Lineare Algebra Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET 2013 31.07.13

Lineares Gleichungssystem

Gauss- Zerlegung

Lösungsmenge: Menge aller Lösungen eines linearen Gleichungssystems (GS)

Äquivalentes GS: 1) Vertauschen v. Zeilen 2) Addition eines Vielfachen einer Z. zu anderen

Gauss
1. Pivot finden im Eliminationsschema, s.d. Pivot ≠ 0 (wenn möglich 1!)
   -> falls alle Koeff. der Spalten = 0 -> *freier Parameter,* da unbestimmbar
2. Von anderen Zeilen *Koeffizient/Pivot* * Pivot-Zeile subtrahieren -> Var. eliminieren
3. Falls triviale Lösung (x = …) im Endschema
   -> *Verträglichkeitsbedingungen*: Muss auflösen können (NICHT 0 0 = 5)
   -> wenn ja: *Rückwärtseinsetzen*

r : *Rang*, Anzahl Nicht-Nullzeilen / Pivot-Variablen im Hauptteil, r ≤ m , r ≤ n

m : Gleichungen *n* : Unbekannte

Freie Parameter: n – r freie Parameter, entspricht Anzahl Nullzeilen

Für *Koeffizientenmatrix* A und Spaltenvektor x = $\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$:

A * x = b A * x : *Hauptteil* ; b : *rechte Seite*

Satz 1.1 – 1.7 :

i) Das GS hat mindestens eine Lösung, wenn r = m oder r < m und c_i = 0, i = r+1, …, m
ii) Lösung eines lin. GS ist genau dann eindeutig, falls r = n .
iii) Ein homogenes GS hat eine nichttriviale Lösung, wenn r < n ist (da dann freie Paras).
iv) Ein lin. GS ist genau dann *für beliebige rechte Seiten lösbar, wenn* r = m .
v) Für m = n ist genau dann eindeutig, wenn für jede rechte Seite lösbar.
vi) Für m = n ist lin. GS für jede rechte Seite lösbar, wenn das dazugehörige homogenes System nur die triviale Lösung besitzt.

LR – Zerlegung

Aufwand Gauss für reguläre n x n Matrix : $\frac{n^3}{3} - \frac{n}{3}$

LR: für jede Koeffizientenmatrix nur einmal ausrechnen! -> danach Aufwand n^2

L : Speichern der Quotienten *Koeffizient / Pivot* in leeren Nullstellen für später

- ACHTUNG bei 0-Spalten : Speichern in gleicher Spaltennummer wie Zeilennummer des Pivots nach Permutationstausch (überspringe Eliminationsschritt, aber nicht L-Spalte)

Permutationsmatrix P : Einheitsmatrix I_n, um Zeilentausche zu rekonstruieren

L (ohne Einsen) und R können aus dem erweiterten Endschema abgelesen werden

LR 1. LR – Zerlegung von A:	Mit Gauss L, R u. P bestimmen, s.d.	P A = L R
2. Vorwärtseinsetzen:	Auflösen nach c	L c = P b
3. Rückwärtseinsetzen:	Bestimme die Lösung x des GS	R x = c

$$PA = LR, \quad L = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_{11} & \cdots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ 0 & & r_{mn} \end{pmatrix}$$

R: Gaussendschema, L: Faktoren der Gausszerlegung
P: Permutationsmatrix (I_n mit Zeilenvertauschungen)

Rang einer Matrix: entspricht Rang des lin. Gleichungssystems A * x = 0

- A regulär ⟷ Rang A = n

Satz 6.2: Sei A eine m x n Matrix, B_1 reguläre m x m, B_2 reguläre n x n Matrix.

i) $Rang\ A = Rang\ A^T$ [Spaltenrang = Zeilenrang]
ii) $Rang\ B_1 A = Rang\ A$
iii) $Rang\ A\, B_2 = Rang\ A$

Matrizen

m x n Matrix : m Zeilen (i, →) , n Spalten (j, ↓) mit m*n Elementen a_{ij}

quadratische Matrix : n * n, gleich viele Spalten wie Zeilen

obere / Rechts- Dreiecksmatrix : alle Elemente unter der Diagonalen = 0

untere / Links- Dreiecksmatrix : alle Elemente über der Diagonalen = 0

Diagonalmatrix : lediglich Diagonalelemente, D = diag(d_{11}, d_{22}, …)

Einheitsmatrix / Identität : I_n = diag(1, 1, …)

Matrixprodukt A * B : $\sum_{k=1}^{n}(A)_{ik} * (B)_{kj}$, wobei resultierende Matrix # Zeilen_A * # Spalten_B
existiert lediglich, falls A gleich viele Spalten wie B Zeilen hat. AB ≠ BA

Satz 2.1 : i) Kommutativgesetz: A + B = B + A
ii) Assoziativgesetz Addition: (A + B) + C = A + (B + C)
iii) Assoziativgesetz Multiplikation: (AB) * C = A * (BC)
iv) Distributivgesetz: (A + B) * C = AC + BC , A * (C + B) = AC + AD

Satz 2.2, 2.3, 2.5 : $a^{(i)}$ = Spaltenvektor n x 1 ; $a^{[i]}$ = Zeilenvektor 1 x n
i) A * $e^{(i)}$ = $a^{(i)}$ = *i*-ter Spaltenvektor von A
ii) A * x = x_1 * $a^{(1)}$ + x_2 * $a^{(2)}$ + …
iii) AB = ($Ab^{(1)}$ $Ab^{(2)}$ … $Ab^{(p)}$)
iv) e[i] * B = b[i] = *i*-ter Zeilenvektor von B
v) y * B = y_1 * $b^{[1]}$ + y_2 * $b^{[2]}$ + …
vi) AB = ($a^{[1]}B$ … $a^{[n]}B$)^T = $a^{(1)}b^{[1]}$ + $a^{(2)}b^{[2]}$ + … + $a^{(n)}b^{[n]}$

Transponierte Matrix : $(A^T)_{ij} := (A)_{ji}$ -> Spiegeln an der Diagonalen: m x p -> p x m

***symmetrisch* : falls $A^T = A$**

Satz 2.4 : i) $(A^T)^T = A$
ii) $(A + B)^T = A^T + B^T$
iii) $(AB)^T = B^T * A^T$

Inverse einer quadratischen Matrix

Matrix X ist *Inverse* von A, falls: $A * X = I_n$ -> $X = A^{-1}$

regulär / invertierbar : falls A eine Inverse hat (Inverse ist eindeutig bestimmt!)

singulär : falls A keine Inverse hat

Satz 2.7 : i) $A^{-1} * A = I_n$
ii) $(A^{-1})^{-1} = A$
iii) $I_n^{-1} = I_n$
iv) $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
v) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

Satz 2.8 : Für n x n Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:
i) A ist regulär / invertierbar.
ii) Das Gleichungssystem Ax = b ist für jedes b lösbar.
iii) Das Gleichungssystem Ax = 0 hat nur die triviale Lösung x = 0 (-> Rang = n)

Inverse einer 2×2-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer 3×3-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{pmatrix} ei - fh & ch - bi & bf - ce \\ fg - di & ai - cg & cd - af \\ dh - eg & bg - ah & ae - bd \end{pmatrix}$$

Berechnung mittels Gauss

1. $Ax = I_n$, Gleichungssystem aufstellen und Lösen
2. Umformen, so dass links die Einheitsmatrix steht

-> rechts ist die Inverse der Matrix A

Orthogonale Matrix

Matrix A heisst orthogonal, falls: $A^T * A = I_n$ -> $A^T = A^{-1}$

Satz 2.9 : Seien A und B orthogonale n x n Matrizen.

i) A ist invertierbar und $A^{-1} = A^T$
ii) A^{-1} ist orthogonal.
iii) AB ist orthogonal.
iv) I_n ist orthogonal.

Givensrotation

$$U(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$U(\varphi)^T = U(-\varphi)$$

Householdermatrix Sei u ein Spaltenvektor mit

$$u^T u = \sum_{i=1}^{n} u_i^2 = 1.$$

Dann ist uu^T eine n x n-Matrix mit $(uu^T)_{ij} = u_i\, u_j$. Die *Householdermatrix ist symmetrisch und orthogonal*:

$$Q := I_n - 2uu^T$$

Determinanten (nur für quadratische Matrizen)

Die Determinante $|A|$ = det (A) charakterisiert, ob die Matrix regulär oder singulär ist.

Berechnung: (1.Teil – 2. Teil + 3. Teil - ...)

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a * d - c * d$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a * \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} - d * \begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} + g * \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Satz 3.1, Satz 3.6, Satz 3.8 :

i) Werden 2 Zeilen vertauscht, so wechselt $|A|$ ihr Vorzeichen.
ii) Wird ein Vielfaches einer Zeile addiert, bleibt sie unverändert.
iii) Wird eine Zeile mit α multipliziert, so wird auch $|A|$ mit α multipliziert.
iv) det (AB) = det (A) * det (B)
v) falls A invertierbar (det A ≠ 0) : $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$

Folgerungen:

1) Die Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen ist gleich null.
2) Die Determinante einer Matrix, die eine Zeile aus lauter Nullen enthält, ist gleich null.

Lemma 3.2 : Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt ihrer Diagonalelemente (det (D) = $d_{11} * d_{22} * \ldots * d_{nn}$) (normale Matrix -> Gauss)

Satz 3.3 : det A^T = det A -> für Spalten gilt gleiches wie für Zeilen

Entwicklung nach Zeile / Spalte:

Berechnung nach *i*-ter Zeile (x = j) oder *j*-ter Spalte (x = i)

$$\sum_{x=1}^{n} (-1)^{i+j} * a_{ij} * \det(A_{ij})$$

Entwicklung nach 1. Spalte:

$$|A| = a_{11} * \det(A_{11}) - a_{21} * \det(A_{21}) + \ldots + (-1)^{n+1} * a_{n1} * \det(A_{n1})$$

Lemma 3.7 : Blockdreiecksmatrizen

Sei A eine m x m Matrix, B eine m x n Matrix und C eine n x n Matrix, so gilt für die (m+n) x (m+n) Matrix

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}: \qquad \det M = (\det A)(\det C)$$

Satz 3.9 : Berechnung über Gauss

Für eine LR-Zerlegung von A gibt:

$$\det(A) = (\det P)(\det R) = (-1)^{Anzahl\ Zeilenvertauschungen} * \det R$$

wobei i) r = n: det R = $r_{11} * r_{22} * \dots * r_{nn}$ (Dreiecksmatrix)

ii) r < n: det R = 0 (da Nullzeilen)

Satz 3.11 : Für eine n x n Matrix A sind folgende Aussagen äquivalent:

i) Die Matrix A ist invertierbar / regulär.

ii) det A ≠ 0

iii) Im Gauss-Endschema ist r = n.

iv) Das lineare Gleichungssystem Ax = b ist für jedes b lösbar.

v) Die Lösung des linearen Gleichungssystems Ax = b ist eindeutig bestimmt.

vi) Das lineare Gleichungssystem Ax = 0 hat nur die triviale Lösung x = 0.

Korollar : A regulär ⟷ det A ≠ 0 ⟷ A invertierbar

Korollar 3.12 :

	Ax = 0	Ax = b
$\|A\| \neq 0$	Nur die triviale Lösung	Genau eine Lösung
$\|A\| = 0$	Unendlich viele Lösungen	Keine oder unendlich viele Lösungen

Vektorräume

Reeller/Komplexer Vektorraum: Menge von Objekten (Vektoren) mit folgenden Eigenschaften:

i) Addition ist definiert: $a, b \in V : a + b \in V$

ii) Multiplikation ist definiert: $a \in V, \alpha \in \mathbb{R}/\mathbb{C} : \alpha * a \in V$

Rechenregeln: $a, b \in V, \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}/\mathbb{C}$

i) $a + b = b + a$

ii) Es gibt einen **Nullvektor** (0), s.d. : $a + 0 = a$

iii) Zu jedem Vektor a existiert ein entgegengesetzter Vektor $-a$, s.d. : $a + (-a) = 0$

iv) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \ \alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b$

C[a,b] : Menge der im Intervall I=[a,b] definierten und stetigen Funktionen

$\mathbb{R}^n = \left\{ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$ (n x 1) , wobei $x_1, \dots, x_n$ *Koordinaten* des Vektors

Unterraum: nichtleere Teilmenge U eines Vektorraums V, falls erfüllt:

i) Für $a, b \in U$ ist auch $a + b \in U$ (0-Vektor auch Element von U)

ii) Für $a \in U, \alpha\ eine\ Zahl$ ist auch $\alpha a \in U$ (-a auch Element von U)

Bemerkung:

i) Es gibt immer die zwei trivialen Unterräume:

V selbst und $\{0\}$, d.h. die Menge, die nur aus dem Nullvektor besteht.

ii) Für U_1, U_2 Unterräume von V sind folgende Kombinationen ebenfalls Unterräume:

$U_1 + U_2$, $U_1 \cap U_2$ (aber NICHT $U_1 \cup U_2$)

Definition: U heisst der von $a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}$ *aufgespannte oder erzeugte Unterraum*:

$$U = span\{a^{(1)}, a^{(2)}, \dots, a^{(k)}\}$$

- Die Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ sind ein *Erzeugendensystem des Vektorraums V/ erzeugend*

Finden der erzeugenden Vektoren:

1. Matrix des Unterraums mittels Gauss lösen -> freie Parameter
2. Gleichungen $x_1 = ..., x_2 = ...$ in Vektoren schreiben: $\binom{-17}{5} * x_3 + \binom{3}{2} * x_4 \rightarrow a_1\ etc.$

Polynom: $P(x) = a_0 + a_1*x + a_2*x^2 + ... + a_n*x^n$ $\quad a_n$: Koeffizienten des Polynoms

Beispiel: Vektorraum $P^4 \in P \in [a,b]$

$$\begin{aligned} P^4 &:= \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 | a_o, \dots, a_4 \in \mathbb{R}\} \\ &= \operatorname{span}\{1, x, x^2, x^3, x^4\} \\ &= \operatorname{span}\{P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x), P_4(x)\} \end{aligned}$$

Def: $P_i(x)$ sind die sogenannten **Legendre-Polynome**. Sie sind wie folgt definiert:

$$P_0(x) = 1, \qquad P_i(x) = \frac{1}{2^i i!} \frac{\mathrm{d}^i}{\mathrm{d}x_i}(x^2-1)^i \quad \text{für } i > 0.$$

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{2}, \\ P_3(x) &= \frac{5}{2}x^3 - \frac{3}{2}x, \\ P_4(x) &= \frac{35}{8}x^4 - \frac{15}{4}x^2 + \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

endlichdimensional: falls V ein Erzeugendensystem besitzt; zB. $\mathbb{R}^n, \mathbb{P}_n$

unendlichdimensional: falls V kein Erzeugendensystem besitzt; zB. $C[a,b], \mathbb{P}$ (Menge aller P)

Definition: Falls gilt $x_1*a^{(1)} + x_2*a^{(2)} + ... + x_k*a^{(k)} = 0$, ist V

linear unabhängig, falls $x_1 = x_2 = ... = x_k = 0$ folgt.

linear abhängig, falls es Koeffizienten ≠ 0 gibt.

Basis: falls das Erzeugendensystems eines VR linear unabhängig ist, heisst es *Basis.*

Satz 4.1: **Basis ist minimales Erzeugendensystem**

i) Verschiedene Basen desselben Vektorraums bestehen aus gleich vielen Vektoren.
ii) Eine Basis hat weniger oder gleich viele Vektoren wie ein Erzeugendensystem.
iii) Menge d. linear unabh. Vektoren ≤ Menge d. erzeugenden Vektoren

Dimension von V: entspricht der Anzahl Basisvektoren, == Rang des GS (Gauss)

Bemerkung: Nullvektor immer lin. abh. -> dim{0} = 0 ; dim{unendlichdim. VR} = ∞

Satz 4.3: Für einen Vektorraum V mit Dimension n gilt:

i) Mehr als n Vektoren in V sind linear abhängig.
ii) Weniger als n Vektoren in V sind nicht erzeugend.
iii) n Vektoren in V sind linear unabhängig genau dann, wenn sie erzeugend sind, und genau dann bilden sie eine Basis.

Anmerkung: Jeder reeler n-dimensionaler Vektorraum V ist eine exakte Kopie des $\mathbb{R}^n$, also *isomorph zu* $\mathbb{R}^n$ (dieser perfektes Spiegelbild des Rests).

Berechnungen mit Gauss : $A := (a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(k)} \in \mathbb{R}^n)$

Erzeugend: Falls Ax = b für jedes b eine Lösung ↔ r = n

Linear unabhängig: Falls Ax = 0 nur die triviale Lösung besitzt ↔ r = k

Der Rang einer Matrix A entspricht der maximalen Anzahl linear unabhäng. Spaltenvektoren.
-> Pivotspalten $r^{(i_1)}, ..., r^{(i_k)} \rightarrow a^{(i_1)}, ..., a^{(i_1)}$ Spaltenvektoren sind lin. unabhängig.

Normierte Vektorräume

Norm (oder Länge) : Ordnet jedem Vektor $a \in V$ eine reelle Zahl $\|a\|$, falls gilt:

i) $\forall a \in V: \|a\| \geq 0; \ \|a\| = 0 \rightarrow a = 0$
ii) $\forall a \in V, \alpha \in \mathbb{R}: \ \|\alpha a\| = |\alpha| * \|a\|$
iii) Dreiecksungleichung: $\|a+b\| \leq \|a\| + \|b\|$

L_p- Norm:

$$\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + \ldots + |x_n|^p}$$

L_1: $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$

L_2 : euklidische Norm $\|x\|_2 = \sqrt{{x_1}^2 + {x_2}^2 + \ldots + {x_n}^2}$

L_∞ : Maximumnorm $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|)$

Satz 4.4 (Äquivalenz) : Für zwei Normen $\|x\| \; und \; \|x\|'$ gibt es eine Zahl $c \; \geq 1$, s.d. :

$$\frac{1}{c}\,\|x\|' \leq \; \|x\| \; \leq c\,\|x\|'$$

Normen in C[a,b] : I = [a,b]

Norm ≈ Abstand zum Nullvektor -> $\|f\|_0 \;\coloneqq\; \max_{x\in I} \; |f(x)|$

f'(x) Ableitung $\|f\|_1 \;\coloneqq\; \max_{x\in I} \; |f(x)| + \max_{x\in I} \; |f'(x)|$

Skalarprodukt (a,b)

$\|a\| = \sqrt{(a,a)}$ ist die „vom Skalarprodukt induzierte Norm“ : $\|*\|$

Skalarprodukt: Eine Funktion, die jedem Paar x,y eine Zahl (x,y) zuordnet, falls:

i) $(x,\; y^1 + y^2) = (x,y^1) + (x,y^2)$; $(x,\alpha y) = \alpha(x,y)$ (linear im 2. Faktor)

ii) $(x,y) = (y,x)$ (symmetrisch)

iii) $(x,x) \geq 0$; $(x,x) = 0 \rightarrow x = 0$ (positiv definiert)

Standartskalarprodukt:

$$\mathbb{R}^n \rightarrow (x,y) = x^T y = |x||y|\cos\varphi$$
$$\mathbb{C}^n \rightarrow (x,y) = \bar{x}^T y$$
$$C[a,b] \rightarrow (x,y) = \int_b^a f(t)g(t)\,dt$$

orthogonal : Zwei Vektoren sind orthogonal /stehen senkrecht aufeinander, falls (x,y) = 0.

Satz 4.5 : Sei V ein reeller Vektorraum mit Skalarprodukt

i) Die orthogonale Projektion eines Vektors x auf den Vektor y ≠ 0 ist: $\frac{(y,x)}{(y,y)}\, y$

ii) Schwarz'sche Ungleichung: $(x,y)^2 \leq (x,x)(y,y)$

iii) Pythagoras: $\|x+y\|^2 = \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$

$$\cos\varphi = \frac{(a,b)}{\|a\|\|b\|} = \frac{(a,b)}{\sqrt{(x,x)(y,y)}}$$

Einheitsvektor : Vektor x der Länge $\|x\| = 1$

Satz 4.6 , 4.7 : Orthonormale Basis

i) k paarweise orthogonale Einheitsvektoren sind linear unabhängig.

ii) In einem reellen n-dimensionalen Vektorraum bilden n paarweise orthogonale Einheitsvektoren eine orthonormale Basis.

Schmidt'sches Orthogonalisierungsverfahren

1. $e^{(1)} := \frac{1}{\|b^{(1)}\|} b^{(1)}$
2. $e^{(2)} := \frac{1}{\|c^{(2)}\|} c^{(2)}, \quad c^{(2)} := b^{(2)} - (b^{(2)}, e^{(1)})e^{(1)}$
3. $e^{(3)} := \frac{1}{\|c^{(3)}\|} c^{(3)}, \quad c^{(3)} := b^{(3)} - (b^{(3)}, e^{(1)})e^{(1)} - (b^{(3)}, e^{(2)})e^{(2)}$
4. analog

Oder mit **QR-Zerlegung:** Die Spalten der Matrix A sind eine Basis des $\mathbb{R}^n$. Dann sind die Spalten von Q die orthonormale Basis.

Ausgleichsrechnung – Methode der kleinsten Quadrate

Messungenauigkeiten -> exakte Lösung approximieren mit minimalen Abweichungen

Überbestimmtes Gleichungssystem:

$$\vec{A}\,x = \vec{c}\ , \qquad m > n\,, \quad A := (a^{(1)} \dots\ a^{(n)}\,)$$

Methode der kleinsten Quadrate: Fehlergleichung

$$\vec{A}\,x - \vec{c}\ = \vec{r}$$

- Der Residuenvektor $\vec{r}$ ist die Differenz des Vektors $\vec{a}$ und des Konstantenvektors $\vec{c}$. Dabei ist $\vec{a}$ die Linearkombination der n Vektoren $a^{(1)}, \dots, a^{(n)}$ mit $x^1, \dots, x^2$.
- Möglichst kleiner Fehler, wenn $\vec{r}$ senkrecht auf allen Spaltenvektoren von A, also alle Skalarprodukte ($a^{(j)}$, r) , j = 1, … , n gleich null sind.

<u>Normalengleichungen :</u> $\quad (\,A^T\,A\,)\,x = A^T\,c \qquad$ -> Gauss

Dabei ist $A^T A$ eine symmetrische *n x n* Matrix, $A^T c$ ein n-Vektor.

Berechnung $\quad A^T A : \begin{pmatrix} (\,a^1,\ a^1\,) & \cdots & (\,a^1,\ a^n\,) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (\,a^n,\ a^1\,) & \cdots & (\,a^n,\ a^n\,) \end{pmatrix} \qquad$ symmetrisch, (a,b) = (b,a)

$A^T c : \begin{pmatrix} (\,a^1,\ c\,) \\ \dots \\ (\,a^n,\ c\,) \end{pmatrix}$

Satz 5.1: i) Ist x* Lösung der Normalengleichungen, so minimiert x* die Fehlergleichungen im Sinne der kleinsten Quadrate.

ii) Sind die Spalten der Koeffizientenmatrix A der Fehlergleichungen linear unabhängig, so besitzen die Normalengleichungen eine eindeutig bestimmte Lösung.

<u>QR- Zerlegung</u>

Sei Q eine orthogonale m x m Matrix.

$$Q^T\,Ax - Q^T\,c = Q^T r =: s$$
$$R\,x \ -\ d \ =\ s$$

Satz 5.2 : i) Zu jeder m x n Matrix A, mit m ≥ n, existiert eine orthogonale m x m Matrix Q, so dass gilt:

$$A = QR \quad \text{mit} \quad R = \begin{pmatrix} R_0 \\ -- \\ 0 \end{pmatrix}$$

wobei R_0 eine n x n –Rechtsdreieckmatrix ist und 0 die (m-n) x n –Nullmatrix.

ii) Sind die Spaltenvektoren $a^{(1)}$, … , $a^{(n)}$ der Matrix A linear unabhängig, so ist die Matrix R_0 regulär.

Q ist das Produkt von $(\,m * n - \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2})$ Givens-Rotationen.

<u>Algorithmus :</u>

1) $R := Q^T A$ (QR-Zerlegung von A mit Givens-Rotationen)
2) $d := Q^T c$ (Transformation von c)
3) $R_0\,x = d_0$ (Rückwärtseinsetzen)

Matlab-Code:

<u>Normalengleichung :</u> *Ax = c ->* *x = A \ c ;*

<u>QR :</u>

1) [Q,R] = qr(A) ;

*2) d = Q' * c ; % Q' =* Q^T

3) x = R (1 : n, :) \ d(1 : n, :) ; % n Grösse

Oder: 2) + 3) $\quad x = R \setminus (\,Q' * c\,)$

Lineare Abbildungen

Def: Eine Abbildung $F: x \in V \rightarrow y = F(x) \in W$ heisst lineare Abbildung vom endlichdimensionalen Vektorraum V in den endlichdimensionalen Vektorraum W, falls:

i) $F(x + y) = F(x) + F(y)$

ii) $F(\alpha\, x) = \alpha * F(x)$

Anmerkung: Die lineare Abbildung F(x) lässt sich als Matrix A darstellen. (F(x) = A*x)

Satz 6.4: Verkettung linearer Abbildungen

i) Die Zusammensetzung von linearen Abbildungen einst linear.

ii) $F : x \in V^n \rightarrow y = Ax \in V^m, G : y \in V^m \rightarrow \; z = By \in V^p$

$$H := G \circ \mathrm{H}, \mathrm{H} : \mathrm{x} \in V^n \rightarrow \; \mathrm{Z} = \mathrm{BAx} \in V^p$$

Lineare Selbstabbildung

umkehrbar / invertierbar: Eine Abbildung $F : x \in V^n \rightarrow x' \in V^n$ heisst umkehrbar, falls es zu jedem x' ein eindeutig bestimmtes x gibt, sodass F(x) = x'. Es existiert eine *Umkehrabbildung* F^{-1}.

Satz 6.7: i) Eine lineare Abbildung $F : x \in V^n \rightarrow x' = Ax \in V^n$ ist genau dann umkehrbar, wenn A regulär ist.

ii) Ist F umkehrbar, so ist F^{-1} linear und wird durch die Matrix A-1 beschrieben:

$$F^{-1}: x' \rightarrow x = A^{-1}\, x'$$

iii) Ist F umkehrbar, so gilt: $F^{-1} \circ F = F \circ F^{-1} = I$, wobei I : Identität

Interpretation von Abbildungen

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^2$ in xy-Ebene (um Nullpunkt) im Uhrzeigersinn um den Winkel φ.

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^3$ in xy-Ebene (um z-Achse) im Uhrzeigersinn um den Winkel φ.

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^3$ in xy-Ebene (um y-Achse) im Gegenuhrzeigersinn um den Winkel φ.

$\begin{pmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & -1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{pmatrix}$ *Keine Givens-Matrix:* Drehung in $\mathbb{R}^3$ in xy-Ebene (um y-Achse) und Spiegelung an der xz-Ebene..

$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *Householdermatrix:* Spieglung an der zweiten Winkelhalbierenden

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ Spiegelung an der xy-Ebene

Koordinatentransformation

ist eine umkehrbare lin. Abbildung T mit Basiswechsel : $T : y \in W^n \rightarrow x = Ty \in V^n$

In den Spalten von T stehen die n neuen Basisvektoren, ausgedrückt in alten Koordinaten.

Satz 6.8: Seien eine lineare Abbildung $F : x \in V^n \rightarrow x' = Ax \in V^n$ und eine Koordinatentransformation $T : y \in W^n \rightarrow y' = Ty \in V^n$ gegeben.

Dann lässt sich die lineare Abbildung in den neuen Koordinaten darstellen als:

$$G = T^{-1} \circ F \circ T : y \in W^n \rightarrow y' = T^{-1}ATy \in W^n$$

Trick: Anstelle T^{-1} ausrechnen, rechne ($B = T^{-1}AT$) :
TB = AT, und löse mittels Gauss nach B (3 1-Spalten für B)

ähnlich : Die n x n Matrix B heisst *ähnlich* zur n x n Matrix A, falls es eine reguläre n x n Matrix T gibt, s.d. :

$$B = T^{-1}A\,T$$

(Selbe Abbildung bezüglich anderen Koordinaten)

Kern und Bild

Def: Sei $F : x \in V^n \to y = Ax \in V^m$ eine lin. Abbildung ($V = \mathbb{R} / \mathbb{C}$

i) *Kern* der Matrix A: Menge aller Vektoren, die auf null abgebildet werden :

$$Kern\ A := \{ x \in V^n \mid Ax = 0 \}$$

ii) *Bild* der Matrix A: Menge aller Bildvektoren :

$$Bild\ A := \{ y \in V^m \mid Es\ gibt\ ein\ x \in V^n, s.d.\ y = Ax \}$$

Satz 6.1 : Sei $A = (a^{(1)} \dots a^{(n)})$ eine m x n Matrix. Dann gilt:

i) b liegt genau dann im Bild von A, wenn das GS Ax = b lösbar ist.

$$Bild\ A = span \{ a^{(1)} \dots a^{(n)} \}$$

ii) Der Kern von A ist die Lösungsmenge des homogenen GS Ax = 0.

iii) Kern A ist ein Unterraum von V^n $\to$ $\dim(Kern\ A) = n - r$

Bild A ist ein Unterraum von V^m $\to$ $\dim(Bild\ A) = r$

iv) Es gilt: $\dim(Kern\ A) + \dim(Bild\ A) = n = \dim V^n$

v) Es gilt: $\dim(Bild\ A) = \dim(Bild\ A^T)$.

Satz 6.5: i) Die Unterräume Bild A und Kern A^T von $\mathbb{R}^m$ spannen $\mathbb{R}^m$ auf:

$$Bild\ A + Kern\ A^T = \mathbb{R}^m$$

ii) Die Unterräume Bild A und Kern A^T stehen senkrecht aufeinander.

iii) $\dim(Bild\ A) + \dim(Kern\ A^T) = \dim \mathbb{R}^m = m$

Fredholmsche Alternative: Gleichunssystem Ax = b ist genau dann lösbar, wenn b senkrecht auf allen Lösungen des sogenannten *adjungierten* Gleichungssystems $A^T = 0$ steht (= Kern(A^T)).

Orthogonale Abbildungen

Def: Die Abbildung $F : x \in \mathbb{R}^n \to x' = Ax \in \mathbb{R}^n$ heisst

i) **orthogonal**, falls $(x', y') = (Ax, y) = (x, y)$

ii) **längentreu**, falls $\|x'\|_2 = \|Ax\|_2 = \|x\|_2$

Satz 6.10 : Für $F : x \in \mathbb{R}^n \to x' = Ax \in \mathbb{R}^n$ ist äquivalent:

i) F ist orthogonal

ii) F ist längentreu

iii) F ist winkeltreu

iv) Die Spalten von A bilden eine orthonormale Basis in $\mathbb{R}^n$

v) Die Matrix A ist orthogonal, d.h. es gibt $A^T A = I$, bzw. $A^T = A^{-1}$

➔ Orthogonale Abbildungen sind volumenerhaltend

Satz 6.11, 6.12, 6.13: Volumen

Seien $a^{(1)}, \dots, a^{(k)}$ linear unabhängige Vektoren. Dann ist das Volumen des aufgespannten Parallelepipeds:

$$Vol_n^n (a^{(1)}, \dots, a^{(n)}) = \left|\det(a^{(1)}, \dots, a^{(n)})\right|$$

Anmerkung: beliebige Vektoren zuerst mittels Gauss linear unabhängig machen.

Norm einer Matrix

Gibt an, um welchen Faktor sich x maximal verändert, wenn x‘ = A x angewendet wird.

Def: Sei A eine n x n Matrix, und sein in V^n eine Norm $\|x\|_*$, $x \in V^n$ gegeben.

$$\|A\|_* = \max_{x \in V^n, x \neq 0} \left\{ \frac{\|Ax\|_*}{\|x\|_*} \right\} = \max_{\|x\|_*=1} \{ \|Ax\|_* \}$$

sei *die von der Vektornorm $\|x\|_*$ induzierte Matrixnorm (eigentlich sup).*

Satz 6.9:
- i) $\|A\|_* \geq 0, \quad aus\ \|A\|_* = 0\ folgt\ A = 0$
- ii) $\|\propto A\|_* = |\propto|\ \|A\|_*$
- iii) $\|A + B\|_* \leq \|A\|_* + \|B\|_*$
- iv) $\|Ax\|_* \leq \|A\|_*\, \|x\|_*$
- v) $\|AB\|_* \leq \|A\|_*\, \|B\|_*$

Spaltensummenform: grösste Summe der Beträge einer Spalte : $\|\boldsymbol{A}\|_{\mathbf{1}} = \mathbf{max}_j \sum_{i=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{ij}|$

Zeilensummenform: grösste Summe der Beträge einer Zeile: $\|\boldsymbol{A}\|_{\infty} = \mathbf{max}_i \sum_{j=1}^{n} |\boldsymbol{a}_{ij}|$

Spektralnorm: bezeichnet die 2-Norm $\|A\|_2$ einer reellen Matrix A
- i) Für jede quadratische Matrix A gilt:

  $\|A\|_2 = \sqrt{\mu_{Max}} = \sqrt{maximaler\ Eigenwert\ von\ A^T A}$
- ii) Für jede orthogonale Matrix Q gilt: $\|Q\|_2 = 1$
- iii) Ist A eine symmetrische Matrix, so gilt: $\|A\|_2 = max_i\, |\lambda_i|$

Matrixnorm der Inversen
- i) Für jede invertiertbare Matrix A gilt:

  $\|A^{-1}\|_2 = \frac{1}{\sqrt{\mu_{Min}}} = \frac{1}{\sqrt{minimaler\ Eigenwert\ von\ A^T A}}$
- ii) Ist A symmetrisch, so ist $\|A^{-1}\|_2 = max_i \frac{1}{|\lambda_i|} = \frac{1}{min_i\, |\lambda_i|}$

Eigenwertproblem

Def: Sei A einen n x n Matrix, Abbildung $F : x \in \mathbb{C}^n \to Ax \in \mathbb{C}^n$
- i) Eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst *Eigenwert der Matrix A*, falls es einen Vektor $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ gibt, so dass $Ax = \lambda x$.
- ii) Falls λ existiert, heisst jeder dazugehörige Vektor $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ *Eigenvektor der Matrix A zum Eigenwert* λ .

Satz 7.1: Die Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ ist genau dann ein Eigenwert der Matrix A, wenn

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

$P_A(\lambda) = \det(A - \lambda I_n) = 0$ heisst *chrakteristisches Polynom der Matrix A*

-> Nullstellen von $P_A(\lambda)$ sind Eigenwerte, $P_A(\lambda)$ Polynom n-ten Grades

Algebraische Vielfachheit k von λ^*: λ^* ist k-facher Eigenwert von A (k-fache NS von $P_A(\lambda)$)

Spektrum von A : Gesamtheit aller Eigenwerte

Es gelten folgende Aussagen:
- i) Jede n x n Matrix hat *mindestens einen und höchstens n Eigenwerte*.
  (falls mit algebraischer Vielfachheit gezählt, hat sie stets n Eigenwerte).
- ii) Für jeden Eigenwert ist die algebraische Vielfachkeit $1 \leq k \leq n$.
- iii) Für jede reelle Matrix sind die Koeffizienten des charakt. Polynoms reell. Die Eigenwerte sind entweder reell oder treten in konj. kompl. Paaren auf.
- iv) λ^n ist ein Eigenwert von A^n, und $\frac{1}{\lambda}$ ist ein Eigenwert von A^{-1}

<u>Komplexe EW:</u> Für einen komplexen EW $\lambda = \alpha + i\beta$ und dazugehörigem EV $u = x + iy$

Ist auch $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ EW von A mit EV $u = x - iy$ (x,y lin. unabh.)

➔ Komplexe Eigenwerte treten immer in konjugiert komplexen Paaren auf.

<u>Komplexe EV:</u> für einen EW EV finden und aufspalten: $v^{(k)} + i\, w^{(k)}$

Reelle Lsg. DGL: $2 * e^{\alpha t}([\, a * \cos(\beta t) - b * \sin(\beta t)] * v^{(k)} - [\, a * \sin(\beta t) + b * \cos(\beta t)] * w^{(k)})$

Satz 7.2 : Ähnliche Matrizen

i) Ähnliche Matrizen haben das gleiche charakt. Polynom und somit dieselben Eigenwerte mit den gleichen algebraischen Vielfachheiten.

ii) Ist $B = T^{-1}AT$ und x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ, so ist $y = T^{-1}x$ ein Eigenvektor von B zum selben Eigenwert λ.

Eigenvektoren

x ist genau dann ein Eigenvektor, falls es das homogene Gleichungssystem löst:

$$(A - \lambda I_n)x = 0$$

Die Menge der Eigenvektoren ist gleich der Menge nichttrivialer Lösungen des homog. GS.

Def: Für den Eigenwert λ heisst die Menge aller Lösungen des homogenen Gleichungsyst. *Eigenraum von A zum Eigenwert λ*.

Die Dimension dieses Unterraums heisst *geometrische Vielfachheit* des Eigenwerts λ.

Geometrische Vielfachheit: wieviele Eigenvektoren existieren zum gegebenen Eigenwert.

Bemerkung: Für algebraische Vielfachheit 1 *muss* die geometrische VFH ebenfalls 1 sein.

Satz 7.3, 7.4

i) $1 \leq \text{geometrische Vielfachheit v.}\lambda \leq \text{algebraische Vielfachheit v. } \lambda$

ii) Für $\lambda_1 \dots \lambda_n$ paarweise verschiedene EW sind die dazugehörigen Eigenvektoren $u^{(1)} \dots u^{(n)}$ linear unabhängig.

Eigenbasis : Eine Basis von Eigenvektoren einer Matrix A

Sie existiert, falls die Summe der geometrischen Vielfachheiten einer n x n Matrix gleich *n* ist.
Dies ist so, wenn für jeden Eigenwert die geometrische Vielfachheit gleich der algebraischen Vielfachheit ist (-> halbeinfache Matrix)

➔ Summe der lin. unabhängige EV = Summe der geometrischen Vielfachheiten

Eine quadratische Matrix heisst

einfach: für jeden EW ist die algebr. VFH = 1 (u. gem. VFH = 1)

halbeinfach: für jeden EW ist die algebr. VFH = geom. VFH

diagonalisiertbar, falls es eine reguläre Matrix T gibt, so dass die ähnliche Matrix $D = T^{-1} A T$ eine Diagonalmatrix ist.

Satz 7.6 : Für jede quadratische Matrix ist äquivalent:

i) Die Matrix A ist *halbeinfach*.

ii) Die Matrix A *besitzt eine Eigenbasis*.

iii) Die Matrix A ist *diagonalisierbar*.

Folgerungen:

i) Bilden $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ eine Eigenbasis zu A, dann diagonalisiert $T = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ die Matrix: $D = T^{-1} A T$ ist diagonal.
In der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von A.

ii) Umgekehrt: Falls es eine reguläre Matrix T und eine Diagonalmatrix D gibt, s.d. $D = T^{-1} A T$, dann bilden die Spalten von T eine Eigenbasis zu A.
In der Diagonalen von D stehen die Eigenwerte von A.

Satz 7.7, 7.8 : reelle, symmetrische Matrizen

i) Alle Eigenwerte von A sind reell.

ii) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten stehen senkrecht aufeinander.

iii) Die Matrix A ist halbeinfach (und somit diagonalisierbar).

iv) Es gibt eine orthonormale Eigenbasis zu A.

v) Es gibt eine orthogonale Matrix T, sodass die Matrix $D = T^{-1} A T$ diagonal ist. In der Diagonalen stehen die Eigenwerte von A. Die Spalten von T sind die entsprechenden Eigenvektoren der Matrix A.

Anwendungen d. Eigenwertproblems

Berechnung von $y = A^k x$

1. Eigenwertproblem von A lösen -> Eigenvektoren $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$
   $T = \left(u^{(1)}, \dots, u^{(n)} \right)$
   $D = T^{-1} A T = diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ (T^{-1} nicht berechnen !)
2. $A^k = T D^k T^{-1}$
3. Lineares GS $Tz = x$ nach z auflösen.
4. D^k berechnen (einzelne Stellen hoch k) , danach $\omega := D^k z$
5. Berechne $y = T\,\omega$

Bemerkung: Falls T orthogonal ($T^{-1} = T^T$), kann A^k direkt berechnet werden!

Matrixexponentialfunktion

Für n x n Matrix A : $e^A := I_n + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$

Für Diagonalmatrix D : $e^D = diag(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})$

Für halbeinfache Matrix A : $e^A = T\, e^D\, T^{-1}$

Anmerkung : $e^A e^B = e^{A+B} \Leftrightarrow AB = BA$

Lösen von Differenzialgleichungen mittels Matrixexponentialfunktion:

$$\dot{y}(t) = A\, y(t) \quad , \quad y(t) = e^{tA}\, y^0$$

Berechnung: $y(t) = e^{tA}\, y^0 = T\, e^{tD}\, T^{-1}\, y^0$

Löse $z^0 = T^{-1} y^0 \rightarrow T\, z^0 = y^0$ einsetzen und auflösen

Normalformen

Möglichst einfache Form, sodass Abbildung gut ersichtlich

Normalform einer quadratischen Matrix

Satz 9.1: Ähnlichkeit

i) Jede halbeinfache Matrix A ist ähnlich zu einer Diagonalmatrix D.
   ($D = T^{-1} A T$: in D stehen die Eigenwerte von A; die Transformationsmatrix T enthält in den Spalten eine Eigenbasis zu A)

ii) Jede reelle symmetrische Matrix A ist orthogonal-ähnlich zu einer Diagonalmatrix D (als Basisvektoren kann ein Orthonormalsystem gewählt werden).

iii) Jede quadratische Matrix A ist ähnlich zu einer Rechtsdreiecksmatrix R.
   (In den Diagonalen von R stehen die Eigenwerte von A).

Satz 9.2

i) Jede reelle *halbeinfache* n x n-Matrix A ist ähnlich zu einer reellen **Blockdiagonalmatrix**

$$\tilde{D} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_{11} & & & 0 \\ & \tilde{D}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{D}_{kk} \end{pmatrix}$$

mit Matrizen $\tilde{D}_{jj}$ der Ordnung 1 (reeller Eigenwert) oder Ordnung 2 (komplexer Eigenwerte $a_j + i\, b_j$) in der Form

$$\tilde{D}_{kk} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$$

Die reelle Transformationsmatrix $\tilde{T}$ $\left(\tilde{D} = \tilde{T}^{-1} A\, \tilde{T} \right)$ erhält man, indem man in T jedes konjugiert komplexe Eigenvektorpaar durch ihre Real- und Imaginärteile ersetzt ($v^{(k)} + i\, w^{(k)}$).

ii) Jede reelle n x n-Matrix A ist ähnlich zu einer reellen oberen **Blocksdreiecksmatrix**

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} \tilde{R}_{11} & & & * \\ & \tilde{R}_{22} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \tilde{R}_{kk} \end{pmatrix}$$

mit Matrizen $\tilde{R}_{jj}$ der Ordnung 1 (reeller Eigenwert) oder Ordnung 2 (komplexer Eigenwerte $a_j \pm i\, b_j$) in der Form $\tilde{R}_{kk} = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}$

Satz 9.3: Satz von Schur

Zu jeder reellen n x n-Matrix A existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $\tilde{\tilde{R}} := U^T A\, U$ eine reelle obere Blockdreiecksmatrix ist:

$$\tilde{\tilde{R}} = \begin{pmatrix} \tilde{\tilde{R}}_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & \tilde{\tilde{R}}_{kk} \end{pmatrix}$$

Die Matrizen $\tilde{\tilde{R}}_{jj}$ der Ordnung 1 sind reelle Eigenwerte von A.
Die 2. Ordnung haben als Eigenwerte ein konjugiert komplexes Eigenwertpaar von A.

Bemerkung: Hat A nur reelle Eigenwerte, so ist A orthogonal-ähnlich zu einer oberen Dreiecksmatrix.

Definition: Eine quadratische Matrix H heisst *obere Hessenbergmatrix*, falls $h_{ij} = 0$ ist für alle $i > j + 1$:

$$H = \begin{pmatrix} * & & & * \\ * & \ddots & & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & * & * \end{pmatrix}$$

Satz 9.5: Zu jeder reellen n x n-Matrix A existiert eine orthogonale Matrix U, so dass $H := U^T A\, U$ eine obere Hessenbergmatrix ist. U kann als Produkt von $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ Givensrotationen dargestellt werden.

Singulärwertzerlegung : Normalform einer allgemeinen m x n- Matrix

Satz 9.6 : Singulärwertzerlegung *mit S_i als Singulärwerte*

A :	m x n	Rang r , reel	
U :	m x m	orthogonal	$A = U\, S\, V^T$
V :	n x n	orthogonal	
S :	m x n		

Die Matrix S hat Diagonalgestalt: $S = \begin{cases} \begin{pmatrix} \tilde{S} \\ -- \\ 0 \end{pmatrix}, & \text{falls } m \geq n \\ (\tilde{S}|0), & \text{falls } m \leq n \end{cases}$

mit $\hat{S} = diag\,(s_1, s_2, \dots, s_r, s_{r+1}, \dots, s_p)$, $p := \min(m,n)$

i) $s_1 = \|A\|_2, s_1 \geq s_2 \geq s_r \geq 0$, $s_{r+1} = \cdots = s_p = 0$

ii) Die Zahlen ${s_i}^2$ sind die Eigenwerte von $\begin{cases} A^T A & m \geq n \\ A\, A^T & m \leq n \end{cases}$

iii) Für die Spalten $u^{(i)}$, $i = 1, \dots, m$ von U und die Spalten $v^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ von V gilt:

$$Av^{(i)} = s_i\, u^{(i)}, \qquad A^T u^{(i)} = s_i\, v^{(i)} \qquad i = 1, \dots, p$$

$$m < n \;:\; Av^{(i)} = 0 \;, i = p+1, \dots, n$$
$$m > n \;:\; A^T u^{(i)} = 0 \;, i = p+1, \dots, m$$

Satz 9.7: Für jede n x n-Matrix A von Rang r gilt:

i) $Kern\ A = span\ \{v^{(r+1)}, \dots, v^{(n)}\}$
$Bild\ A = span\ \{u^{(1)}, \dots, u^{(r)}\}$

ii) $Kern\ A^T = span\ \{u^{(r+1)}, \dots, u^{(m)}\}$
$Bild\ A^T = span\ \{v^{(1)}, \dots, v^{(r)}\}$

Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Sei ein System von Differentialgleichungen 1. Ordnung mit den Anfangsbedingungen y(0) gegeben:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= a_{11}y_1(t) + \dots + a_{1n}y_n(t), \\ \dot{y}_2(t) &= a_{21}y_1(t) + \dots + a_{2n}y_n(t), \\ &\vdots \\ \dot{y}_n(t) &= a_{n1}y_1(t) + \dots + a_{nn}y_n(t), \end{aligned}$$

Und seien die Koeffizienten a_{ij} so gewählt, dass sie eine diagonalisierbare Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\,x\,n}$ bilden:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

1. Das LGS zu einer Matrixgleichung $y'(x) = A * y(t)$ umformen mit:

$$\dot{y}(t) := \begin{bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{bmatrix}, \qquad y(t) := \begin{bmatrix} y_1(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix}.$$

2. Eigenwertproblem von A lösen und zugehörige Eigenvektoren $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ bestimmen

3. $T = (u^{(1)}, \dots, u^{(n)})$ bestimmen

4. Mit $y(t) = T\,x(t)$ wird die Abbildung in neue Koordinaten transformiert. Wegen

$$\dot{y}(t) = Ay(t), \qquad T\dot{x}(t) = ATx(t)$$

kann *x(t)* einfach bestimmt werden, da $T^{-1}\,A\,T$ die Diagonalmatrix $D = diag(\lambda_1, .., \lambda_n)$ ist

$$\begin{gathered} \dot{x}(t) = T^{-1}ATx(t) = Dx(t), \\ \dot{x}_i(t) = \lambda_i x_i(t) \quad \text{mit} \quad i = 1, \dots, n. \end{gathered}$$

Wichtig: $\boldsymbol{T^{-1}\,A\,T}$ **nicht berechnen!** Die allgemeinen Lösungen sind

$$x_i(t) = c_i e^{\lambda_i t}.$$

5. *x(t)* zu *y(t)* zurück transformieren mit

$$y(t) = Tx(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} u^{(1)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t} u^{(n)}.$$

6. Die Parameter $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ mit $Tc = y(0)$ bestimmen.

Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Die Berechnung erfolgt analog zu DGL 1. Ordnung.
Die allgemeinen Lösungen sind mit $\omega_i{}^2 = -\lambda_i$

$$x_i(t) = a_i \cos(\omega_i t) + b_i \sin(\omega_i t).$$

8 MATLAB

`rank(A)`	Rang der Matrix A
`det(A)`	Determinante der Matrix A
`[L,R,P] = lu(A)`	LR-Zerlegung der Matrix A
`[Q,R] = qr(A)`	QR-Zerlegung der Matrix A
`x=A\b`	löst die Gleichung $Ax = b$ nach x auf
`norm(A)`	Euklidische Norm der Matrix A
`expm(A)`	berechnet die Matrix e^A
`[T,D] = eig(A)`	Eigenwertzerlegung der Matrix A
`[U,S,V] = svd(A)`	Singulärwertzerlegung der Matrix A

Matrix definieren

$$A = [\,0, 2\,; 3, -4\,; 0.5\,, sqrt(2)\,] = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -4 \\ 0.5 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

$$= [\,a^{(1)}, \dots, a^{(n)}\,]\,;\; A(3,1) = 0.5$$

$$a^{(1)} = A[\,:, 1\,]$$

Inverse: inv(A)
Transponierte: transpose(A)

Grad	Rad	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\tan\varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0