrow dW = A \cdot \sigma \cdot l \cdot d\varepsilon$$

$$dW = \text{Vol.} \cdot \sigma \cdot d\varepsilon$$

- Zeiteffekte
  - „richtige Festkörper“ sind Einkristalle. Sie haben definierte Grenzen für die Verformung,  $\nexists$  Zeiteinfluss.
  - Viele feste Körper sind ungeordnet (amorph). Bei ihnen hängt die Verformung auch von der Zeitdauer der Einwirkung der Spannung ab:
    - $\Rightarrow$  kurze Einwirkung: elastisches bzw. sprödes Verhalten
    - lange Einwirkung: plastisches Verhalten

## 12. Flüssigkeiten

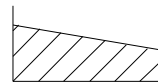
In diesem Kapitel werden ruhende Flüssigkeiten behandelt (sogenannte Hydrostatik).

### 12.1. Einleitung

- Wir reden über „richtige“ Flüssigkeiten, keine „amorphen Festkörper“!  
 $\Rightarrow$  Atome sind frei gegeneinander verschiebbar, an der Oberfläche einer Flüssigkeit können keine Tangentialkräfte auftreten.

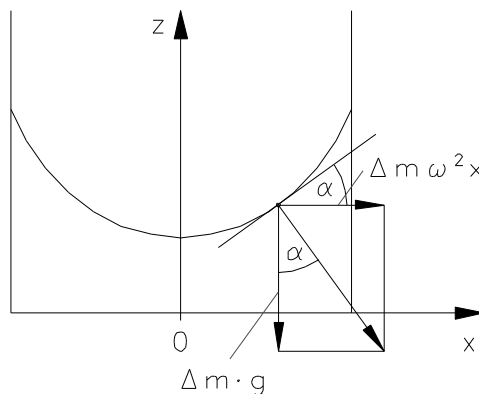
Eine freie Flüssigkeits-Oberfläche stellt sich senkrecht zur Resultierenden aller Kräfte ein. !

**Beispiel:** beschleunigt bewegter Trog ■



M. a. W.: Der Schubmodul einer idealen Flüssigkeit ist gleich Null. !

**Beispiel:**  
Gestalt von Flüssigkeitsoberflächen bei Rotation ■



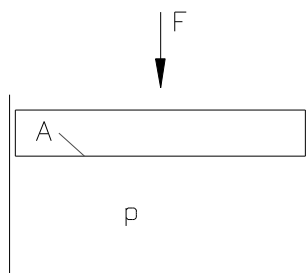
$$\tan \alpha = \frac{\Delta m \cdot \omega^2 x}{\Delta m \cdot g} = \frac{dz}{dx}$$

$\frac{dz}{dx}$  ... Steigung der OF-Kurve

Kurve ist eine Parabel!

$$\Rightarrow z = \frac{\omega^2}{2g} \cdot x^2$$

### 12.2. Statischer Druck



$$\Rightarrow \text{Druck in der Flüssigkeit: } p = \frac{F}{A} \quad (1)$$

$$\text{Maßeinheit: } \frac{\text{N}}{\text{m}^2} = 1 \text{ Pa} = 10^{-5} \text{ bar}^1 \quad \text{SI}$$

<sup>1</sup> zum Vergleich: 1 atm = 1013 mbar = 760 Torr

- Der Druck in einer Flüssigkeit ist allseitig, d.h. wirkt in alle Richtungen gleich. !
- Kompressibilität: in völliger Analogie zu Gl. (11 - 6) bildet man

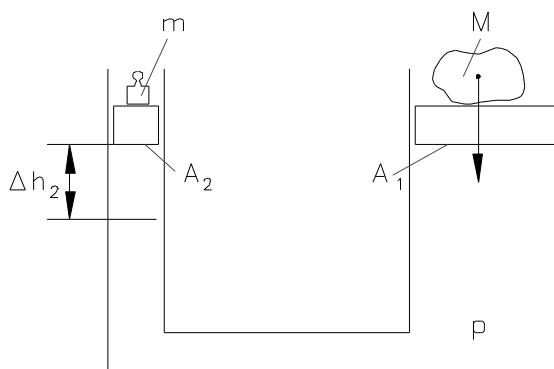
$$\kappa \equiv \frac{1}{K} = -\frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} \quad (2)$$

$\kappa$  ... **Kompressibilität**

$K$  ... Kompressionsmodul

Es zeigt sich, dass für fast alle Flüssigkeiten  $\kappa$  so klein bzw.  $K$  so groß ist, dass faktisch keine Komprimierbarkeit besteht. „Flüssigkeiten sind praktisch volumenstabil.“ !

- hydraulische Presse, Heber, o.ä.:



Felsbrocken mit Masse  $M$

$$\Rightarrow F_1 = M \cdot g$$

$$\Rightarrow p = \frac{F_1}{A_1} = \frac{M \cdot g}{A_1}$$

wegen Allseitigkeit des Druckes muss nun auch gelten

$$p = \frac{m \cdot g}{A_2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{A_2}{A_1} \cdot M$$

### Beispiel

1000 kg (Felsbrocken)  $\wedge A_2/A_1 = 1/1000 \Rightarrow$  Masse  $m = 1$  kg hält die Waage! ■

- Ist der Energiesatz verletzt?  
Wir erhöhen  $m$  um ein sehr kleines  $\Delta m$ , so dass sich der kleine Kolben um  $\Delta h_2$  nach unten senkt.

$$\Rightarrow \text{geleistete Arbeit:} \quad \begin{aligned} W_{\text{in}} &= \Delta h_2 \cdot F_2 & \approx F_2 &= p \cdot A_2 \\ W_{\text{in}} &= \Delta h_2 \cdot A_2 \cdot p \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{mit:} \quad \Delta h_2 \cdot A_2 = V \quad \dots \text{Flüssigkeitsvolumen}$$

Das Flüssigkeitsvolumen  $V$  strömt in den dicken Kolben und hebt diesen um  $\Delta h_1$  gegen die Kraft  $F_1$ :

$$\Rightarrow \text{am Fels geleistete Arbeit: } \begin{aligned} W_{\text{out}} &= \Delta h_1 \cdot F_1 & \approx F_1 &= p \cdot A_1 \\ W_{\text{out}} &= \Delta h_1 \cdot A_1 \cdot p \end{aligned} \quad (1)$$

Wobei wiederum  $\Delta h_1 \cdot A_1 = V$  ist.

$\Rightarrow$  Weil  $V$  in beiden Fällen gleich ist und  $p$  sowieso konstant, ist  $W_{\text{in}} = W_{\text{out}}$ .  
Hydraulik spart Kraft und braucht mehr Weg  $\rightarrow$  Goldene Regel der Mechanik. Die Energie bleibt erhalten.

### 12.3. Schweredruck

- Wir haben bis jetzt außer Acht gelassen, dass sich in einer Flüssigkeit ein **Schweredruck** aufbaut:

Gewicht einer Flüssigkeitssäule (Querschnitt  $A$ , Höhe  $h$ , Dichte  $\rho$ )

$$F_G = A \cdot h \cdot \rho \cdot g \quad (3)$$

$\Rightarrow$  Schweredruck  $p(h)$ :

$$p(h) = \frac{F_G}{A} = h \cdot \rho \cdot g \quad (4)$$

- Schweredruck nimmt mit der Tiefe zu und hängt nur von der Tiefe ab, sofern  $\rho$  druckunabhängig ist, d.h. Inkompressibilität besteht.

**Beispiel:** Wasser ( $\rho \approx 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ ) ■

$\Rightarrow 1 \text{ bar} \approx 1 \text{ atm}$  pro 10 m Tiefe, Kompressibilität  $\kappa = \frac{1}{K} \approx 5 \cdot 10^{-10} \text{ Pa}^{-1}$

$\Rightarrow$  In 10.000 m Tiefe (bei 1000 atm) ist Dichte nur um 5% erhöht!

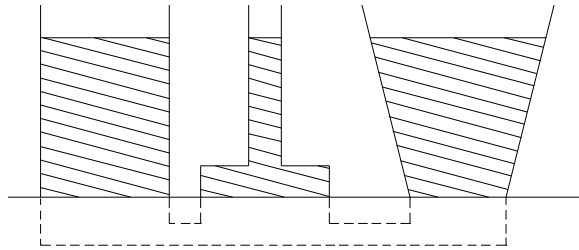
- Schweredruck und statischer Druck wirken zusammen. Oft ist einer der beiden vernachlässigbar: !

· Meer (s.o.)  $\Rightarrow$  statischer Luftdruck vernachlässigbar

· Hydraulikanlage  $\Rightarrow$  Schweredruck vernachlässigbar

- **hydrostatisches Paradoxon:** „Der Bodendruck ist unabhängig von der Form des Gefäßes.“ (nur abhängig von der Höhe!) !





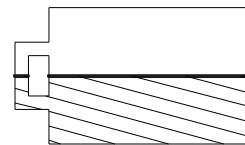
Alle diese Gefäße haben gleichen Bodendruck!

Wenn wir die Gefäße unten verbinden (z.B. ein bereits gefülltes Verbindungsstück anfügen), wird sich wegen des einheitlichen Drucks in Bodennähe nichts ändern.

⇒ kommunizierende Gefäße haben gleiches Flüssigkeitsniveau!

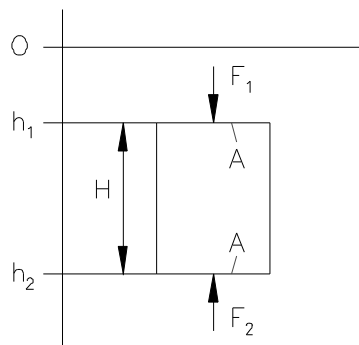
### Beispiele:

- Wasserstandsanzeiger:
- Schlauchwaage



## 12.4. Auftrieb und Schwimmen

- quaderförmiger Körper in einer Flüssigkeit, Höhe  $H$ , Grundfläche  $A$ :



Schweredruck der Flüssigkeit in der Tiefe  $h$  beträgt:

$$p = h \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot g \quad (5)$$

- ⇒ auf obere Fläche wirkt Kraft  $F_1 = h_1 \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot A$  nach unten  
auf untere Fläche wirkt  $F_2 = h_2 \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot A$  nach oben

In der Summe erfährt der Körper die **Auftriebskraft**  $F_A$

$$= \text{Volumen } V! \quad (h_2 - h_1 = H)$$

↑

$$F_A = F_2 - F_1 = \rho_{\text{Fl}} \cdot g \cdot A \cdot (h_2 - h_1)$$

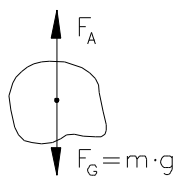
$$F_A = g \cdot \rho_{\text{Fl}} \cdot V \quad (6)$$

Die Auftriebskraft entspricht dem Gewicht der verdrängten Flüssigkeitsmenge. !

- Die o.g. Herleitung ist zwar vereinfacht, Gl. (6) gilt aber für *beliebig* geformte Körper.

- Das Verhalten des Körpers wird von  $\vec{F}_A + \vec{F}_G$  bestimmt:

!

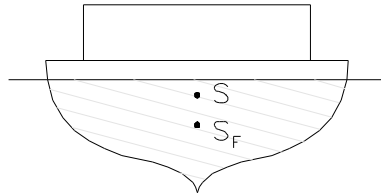


$|\vec{F}_A| < |\vec{F}_G| \Rightarrow$  Sinken; Körper ist schwerer

$|\vec{F}_A| = |\vec{F}_G| \Rightarrow$  Körper schwebt

$|\vec{F}_A| > |\vec{F}_G| \Rightarrow$  Körper schwimmt,

d.h. er taucht nur soweit ein, wie nötig ist, damit  $|\vec{F}_A| = |\vec{F}_G|$  ist:



Also:

Gewicht der verdrängten Wassermenge  
= Gesamtgewicht des Schiffes

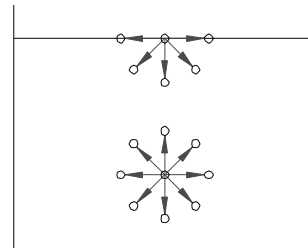
- Stabilität:  
Schwerpunkt S des Schiffes = Angriffspunkt der Schwerkraft  
Schwerpunkt  $S_F$  der verdrängten Flüssigkeit = Angriffspunkt der Auftriebskraft  
  
 $\Rightarrow$  völlige Kintersicherheit nur, wenn S tiefer liegt als  $S_F$  (schwerer Kiel); an-  
sonsten existieren unterschiedliche kritische Kippwinkel

## 12.5. Oberflächenspannung

- Experimente zeigen: Flüssigkeiten sind bestrebt, ihre Oberfläche klein zu halten

- Deutung:  $\exists$  gegenseitige Anziehung der Moleküle der Flüssigkeit, wodurch diese zusammengehalten wird.

Moleküle an der Oberfläche erfahren **resultierende Kraft** in die Flüssigkeit hinein  $\rightarrow$  „Gummihaut“



2 Seiten **einer** Sache!  $\updownarrow$

- Energiedeutung: Ausbildung einer chemischen Bindung bedeutet **Energieminimierung** (Bindungsenergie wird frei!). Moleküle an der Oberfläche sind unvollständig abgebunden  $\Rightarrow$  Oberfläche ist energetisch benachteiligt ( $\exists$  zusätzliche  $W_{ob}$ )  
 $\Rightarrow$  Streben nach Minimierung der Oberfläche
- Oberflächenenergie  $W_{ob}$  ist proportional zur Oberfläche:

$$W_{ob} = \sigma \cdot A$$

$$\sigma = \frac{W_{ob}}{A}$$

$\sigma$  ... *spezifische Oberflächenenergie*

}

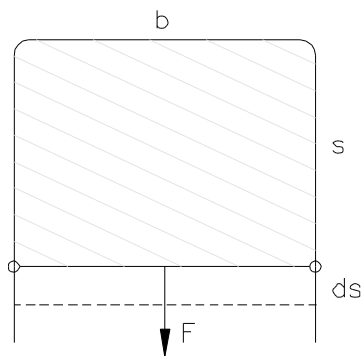
(7)

Maßeinheit:  $[\sigma] = \frac{\text{J}}{\text{m}^2}$  (Energie pro Fläche) SI

Die spezifische Oberflächenenergie heißt auch **Oberflächenspannung**.

!

- Experiment: Aufspannen eines Flüssigkeitshäutchens mittels Drahtbügel:



Die mechanische Arbeit

$$\Delta W = F \cdot ds \quad (8)$$

vergrößert die Oberflächenenergie um

$$\begin{aligned} \Delta W_{\text{ob}} &= \sigma \cdot \Delta A & \Delta A &= 2 \cdot b \cdot ds \\ & & \downarrow & \\ & & \text{2 Oberflächen!} & \\ \Delta W_{\text{ob}} &= \sigma \cdot 2 \cdot b \cdot ds \end{aligned} \quad (9)$$

Gleichsetzung von (8), (9)

$$\begin{aligned} \Rightarrow F \cdot ds &= \sigma \cdot 2 \cdot b \cdot ds \\ \Rightarrow \sigma &= \frac{F}{2b} \end{aligned} \quad (10)$$

Wir können  $\sigma$  also auch als Zugkraft pro Länge (in der Oberfläche), also als sogenannte **Linien­spannung** auffassen:

$$\begin{aligned} \text{Maßeinheit: } [\sigma] &= \frac{\text{N}}{\text{m}} = \frac{\text{N} \cdot \text{m}}{\text{m}^2} \dots (\text{Kraft/Länge}) & \text{SI} \\ &= \frac{\text{J}}{\text{m}^2} \dots (\text{Energie/Fläche}), \text{ also identisch zu Gl. (6)!} \end{aligned}$$

- Der Innendruck in einer Seifenblase:

Eine Verkleinerung des Radius um  $dr$  reduziert die Oberfläche  $OF$  einer Seifenblase um

$$\begin{aligned} dOF &= \frac{dOF}{dr} \cdot dr & \frac{d(4\pi r^2)}{dr} &= 8\pi r \\ dOF &= 8\pi r \, dr \end{aligned} \quad (11)$$

Die Seifenblase hat eine äußere und eine innere Oberfläche, daher ergibt das  $dOF$  lt. Gl. (11) eine Reduzierung der Oberflächenenergie um

$$dW_{\text{ob}} = 16\pi r \, dr \cdot \sigma \quad (12)$$

Bei r-Reduzierung muss aber gegen den Innendruck mechanische Arbeit geleistet werden:

$$dW = F \cdot dr$$

$$F = \text{Kugeloberfläche} \cdot \frac{\text{Kraft}}{\text{Kugeloberfläche}}$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

$$4\pi r^2 \quad p$$

$$dW = 4\pi r^2 \cdot p \cdot dr \quad (13)$$

Im Gleichgewicht haben sich r und p so eingestellt, dass  $dW = dW_{ob}$  ist.

⇒ Gleichsetzung von (12) und (13) liefert

$$p = \frac{4\sigma}{r} \quad (14)$$

**Kommentar:**

- p ist der in der Blase gegenüber der Umgebung herrschende Überdruck
- p wächst mit zunehmendem  $\sigma$  und **abnehmendem** r!
- Entsprechend Gl. (14) herrscht auch in jeder einfachen, nach außen mit Radius r gekrümmten Oberfläche ein Druck:

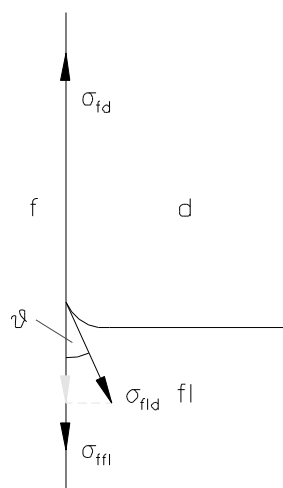
$$p = \frac{2\sigma}{r} \quad (15)$$

## 12.6. Fest-flüssig-Grenzflächen

### 12.6.1. Benetzung

– Wir betrachten jetzt 3 Phasen:

- Festkörper,
- Flüssigkeit,
- Gasphase (Luft + Dampf der Flüssigkeit + Dampf des Festkörpers).



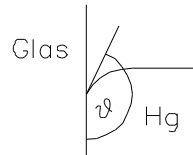
Einstellen des Gleichgewichts an einer senkrechten Wand in einer Flüssigkeit bedeutet Einstellung eines Randwinkels  $\theta$  so, dass

$$\sigma_{fl} + \sigma_{fd} \cdot \cos \theta = \sigma_{fd} \quad (16)$$

(YOUNGSche Gleichung)

– Der gezeichnete Fall ist der der **Benetzung** ( $\theta < 90^\circ \Rightarrow \sigma_{fd} > \sigma_{fl}$ )

- andere Möglichkeit: **Nichtbenetzung**  
( $\theta > 90^\circ \equiv \sigma_{fd} < \sigma_{ff}$ )



- Wenn nun selbst  $\theta = 0$  nicht reicht, um  $\sigma_{fd}$  zu kompensieren, gilt

$$\sigma_{fd} > \sigma_{fd} + \sigma_{ff}$$

Dann findet **vollständige Benetzung** statt, d. h. die Flüssigkeit kriecht als sehr dünne Schicht ganz die Wand hoch;  $\theta = 0^\circ$ ;  $\sigma_{fd}$  ist unendlich groß.

- ähnlich beim Tropfen auf einer Oberfläche:

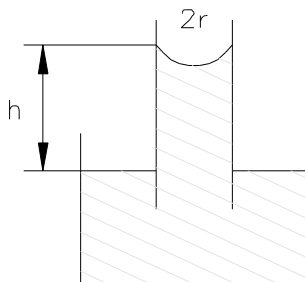


- Benetzung ist wichtig!

· Waschmittel (Reinigungswirkung)	}	Benetzung
· Spülmittel („ohne abzutrocknen“)		
· Gefieder der Wasservögel	}	Nichtbenetzung
· selbstreinigende Oberflächen		

### 12.6.2. Kapillarität

- In sehr dünnen Röhren steigen Flüssigkeiten höher als in ihrer Umgebung.



Zur Deutung nehmen wir vereinfachend an, dass **vollständige Benetzung** vorliegt, d.h.  $\theta = 0^\circ$  ist. (Ansonsten tritt dieser Effekt auch auf, aber nicht so ausgeprägt.)

- verschiedene Deutungen möglich (mehrere Seiten derselben Medaille):

a) Die zusätzliche Flüssigkeitssäule mit

$$F_G = \pi r^2 h \cdot \rho \cdot g$$

hängt an ihrer Randlinie (Länge  $2\pi r$ ) mit der Linienspannung  $\sigma$  fest.

⇒ Infolge dieser Spannung tritt eine „Haltekraft“  $F$  auf:

$$F = 2\pi r \cdot \sigma$$

Die Haltekraft kompensiert das Gewicht der zusätzlichen Flüssigkeitssäule:

$$\begin{aligned}\pi r^2 h \rho g &= 2\pi r \sigma \\ h &= \frac{2\sigma}{r \rho g}\end{aligned}\tag{17}$$

Also: Effekt umso größer, je größer  $\sigma$  ist und je kleiner  $r$  und  $\rho$  sind.

b) Der Schweredruck der Zusatzsäule ist

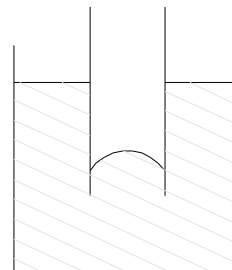
$$p_s = \frac{\text{Gewichtskraft}}{\text{Grundfläche}} = \frac{\pi r^2 h \rho g}{\pi r^2} = h \rho g$$

Er wird kompensiert durch den negativen Druck (d.h. Zug) der hier konkav gewölbten Oberfläche lt. Gl. (15), also

$$\begin{aligned}\frac{2\sigma}{r} &= h \rho g \\ \downarrow \\ \text{Gl. (15)}\end{aligned}\quad \quad \quad \equiv \text{Gl. (17)}$$

c) Man erhält ebenfalls das gleiches Ergebnis, wenn man alle Energien betrachtet (Oberflächenenergien,  $E_{\text{pot}}$  der Säule, usw.) und das Minimum sucht.

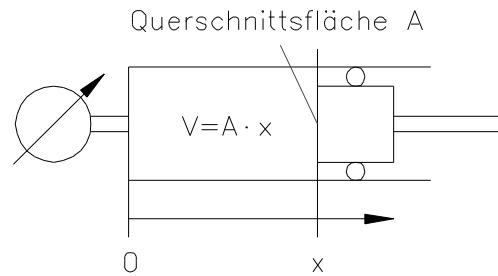
- Im nichtbenetzendem Fall (z.B. Glas/Hg) tritt Kapillardepession auf:



## 13. Gase

### 13.1. Kompressibilität

- Experiment:



- Ergebnis:  $p \cdot V = \text{const. (bei konst. T)}$  (Gesetz von BOYLE-MARIOTTE) (1)

bzw.  $V = \frac{\text{const.}}{p}$

nach Ableitung folgt

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dp} &= -\frac{\text{const.}}{p^2} = -\frac{V}{p} & | :V \\ \frac{1}{V} \cdot \frac{dV}{dp} &= -\frac{1}{p} \\ &= -\frac{1}{K} = -\kappa \end{aligned} \quad (12-2)$$

Also: Kompressibilität ...  $\kappa = \frac{1}{K} = \frac{1}{p}$  (plausibel!) (2)

- gegeben: Gas der Masse M im Volumen V  $\Rightarrow$  für Massendichte  $\rho$  gilt

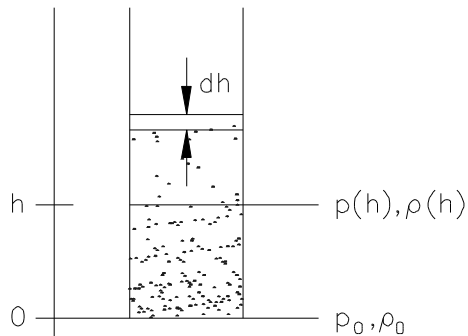
$$\rho = \frac{M}{V}$$

mit Gl. (1)

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{1}{V} &= \frac{p}{\text{const.}} \\ \Rightarrow \quad \rho &= M \cdot \frac{p}{\text{const.}} \\ \Rightarrow \quad \rho &\sim p \text{ bzw. } \frac{\rho}{p} = \text{const} \end{aligned} \quad (3)$$

### 13.2. Schweredruck in Gasen

- vgl. <12.3.>: Schweredruck in Flüssigkeiten (dort: Inkompressibilität!)



Bei Gasen  $\exists$  jedoch Kompressibilität  $\Rightarrow$  Dichte in jeder Höhe wird von der darüber liegenden Säule bestimmt!

$\Rightarrow$  Gl. (12 - 4) gilt nur noch für Säule mit infinitesimaler Höhe  $dh$ :

$$dp = -\rho(h) \cdot g \cdot dh^1 \quad (4)$$

- Lösung der Differentialgleichung (4): Wir wissen aus Gl. (3), dass  $\frac{\rho}{p} = \text{const}$  ist. Dies gilt auch für die Erdoberfläche (Index 0) bzw. jede beliebige Höhe  $h$ :

$$\frac{\rho}{p} = \text{const} = \frac{\rho_0}{p_0} = \frac{\rho(h)}{p(h)} \quad (5)$$

Mit Gl. (5) wissen wir nun, dass

$$\rho(h) = \frac{\rho_0}{p_0} \cdot p(h)$$

ist, also

$$dp = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot p(h) \cdot g \cdot dh \quad (4')$$

Gl. (4') umgestellt liefert:

$$\begin{aligned} \int_{p_0}^{p(h)} \frac{dp}{p(h')} &= -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot \int_0^h dh' \\ \ln\left(\frac{p(h)}{p_0}\right) &= -\frac{\rho_0 \cdot g}{p_0} \cdot h \\ p(h) &= p_0 \cdot e^{-\frac{\rho_0 \cdot g \cdot h}{p_0}} \end{aligned} \quad (6)$$

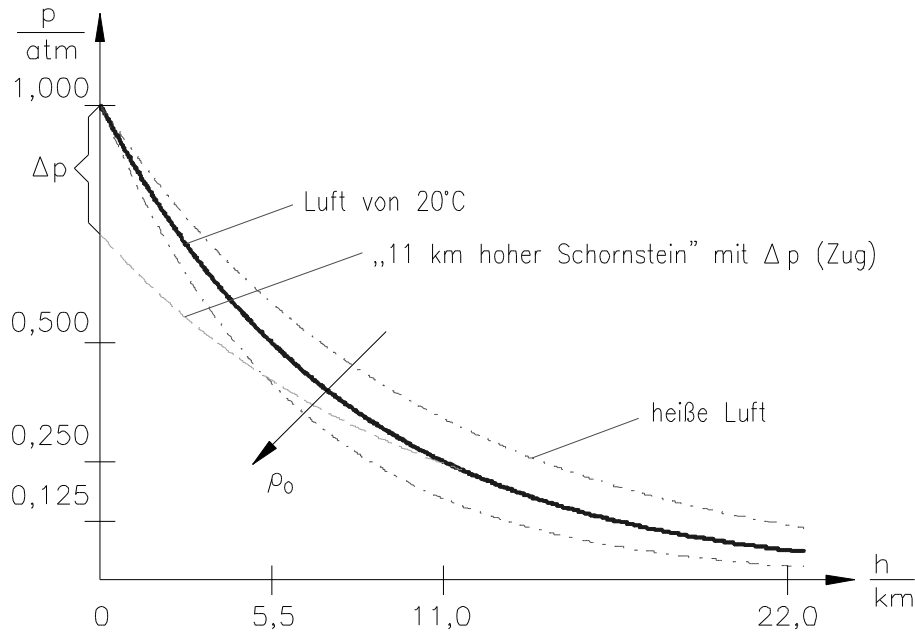
Dies ist die **barometrische Höhenformel**.

<sup>1</sup> Das negative Vorzeichen gilt wegen der  $p$ -Abnahme mit  $h$ -Zunahme. - In <12.> war dies bedeutungslos!



**Kommentar:**

- Wenn wir die richtigen  $\rho_0$ ,  $p_0$ ,  $g$  einsetzen, folgt, dass  $p(5500 \text{ m}) \approx 0,5 \cdot p_0$  ist. Außerdem führt jede weitere Verdopplung von  $h$  zu einer Halbierung von  $p$  (Potenzgesetz  $a^{np} = (a^n)^p$ !).



- Innerhalb der Höhenbereiche, in dem  $p$  faktisch = 0 wird, darf  $g = \text{const.}$  betrachtet werden.
- Gl. (6) gilt für  $T = \text{const.}$

## 14. Strömende Flüssigkeiten und Gase

### 14.1. Vorbemerkungen

- Es gibt viele Analogien zwischen Flüssigkeiten und Gasen (wegen der freien Verschiebbarkeit der Teilchen); Hauptunterschied liegt in der Kompressibilität

jedoch:

Bei  $v \ll v_{\text{Schall}}$  verhalten sich auch strömende Gase praktisch inkompressibel, d.h. es erfolgt kein Aufbau von Druckwellen. !

⇒ Daher im folgenden Annahme eines inkompressiblen Fluids.

- Beschreibung von Strömungen nach EULER (1707 - 1783) anhand des Geschwindigkeitsfeldes  $\vec{v}(\vec{r})$ .

Sonderfall:  $\vec{v}(\vec{r}) = \text{zeitlich const.} \Rightarrow \text{stationäre Strömung}$

- stationäres Strömungsfeld beschrieben durch **Stromlinien**:

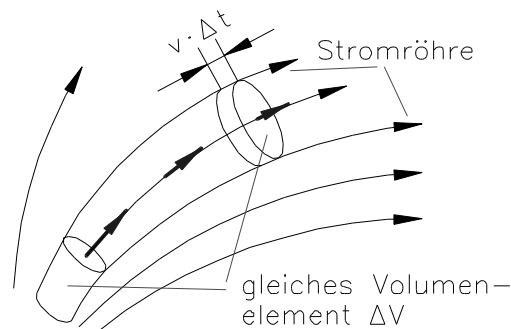
**Stromröhre** = Bündel von Stromlinien

Tangente an der Stromlinie

→ Richtung von  $\vec{v}$

Dichte der Stromlinien

→ Betrag von  $\vec{v}$



- Die Abbildung zeigt, dass pro Zeiteinheit  $\Delta t$  ein strömendes Volumenelement  $\Delta V$  an jeder Stelle der Stromröhre konstant ist

$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A \cdot v = \text{const. (innerhalb der Stromröhre)} \quad (1)$$

$\dot{V}$  ... **Volumenstrom**

Gl. (1) heißt **Kontinuitätsgleichung**: Wenn in der Stromröhre kein Medium erzeugt oder vernichtet wird, muss  $\dot{V}$  konstant bleiben und  $v$  sich entsprechend  $A$  einstellen. !

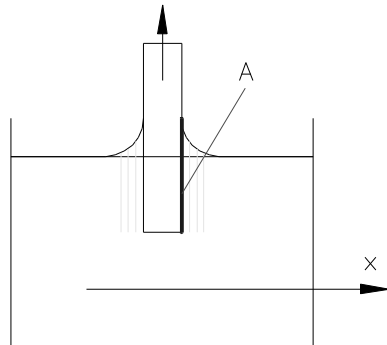
#### Kommentar:

Hier ist die Quellen- und Senkenfreiheit eigentlich fast selbstverständlich (ein Beispiel für eine Ausnahme wäre eine chemische Reaktion im strömenden Gas, die das Volumen verändert). In der Elektrodynamik ist das anders, obwohl ansonsten viele Analogien existieren! ◆

## 14.2. Innere Reibung

... in strömenden Medien

**Beispiel:** Löffel aus Honig herausziehen



⇒ Geschwindigkeitsübergang...  
 von  $v = 0$  (entfernt vom Löffel)  
 auf  $v = v_{\text{Löffel}}$  (an der Löffel-Oberfläche)

– Es zeigt sich, dass für die Reibungskraft  $F_R$  gilt

$$F_R \sim A \cdot \frac{dv}{dx}$$

mit:  $A$  ... Wechselwirkungsfläche

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx} \quad (2)$$

mit:  $\eta$  ... **Viskosität**, dynamische Zähigkeit

$$\tau_R = \frac{F_R}{A} = \eta \cdot \frac{dv}{dx} \quad (3)$$

$\tau_R$  ... Reibungs-Schubspannung; viskose Schubspannung

Maßeinheit:  $[\eta] = \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$  SI

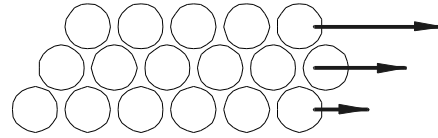
Gl. (2), (3) heißen NEWTONSches Gesetz der inneren Reibung.

**Beispiele:**

Substanz		$\eta$ in $\text{Nsm}^{-2}$	
Glycerin	20°C	1,53	} (typisch: Abnahme mit steigendem T!)
H <sub>2</sub> O	0°C	0,0018	
	20°C	0,0010	
	100°C	0,0003	
Luft	0°C	0,00002	
H <sub>2</sub>	0°C	0,00001	

<sup>1</sup> Vorzeichen in Gl. (2) stimmt, da  $\frac{dv}{dx} < 0$ !

- Deutung:  
Überwindung der Potentialhügel beim  
Gegeneinander-Verschieben der Flüssig-  
keitsschichten



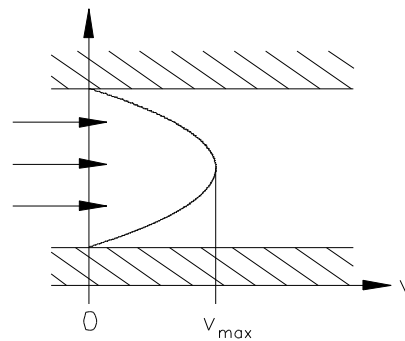
- Strömungen, deren Verhalten durch die innere Reibung bestimmt ist, d.h., bei denen sich nicht vermischende Schichten des Mediums gegeneinander verschoben werden, heißen **laminare Strömungen**.

!

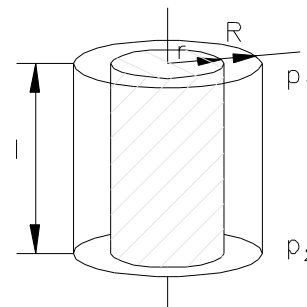
### 14.3. Beispiele für laminare Strömungen

#### 14.3.1. Laminare Rohrströmung

- Die Flüssigkeit haftet an der Wand und hat in der Mitte des Rohres maximale Geschwindigkeit



- Wir betrachten nun einen Flüssigkeitszylinder um die Rohrachse:



- An der Mantelfläche wirkt die Reibungskraft (mit Gl. (2))

$$F_R = 2\pi r l \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr} \quad (4)$$

↓  
(=  $A_{\text{Mantel}}$ )

- Auf seine Grund- und Deckflächen wirkt die Netto-Druckkraft

$$F_p = \pi r^2 (p_1 - p_2) \quad (5)$$

↓  
(=  $A_{\text{Grund/Deck}}$ )

$F_p$  treibt die Flüssigkeit voran und überwindet genau  $F_R$ :  $F_p = F_R$ .

⇒ aus (4), (5) erhalten wir

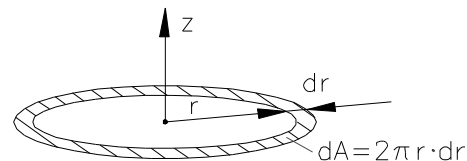
$$\frac{dv}{dr} = \frac{p_1 - p_2}{2\eta l} \cdot r$$

und nach Integration

$$v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta l} (R^2 - r^2) \quad (6)$$

Dies ist ein parabolisches Geschwindigkeitsprofil  $v(r) = A - B \cdot r^2$ , wie in der Skizze schon gezeigt.

- Interessant ist die Durchflussmenge  $\dot{V}$  (Volumen/Zeit) bei gegebenen  $\Delta p$ ,  $\eta$ ,  $R$ . Wir betrachten einen Hohlzylinder mit der Dicke  $dr$ :



Der Volumenstrom im Querschnitts-Flächenelement  $dA$  ist

$$\begin{aligned} & (dz \cdot dA = dV!) \\ & \quad \uparrow \\ \left. \frac{dV}{dt} \right|_{\text{Fl.-Element}} &= \frac{dz}{dt} \cdot dA = v(r) \cdot 2\pi r \, dr \end{aligned}$$

Gesamt-Volumenstrom im Rohr durch Integration über alle Flächen-Elemente:

$$\dot{V} = \int_0^R v(r) \cdot 2\pi r \, dr$$

mit  $v(r)$  lt. Gl. (6) folgt

$$\dot{V} = \frac{\pi}{8\eta l} \cdot \Delta p \cdot R^4 \quad (7)$$

Dies ist das **HAGEN-POISEUILLESche Gesetz**.

#### Kommentar:

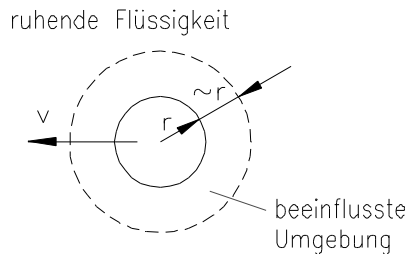
Radius geht mit 4. Potenz ein!

Gl. (7) stellt das „OHMSche Gesetz für die laminare Rohrströmung“ dar:

$$\left\{ \begin{aligned} I &= \frac{U}{R} \\ \dot{V} &= \frac{\text{Triebkraft}}{(\text{Strömungs-})\text{Widerstand}} = \frac{\Delta p}{\left( \frac{8\eta l}{\pi R^4} \right)} \end{aligned} \right.$$

### 14.3.2. Laminares Umströmen einer Kugel

- An diesem Beispiel soll eine in der Strömungsmechanik häufig verwendete, sehr nützliche Betrachtungsweise erläutert werden: die Unterteilung in einen Nahbereich, in dem das Fluid anhaftet, und den unbeeinflussten Außenbereich der Strömung.
- Experiment: Wir ziehen eine Kugel mit der Geschwindigkeit  $v$  durch eine Flüssigkeit.



· Nahe Kugel-Oberfläche ist Strömungsgeschwindigkeit =  $v$   
(Anhaften der Flüssigkeit)

· In einiger Entfernung von der Kugel ruht die Flüssigkeit („merkt nichts“)<sup>1</sup>

$$\Rightarrow \frac{dv}{dr} \approx \frac{v}{r}; \text{ Wechselwirkungs-Fläche } A = \text{Kugel-OF} = 4\pi r^2$$

Damit ergibt sich für Gl. (2)

$$F_R = \eta \cdot A \cdot \frac{dv}{dx} = \eta \cdot 4\pi r^2 \cdot \frac{v}{r}$$

$$F_R = -4\pi\eta v$$

Die ungleich schwierigere korrekte Herleitung lieferte

$$F_R = -6\pi\eta v \quad (3 - 19)$$

### 14.4. Turbulente Strömungen, Ähnlichkeit, Strömungsgrenzschicht

- Experiment zeigt: Bei bestimmter Geschwindigkeit bricht laminare Strömung zusammen: Wirbelbildung; Nichtlinearität, chaotisches Verhalten = **Turbulenz** !

- Es zeigt sich, dass  $v_{\text{krit}}$  in Abhängigkeit von

- $\rho$  ... Dichte
- $\eta$  ... Viskosität
- $l$  ... Abmessung (z.B. Kugel-Durchmesser)

unterschiedliche Werte annehmen kann

- also: entscheidend ist nicht  $v$ , sondern eine Größe  $Re$  !

$$Re \equiv \frac{\rho \cdot v \cdot l}{\eta} \quad (8)$$

Re... **REYNOLDSche Zahl**

<sup>1</sup>Die hier betrachtete "r-Umgebung" ist nicht identisch mit der Grenzschichtdicke in <14.4>.

$l$  ist eine typische Abmessung des strömenden Systems.

$Re$  ist dimensionslos:

$$\text{Maß-} \quad [Re] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{\text{m}}{1} \cdot \frac{\text{m} \cdot \text{s}}{\text{kg}} = 1$$

SI

$Re$  hat die physikalische Bedeutung des Quotienten aus kinetischer Energie und Reibungsenergie.

- Bei einem bestimmten  $Re$  schlägt die Strömung um. Der Übergang ist jedoch nicht scharf, sondern ein **Bereich** (z.B.  $Re = 1000 - 2000$ )<sup>1</sup> !

Gründe:

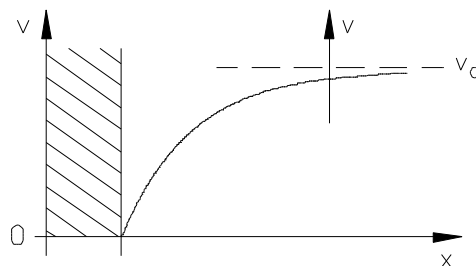
- Einfluss der Oberflächen-Rauheit, u.ä.
- Strömung kann „instabil-laminar“ sein (gewisse Analogie zur unterkühlten Flüssigkeit)
- Strömungen mit gleicher  $Re$  sind **ähnlich** → Modellierung im Wind- oder Strömungskanal !

kleines  $l$  (Schiffsmodell) ⇒ Anpassung von  $v$  sowie gegebenenfalls  $\rho$ ,  $\eta$  damit gleiches  $Re$  herauskommt.

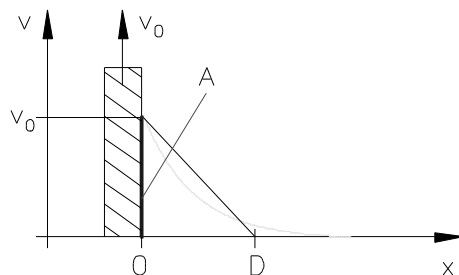
- **Strömungsgrenzschicht:** Fluid haftet an umströmten Oberflächen (Kugel, Rohrwandung), d.h.  $v = 0$ , und gleicht sich dann allmählich an die in einiger Entfernung herrschende „ungestörte Strömung“ an.

**Beispiel:** ■

- Fluid an einer Wand



- Herausziehen einer Platte aus ruhendem Fluid



Die beiden dargestellten Fälle sind völlig analog!

<sup>1</sup> Deswegen ist die Frage „Was ist die typische Länge bei einer bestimmten unregelmäßigen Form?“ auch nicht so kritisch!

- Übergangsbereich wird durch Grenzschicht **definierter** Dicke  $D$  mit linearem Geschwindigkeitsübergang angenähert (s. Abbildung zur bewegten Platte):

$$\left. \begin{aligned} v(x) &= v_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{D}\right) && \text{für } x < D \\ &= 0 && \text{für } x \geq D \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Mit Gl. (9) vereinfacht sich das NEWTONsche Reibungsgesetz (Gl. (2)) zu

$$\begin{aligned} F_R &= -\eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{D} \\ &\quad \downarrow \\ &= - \frac{dv}{dx} \end{aligned} \quad (10)$$

Um die Platte herauszuziehen, muss stetig eine Kraft  $F = -F_R$  aufgewandt werden. Diese führt lt. Gl. (3 - 6) zu einem Impulsübertrag an das Fluid:

$$F = \frac{dp}{dt} \quad (3 - 6)$$

⇒ Wenn  $F = -F_R$  die Zeit  $\Delta t$  lang wirkt, wird übertragen:

$$\begin{aligned} & \quad \quad \quad (v_0 \cdot \Delta t = l \text{ ... herausgezogene Länge}) \\ & \quad \quad \quad \uparrow \\ \Delta p &= F \cdot \Delta t = -F_R \cdot \Delta t = +\eta \cdot A \cdot \frac{v_0}{D} \cdot \Delta t \end{aligned} \quad (11)$$

$\Delta p$  findet sich im Fluid wieder, das - in seinen einzelnen Schichten unterschiedlich - beschleunigt wurde: Aufintegration des im Fluid steckenden Impulses:



$$\begin{aligned} \Delta p &= \int_0^D v(x) \cdot dm \\ \Delta p &= \rho \cdot A \cdot \int_0^D v(x) \, dx \end{aligned} \quad \begin{aligned} dm &= \rho \cdot dV = \rho \cdot A \cdot dx \\ v(x) &= v_0 \cdot \left(1 - \frac{x}{D}\right) \quad \text{lt. Gl. (9)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta p &= \rho \cdot A \cdot v_0 \cdot \int_0^D \left(1 - \frac{x}{D}\right) dx \\ \Delta p &= \rho \cdot A \cdot v_0 \cdot \frac{D}{2} \end{aligned} \quad (12)$$



Wegen der Impulserhaltung müssen (11) und (12) gleich sein

$$\Rightarrow \eta \cdot A \cdot \frac{l}{D} = \rho \cdot A \cdot v_0 \cdot \frac{D}{2}$$

mit  $D = \sqrt{\frac{2\eta l}{\rho v_0}}$  (13)

D ist die Dicke der (PRANDTLschen) Strömungsgrenzschicht.

#### Kommentar:

- Gl. (13) ist eine Näherung, gibt die **Tendenz** der Abhängigkeit von  $\eta$ ,  $l$ ,  $\rho$ ,  $v_0$ .
- $l$  hat die Bedeutung einer charakteristischen Länge.
- Die Annahme, dass  $v(x)$  linear ist, gilt natürlich besonders für  $D \ll l$ , wenn „das Fluid nur eine große ebene Wand sieht“:

$$D = \sqrt{\frac{2\eta l}{\rho v_0}} \ll l \quad \left| \left[ \frac{2\eta l}{\rho v_0} \right] \right|^2$$

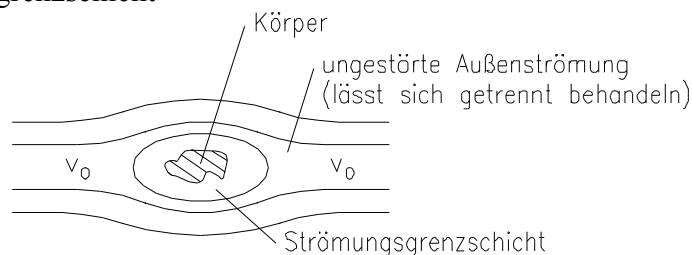
$$\frac{2\eta l}{\rho v_0} \ll l^2 \quad \left| \cdot \frac{\rho v_0}{\eta} \right|$$

$$2 \ll \frac{\rho v_0 l}{\eta} = Re \quad \equiv (8)$$

Also: Die Näherung des linearen  $v(x)$ -Verlaufs gilt für große  $Re$ , wo unter Umständen bereits Turbulenz auftritt.

#### – Bedeutung der Strömungsgrenzschicht

a) als Modell:

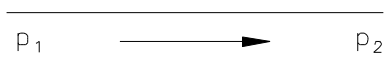


b) physikalisch: Durch das „Anhaften“ der Strömung wird der Transport beeinflusst: Feuchtigkeit, Wärme usw. müssen durch  $D$  hindurch diffundieren; die Möglichkeiten des zwangsweisen An- oder Abtransports enden am Grenzschichttrand.

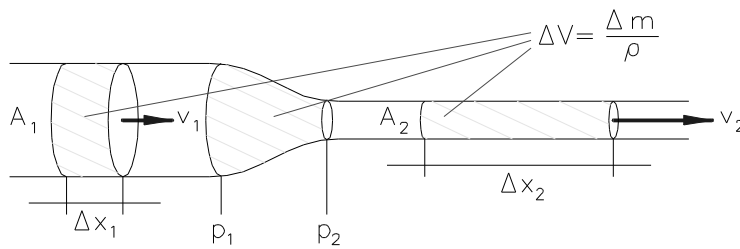
Jedoch: großes  $v_0 \Rightarrow$  kleines  $D \Rightarrow$  Transport erleichtert!

### 14.5. Reibungsfreies Fluid: BERNOULLISCHE Gleichung

- Wir betrachten jetzt ein **reibungsfreies** Fluid, d. h. eine existierende Druckdifferenz ( $p_1 \neq p_2$ ) wird nicht zur Aufrechterhaltung der Strömung benötigt.



- Das Rohr weise eine Verengung auf:



Wegen der Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung (Gl. (1)) ist

$$\dot{V} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = A_1 \cdot v_1 = A_2 \cdot v_2 = \text{const.} \quad (1')$$

⇒ Im Beispiel lt. Abbildung nimmt  $v$  zu!

Ebenfalls verändert sich an der Verengung der Druck von  $p_1$  auf  $p_2$ :

$$\begin{aligned} \text{Druckarbeit links:} \quad \Delta W_1 &= p_1 A_1 \cdot \Delta x_1 = p_1 \cdot \Delta V \\ &\downarrow \\ & (= F_1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Druckarbeit rechts:} \quad \Delta W_2 &= p_2 A_2 \cdot \Delta x_2 = p_2 \cdot \Delta V \\ &\downarrow \\ & (= F_2) \end{aligned}$$

$\Delta W_1$  wird zum Teil verwendet, den Druck  $p_2$  zu überwinden, also  $W_2$  zu leisten.  
Der Rest ( $= \Delta W_1 - \Delta W_2$ ) wird zur Beschleunigung des Fluids aufgewendet:

$$\begin{aligned} \Delta W_1 - \Delta W_2 &= (p_1 - p_2) \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot \Delta V \cdot (v_2^2 - v_1^2) \\ &\downarrow \\ & (= \Delta m) \end{aligned} \quad (14)$$

nach Umstellung folgt

$$p_1 + \frac{\rho}{2} v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} v_2^2$$

verallgemeinert

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 = p_{\text{ges}} = \text{const.} \quad (15)$$

Dies ist die **BERNOULLISCHE Gleichung**.

$\frac{\rho}{2} v^2$  hat die Dimension eines Druckes<sup>1</sup> und heißt **Staudruck**.  $p$  heißt **statischer Druck**.

**Kommentar:**

- Für  $v = 0$  ist  $p = p_{\text{ges}}$ , der (maximale) statische Druck. Mit zunehmendem  $v$  sinkt  $p$ .
- Bei  $p = 0$  („druckloser Ausfluss“) wird der Staudruck maximal. Wird  $v$  reduziert, baut sich wieder zunehmender  $p$  auf.
- Bisher betrachtet: Waagerechte Strömung, d.h. potentielle Energie im Erdschwerefeld war konstant. Wenn wir unterschiedliche Höhen einbeziehen wollen, müssen wir noch den Schweredruck<sup>2</sup>  $\rho \cdot g \cdot h$  berücksichtigen und erhalten:

$$p + \frac{\rho}{2} v^2 + \rho \cdot g \cdot h = p_{\text{ges}} = \text{const.} \quad (16)$$

Dies ist die **verallgemeinerte BERNOULLISCHE Gleichung**.

- Die BERNOULLISCHE Gleichung ist der Energiesatz (bezogen auf das Volumen) für das Fluid. Diesbezügliche Bedeutung der einzelnen Glieder:

$$\begin{aligned} \rho g h &= \frac{m}{V} \cdot g \cdot h = \frac{E_{\text{pot}}}{V} && \text{(Schweredruck)} \\ \frac{\rho}{2} v^2 &= \frac{\frac{m}{V}}{2} v^2 = \frac{E_{\text{kin}}}{V} && \text{(Staudruck)} \\ p &= \frac{A \cdot x}{V} \cdot p = \frac{\text{Druckarbeit}}{V} && \text{(statischer Druck)} \end{aligned}$$

- Beispiele zur BERNOULLISCHEN Gleichung

$$\left. \begin{array}{l} \cdot \text{hydrodynamisches Paradoxon} \\ \cdot \text{Bunsenbrenner} \\ \cdot \text{Wasserstrahlpumpe} \\ \cdot \text{Zerstäuber} \end{array} \right\} \quad "v \uparrow \Rightarrow p \downarrow"$$

- Kavitation: Wir betrachten Gl. (15) und formen um

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad v &= \sqrt{\frac{2p_{\text{ges}}}{\rho}} && \text{entspricht } p = 0 \\ v &> \sqrt{\frac{2p_{\text{ges}}}{\rho}} && \text{entspricht einem statischen Druck } p < 0! \end{aligned}$$

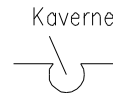
<sup>1</sup>  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} !$

<sup>2</sup> Dimension von  $\rho \cdot g \cdot h$ :  $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = \text{kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \frac{1}{\text{m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \rightarrow \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}} !$

Dies unter Umständen leicht erreicht, z.B. bei  $\text{H}_2\text{O}$  für  $v \geq 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

⇒ Bildung von Dampf-/Gasbläschen (z.B. verdampfte Flüssigkeit) die bei Reduzierung von  $v$  implusionsartig zusammenbrechen

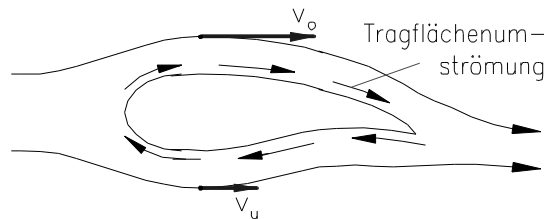
⇒ Druckwellen → Materialzerstörung (Kavitation)



Dynamischer Auftrieb:

Infolge der Anfahrtswirbel entsteht Tragflächenumströmung:

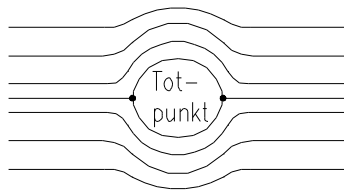
$v_o > v_u \Rightarrow p_o < p_u \Rightarrow \text{Auftrieb}$



## 14.6. Strömungswiderstand

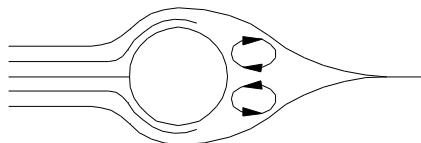
– ... kann über die BERNOULLISCHE Gleichung verstanden werden:

a) langsame Strömung ⇒ völlig symmetrisches Bild



$v$ -Verteilung vor und hinter der Kugel gleich ⇒ keine resultierende Kraft

b) schnelle Strömung ⇒ Bildung von Wirbeln hinter dem Hindernis:



$v$  hinter der Kugel erhöht (Die „unregelmäßige Richtung“ von  $v$  spielt keine Rolle, die BERNOULLISCHE Gleichung ist eine Energieangelegenheit!)

⇒ statischer Druck  $p$  hinter der Kugel ist reduziert

⇒ Kraft, die die Kugel mitreißen will

– Diese „Druckwiderstandskraft“ ist dem Staudruck proportional.

(= Staudruck)



$$F = c_w \cdot \frac{1}{2} \rho v^2 \cdot A$$

(17)





$A$  ... Querschnittsfläche

$c_w$ ... **Widerstandsbeiwert**

### Kommentar:

Wir sind wieder ein mal am Rand der Gültigkeit des Modells. Die Initiierung des Wirbelfeldes setzt natürlich Reibung voraus, wenn auch dann die Argumentation wieder auf der BERNOULLISCHEN Gleichung beruht.

- Deutung: Staudruckabhängigkeit (Staudruck korreliert mit  $E_{\text{kin}}$ , s.o.) deshalb, weil infolge Wirbelbildung diese  $E_{\text{kin}}$  der Kugel „nur von vorn, nicht auch von hinten“ zugeführt wird  $\Rightarrow$  resultierende Kraft!
- $c_w$  ist abhängig von der Körperform. Beispiele (Strömung von links):

	1,35
	1,12
	0,40
	0,056
(PKW	0,25 ... 0,50)

!

## 15. Schwingungen II

- vgl. hierzu auch <6.1.> Federschwinger

### 15.1. 2D-Überlagerung von Schwingungen

- Wir wissen, dass die Gesetze der Mechanik für jede Dimension einzeln gelten und sich die Bewegungen dann überlagern.

- **Beispiel:** 2 Schwingungen mit  $\omega_x = \omega_y$  ■

· ohne Phasenverschiebung (Kurve a):

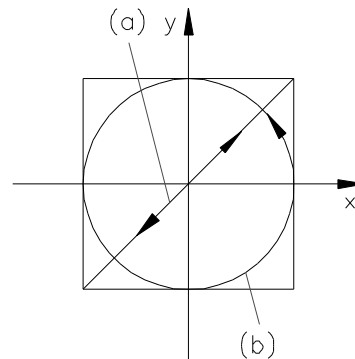
in x-Richtung:  $x(t) = A \cdot \sin \omega t$

in y-Richtung:  $y(t) = A \cdot \sin \omega t$

· mit Phasenverschiebung  $\frac{\pi}{2}$  (Kurve b):

in x-Richtung:  $x(t) = A \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$   
 $= A \cdot \cos \omega t$

in y-Richtung:  $y(t) = A \cdot \sin \omega t$



· mit beliebiger Phasenverschiebung:  $\Rightarrow$  alle Übergänge Linie  $\rightarrow$  Ellipse  $\rightarrow$  Kreis

- Schwingungen nun mit  $\omega_x \neq \omega_y$ :

· für rationales  $\frac{\omega_x}{\omega_y} = \frac{n}{m}$ : geschlossene Kurven (**LISSAJOUS-Figuren**) oder in sich zurücklaufende Linien (analog der Geraden für  $\omega_x = \omega_y$ )  
 (n, m natürliche Zahlen)

· für irrationales  $\frac{\omega_x}{\omega_y}$ : vollständiges Überstreichen der Fläche

### 15.2. Schwebungen

- Überlagerung zweier **gleich gerichteter** Schwingungen mit nahezu derselben Frequenz: !

$$\hat{x}(t) = \hat{x}_1(t) + \hat{x}_2(t) = A_1 \cdot e^{i\omega t} + A_2 \cdot e^{i(\omega+\varepsilon)t} \quad (1)$$

$$\hat{x}(t) = (A_1 + A_2 \cdot e^{i\varepsilon t}) \cdot e^{i\omega t} \quad (2)$$

↓  
 $\hat{A}$

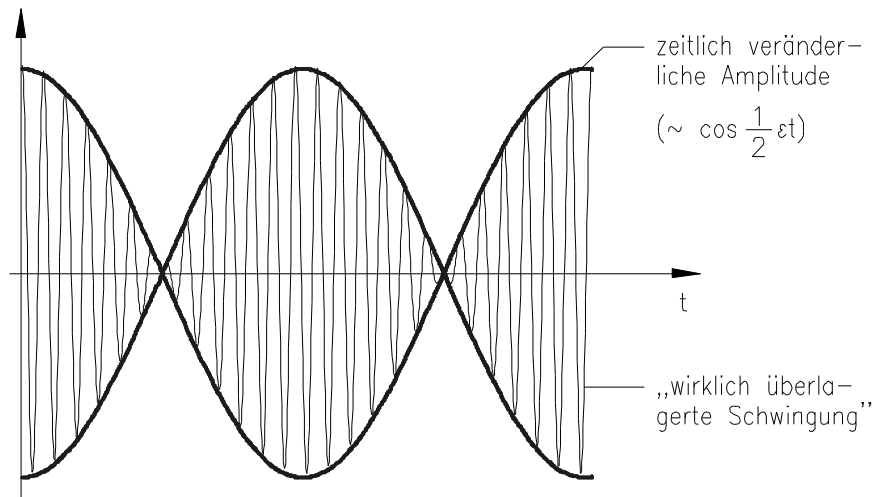
$\Rightarrow$  Eine Schwingung mit Frequenz  $\omega$  und einer zeitlich veränderlichen komplexen Amplitude  $\hat{A}$ !

- Realteil der Schwingung:

$$x(t) = \operatorname{Re}\{\hat{x}(t)\} \quad (3)$$

- **Beispiel:** 2 Schwingungen mit gleicher Amplitude bei nahezu gleicher Frequenz ■

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A \cdot \cos \omega t \\ x_2(t) &= A \cdot \cos(\omega + \varepsilon)t \\ \Rightarrow x(t) &= 2A \cdot \cos(\omega + \varepsilon/2)t \cdot \cos(\varepsilon/2)t = x_1(t) + x_2(t) \end{aligned}$$



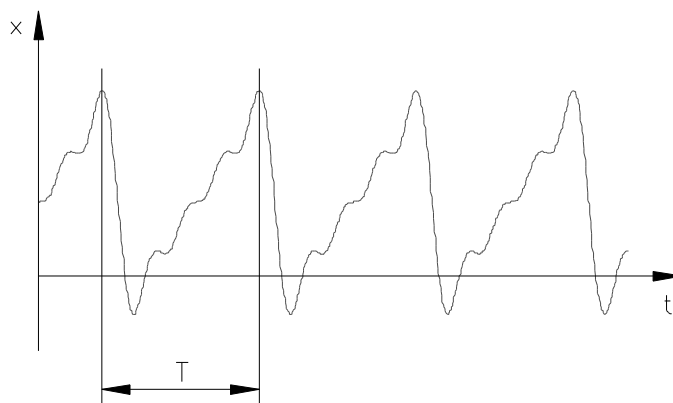
- Realisierung: z.B. Überlagerung zweier **fast** gleich hoher Töne (schlecht gestimmtes Instrument)

### 15.3. Die FOURIER-Analyse

- gegeben: Schwingung = **beliebiger** zeitlich periodischer Vorgang, d.h. !

$$x(t) = x(t + T)$$

T ... Periodendauer



Die Abbildung zeigt den allgemeinen Fall. Nicht alle Schwingungen sind harmonisch! !

- FOURIER (1822): Jede zeitlich periodische Funktion mit der Periodenlänge  $T$  lässt sich aus harmonischen Schwingungen aufbauen (**FOURIER-Reihe**). !

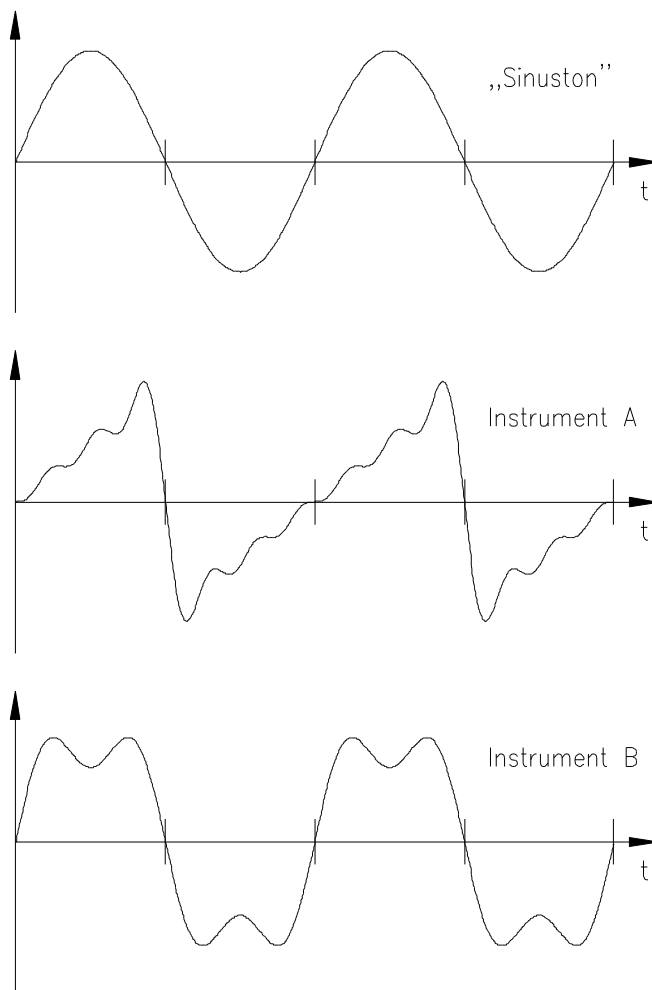
$$\left. \begin{aligned} x(t) &= x(t + T); \quad \omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} \\ x(t) &= x_0 + x_1 \cdot \cos(\omega t + \varphi_1) + x_2 \cdot \cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots \\ x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} x_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

bzw. in komplexer Form:

$$\hat{x}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{x}_n e^{in\omega t} \quad (4')$$

**Beispiel:** ■

Gleiche Töne bei unterschiedlichen Musikinstrumenten unterscheiden sich in ihren Obertönen, d.h. den Gliedern der Fourierreihe mit  $n > 1$ .



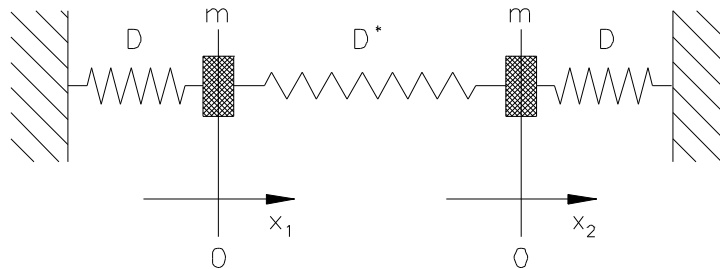


## 15.4. Gekoppelte Schwinger

- z.B. gekoppelte Pendel oder gekoppelte Federschwinger (Luftkissenbahn):

Gegeben sind:

2 Federschwinger im entsprechenden Zustand + Verbindungsfeder passender Länge, so dass alle 3 Federn gleichzeitig entspannt sind:



- ohne Verbindungsfeder gilt z.B. für  $m_1$ :

$$D \cdot x_1 + m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_1 = 0 \quad (6 - 2')$$

nunmehr noch zusätzliche Federkraft, die von  $x_2 - x_1$  abhängt<sup>1</sup>:

$$F^* = (x_1 - x_2) \cdot D^* \quad (5)$$

Wenn  $x_1 = x_2$  ist, hat die Feder ihre Gleichgewichtslänge und übt keine Kraft aus!

⇒ Differentialgleichungen

$$\left. \begin{aligned} \text{für } m_1: \quad D \cdot x_1 + D^* \cdot (x_1 - x_2) + m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_1 &= 0 \\ \text{für } m_2: \quad D \cdot x_2 + D^* \cdot (x_2 - x_1) + m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Dies ist ein System von gekoppelten Differentialgleichungen.

- Beschreibung der Lösung:  $\exists$  2 **Fundamentallösungen**

- beide Federn schwingen parallel, Feder wird nicht beansprucht (wie beim Einzelpendel!);
- beide Federn schwingen gegeneinander (diese Schwingung ist schneller, wegen der Zusatzfeder):

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{m}}$$

- Allgemeiner Fall = Linearkombination beider Lösungen („mathematische Aussage“)

<sup>1</sup> Vorzeichen: Für  $x_2 < x_1$  ist  $x_1 - x_2 > 0 \Rightarrow F^*$  wirkt in gleicher Richtung („drückt“) wie  $F_1$  bei  $x_1 > 0$

⇒ Nun sehen wir uns die Physik an:

- ∃ Hin- und Herfluten der Schwingungsenergie! → Schwebung
- Dies beeinflusst von der Stärke der Kopplung, d.h.  $D^* \gtrless D$

Für verschwindende Kopplung erhält man eine Lösung, die <15.2.> entspricht. (Dort hatten wir ja die Überlagerung zweier unabhängiger Schwingungen betrachtet!)

## 15.5. Erzwungene Schwingungen

- Die Differentialgleichung für den freien gedämpften Schwinger lautet:

$$D \cdot x + k \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x} = 0 \quad (6-16')$$

$\nwarrow \quad \downarrow \quad \searrow$   
 Feder-<sup>1</sup> Reibungs- Trägheitskraft

- Jetzt versuchen wir, diesen Schwinger durch eine periodische äußere Kraft  $F$  zum Schwingen anzuregen:

$$F = F_0 \cdot \cos \omega t \quad (7)$$

⇒ damit folgt für Gl. (6 - 16'):

$$D \cdot x + k \cdot \dot{x} + m \cdot \ddot{x} = F_0 \cdot \cos \omega t \quad (8)$$

- Man könnte vermuten, dass das System bestrebt ist, mit der Frequenz  $\omega_{GS}$  des gedämpften Schwingers zu schwingen:

$$\omega_{GS} = \sqrt{\frac{D}{m} - \left(\frac{k}{2m}\right)^2} \quad (6-22)$$

- Erfahrung zeigt jedoch: nach gewisser Zeit (Einschwingzeit) erfolgt Schwingung gemäß:

$$x = x_0 \cdot \cos(\omega t - \alpha) \quad (9)$$

Also: Mit Anregungsfrequenz  $\omega$ , aber gegenüber  $F$  um  $\alpha$  phasenverschoben.

- (9) in (8) liefert:

$$Dx_0 \cos(\omega t - \alpha) - k\omega x_0 \sin(\omega t - \alpha) - m\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \alpha) = F_0 \cos \omega t \quad (10)$$

---

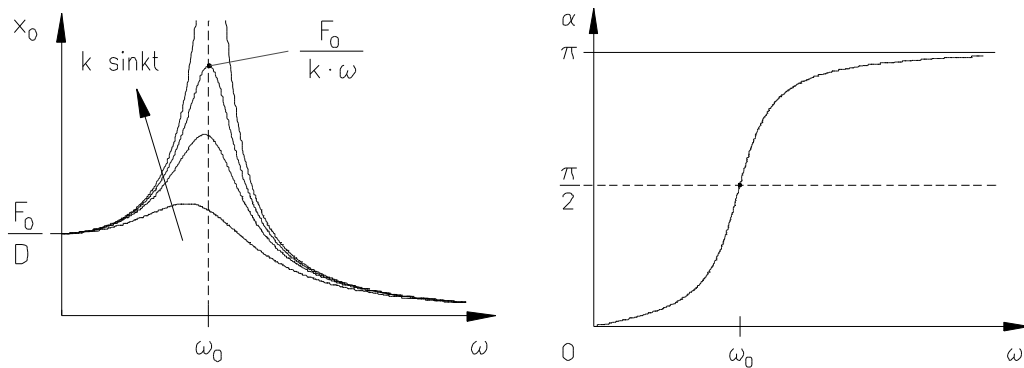
<sup>1</sup> allgemein: Rückstellkraft

- Betrachtung von Gl. (10):  $|\sin|$  und  $|\cos|$  sind stets  $\leq 1 \Rightarrow$  welche Glieder von Bedeutung sind, wird durch die Vorfaktoren entschieden.

a)  $\omega \ll \sqrt{\frac{D}{m}}$ . Für diesen Fall folgt aus Gl. (10):

$$Dx_0 \cos(\omega t - \alpha) = F_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{D} ; \alpha = 0$$



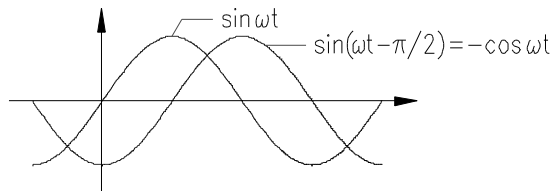
b)  $\omega \gg \sqrt{\frac{D}{m}}$ . Für diesen Fall folgt aus Gl. (10):

$$-m\omega^2 x_0 \cos(\omega t - \alpha) = F_0 \cos \omega t$$

$$\Rightarrow x_0 = \frac{F_0}{m\omega^2} ; \alpha = \pi \text{ (weil } \cos(\omega t - \alpha) = -\cos \omega t \text{ ist)}$$

c) Wir betrachten  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ . Für diesen Fall ist:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\omega x_0 \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \\ &= +\omega x_0 \cos \omega t \\ &\sim F! \end{aligned}$$



Also:  $\dot{x}$  und  $F$  sind in Phase  $\Rightarrow$  maximaler Energieeintrag!

**Leistung:** Arbeit/Zeit

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{F \cdot dx}{dt} = F \cdot \dot{x} \quad (11)$$

$$[P] = \frac{J}{s} \equiv W \dots \text{Watt} \quad \text{SI}$$

Die äußere Kraft leistet:

$$\begin{aligned} P_a &= F \cdot \dot{x} & \begin{cases} F = F_0 \cdot \cos \omega t \\ \dot{x} = \omega x_0 \cos \omega t \end{cases} \\ \Rightarrow P_a &= F_0 \omega x_0 \cos^2 \omega t \end{aligned} \quad (12)$$

Die Reibungskraft verbraucht an Leistung:

$$P_R = F_R \cdot \dot{x}$$

mit der Beziehung

$$F_R = k\dot{x}$$

folgt

$$P_R = k\omega^2 x_0^2 \cos^2 \omega t \quad (13)$$

Für  $P_a = P_R$  folgt aus (12) und (13):

$$\begin{aligned} F_0 \omega x_0 &= k\omega^2 x_0^2 \\ \Rightarrow x_0 \left( \alpha = \frac{\pi}{2} \right) &= \frac{F_0}{k\omega} \end{aligned} \quad (14)$$

Für diesen Fall sind das Reibungsglied und das Glied der äußeren Kraft in Gl. (10) einander gleich, d.h., das Trägheits- und Rückstellglied müssen sich zu Null ergänzen. Aus Gl. (10) folgt dann:

$$\begin{aligned} D x_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) - m \omega^2 x_0 \cos \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right) &= 0 \\ \Rightarrow \omega \left( \alpha = \frac{\pi}{2} \right) &= \sqrt{\frac{D}{m}} = \omega_0 \text{ (Frequenz des ungedämpften Schwingers!)} \end{aligned} \quad (15)$$

Also war auch das  $\omega$  in Gl. (14) identisch mit  $\omega_0$

$$\Rightarrow x_0 \left( \alpha = \frac{\pi}{2} \right) = \frac{F_0}{k\omega_0} \quad (14')$$

**Diskussion:**

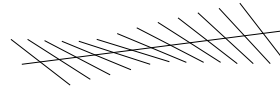


- Für  $\omega = \omega_0$  ist  $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$  maximaler Energieeintrag, maximales  $x_0(\omega)$
- Dieses maximale  $x_0$  steigt mit verringerter Dämpfung  $\rightarrow$  Resonanzkatastrophe!

## 16. Wellen

### 16.1. Einleitung

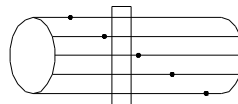
- **Beispiele:**
  - gekoppelte Pendelreihe
  - Wellenmaschine
  - Seilwelle (hin und her)
- Was passiert?
  - Das schwingende Medium/Teilchen bewegt sich nicht fort, sondern schwingt um eine Ruhelage.
  - Was sich fortbewegt/ausbreitet, ist der Schwingungszustand.



■

!

⇒ experimentelles Modell:

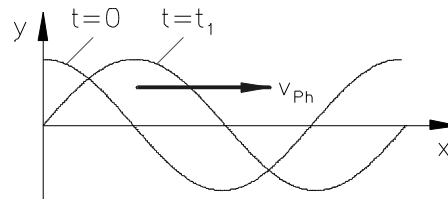


⇒ **Welle** = räumliche Ausbreitung eines Schwingungszustandes

!

- Welle in x-Richtung:

$v_{Ph}$  = Geschwindigkeit der Bewegung der Wellenberge, -täler usw.



- Wie drückt man das mathematisch aus? Offenbar ist

$$y = f(x, t)$$

und zwar genauer

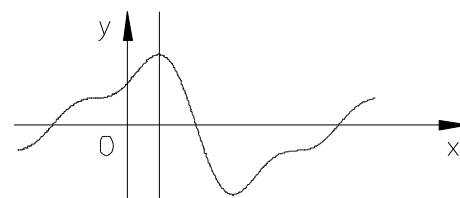
$$y(x, t) = f(x - v_{Ph} \cdot t)$$

(1)

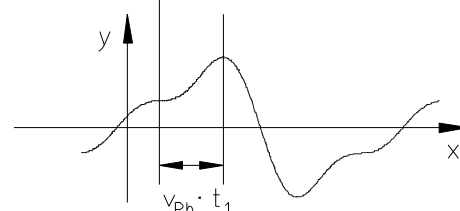
$v_{Ph}$  ... **Phasengeschwindigkeit**, die **Ausbreitungsgeschwindigkeit** der Welle

Plausibilitätserklärung:

1. Momentaufnahme bei  $t = 0$ :



2. Zustand zum Zeitpunkt  $t = t_1$ :



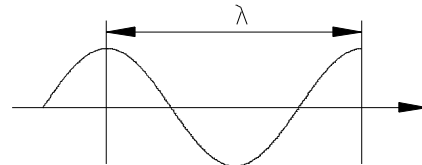
Also: Für jeden Punkt  $x$  ist  $y$  jetzt so, „wie vorher um  $v_{Ph} \cdot t_1$  weiter links“!

Der Schwingungszustand  $y(x, t)$  ist also nicht von  $x$  und  $t$  einzeln abhängig, sondern von der Kombination  $x - v_{\text{Ph}} \cdot t$ . Dies ist die **Phase** der Welle, sie bestimmt  $y$  eindeutig. !

(Eigentlich ist dies einfach Ausdruck der Tatsache, dass sich der Schwingungszustand mit  $v_{\text{Ph}}$  bewegt und dabei nicht verändert.)

- Gl. (1) beschreibt eine Welle allgemein. Diese können auch nichtperiodische Wellen sein (z. B. Seilwelle, Stoßwelle)! !

- Die größte Bedeutung haben harmonische Wellen (sin, cos), auf die wir uns im Folgenden konzentrieren:



- $v_{\text{Ph}}$  für eine harmonische Welle ist

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$$

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \omega$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

(2)

Man definiert die **Wellenzahl**  $k$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (3)$$

(3) in (2) liefert somit

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k} \quad (4)$$

- Wie gleich plausibel gemacht wird, lautet die Wellenfunktion für eine harmonische Welle in  $x$ -Richtung

$$y(x, t) = y_0 \sin(\omega t - kx) \quad (5)$$

Plausibilitätserklärung:

- Offenbar ist der Schwingungszustand eindeutig festgelegt durch  $\omega t - kx$ .
- Dann muss das aber auch der Fall sein für

$$-\frac{1}{k} \cdot (\omega t - kx) = x - \frac{\omega}{k} \cdot t$$

$$= x - v_{\text{Ph}} \cdot t$$

⇒ Das Argument der Sinusfunktion (Gl. (5)) drückt dasselbe Wechselspiel zwischen räumlicher und zeitlicher Bewegung aus wie Gl. (1)!

## 16.2. Wellengleichungen

- Wie sieht die Differentialgleichung aus, der eine Welle gehorcht?  
Im eindimensionalen Fall, also für  $y = f(x, t)$ , lautet sie:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v_{ph}^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (6)$$

Dies ist die **d'ALEMBERTsche Wellengleichung**.

- Diese Gleichung wird von **jeder** Funktion  $y = f(x \pm v_{ph} t)$ , also von jeder allgemeinen Wellenfunktion nach Gl. (1) erfüllt, nicht nur von Funktionen lt. Gl. (5) für harmonische Wellen!
- Andeutung des Beweises:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x \pm v_{ph} \cdot t)}{\partial t} &= \frac{\partial f(x \pm v_{ph} \cdot t)}{\partial (x \pm v_{ph} \cdot t)} \cdot \frac{\partial (x \pm v_{ph} \cdot t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f(x \pm v_{ph} \cdot t)}{\partial (x \pm v_{ph} \cdot t)} \cdot (\pm v_{ph}) \end{aligned} \quad (7)$$

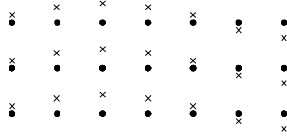
$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x \pm v_{ph} \cdot t)}{\partial x} &= \frac{\partial f(x \pm v_{ph} \cdot t)}{\partial (x \pm v_{ph} \cdot t)} \cdot \frac{\partial (x \pm v_{ph} \cdot t)}{\partial x} \\ &\quad \downarrow \\ &= 1 \end{aligned} \quad (8)$$

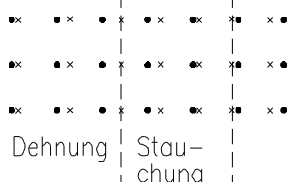
aus (7) und (8) folgt somit

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \pm v_{ph} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \quad (9)$$

Leitet man Gl. (9) auf beiden Seiten noch einmal ab, erhält man Gl. (6).

## 16.3. Arten von Wellen

-  Schwingung **quer** zur Ausbreitungsrichtung  
→ **Transversalwellen** (z. B. bestimmte elastische Wellen in Festkörpern; elektromagnetische Wellen)

-  Schwingung **längs** zur Ausbreitungsrichtung  
→ **Longitudinalwellen** (z. B. bestimmte elastische Wellen in Festkörpern; Schallwellen in Gasen und Flüssigkeiten)

- Transversalwellen: Die Formulierung „Schwingung  $\perp$  Ausbreitungsrichtung“ ist nicht eindeutig!



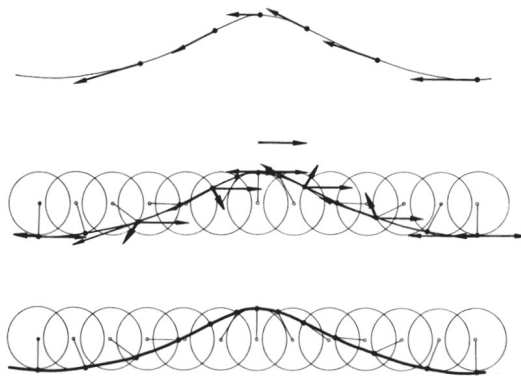
Entscheidend ist die Lage der Schwingungsrichtung/-ebene:

- konstante Lage  $\Rightarrow$  **linear polarisierte Welle**
- gleichmäßige Drehung  $\Rightarrow$  **zirkular (elliptisch) polarisierte Welle**
- ansonsten: nicht polarisierte Wellen

- Wellen sind eine sehr allgemeine Erscheinung (definiert über Gl. (1), (6)):  
Seilwellen, Wellen in Membranen, .... Meist jedoch betrachtet: Wellen im Volumen (Festkörper, Gas, Flüssigkeit, Vakuum).  
Physikalische Natur der Wellen kann verschieden sein: elastische Wellen, Schallwellen, elektromagnetische Wellen, ...

- Oberflächenwellen in Flüssigkeiten:

- Teilchen bleiben praktisch am Ort, was sich bewegt, ist der Bewegungszustand (also wie bei allen Wellen!)
- Wasserteilchen führen kreisende Bewegung aus



Im Prinzip sehr komplexe Erscheinung, da beeinflusst von

- der Wassertiefe,
- dem Wind,
- der Oberflächenspannung!

Oben: Teilchengeschwindigkeiten in der Wasserwelle, die der mitfahrende Beobachter feststellt.

Mitte: Teilchengeschwindigkeiten, die der ruhende Beobachter in seinem System konstruiert.

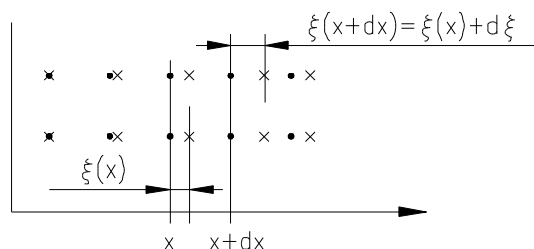
Unten: Orbitalbewegung der Teilchen an der Oberfläche. ({2}, S. 184)

- Unterteilung der Wellen nach der Geometrie ihrer Ausbreitung (geometrischer Ort der Punkte gleicher Phase = **Wellenfront**):
  - ebene Welle
  - Zylinderwelle/Kreiswelle
  - Kugelwelle

## 16.4. Wellenausbreitung in verschiedenen Medien

### 16.4.1. elastische Longitudinalwelle im Festkörper

- Elastische Welle ist ein ständiges Wechselspiel von Dehnung (Auslenkung) und Spannung.



Koordinate:  $x$   
Auslenkung:  $\xi = \xi(x)$



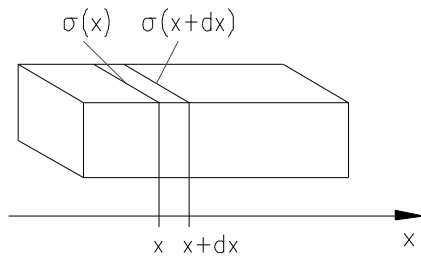
Wenn sich zwischen  $x$  und  $x + dx$  die Auslenkung ändert (d.h.  $\xi + d\xi$ ), heißt das, dass dort eine elastische Spannung herrscht:

$$\sigma = E \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} \quad (10)$$

↓

$$\equiv \varepsilon \text{ (vgl. <II.I.>)}$$

- Wir betrachten ein Volumenelement im Festkörper:



Hinweis: Wir kümmern uns nicht um Querkontraktion, betrachten also eine sogenannte ebene Welle, die „unendlich breit ist“.

$$\sigma(x + dx) = \sigma(x) + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \quad (11)$$

Auf das Volumenelement  $dV = A \cdot dx$  wirkt nur die Differenz der Spannungen bzw. Kräfte!

also: links wirkt  $F_l = \sigma(x) \cdot A$

rechts wirkt  $F_r = \sigma(x + dx) \cdot A = \sigma(x) \cdot A + \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \cdot A \quad (11')$

Die wirksame Nettokraft ist:

$$dF = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \cdot dx \cdot A$$

↓

$$= dV$$

bzw. mit Gl. (10)

$$dF = E \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \cdot dV \quad (12)$$

Die Kraft führt zu einer Beschleunigung der in  $dV$  verkörperten Masse  $dm = \rho \cdot dV$ :

$$dF = dm \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \quad (3 - 2')$$

bzw.  $dF = \rho \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \cdot dV \quad (13)$

- Gleichsetzung von (12) und (13):

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \quad (14)$$

Dies ist der hier gültige Sonderfall von Gl. (6)!

- Vergleich mit Gl. (6) liefert:

$$\Rightarrow v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (15)$$

mit:  $v_{\text{Ph}}$  ... Geschwindigkeit der longitudinalen Schallwelle im Festkörper

also: Großes  $E$  / kleines  $\rho$  bedeutet große Schallgeschwindigkeit!

!

#### 16.4.2. elastische Transversalwelle im Festkörper

- Herleitung völlig analog zu <16.4.1.>, aber wegen Querdeformation ist  $G$  statt  $E$  zu verwenden:

$$\Rightarrow v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad (16)$$

#### 16.4.3. Schallwelle in Gasen (oder Flüssigkeiten)

- ... ist stets longitudinal ("Schermodul  $G = 0$ ")
- Hier wiederum (weitgehend) analoge Herleitung, wobei anstelle von  $E$  der Kompressionsmodul  $K$  zu verwenden ist. Man erhält:

$$\Rightarrow v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{K}{\rho}} = \sqrt{\frac{1}{\kappa \cdot \rho}} \quad (17)$$

- Aus Gl. (13 - 2) wissen wir, dass für Gase  $K = p$  ist (je größer  $p$ , desto schwerer ist Gas komprimierbar). **Nur** für Gase (und **nicht** für Flüssigkeiten!) gilt deswegen<sup>1</sup>:

$$\Rightarrow v_{\text{Ph}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (17^{\circ})$$

<sup>1</sup> Das Problem der adiabatischen Zustandsänderung bei Gasen wird hier zunächst vernachlässigt (Gl. (17<sup>°</sup>) liefert eigentlich für  $v \geq 1$  kHz um einen Faktor  $\sqrt{7/5}$  zu geringe Werte, vgl. <20.4.>).

– **Beispiele:**

Material		$v_{Ph}$ (longitudinal)	
H <sub>2</sub>	(0°C)	1284 m · s <sup>-1</sup>	↘
Luft	(0°C)	332 m · s <sup>-1</sup>	↗ (√14,4 · 332 = 1260!)
Wasser	(0°C)	1402 m · s <sup>-1</sup>	(4facher Wert von Luft!)
Al	(20°C)	6420 m · s <sup>-1</sup>	(ρ = 2,7 g · cm <sup>-3</sup> )
Ti	(20°C)	6070 m · s <sup>-1</sup>	(ρ = 4,5 g · cm <sup>-3</sup> ∧ größeres E)
Pb	(20°C)	1960 m · s <sup>-1</sup>	(ρ = 11,3 g · cm <sup>-3</sup> ∧ geringes E)
Diamant		≈ 17000 m · s <sup>-1</sup>	Spitzenwert!

## 16.5. Überlagerung von Wellen; Gruppengeschwindigkeit

- Wellen überlagern sich ungestört (ungestörte Superposition). Mathematisch „steckt das in der Linearität der d'ALEMBERTschen Wellengleichung (Gl. (6))“:

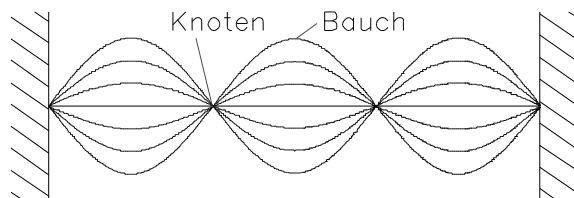
$$\left. \begin{array}{l} y_1(t) \text{ ist Lösung} \\ y_2(t) \text{ ist Lösung} \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{Linearität von Gl. (6)}} y_1(t) + y_2(t) \text{ ist auch Lösung!}$$

- Voraussetzung: Auslenkung gering genug, damit die physikalischen Voraussetzungen noch stimmen, z.B.  $\sigma \sim \epsilon$  (Gl. (10)), also HOOKEsches Verhalten, o.ä.<sup>1</sup>
- Wellen können sich beim Überlagern verstärken oder schwächen (gegebenenfalls auslöschen).

**Beispiele:**

- Chladnische Klangfiguren
- Rubenssches Flammenrohr
- Kundtsches Rohr

- **Stehende Wellen:** Überlagerung hin- und herlaufender Wellen so, dass sich der Schwingungszustand gar nicht mehr räumlich ausbreitet<sup>2</sup>.



Wenn man aber - auch bei einer transversalen stehenden Welle - „etwas dazwischenschiebt“, bricht die Welle ab. Es ist eben doch ein Hin und her, wenn auch ein sehr spezielles!

Stehende Wellen haben große Bedeutung: Akustik, Laser, **Quantenmechanik** ...

<sup>1</sup> berühmte Ausnahme: Wechselwirkung sehr intensiver Laserstrahlung mit Materie

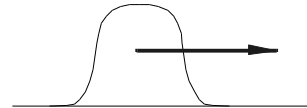
<sup>2</sup> Die stehenden Wellen sind spezielle Lösungen der Wellengleichung **unter gegebenen Randbedingungen**

- Gruppengeschwindigkeit:

Eine harmonische Welle (**ein**  $\omega$ !) überträgt kein Signal. !



Ein Signal, z.B. ein Licht- oder Funkimpuls, ist aus vielen harmonischen Wellen aufgebaut vorstellbar (FOURIER-Reihe!) !



- **Beispiel** (Modell): Überlagerung nur zweier harmonischer Wellen ■

- $\omega; k$
- $\omega + \Delta\omega; k + \Delta k$

Sie überlagern sich konstruktiv, wenn ihre Phasen übereinstimmen, d.h. für

$$\begin{aligned} kx - \omega t &= (k + \Delta k) \cdot x - (\omega + \Delta\omega) \cdot t \\ &= kx + \Delta kx - \omega t - \Delta\omega t \end{aligned} \quad (18)$$

$$\Rightarrow \Delta kx = \Delta\omega t \quad (19)$$

Die Erfüllung der Bedingung (19) sichert also die Bildung und Erhaltung einer Art „Mini-Impuls“:

- bei  $t = 0$  gilt dies für  $x = 0$
- bei  $t = t_1$  gilt dies für  $x_1 = \frac{\Delta\omega t_1}{\Delta k}$

$\Rightarrow$  Die Wellengruppe („Mini-Impuls“) bewegt sich also mit

$$v = \frac{x_1}{t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \rightarrow \frac{d\omega}{dk}$$

- Dies ist die **Gruppengeschwindigkeit**:

$$v_{\text{Gr}} = \frac{d\omega}{dk} \quad (20)$$

- Wir hatten bereits kennengelernt

$$v_{\text{Ph}} = \frac{\omega}{k}, \text{ also } \omega = k \cdot v_{\text{Ph}} \quad (4), (4')$$

- Wenn  $v_{\text{Ph}}$  für alle Wellenlängen (d.h. alle  $k$ ) bzw. für alle Frequenzen den gleichen Wert hat, liefert Gl. (4')

$$v_{Gr} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(k \cdot v_{Ph})}{dk} = v_{Ph} \quad (21)$$

Dann sind also  $v_{Gr}$  und  $v_{Ph}$  gleich!

**Beispiele** dafür sind: ■

- elektromagnetische Wellen im Vakuum
- Schall in Luft

– Oft ist aber  $v_{Ph} = f(\omega)$  bzw.  $f(k)$ , d.h.  $\omega \sim k$  (Gl. (4')) gilt **nicht mehr!**

⇒ **∃ Dispersion!**

Wellenpakete (Impulse) zerfließen / „dispergieren“, da jede harmonische Elementarwelle ihre eigene Geschwindigkeit hat. !

**Beispiele** für Dispersion: ■

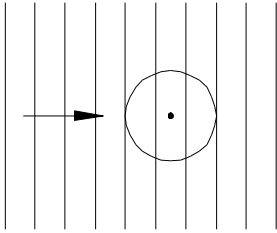
- Licht in Glas ⇒  $v_{Ph} = f(\omega)$ , d.h. die Lichtgeschwindigkeit hängt von der Farbe ab!
- Schall im Festkörper (Eis) ⇒ hohe Töne laufen schneller ("Piúh")

## 17. Wellenausbreitung

Im Folgenden werden einige allgemeine Prinzipien / Beschreibungsmöglichkeiten / Verhaltensweisen / Eigenschaften von Wellen behandelt. Sie gelten für alle Wellen. Bei konkreten Wellen (z.B. Schall, Licht, Funkwellen, ...) treten allerdings bestimmte dieser Erscheinungen in unterschiedlicher Weise in den Vordergrund. Dort<sup>1</sup> werden sie gegebenenfalls auch noch vertieft.

### 17.1. Streuung

- ... ist die Wechselwirkung einer Welle mit einem Hindernis. Sehr vielfältig! !
  - Lichtwelle an einem Staubkorn in der Luft
  - elastische Welle im Festkörper an einem Hohlraum (Luftblase) im Festkörper
  - Schallwelle an einem Hindernis („Kind hinter einem Baum“)
  - Wasserwelle am Pfahl im Wasser

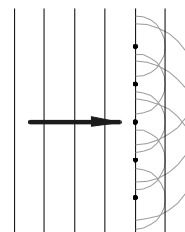
- kleines Hindernis,  $a \ll \lambda$ :   $\Rightarrow$  Kugel-Streuwelle  
(liefert Information über Existenz des Hindernisses, **nicht** über seine Form)

- Hier also: Hindernis als Streuzentrum; gestreute Welle hat feste Phasenbeziehung mit der Primärwelle  $\rightarrow$  **kohärente Streuung**
- Gegensatz: Hindernis gibt Wellenenergie verzögert ab  $\Rightarrow$  konstante Phasenbeziehung geht verloren  $\rightarrow$  **inkohärente Streuung**

### 17.2. Das HUYGENSSche Prinzip (HUYGENS-FRESNELSches Prinzip)

- Man kann Wellenausbreitung sehr gut verstehen, wenn man sich vorstellt, dass jeder Punkt, der von einer Welle getroffen wird, wieder zum Ausgangspunkt einer Kugel- (3D) oder Kreiswelle (2D) wird. !

- Dies ist trivial für ungestörte Wellenausbreitung, z.B. ebene Welle:

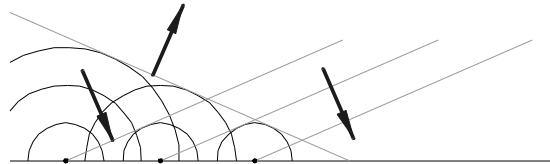


- Interessant und lehrreich wird es, wenn Hindernisse auftreten:

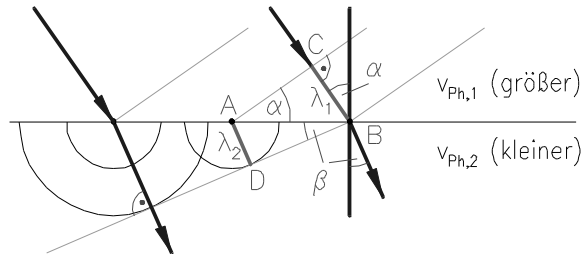
<sup>1</sup> d.h. an entsprechender Stelle im Rahmen der Vorlesung

– **Reflexion:**

⇒ Einfallswinkel = Ausfallswinkel



– Übergang in ein Medium mit anderer Ausbreitungsgeschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit):



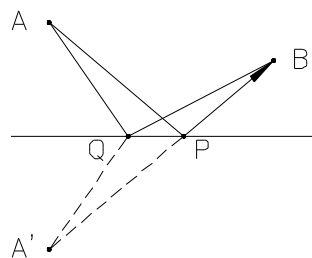
$$\left. \begin{aligned} v_{Ph,1} &= \frac{\lambda_1}{T} \\ v_{Ph,2} &= \frac{\lambda_2}{T} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_{Ph,1}}{v_{Ph,2}} = \frac{\lambda_1 / \overline{AB}}{\lambda_2 / \overline{AB}} \quad \left| \cdot \frac{\overline{AB}}{\overline{AB}} \right.$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\lambda_1}{\overline{AB}} &= \sin \alpha \\ \frac{\lambda_2}{\overline{AB}} &= \sin \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{v_{Ph,1}}{v_{Ph,2}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \quad (1)$$

Dies ist das aus der Optik bekannte **Brechungsgesetz**, das für alle Wellen gilt!

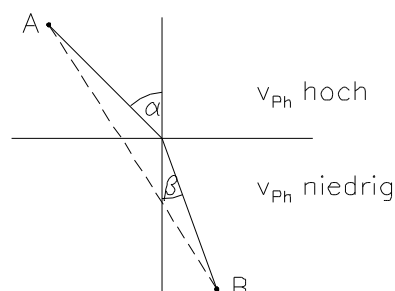
### 17.3. Das FERMATsche Prinzip

- Eine Welle läuft zwischen zwei Punkten immer so, dass sie dazu möglichst wenig Zeit braucht. !
- Sehr allgemeines Prinzip! Reflexions- und Brechungsgesetz sind Sonderfälle davon.



$A \rightarrow P \rightarrow B$  ist kürzester Weg, weil  $A' \rightarrow P \rightarrow B$  auf einer Geraden liegen.

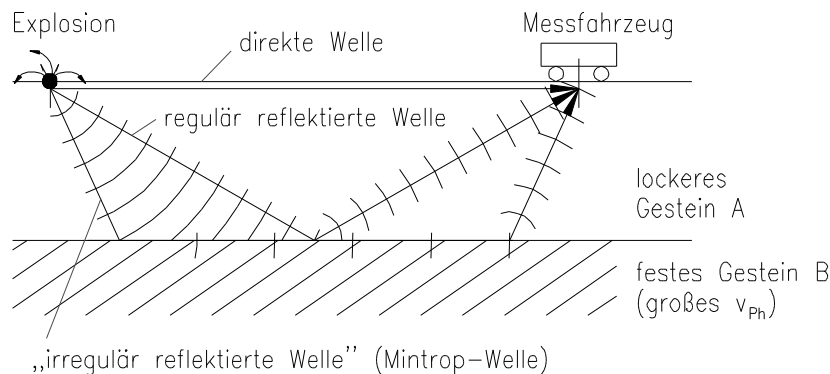
Jedes  $A \rightarrow Q \rightarrow B$  wäre länger, weil  $A' \rightarrow Q \rightarrow B$  länger ist!



Plausibilitätserklärung:

Weg lt. Brechungsgesetz nutzt die höhere Phasengeschwindigkeit bestmöglich aus.

– **Beispiel:** geologische Untersuchung



**Kommentar:**

Jede der drei Wellen folgt für sich dem FERMATSchen Prinzip:

- a) die direkte Welle, die sich geradlinig ausbreitet,
- b) die Mintrop-Welle, die die schnellste nicht-direkte Welle ist,
- c) die sogenannte regulär reflektierte Welle, die existiert, weil an der Grenzfläche A  $\leftrightarrow$  B nicht alle Intensität durchgehen darf und die („für sich optimiert“) dem Reflexionsgesetz folgt.

– Woher wissen die Wellen den kürzesten Weg?

Dies ist nicht leicht vorstellbar. Oft ist es zu erklären mit dem Argument, dass die nicht optimalen Wellen destruktiv interferieren und sich auslöschen.

## 17.4. Beugung

- ... ist die Eigenschaft von Wellen, in gewissem Maße hinter Hindernisse gelangen zu können. !
- Nur Hindernisse  $a \gg \lambda$  werfen scharfen Schatten. !

**Beispiel:**

→ Man kann eine Person hinter einem Baum hören (a), aber **nicht** sehen (b):

- a) Schallwellen (Beispiel Kammerton a):  $440 \text{ Hz} \wedge 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{330 \text{ m} \cdot \text{s}}{440 \text{ s}} = 0,75 \text{ m}$$

- b) Wellenlängenbereich für sichtbares Licht:

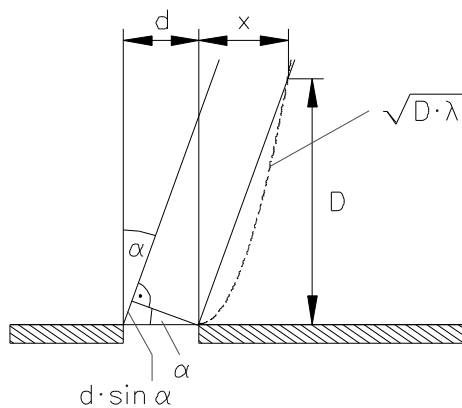
$$\Rightarrow \lambda = 400 \dots 700 \text{ nm.}$$

- allgemeine Deutung der Beugung mit HUYGENSSchem Prinzip:





- etwas anspruchsvollere Erklärung über die Überlagerung von Wellen:



Der Gangunterschied der Wellen rechts und links vom Spalt beträgt:

$$d \cdot \sin \alpha \approx d \cdot \alpha$$

Die Wellen löschen sich gegenseitig aus, wenn  $\alpha$  so groß wird, dass gilt:

$$d \cdot \alpha = \frac{\lambda}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha_{\text{Grenz}} = \frac{\lambda}{2d} \rightarrow \frac{\lambda}{d}$$

Die Breite  $x$  des „Eindringbereiches“ beträgt:

$$x = D \cdot \tan \alpha \approx D \cdot \alpha$$

$$\Rightarrow x = D \cdot \frac{\lambda}{d} \quad \wedge \quad x \approx d \text{ (Näherung)}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{D \cdot \lambda} \quad (2)$$

**Beispiel:**

Hindernisbreite 0,5 m (Baum)  $\wedge$  Abstand 0,5 m

· Kammerton a:  $x = 0,61 \text{ m} \Rightarrow$  Wellenfront "längst wieder geschlossen"

· Licht ( $0,5 \mu\text{m}$ ):  $x = 0,5 \text{ mm}$  = typische Unschärfe eines Schattens

## 17.5. DOPPLER-Effekt; MACHsche Wellen

- Wellenerzeuger bewegt sich mit Geschwindigkeit  $v$  relativ zum Medium.

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{Welle läuft um } v_{\text{ph}} \cdot T \\ \text{Quelle läuft um } v \cdot T \end{array} \right\} \text{während der Periodendauer } T$$

$$\Rightarrow \lambda \text{ verringert sich von: } \lambda = v_{\text{ph}} \cdot T \quad \text{auf: } \lambda' = (v_{\text{ph}} - v) \cdot T \quad (3)$$

$\Rightarrow v$  erhöht sich auf:

$$v' = \frac{v_{\text{ph}}}{\lambda'} = \frac{v_{\text{ph}}}{(v_{\text{ph}} - v) \cdot T} = \frac{1}{1 - \frac{v}{v_{\text{ph}}}} \cdot v \quad (4)$$

<sup>1</sup> Bei Beachtung weiterer Einflüsse ist diese Annahme „sicherer“.

- Wenn sich Wellenerzeuger vom Beobachter wegbewegt, sinkt  $v$  auf:

$$v' = \frac{1}{1 + \frac{v}{v_{Ph}}} \cdot v \quad (5)$$

Die Frequenzverschiebung lt. Gl. (4) bzw. (5) heißt **DOPPLER-Effekt**.

⇒ Geschwindigkeitsschätzung anhand Tonumschlags möglich! (Feuerwehr, Hupe)

- **Kommentar:**

· Gl. (3), (4) und (5) betreffen die Bewegung der Quelle relativ zum Medium und zum (im Medium ruhenden) Beobachter.

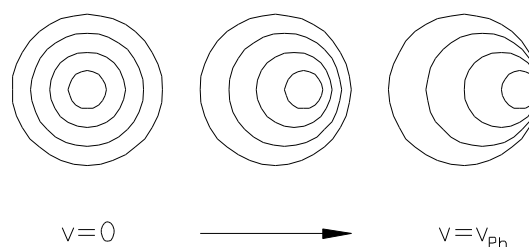
· Eine relativ zum Medium ruhende Quelle bei bewegtem Beobachter führt (bei einer Bewegung auf die Quelle zu (+) bzw. von ihr weg (-)) auf:

$$v' = \left(1 \pm \frac{v}{v_{Ph}}\right) \cdot v \quad (4')$$

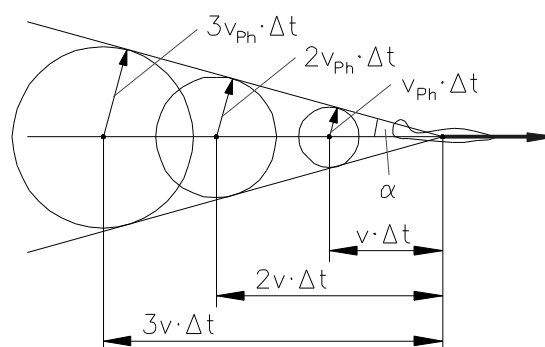
· Bei Lichtwellen gibt es ein solches Medium nicht und die Formeln Gl. (4) und Gl. (4') verschmelzen!

- **MACHsche Wellen:**

Für  $v \leq v_{Ph}$  wird die Welle vor Quelle mehr oder weniger zusammengedrängt:



Für  $v > v_{Ph}$  "türmen" sich die Wellenfronten zum Überschallkegel auf:



Für den Öffnungswinkel  $\alpha$  des Kegels gilt:

$$\sin \alpha = \frac{v_{Ph}}{v} = \frac{1}{M} \quad (6)$$

M ... **MACHzahl**

Die Machzahl gibt an, wieviel Mal  $v$  größer als die Schallgeschwindigkeit  $v_{Ph}$  (Phasengeschwindigkeit des Schalls) ist.

Der Überschallknall ist das Überstreichen des Ortes des Beobachters durch den Kegel, kein einmaliges „Durchstoßen der Schallmauer“!

## 17.6. Intensität einer Welle

- Wir betrachten nun die von der Welle (pro Zeit- und Flächeneinheit) transportierte Energie, d.h. die **Energiestromdichte** bzw. **Intensität** der Welle.
- Die Betrachtung erfolgt am Beispiel elastischer Wellen, gilt aber praktisch allgemein.
- Es findet ein ständiges hin und her von  $E_{\text{kin}}$  und  $E_{\text{pot}}$  statt (analog <6.1.>):

### Grenzzustände:

$$\begin{array}{ll}
 1. & \xi = \xi_0 \text{ (Auslenkung maximal)} \\
 \Rightarrow & \dot{\xi} \equiv v = 0
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 1. \\ \Rightarrow \end{array}} \right\} E_{\text{ges}} = E_{\text{pot}}, E_{\text{kin}} = 0$$

$$\begin{array}{ll}
 2. & \xi = v_0 \text{ (Geschwindigkeit maximal)} \\
 \text{also} & \xi = 0 \text{ (Nulldurchgang)}
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{l} 2. \\ \text{also} \end{array}} \right\} E_{\text{ges}} = E_{\text{kin}}, E_{\text{pot}} = 0$$

Die hier verwendete Geschwindigkeit  $v \equiv \dot{\xi}$  ist die sogenannte **Schallschnelle**, die Geschwindigkeit des Schwingens. Sie darf nicht mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit des Schwingungszustandes, d.h. der Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle, verwechselt werden.

- Da  $E_{\text{ges}}$  sowieso konstant ist, nehmen wir Grenzfall 2 für die Ermittlung der Gesamtenergie  $\Delta W$  eines Volumenelementes  $\Delta V$  mit der Masse  $\Delta m$ :

$$\begin{aligned}
 \Delta W &= \frac{1}{2} \Delta m \cdot v_0^2 & \Delta m &= \rho \cdot \Delta V \\
 &= \frac{1}{2} \rho \Delta V \cdot v_0^2 \\
 \Rightarrow \frac{\Delta W}{\Delta V} &\equiv w = \frac{1}{2} \rho \cdot v_0^2
 \end{aligned} \tag{7}$$

Die **Energiedichte**  $w$  („Energieinhalt der Welle“) bewegt sich mit der Ausbreitungsgeschwindigkeit  $v_{\text{ph}}$  der Welle. Damit ergibt sich für die Intensität  $I$

$$I \equiv w \cdot v_{\text{ph}} = \frac{1}{2} v_{\text{ph}} \rho \cdot v_0^2 \tag{8}$$

Aus Grenzfall 1 erhält man analog:

$$I = \frac{1}{2} v_{\text{ph}} \rho \cdot w^2 \cdot \xi_0^2 \tag{8'}$$

- Dies ist allgemeingültig: Die Intensität der Welle ist immer proportional dem **Quadrat** der Amplitude!

!

- Ohne Beweis: Das Produkt  $v_{ph} \cdot \rho$  heißt **Wellenwiderstand**  $Z$ .

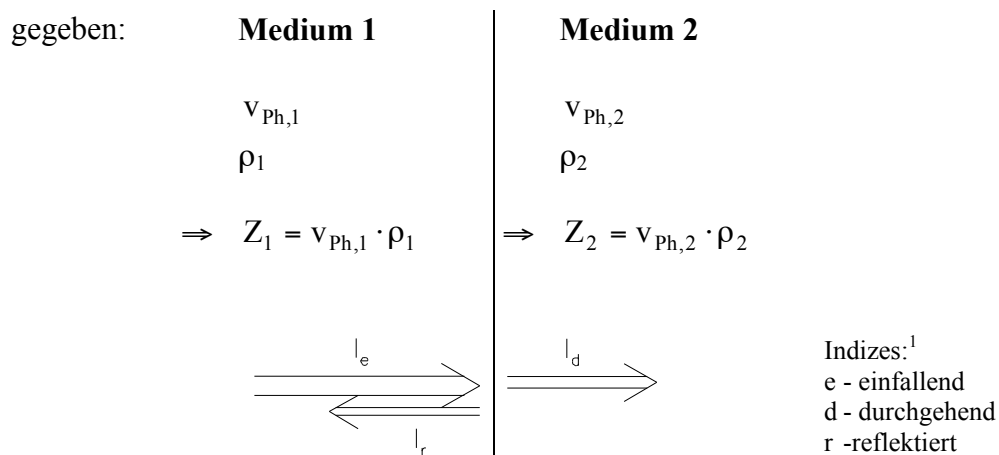
$$Z = v_{ph} \cdot \rho \quad (9)$$

- **Kommentar:** ◆

Gl. (9) ist plausibel, da mit zunehmender  $v_{ph}$  und zunehmendem  $\rho$  die „pro Zeiteinheit in Schwingungen versetzte Masse ansteigt“, was den Ausbreitungswiderstand der Welle (pro Volumeneinheit) erhöht.

## 17.7. Reflexion und Transmission an einer Grenzfläche

- Wir betrachten das Verhalten einer Welle an der Grenzfläche zweier Medien:



- Energiesatz an der Grenzfläche:

$$I_e = I_r + I_d \quad (10)$$

bzw. mit Gl. (8) und (9):

$$\frac{1}{2} Z_1 v_e^2 = \frac{1}{2} Z_1 v_r^2 + \frac{1}{2} Z_2 v_d^2 \quad (11)$$

Gl. (11) umgestellt liefert:

$$\Rightarrow Z_1 (v_e^2 - v_r^2) = Z_2 \cdot v_d^2 \quad (12)$$

- Damit nicht unendlich große Deformationen auftreten, muss die Welle an der Grenzfläche stetig sein, d.h. Auslenkung  $\xi$  und Geschwindigkeit  $\dot{\xi} = v$  müssen links und rechts gleich sein:

$$\Rightarrow (\text{u.a.}) \quad \underset{\nwarrow}{v_e} + \underset{\swarrow}{v_r} = v_d \quad (13)$$

Geschwindigkeit links    Geschwindigkeit rechts

<sup>1</sup> Der Index „0“ wird der Einfachheit halber weggelassen, d.h.  $v_{0,e} = v_e$ , usw.

- Gl. (12) und (13) aufgelöst nach  $v_d$  bzw.  $v_r$  ergibt:

$$\Rightarrow \quad v_d = v_e \cdot \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} \quad v_r = v_e \cdot \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \rightarrow (b) \quad (14)$$

- Daraus schließlich ermittelbar:

$$\left. \begin{aligned} I_d &= \frac{1}{2} Z_2 \cdot v_d^2 = 4I_e \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{(Z_1 + Z_2)^2} \\ I_r &= \frac{1}{2} Z_1 \cdot v_r^2 = I_e \cdot \frac{(Z_1 - Z_2)^2}{(Z_1 + Z_2)^2} \rightarrow (a) \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

### **Diskussion:**

- a) Im Allgemeinen  $\exists$  ***Reflexion und Transmission***.  
 Für  $Z_1 = Z_2$  geht die gesamte Welle durch, d.h. die Reflexion wird Null.  
 Für  $Z_1 \ll Z_2$  bzw.  $Z_2 \ll Z_1$  geht  $I_d \rightarrow 0$  (vollständige Reflexion).
- b) Bei  $Z_1 > Z_2$  (Übergang ins dünnere Medium) ist das Vorzeichen von  $v_r$  gleich dem von  $v_e$ , d.h. die Welle wird mit gleicher Phase reflektiert.  
 Bei  $Z_1 < Z_2$  ist das Vorzeichen von  $v_r$  entgegengesetzt dem von  $v_e$ , d.h., bei der Reflexion am dichteren Medium gibt es einen ***Phasensprung*** um  $\pi$ .

Dies sind **allgemeingültige** Aussagen, die für alle Wellen gelten.

## 18. Akustik

### 18.1. Einleitung

- Akustik ist bis zu gewissem Grad am Menschen orientiert:

Infraschall	$\nu \leq 16 \text{ Hz}$
hörbarer Schall	$16 \text{ Hz} \leq \nu \leq 16 \text{ kHz}^1$
Ultraschall	$\nu > 16 \text{ kHz}$

- Problem der Lautstärke:  $\exists$  riesiger Intensitätsbereich, den das menschliche Ohr auch tatsächlich in starkem Maße ( $1 : 10^{13}$ ) überstreicht.
- Lösung: Intensität der Wahrnehmung (d.h. die Lautstärke) hängt vom Logarithmus der Schallintensität ab.

$$L = 10 \cdot \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad (1)$$

L ... **Lautstärke**

$I_0$  ... gerade noch hörbare Intensität, Hörschwelle

log ... dekadischer Logarithmus

Maß-  
einheit: [L] ... Phon oder Dezibel (db) SI

$\Rightarrow I = I_0$	$\Rightarrow L = 0 \text{ Phon}$	Hörschwelle
$I = 10^2 I_0$	$\Rightarrow L = 20 \text{ Phon}$	Flüstern
$I = 10^5 I_0$	$\Rightarrow L = 50 \text{ Phon}$	normales Sprechen
$I = 10^{13} I_0$	$\Rightarrow L = 130 \text{ Phon}$	Schmerzschwelle

#### Kommentar:

Das Ohr erfasst 13 Zehnerpotenzen! Die untere Grenze liegt nahe der „Hörbarkeit der Brownschen Bewegung“



### 18.2. Töne und Klänge

- **Ton** = reine Sinusschwingung
- **Klang** = realer Ton eines Instrumentes, d.h. Sinus + Obertöne lt. FOURIER
- **Geräusch** = nichtperiodischer Vorgang

<sup>1</sup> Angabe der oberen Hörschwelle ist ein Mittelwert. Die tatsächliche Hörschwelle kann von 4 kHz (Greis) bis zu 20 kHz (Kind) reichen.

- Mehrere Klänge (reale Töne) gleichzeitig klingen dann besonders harmonisch, wenn sie viele Obertöne gemeinsam haben.

!

⇒ besonders gut klingt es, wenn  $\frac{v_1}{v_2} = 2:1$  ist → Oktave

- **Tonleiter** = Unterteilung der Oktave in 7 Zwischenstufen, so „dass es gut klingt“

### C-Dur-Tonleiter:

Ton	c	d	e	f	g	a	h	c
$\frac{v_x}{v_c}^1$	1	9/8	5/4	4/3	3/2	5/3	15/8	2
$\frac{v_x}{v_{x-1}}^2$		9/8	10/9	16/15	9/8	10/9	9/8	16/15
Intervall		(große) Sekunde	(große) Terz	Quarte	Quinte	(große) Sexte	(große) Septime	Oktave

Dies ist die so genannte reine Stimmung. Sie führt zu Problemen bei Instrumenten mit fest eingestellten Tönen (z. B. Klavier):

Beispiel C-Dur:  $\frac{2. \text{ Ton}}{1. \text{ Ton}} = \frac{d - \text{Taste}}{c - \text{Taste}} = \frac{9}{8}$  (Frequenzverhältnis)

↑  
↓

D-Dur:  $= \frac{e - \text{Taste}}{d - \text{Taste}} = \frac{10}{9}$

Um Tasteninstrumente für alle Tonarten nutzbar zu machen, verteilt man die unvermeidlichen Abweichungen gleichmäßig (so genannte temperierte Stimmung).

- **Oktave** = 5 Ganztonschritte + 2 Halbtonschritte = 6 Ganztonschritte

bisher war (reine Stimmung):

$$\begin{aligned} \text{Ganztonschritt} &= \frac{9}{8} \text{ bzw. } \frac{10}{9} = 1,125 \text{ bzw. } 1,111 \\ \text{Halbtonschritt} &= \frac{16}{15} = 1,067 \end{aligned}$$

nun ist (temperierte Stimmung):

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Ganztonschritt} &= \text{Faktor } \sqrt[6]{2} \approx 1,12246 \\ \text{Halbtonschritt} &= \text{Faktor } \sqrt[12]{2} \approx 1,05946 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} \Rightarrow \text{Ganztonschritt} &= \text{Faktor } \sqrt[6]{2} \approx 1,12246 \\ \text{Halbtonschritt} &= \text{Faktor } \sqrt[12]{2} \approx 1,05946 \end{aligned}} \right\} \text{ also konstantes Frequenzverhältnis von Ton zu Ton}$$

<sup>1</sup> relative Frequenz

<sup>2</sup> Frequenzverhältnis zum Nachbarton

### 18.3. Stehende Wellen; Musikinstrumente

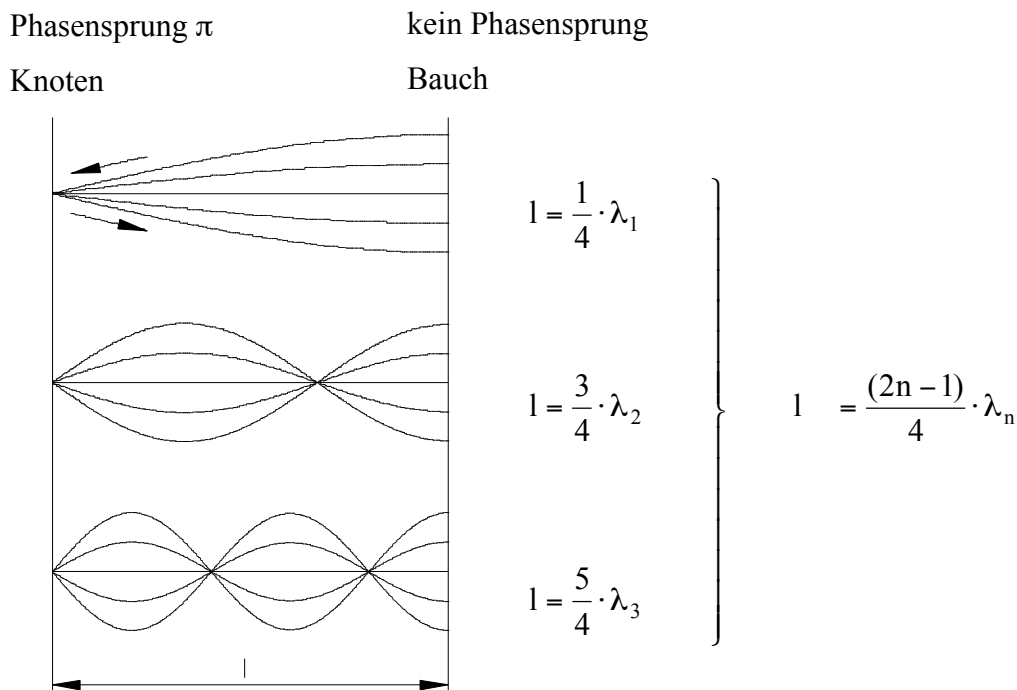
- Stehende elastische Wellen lassen sich durch Mehrfachreflexion (Hin- und Herlaufen) im elastischen Medium erzeugen. !
- Bestimmend ist das Verhältnis der Wellenwiderstände am Ende des Mediums. ■

**Beispiel:**

An einem Ende Übergang zum größeren, am anderen Übergang zum kleineren Wellenwiderstand, also einmal ein Phasensprung von  $\pi$ , einmal nicht.

mögliche physikalische Realisierungen:

- 1) einseitig eingespannter Stab der Länge  $l$
- 2) einseitig offene Röhre der Länge  $l$



$$\Rightarrow v_n = \frac{v_{ph}}{\lambda_n} = \frac{(2n-1) \cdot v_{ph}}{4l} \quad (\text{mit } n = 1, 2, 3, \dots) \quad (2)$$

Die  $v_n$  sind die **Eigenschwingungen**, die sich bei geeigneter Anregung erzeugen lassen bzw. die als Obertöne stets in gewissem Maße mitschwingen.

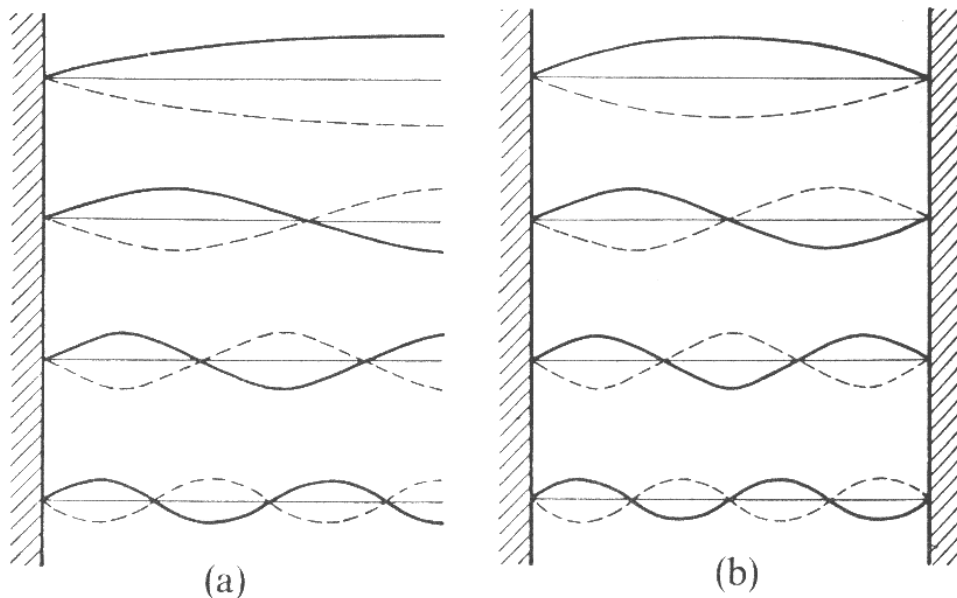
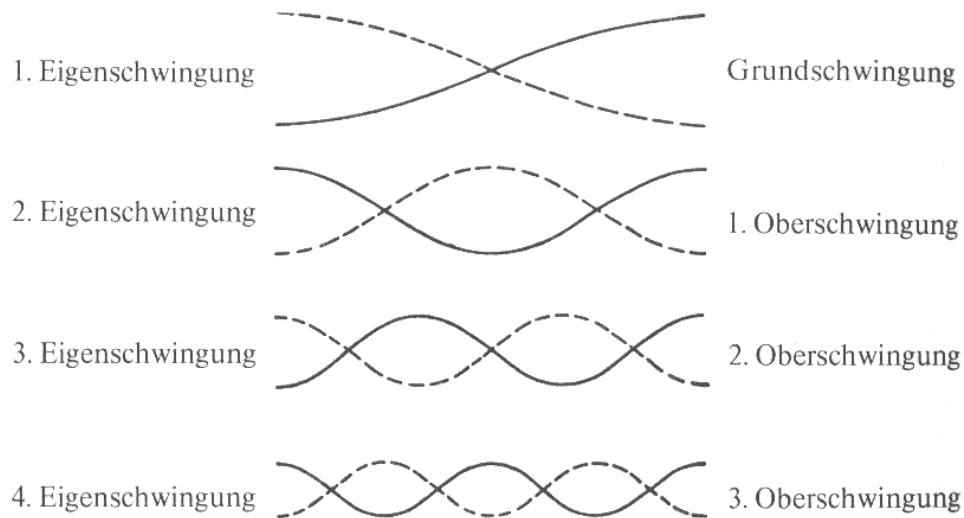
Bei beidseitig gleichem (offenem oder geschlossenem) Ende ergibt sich analog zu Gl. (2)

$$\Rightarrow v_n = \frac{v_{ph}}{\lambda_n} = \frac{n \cdot v_{ph}}{2l} \quad (\text{mit } n = 1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

$$\text{also } l = \left( \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots \right) \cdot \lambda$$



Je nachdem, ob die Enden beide fest oder beide lose sind, ergeben sich unterschiedliche Schwingungsformen:



Oben: Grund- und Oberschwingungen eines an beiden Enden freien, longitudinal schwingenden Stabes

Unten: Longitudinalschwingungen eines Stabes

a) an einem Ende fest, am anderen frei

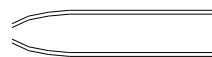
b) an beiden Enden fest

Die Verschiebungen in Richtung der Stabachse sind senkrecht zum Stab gezeichnet. (Verschiebung nach rechts - nach oben, Verschiebung nach links - nach unten). ({2}, S. 172)

– **Kommentar:**

mögliche Realisierungen:

- a) beidseitig eingespannte Saite
- b) einseitig geschlossene Röhren
- c) effektiv beidseitig offene Röhren

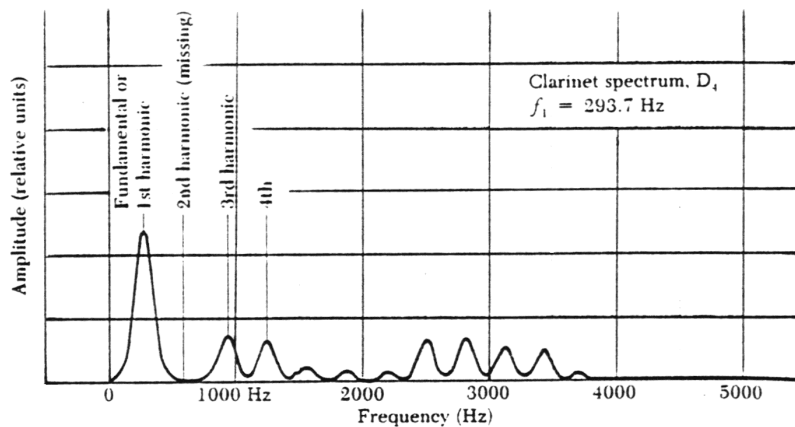


konisches Ende „wirkt wie offenes“

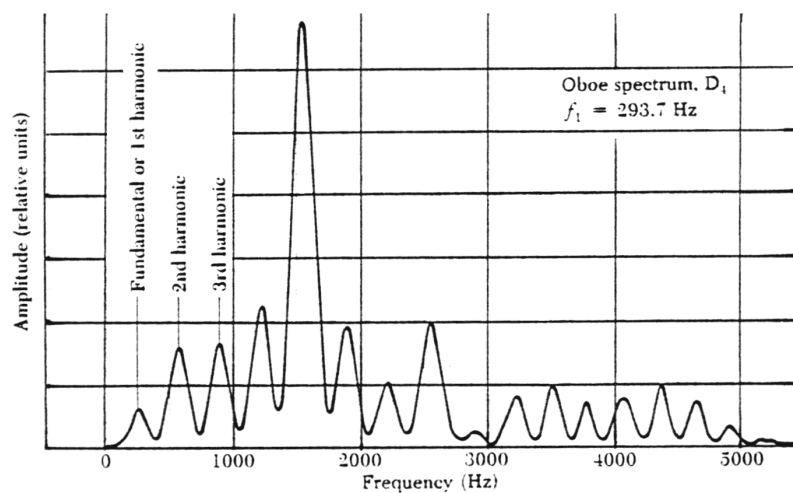
Beispiele

zu a) Geige

zu b) viele Blasinstrumente, z.B. Klarinette (gerade Obertöne fehlen zum Teil - vgl. Gl. (2))



zu c) Oboe (alle Obertöne vorhanden - vgl. Gl. (3))



Instrumente besitzen in der Regel „Erreger“ (Lippen des Bläasers, Schilfrohr bei Holzblasinstrumenten, Geigenbogen). Es erfolgt eine „Selektion“ und Formung des Tons über Resonanz (Luftsäule, Geigensaite).

In Gl. (2) und (3) steht  $v_{ph}$ ! Dies hat Auswirkungen:

Bei Gasen war: 
$$v_{ph} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} \quad (16-17')$$

$$\Rightarrow \left. \begin{array}{l} p \sim N \\ \rho \sim N \cdot M_{mol} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{Tonhöhe vom Gas abhängig! (Beispiel Tonhöhen in He und O}_2\text{)} \quad !$$

$$\Rightarrow \rho = \rho(T) \quad \Rightarrow \text{Einfluss der Temperatur}$$

# LITERATURLISTE

<b>Titel</b>	<b>Autoren</b>	<b>Verlag</b>	<b>ISBN</b>	<b>DM</b>
Physik	Gerthsen; Vogel	Springer	3-540-65479-8	129,-
Physik in Experimenten und Beispielen	Paus, Hans J.	Hanser	3-446-17371-4	98,-
Experimentalphysik 1 Mechanik und Wärme	Demtröder, W.	Springer	3-540-57095-0	64,-
Experimentalphysik 2 Elektrizität und Optik	Demtröder, W.	Springer	3-540-56543-4	64,-
Physics Principles & Applications	Harris; Hemmerling; Mallmann	McGraw-Hill	0-07-026851-7	
Physik (Teil 1)	Halliday, David; Resnick, Robert	de Gruyter	3-11-010640-X	98,-
Physik (Teil 2)	Halliday, David; Resnick, Robert	de Gruyter	3-11-013897-2	128,-
Physik und ihre Anwendungen in Technik und Umwelt	Leute, Ulrich	Hanser	3-446-17232-7	58,-
Physik	Tipler, Paul A.	Spektrum	3-86025-122-8	128,-
Physik für Ingenieure	Lindner, Helmut	Fachbuch-Verlag	3-343-00772-2	48,-
Physik für Ingenieure	Hering; Martin; Stohrer	Springer	3-540-62442-2	78,-
Mechanik, Akustik, Wärme; Bd. 1	Bergmann; Schaefer	de Gruyter	3-11-012870-5	148,-
CD-ROM: CliXX Physik	Bauer; Benenson; Westfall	Harri Deutsch	3-8171-1553-9	ca. 50,-
Taschenbuch der Physik	Stöcker	Harri Deutsch	3-8171-1556-3	58,-
Taschenbuch der Physik	Kuchling, H.	Fachbuch-Verlag	3-446-21054-7	40,-

## QUELLENVERZEICHNIS

**{1}**

Wolfgang Demtröder, Experimentalphysik 1, Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest (Springer), 1994

**{2}**

Christian Gerthsen, Helmut Vogel, Physik, Berlin; Heidelberg; New York; London; Paris; Tokyo; Hong Kong; Barcelona; Budapest (Springer), 17. Auflage 1993

# SACHREGISTER

## A

abgeschlossenes System 19  
 Aktionsprinzip 16, 17  
 Akustik 121–5  
 aperiodischer Grenzfall 40  
 Arbeit 23–27  
   Beschleunigungs- 24  
   Hub- 24  
   mechanische 23  
 Auftrieb 76  
   dynamischer 95  
 Ausbreitungsgeschwindigkeit 104

## B

Bahnkurve 9  
 barometrische Höhenformel 83  
 Benetzung 79, 80  
 BERNOULLISCHE Gleichung 93  
 Beschleunigung 10  
   mittlere 10  
   Momentan- 10  
   Normal- 11  
   Tangential- 10  
 Beugung 115  
 Bewegung  
   geradlinig gleichförmig 15  
   gleichmäßig beschleunigt 19  
   Kreis- 11, 20  
 Bewegungsgleichung  
   Drehschwinger 56  
   erzwungene Schwingung 101  
   Federschwinger 34  
   gedämpfter Federschwinger 38  
   gekoppelter Federschwinger 100  
   mathematisches Pendel 37  
 Bezugssysteme  
   bewegte 47–51  
   körperfeste 60  
   Laborsystem 43  
   linear beschleunigte 48–49  
   mit konstanter Relativgeschwindigkeit 47  
   rotierende 49–51  
   Schwerpunktsystem 45  
 Brechung 114

## C

Corioliskraft 51

## D

Dehnung 65  
 Dichte 52  
 Dispersion 112  
 DOPPLER-Effekt 116  
 Drehimpuls 28, 57  
 Drehimpulssatz 30, 57  
 Drehmoment 29, 53  
 Drehschwingung *siehe* Schwingung  
 Druck  
   Schwere- 75  
   statischer 73, 94  
 Dynamik 15–22

## E

Eigenschwingung 123  
 Elastizitätsmodul 65  
 Energie 23–27  
   kinetische 24, 35, 54  
   mechanische 23–24, 27  
   potentielle 24, 25, 32, 36  
 Energiedichte 118  
 Energiesatz  
   der Mechanik 27  
 Energiestromdichte 118

## F

Federkonstante 34  
 Federkraft 34  
 Federschwinger 34  
 FERMAT'Sches Prinzip 114  
 Flächenträgheitsmoment 70  
 FOURIER-Reihe 99  
 Frequenz 20

## G

Galilei-Transformation 47  
 Geräusch 121  
 Geschwindigkeit 9  
   Gruppen- 111  
   mittlere 10  
   Momentan- 10  
 Gesetz  
   von BOYLE-MARIOTTE 82  
 Gleitreibung 21

Goldene Regel der Mechanik 23, 75  
 Gravitationsfeld 31  
 Gravitationsgesetz 30  
 Gravitationskraft 31  
 Gravitationspotential 32  
 Gruppengeschwindigkeit *siehe* Geschwindigkeit

## H

Haftreibung 22  
 Haftreibungskoeffizient 22  
 HAGEN-POISEUILLESches Gesetz 88  
 Hauptträgheitsachsen 60  
 Hauptträgheitsmomente 60  
 HOOKEsches Gesetz 65  
 Hörschwelle 121  
 HUYGENSSches Prinzip 113  
 Hysterese  
     elastische 71

## I

Impuls 18  
 Impulserhaltung 19  
 Impulssatz 41  
 Inertialsysteme 48  
 innere Reibung 86–87  
 Intensität 118

## K

Kapillarität 80  
 kartesische Koordinaten *siehe* Koordinaten  
 Kavitation 95  
 KEPLERSche Gesetze 32  
 Kinematik 9–14  
 kinetische Energie *siehe* Energie *siehe* Energie  
 Klang 121  
 Kohärenz 113  
 Kompressibilität 74, 82  
 Kompressionsmodul 66, 74  
 konservatives Kraftfeld *siehe* Potentialfeld  
 Kontinuitätsgleichung 85  
 Koordinaten  
     kartesische 9, 13  
     Polar- 11  
     Zylinder- 12  
 Kraft 15  
 Kräftepaar 53  
 Kraftfeld 16, 25  
 Kreisbewegung *siehe* Bewegung  
 Kreisel 62  
 Kreisfrequenz 20  
 Kriechfall 40

## L

Laborsystem *siehe* Bezugssysteme  
 Länge 3  
 Lautstärke 121  
 Leistung 102  
 Linienspannung 78  
 LISSAJOUS-Figuren 97  
 Longitudinalwelle *siehe* Welle

## M

MACHkegel 117  
 MACHsche Welle 117  
 MACHzahl 117  
 Masse 6, 52  
 Massepunkt 9  
 momentane Drehachse 63

## N

Nabla-Operator 26  
 NEWTONSche Axiome 17  
 Normalbeschleunigung *siehe* Beschleunigung  
 Nutation 62, 63

## O

Oberflächenenergie 78  
     spezifische 77  
 Oberflächenspannung 78  
 Oberton 99, 121  
 Ortsvektor 9

## P

Paradoxon  
     hydrodynamisches 94  
     hydrostatisches 75  
 Pendel  
     mathematisches 37  
 Phase 105  
 Phasengeschwindigkeit 104  
 Phasensprung 120  
 Phasenverschiebung 101  
 Planetenbewegung 32  
 POISSONzahl 66  
 Polarisation 107  
 Polarkoordinaten *siehe* Koordinaten  
 Potentialfeld 25  
 potentielle Energie *siehe* Energie  
 Präzession 64  
 Präzessionsfrequenz 64  
 Punktmasse 4

## Q

Querkontraktion 66

## R

Raumwinkel 7  
 Reaktionsprinzip 17  
 Reflexion 114, 120  
 Reibkoeffizient 21  
 Reibungskraft 86  
 Resonanz 103  
 REYNOLDSche Zahl 89  
 Richtmoment 56, 69  
 Rotation 11, 52–58, 59–64  
 Rotationsenergie 54

## S

Satz von STEINER 55  
 Schall 121  
 Schallgeschwindigkeit 109  
 Schallschnelle 118  
 Schermodul 67  
 Scherspannung 67  
 Scherwinkel 67  
 Schwebung 97, 101  
 schwere Masse 31  
 Schweredruck *siehe* Druck  
 Schwerpunkt 41, 52  
 Schwerpunktsystem *siehe* Bezugssysteme  
 Schwingung 34–40  
     Dreh- 56  
     erzwungene 101–3  
     Fundamental- 100  
     gedämpfte 38–40  
     gekoppelte 100  
     harmonische 36  
     Torsions- 56  
 SI-System 3  
 Spannung 65  
 Spannungs-Dehnungs-Diagramm 71  
 starrer Körper 52  
 statischer Druck *siehe* Druck  
 Staudruck 94  
 Stoß 42–46  
     elastisch 43–45  
     inelastisch 45  
     nichtzentral 46  
     zentral 43  
 Stoßparameter 46  
 Streuung 113  
 Stromlinien 85  
 Stromröhre 85  
 Strömung  
     ähnliche 90  
     laminar 87  
     stationär 85

turbulente 89  
 Strömungsgrenzschicht 90  
 Strömungswiderstand 95–96  
 Superposition 110

## T

Tangentialbeschleunigung *siehe* Beschleunigung  
 Temperatur 6  
 Ton 121  
 Tonleiter 122  
 Torsion 68  
 Torsionsschwingung *siehe* Schwingung  
 Torsionswinkel 68  
 träge Masse 16, 31  
 Trägheit 15  
 Trägheitskraft 49  
 Trägheitsmoment 54  
 Trägheitsprinzip 15, 17  
 Trägheitstensor 59  
 Translationsenergie 24  
 Transmission 120  
 Transversalwelle *siehe* Welle

## Ü

Überschallknall 117  
 Umdrehungsfrequenz *siehe* Frequenz  
 Umlaufbeschleunigung 12  
 Umlaufgeschwindigkeit 12  
 Umlaufzeit 20

## V

Viskosität 22, 86  
 Volumenstrom 85

## W

Welle 104  
     elastische 108, 109, 123  
     elliptisch polarisierte 107  
     harmonische 105  
     linear polarisierte 107  
     Longitudinal- 106, 108, 109  
     Schall- 109  
     stehende 110, 123  
     Transversal- 106, 109  
     zirkular polarisierte 107  
 Wellenfront 107  
 Wellengleichung 106  
 Wellenwiderstand 119  
 Wellenzahl 105  
 Widerstandsbeiwert 95  
 Winkel 7  
 Winkelbeschleunigung 12  
 Winkelgeschwindigkeit 12, 20

**Z**

Zeit 6

Zentralfeld 25, 30

Zentrifugalkraft 49

Zentripetalkraft 21

Zylinderkoordinaten *siehe* Koordinaten