Lineare Algebra: Probeklausur

Priv.-Doz. Dr. Irene Bouw

Musterlösung

Die Abgabe der Probeklausur ist freiwillig und geschieht **individuell**. Die Punkte zählen also nicht mit für die Zulassung zur Klausur! Falls Sie die Probeklausur unter klausurähnlichen Bedingungen bearbeiten möchten, nehmen Sie sich drei Stunden Zeit und benutzen nur einen Zettel (A4-Format, doppelseitig) mit handgeschriebenen Notizen. Jede Teilaufgabe wird mit 5 Punkten gewertet; es sind also insgesamt 80 Punkte zu erreichen.

Aufgabe 1. Sei $a \in \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & a \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die lineare Abbildung definiert durch $x \mapsto A \cdot x$. Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $b \in \mathrm{Bi}(f)$?

Lösung: b ist genau dann im Bild von f, wenn das Gleichungssystem $Ax = b$ eine Lösung besitzt. Dazu betrachten wir das folgende Schema und bringen es auf Zeilenstufenform:

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 1 & -3 \\ -1 & 2 & a & 0 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 0 & -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & a & 0 \\ 0 & 7 & 1+4a & -3 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -a & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3+4a & 1 \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 3+4a & 1 \\ 0 & 0 & 12a+10 & 5 \end{array}$$

Das Gleichungssystem ist genau dann lösbar, wenn $12a + 10 \neq 0$, also für $a \neq -5/6$.

Aufgabe 2. Sei $V = P_3$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 3 und

$$T : V \to V, \qquad f(x) \mapsto f(x+1) - f(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass T eine lineare Abbildung ist.

Lösung: Seien $f, g \in V$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$T(f+g) = (f+g)(x+1) - (f+g)(x) = (f(x+1) - f(x)) + (g(x+1) - g(x)) = T(f) + T(g)$$
$$T(\lambda f) = (\lambda f)(x+1) - (\lambda f)(x) = \lambda(f(x+1) - f(x)) = \lambda T(f)$$

(b) Berechnen Sie die Matrix von T bezüglich einer geeignet gewählten Basis von V.

Lösung: Wir wählen die Basis $\mathbb{B} = (1, x, x^2, x^3)$. Bezüglich dieser Basis bekommt man die darstellende Matrix wie folgt:

$$T(1) = 1 - 1 = 0 \qquad T(x) = (x+1) - x = 1$$
$$T(x^2) = (x+1)^2 - x^2 = 2x + 1 \qquad T(x^3) = (x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$$

Also sieht die darstellende Matrix wie folgt aus:

$$A := {}^{\mathbb{B}}_{\mathbb{B}}\mathrm{M}(T) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(c) Bestimmen Sie eine Basis von $\mathrm{Bi}(T)$.

Lösung: Offensichtlich sind die drei letzten drei Spalten von A linear unabhängig, bilden also eine Basis des Spaltenraumes; dieser ist gerade das Bild der Matrix A. Es gilt also:

$$\mathrm{Bi}(A) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Diese müssen wir nur noch per Koordinatenwechsel nach V übertragen. Es gilt:

$$(1,0,0,0) \mapsto 1, \quad (1,2,0,0) \mapsto 1 + 2x, \quad (1,3,3,0) \mapsto 1 + 3x + 3x^2$$

Damit ist eine Basis von $\mathrm{Bi}(T)$ gegeben durch: $\{1, 1+2x, 1+3x+3x^2\}$
Alternativ kann man die Basen auch vereinfachen zu $\{e_1, e_2, e_3\}$ für $\mathrm{Bi}(A)$ bzw. $\{1, x, x^2\}$ für $\mathrm{Bi}(T)$.

Aufgabe 3. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i & 2 \\ -1 & -i & -1 \\ i+2 & 1+2i & 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(A)$. Ist A invertierbar?

Lösung: Wir bringen die Matrix auf Zeilenstufenform:

$$\begin{pmatrix} 1+i & 1+i & 2 \\ -1 & -i & -1 \\ i+2 & 1+2i & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} i & 1 & 1 \\ -1 & -i & -1 \\ i+2 & 1+2i & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & -i & -1 \\ i & 1 & 1 \\ 2 & 2i & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 1 & -i & -i \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & -2i & -i-1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 1 \\ 0 & i & \frac{1+i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1-i}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Also ist eine Basis von $\mathrm{Ker}(A)$ gegeben durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} i-1 \\ i-1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Insbesondere ist A nicht invertierbar, da $\mathrm{Ker}(A) \neq \{0\}$.

Aufgabe 4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 16 & 1 & 6 \\ -6 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A

Lösung: Wir bestimmen das charakteristische Polynom:

$$\begin{aligned}
\mathrm{c}_A(t) &= \det\begin{pmatrix}1-t & -1 & -2\\ 16 & 1-t & 6\\ -6 & 2 & 2-t\end{pmatrix} \overset{\text{ZII+ZI}}{\underset{\text{ZIII+2ZI}}{=}} \det\begin{pmatrix}1-t & -1 & -2\\ 17-t & -t & 4\\ -4-2t & 0 & -2-t\end{pmatrix}\\
&= (2+t)\cdot\det\begin{pmatrix}1-t & -1 & -2\\ 17-t & -t & 4\\ -2 & 0 & -1\end{pmatrix} \overset{\text{SI-2SIII}}{=} (2+t)\det\begin{pmatrix}5-t & -1 & -2\\ 9-t & -t & 4\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}\\
&= -(t+2)\cdot\det\begin{pmatrix}5-t & -1\\ 9-t & -t\end{pmatrix} = -(t+2)(t^2-5t+9-t) = -(t+2)(t^2-6t+9)\\
&= -(t+2)(t-3)^2 = -(t^3-4t^2-3t+18)
\end{aligned}$$

Berechnet man das charakteristische Polynom auf andere Weise, so muss man eine Nullstelle erraten, Polynomdivision durchführen und das Restpolynom vom Grad 2 mit Mitternachtsformel, quadratischer Ergänzung oder Ähnlichem faktorisieren.
Die Eigenwerte sind also -2 (einfach) und $+3$ (mehrfach).

(b) Bestimmen Sie die Dimension der Eigenräume. Ist A reell diagonalisierbar?

Lösung: Es gilt $\dim \mathrm{E}(A,-2) = 1$, da nur einfache Nullstelle im charakteristischen Polynom. Berechne $\mathrm{E}(A,3)$:

$$A - 3E = \begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 16 & -2 & 6\\ -6 & 2 & -1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-2 & -1 & -2\\ 8 & -1 & 3\\ 0 & 5 & 5\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}-2 & 0 & -1\\ 8 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

Damit gilt $\dim \mathrm{E}(A,3) = \dim \mathrm{Ker}(A-3E) = 3 - \mathrm{Rg}(A-3E) = 3-2 = 1$. Insbesondere ist A nicht diagonalisierbar, da hier die geometrische Vielfachheit echt kleiner ist als die algebraisch Vielfachheit.

Aufgabe 5. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\quad v_3 = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-2\end{pmatrix}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \to V$ gibt, so dass

$$f(v_1) = v_2, \qquad f(v_2) = v_3, \qquad f(v_3) = v_1.$$

Lösung: Es genügt zu zeigen, dass v_1, v_2, v_3 linear unabhängig ist. Dies folgt mit (b), da dort gezeigt wird, dass die Matrix ${}^{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}}\mathrm{M}(\mathrm{Id})$, die diese Vektoren als Spalten enthält, invertierbar ist.

(b) Berechnen Sie die Basiswechselmatrizen

$${}^{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}}\mathrm{M}(\mathrm{Id}) \text{ und } {}^{\mathbb{E}}_{\mathbb{B}}\mathrm{M}(\mathrm{Id})$$

Lösung: $S := {}^{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}}\mathrm{M}(\mathrm{Id})$ enthält gerade die Vektoren als Spalten, also:

$${}^{\mathbb{B}}_{\mathbb{E}}\mathrm{M}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -2\end{pmatrix}$$

Nun gilt: ${}^{\mathbb{E}}_{\mathbb{B}}\mathrm{M}(\mathrm{Id}) = S^{-1}$; wie berechnen also die Inverse:

$$\begin{array}{rrr|rrr}1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & -2\end{array}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{rrr|rrr}1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{array}$$

Also ist

$$S^{-1} = {}^{\mathbb{E}}_{\mathbb{B}}\mathrm{M}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\ \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}$$

(c) Berechnen Sie die Matrix von f bezüglich der Standardbasis von $V = \mathbb{R}^3$.

Lösung: Zunächst ist

$$A := {}^{\mathbb{B}}_{\mathbb{B}}\mathrm{M}(f) = \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Transformationsformel:

$${}^{\mathbb{E}}_{\mathbb{E}}\mathrm{M}(f) = S \cdot A \cdot S^{-1}$$

Ausmultiplizieren liefert:

$${}^{\mathbb{E}}_{\mathbb{E}}\mathrm{M}(f) = \begin{pmatrix}1 & 2 & -2\\ -1 & 0 & 0\\ \frac{-1}{2} & \frac{3}{2} & -1\end{pmatrix}$$

Aufgabe 6. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung und sei $v_1, \dots v_r \in V$ so dass $f(v_1), \dots, f(v_r)$ linear unabhängig sind. Zeigen Sie dass $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig sind.

Lösung: Sei

$$0 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r$$

Zu zeigen: $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Es gilt:

$$0 = f(0) = f(\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_r v_r) = \lambda_r f(v_1) + \cdots + \lambda_r f(v_r)$$

Da $f(v_1), \dots, f(v_r)$ linear unabhängig sind, folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 7. Sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ Untervektorräume. Dann ist $U_1 \times U_2$ ein K-Vektorraum (das brauchen Sie nicht zu zeigen), auf dem Addition und skalare Multiplikation auf $U_1 \times U_2$ komponentenweise definiert sind:

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$$
$$\lambda \cdot (x_1, x_2) := (\lambda \cdot x_1, \lambda \cdot x_2)$$

Definiere weiter:

$$f : U_1 \times U_2 \to V, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_1 + x_2.$$

Dann ist f eine lineare Abbildung. (Auch das brauchen Sie nicht zu zeigen.)
Zeigen Sie: f ist genau dann injektiv, wenn $U_1 \cap U_2 = (0)$

Lösung: "$\Leftarrow$": Sei $U_1 \cap U_2 = (0)$, und sei $(x_1, x_2) \in U_1 \times U_2$ mit $f((x_1, x_2)) = x_1 + x_2 = 0$. Dann ist aber $x_2 = -x_1 \in U_1$, da U_1 ein Untervektorraum ist. Da aber $x_2 \in U_2$, folgt $x_2 \in U_1 \cap U_2 = (0)$, also $x_2 = 0$. Damit folgt auch $x_1 = 0$. Also ist $\operatorname{Ker}(f) = \{(0, 0\}$; damit ist f injektiv.
"$\Rightarrow$": Sei umgekehrt $U_1 \cap U_2 \neq (0)$, dann existiert ein $v \in U_1 \cap U_2$ mit $v \neq 0$. Dann ist aber auch $-v \in U_1 \cap U_2$, da $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum ist. Damit ist aber $(v, -v) \in U_1 \times U_2$, und es gilt: $f((v, -v)) = v + (-v) = 0$. Da aber $(v, -v) \neq (0, 0)$ ist f nicht injektiv.

Aufgabe 8. Sei V ein K-Vektorraum mit $\dim V = n$, und sei f eine lineare Abbildung mit $f^2 = 0$. Sei A die darstellende Matrix von f bezüglich einer fest gewählten Basis $\mathbb{B}$. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) $\operatorname{Bi}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$

Lösung: Sei $w = f(v) \in \operatorname{Bi}(f)$. Dann gilt: $f(w) = f(f(v)) = f^2(v) = 0$, also $w \in \operatorname{Ker}(f)$. Damit gilt $\operatorname{Bi}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.

(b) $\operatorname{Rg}(A) \leqslant \frac{n}{2}$

Lösung: Mit (a) folgt $\dim \operatorname{Bi}(f) \leqslant \dim \operatorname{Ker}(f)$. Anwenden auf Rangformel:

$$n = \dim \operatorname{Bi}(f) + \dim \operatorname{Ker}(f) \geqslant 2 \dim \operatorname{Bi}(f) = 2 \operatorname{Rg}(A)$$

und daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe 9. Sei $f : V \to V$ eine lineare Abbildung.

(a) Zeigen Sie: λ ist genau dann Eigenwert von f, wenn $\lambda - 1$ Eigenwert von $f - \mathrm{Id}$ ist.

Lösung: Sei λ Eigenwert von f, d.h. es existiert $v \neq 0$ mit $f(v) = \lambda v$. Dann ist

$$(f - \mathrm{Id})v = f(v) - v = \lambda v - v = (\lambda - 1)v$$

Also ist $\lambda - 1$ Eigenwert von f.
Sei umgekehrt $(f - \mathrm{Id})v = (\lambda - 1)v$ für ein $v \neq 0$, dann folgt analog $f(v) = \lambda v$, also ist λ ein Eigenwert von f.

(b) Es existiere $m \in \mathbb{N}$ mit $(f - \mathrm{Id})^m = 0$. Bestimmen Sie die möglichen Eigenwerte von f.

Lösung: Nach Voraussetung ist $f - \mathrm{Id}$ nilpotent; der einzig mögliche Eigenwert ist also 0 nach Aufgabe 3, Blatt 8. Mit Aufgabe (a) ist dann 1 der einzig mögliche Eigenwert von f.