Zusammenfassung Lineare Algebra I.

Tim Hebenstreit

18. Februar 2019

1 Grundbegriffe der Logik

Aussage entweder wahr oder falsch

Negation $\neg A$

Konjunktion $A \wedge B$

Disjunktion $A \vee B$

Implikation $A \Rightarrow B$

Äquivalenz $A \Leftrightarrow B$

Wahrheitstafel

2 Grundbegriffe der Mengenlehre

Elemente Objekte einer Menge

Vereinigung $A \cup B$

Durchschnitt $A \cap B$

Differenzmenge $A \setminus B$

disjunkt $\Leftrightarrow M \cup N = \emptyset$

Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$

vollständige Induktion A_0 wahr (Induktionsanfang), $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ Induktionsschritt

geordnetes Paar (a, b)

kartesisches Produkt $M \times N$

Quantoren Allquantor $\forall$ und Existenzquantor $\exists$

3 Relationen und Funktionen

Relation Tripel (M, N, R) aus Mengen M, N und einer Teilmenge R von $M \times N$

Funktion Relation, für die gilt: Zu jedem $x \in M$ existiert genau ein $y \in N$

Definitions- und Wertebereich einer Funktion f:
$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$

Bild von f: $Bld(f) := f(X)$

Urbild von Y unter f: $f^{-1}(Y)$

injektiv $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

surjektiv $Bld(f) = Y$

bijektiv falls f injektiv und surjektiv ist

Komposition $f \circ g$

Umkehrabbildung Wenn f bijektiv, so existiert f^{-1} mit $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$

Einschränkung, Fortsetzung einer Funktion

Familie bzw. Folge

4 Algebraische Grundbegriffe

Verknüpfung $M \times M \to M$

Gruppe Paar $(G, *)$ mit Menge G und Verknüpfung $*$ und folgenden Eigenschaften:

- Assoziativität
- Existenz eines neutralen Elements
- Existenz inverser Elemente
- abelsche Gruppe falls Kommutativität gegeben

Körper Tripel $(K, +, \cdot)$ aus Menge K und zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ auf K mit folgenden Eigenschaften:

- $(K, +)$ ist abelsche Gruppe
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe
- Distributivität

5 Vektorräume

Vektorraum Tripel $(V, +, \cdot)$ aus einer Menge V und Abbildungen $+ : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$ (Addition) und $\cdot : K \times V \to V, (a, v) \mapsto av$ (Skalarmultiplikation) ist K-Vektorraum, wenn gilt:

- $(V, +)$ ist abelsche Gruppe
- Distributivität (zwei mal)
- Assoziativität
- $1_K v = v$ für $v \in V$

Untervektorraum wenn gilt:

- $a, b \in K, u, v \in U \Rightarrow au + bv \in U$

Summe von Untervektorräumen ist wieder Untervektorraum (in Zeichen: $U_1 + U_2$)

direkte Summe von Vektorräumen $U_1 \oplus U_2$, wenn gilt: $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

Linearkombination von Vektoren: $Span_K(v_1, ..., v_n)$

6 Lineare Gleichungssysteme

Lineares Gleichungssystem mit *Variablen* $x_1, ..., x_n$, *Koeffizienten* $b_1, ..., b_n$ und *Lösungsmenge* L - darstellbar als *Matrix*

Elementare Umformungen von Typ I., Typ II. und Typ III.

Gauß-Verfahren bzw. Eliminationsverfahren mittels elementarer Zeilenumformungen

reduzierte Zeilenstufenform Matrix mit *führenden Einsen*

homogenes LGS LGS mit allen Absolutgliedern gleich Null (*inhomogen* falls nicht); dabei gilt für deren Lösungsmenge: $L(I) = s + L(H)$

7 Matrizen

Produkt von Matrizen ¨Zeile mal Spalte"(falls Formate passend)

Hauptdiagonale für quadratische Matrizen definiert

Einheitsmatrix Hauptdiagonale bestehend aus Einsen, ansonsten nur Nullen

$A \in K^{m \times n}$ heißt:

- linksinvertierbar, falls gilt: $\exists B \in K^{n \times m} : BA = 1_n$
- rechtsinvertierbar, falls gilt: $\exists C \in K^{n \times m} : AC = 1_m$
- invertierbar, falls A links- und rechtsinvertierbar ist (dafür muss A quadratisch sein)

inverse Matrix Falls Matrix invertierbar ist, existiert genau eine sog. *inverse Matrix*

allgemeine lineare Gruppe des Grades n über K (in Zeichen: $GL(n, K)$ - Gruppe bzgl. Matrizenmultiplikation

transponierte Matrix A^T. Es gilt: $(AB)^T = B^T A^T$

symmetrische Matrix falls $A^T = A$ (bzw. *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$)

Spur von A: Summe der Koeffizienten auf der Hauptdiagonalen

8 Basis und Dimension

Lineare Unabhängigkeit Falls das LGS $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$ nur die triviale Lösung für $\lambda_1, ..., \lambda_n$ besitzt, sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig.

Basis Sind $b_1, ..., b_n \in V$ linear unabhängig und V n-dimensional, so bilden $b_1, ..., b_n$ eine *Basis* von V

Standardbasis bzw. kanonische Basis: besonders praktische Basis des K^n oder auch *Matrixeinheiten* des $K^{m \times n}$

Austauschsatz von Steinitz K-VR V der von Elementen $e_1, ..., e_k$ aufgespannt wird. Außerdem: $u_1, ..., u_l \in V$ linear unabhänig. Dann existieren $i_1, ..., i_m \in \{1, .., k\}$ mit der Eigenschaft, dass $u_1, ..., u_l, e_{i_1}, ..., e_{i_m}$ eine Basis von V bilden.

Dimension Anzahl der linear unabhängigen Vektoren, welche V aufspannen, wird als Dimension bezeichnet (ggf. ist die Dimension unendlich). Man schreibt: $dimV = n$. Untervektorräume der Dimension $n = 1$ (bzw. $n = 2$ oder $n - 1$) bezeichnet man als *Geraden* (bzw. *Ebenen* oder *Hyperebenen*).

Dimensionsformel für UVR:
$dim(U + V) + dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V)$

Komplement Zu jedem UVR U eines VR V existiert ein U', sodass gilt: $V = U \oplus U'$

9 Der Rang von Matrizen

Zeilenraum und -rang Die Zeilen einer Matrix spannen den sog. *Zeilenraum* $ZR(A)$ einer Matrix auf. Die Dimension dieses Raums nennt sich *Zeilenrang* $zr(A)$.

Elementare Matrizen *Elementar von Typ I.* nennt sich eine Matrix $U_{ij}(r)$, wenn sie sich von der Einheitsmatrix in einem Eintrag (ungleich Null) außerhalb der Hauptdiagonalen unterscheidet. Eine Matrix $D_i(r)$, die sich von der Einheitsmatrix um lediglich einen Eintrag auf der Hauptdiagonalen (ungleich Null) von dieser unterscheidet, wird *elementar von Typ II.* genannt.

Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ sind gleichwertig:

- A ist invertierbar.
- Das zugehörige LGS besitzt genau eine Lösung.
- Der Gauß-Algorithmus macht aus A die Einheitsmatrix.
- A lässt sich als Produkt elementarer Matrizen schreiben.

Zeilenäquivalenz $A \sim_Z B$, wenn A durch elementare Zeilenumformungen in B überführbar (dies ist eine sog. *Äquivalenzrelation*).

Somit lässt sich nun definieren:

- *elementare Spaltenumformungen* einer Matrix
- *reduzierte Spaltenstufenform*
- *Spaltenäquivalenz* $A \sim_S B$
- *Spaltenraum* $SR(A)$
- *Spaltenrang* $sr(A)$

Rang einer Matrix. Es gilt:
$sr(A) = zr(A) =: rg(A)$

Äquivalenz $A \sim B \Leftrightarrow rg(A) = rg(B) \Leftrightarrow$
$\exists U \in GL(m, K) \exists V \in GL(n, K) : B = UAV$

Rangkriterium für LGS Ein LGS ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Matrix übereinstimmt.

10 Lineare Abbildungen

Homomorhismus Eine Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn gilt:
$f(ax + by) = af(x) + bf(y)$ für $a, b \in K, x, y \in V$. In diesem Fall ist $f \in Hom(V, W)$.

Dimensionsformel Es gilt:
$dimV = dimKer(f) + dimBld(f)$.

Kern, Rang und Defekt sind folgendermaßen definiert:

- Kern: $Ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$
- Defekt: $def(f) = dimKer(f)$
- Rang: $rg(f) = dimBld(f)$

Es gilt: f injektiv $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$.

Isomorphismus Ist $f \in Hom(V, W)$ und bijektiv, so wird f auch als Isomorphismus bezeichnet.

Isomorphie Existiert ein Isomorphismus
$f : V \to W$, so nennt man V, W isomorph (in Zeichen: $V \cong W$). Dies ist wieder eine Äquivalenzrelation. Weiterhin gilt:
$V \cong W \Leftrightarrow dimV = dimW$.

$Hom(V, W)$ wird zu einem Vektorraum, wenn man Addition und Multiplikation wie gewohnt definiert.

Endomorphismus $End(V) := Hom(V, V)$

Allgemeine lineare Gruppe $GL(V)$
$:= \{f \in End(V) : f \text{ } bijektiv\}$

11 Lineare Abbildungen und Matrizen

Matrix von f bzgl. zweier Basen V, W K-VR mit Basen $b_1, ..., b_m$ und $c_1, ..., c_n$ und $f \in Hom(V, W)$. Schreibe $f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i$ $(j = 1, ..., m)$ mit $a_{ij} \in K$ für alle i, j. Dann heißt $A := (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ die Matrix von f bzgl. der obigen Basen.

(Die Matrix von f enthält in der j-ten Spalte die Koeffizienten von $f(b_j)$ bzgl. $c_1, ..., c_n$.)

Die Abbildung $\Delta : Hom(V,W) \to K^{n\times m}$ ordnet jeder linearen Abbildung ihre Matrix $\Delta(f)$ bzgl. zweier Basen zu und ist ein VR-Isomorphismus.

Dualraum Im Fall $W = K$ nennt man $V^* := Hom(V,K)$ *Dualraum* von V und seine Elemente *Linearformen* auf V.

Es gilt: f bijektiv $\Leftrightarrow$ A invertierbar.

Basiswechsel Ist A die Matrix von $f \in Hom(V,W)$ bzgl. zweier Basen, so lässt sich mittels zweier Basiswechselmatrizen $S \in GL(m,K)$ und $T \in GL(n,K)$, die Matrix von f bzgl. zweier neuer Basen studieren. Dabei gilt folgender Zusammenhang: $A' = TAS$.
Für $f \in End(V)$ gilt: $A' = S^{-1}AS$.

Diagonalisierbarkeit f ist diagonalisierbar, falls zwei Basen so wählbar sind, sodass Matrix A von f bzgl. dieser Basen eine *Diagonalmatrix* ist. A ist auch diagonalisierbar, wenn A ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

Ähnlichkeit $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich, wenn ein $S \in GL(n,K)$ existiert, sodass $B = S^{-1}AS$ gilt (man schreibt: $A \approx B$).

12 Determinanten

Determinante Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ definiert man die *Determinante* mittels des *Entwicklungssatzes von Laplace*:
$det(A) := |A| := \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ik}|A_{ik}|$ für $k = 1, ..., n$.
Determinanten bestimmter Matrizen:

- Die Determinante von *oberen- und unteren Dreiecksmatrizen* ist gleich dem Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen.
- Die Determinante einer elementaren Matrix $U_{ij}(r)$ vom Typ I. ist stets 1. Die Determinante einer elementaren Matrix $D_i(r)$ vom Typ II. ist stets r.
- Die Determinante einer Matrix, welche zwei gleich Zeilen enthält, ist gleich 0. Gleiches gilt für eine Matrix, welche eine Nullzeile enthält.
- $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL(n,K)$

Die Determinante einer Abbildung $f \in End(V)$ definiert man über dessen zugehörige Matrix A.

Produktregel für Determinanten:
$A, B \in K^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A| \cdot |B|$.
Weiterhin gilt:
$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ und $|A^T| = |A|^T$.
Alles was für Zeilen von Determinanten gilt, gilt also auch für deren Spalten.

Adjunkte Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ definiert man die *Adjunkte* $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in K^{n\times n}$ von A durch $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ji}|$.
Es gilt: $A\tilde{A} = |A| \cdot 1_n = \tilde{A}A$.

Cramersche Regel Ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt: $d := |A| \neq 0$. Ggf. gilt für $i = 1, ...n$:

$$x_i = \frac{1}{d}\begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Untermatrix erhält man durch Streichen von Zeilen und/oder Spalten einer gegebenen Matrix.

13 Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum V K-VR, $f \in End(V)$ und $r \in K$. Man nennt r *Eigenwert* von f, falls $f(v) = rv$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$ ist. Ggf. heißt v *Eigenvektor* und $E_r(f) := \{x \in V : f(x) = rx\}$ *Eigenraum* von f zum Eigenwert r. Für paarweise verschiedene Eigenwerte von f ist die Summe der Eigenräume eine direkte Summe. Zudem gilt:
r Eigenwert von $f \Leftrightarrow |r1_n - A| = 0$.

charakteristisches Polynom Für $A \in K^{n\times n}$ nennt man die Abbildung:

$$K \to K, x \mapsto |x1_n - A|$$

das *charakteristische Polynom* von A. Es ist von der Form eines Polynoms. Die Nullstellen dieses Polynoms entsprechen den Eigenwerten von A.
Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche charakteristische Polynom und damit auch die gleichen Eigenwerte.

Wieder lässt sich dies auch auf die zu den Matrizen gehörenden Abbildungen $f \in End(V)$ übertragen, sodass man auch vom charakteristischen Polynom von f sprechen kann.

Gleichwertige Aussagen zur Diagonalisierbarkeit von $f \in End(V)$:

- f ist diagonalisierbar.
- V hat eine Basis, die aus Eigenvektoren von f besteht.
- V ist direkte Summe der Eigenräume von f.
- $dim(V)$ ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume von f.
- f hat n verschiedene Eigenwerte und $dim(V) = n$.

Anwendungsbeispiele

- Berechnung expliziter Formeln von zuvor rekursiv definierten Folgen (z.B. *Fibonacci-Zahlen*)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels Übergangsmatrizen

14 Euklidische Vektorräume

Skalarprodukt ist eine Abbildung:
$V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto (v|w)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $(av + a'v'|w) = a(v|w) + a'(v'|w)$ für $a, a' \in \mathbb{R}, v, v', w \in V$.
- $(v|w) = (w|v)$ für $v, w \in V$.
- $(v|v) > 0$ für $v \in V \setminus \{0\}$.

Standardskalarprodukt Beispiele:

- Auf $\mathbb{R}^n$: $(x|y) := \sum_{i=1}^n x_i y_i$.
- Auf $\mathcal{C}[a, b]$: $(f|g) := \int_a^b f(t)g(t)dt$.

Ungleichung von Cauchy-Schwarz Für jedes Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-VR gilt:

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y) \text{ für } x, y \in V$$

(Gleichheit gilt, wenn x und y linear abhängig sind.)

euklidischer Vektorraum $\mathbb{R}$-VR, auf dem Skalarprodukt definiert ist.

Länge (Betrag, Norm) Für $v \in V$ heißt $||v|| := \sqrt{(v|v)}$ die *Länge* von v.
In jedem EVR gilt:

- $0 \leq ||v||$ für $v \in V$
- $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $||av|| = |a| \cdot ||v||$ für $a \in \mathbb{R}, v \in V$
- Dreiecksungleichung
  $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ für $v, w \in V$
- Satz des Pythagoras
  $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2(v|w)$
- Parallelogrammgleichung
  $||v+w||^2+||v-w||^2 = 2||v||^2+2||w||^2$

Abstand, Distanz Für Elemente v, w eines EVR nennt man $d(v, w) := ||v - w||$ den *Abstand* bzw. die *Distanz* zwischen v und w. Die Abbildung $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ nennt man die *Metrik* von V.

orthogonal sind Elemente v, w eines EVR, wenn gilt: $(v|w) = 0$.

Orthonormalsystem und -basis Von 0 verschiedene Elemente $v_1, ..., v_n \in V$ nennt man:

- ein *Orthogonalsystem*, falls $v_i \perp v_j$ für alle i, j gilt.
- ein *Orthonormalsystem*, falls zusätzlich $||v|| = 1$ für alle i gilt.
- eine *Orthonormalbasis* (ONB) von V, falls sie ein Orthonormalsystem und eine Basis von V bilden.

Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt
Zu jeder Basis $a_1, ..., a_n$ eines EVR V existiert eine ONB $b_1, ..., b_n$ von V mit der Eigenschaft, dass jedes b_i eine Linear-Kombination von $a_1, ..., a_i$ ist.

orthogonales Komplement Für jede Teilmenge M eines EVR V nennt man:
$M^\perp := \{v \in V : (m|v) = 0 \text{ für } m \in M\}$
das *orthogonale Komplement* von M in V.
Dabei gilt: $V = M \oplus M^\perp$.

Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein $u_0 \in U$, wobei U UVR von V ist, mit:
$d(v, u_0) = \min \{d(v, u) : u \in U\}$.
Für jede ONB $u_1, ..., u_m$ von U ist

$$u_0 = \sum_{i=1}^m (v|u_i)u_i.$$

Methode der kleinsten Quadrate Für gegebene Messwerte lässt sich mithilfe dieser Methode eine polynomielle Approximation finden.

Winkel Der *Winkel* ϑ zwischen zwei Vektoren $a, b \in V \setminus \{0\}$ eines EVR ist definiert als:

$$cos\vartheta = \frac{(a|b)}{||a|| \cdot ||b||}.$$

15 Isometrien und orthogonale Matrizen

Isometrie Eine *Isometrie* zwischen zwei EVR ist eine lineare Abbildung $f \in Hom(V, W)$ für die gilt:
$(f(x)|f(y)) = (x|y)$ für alle $x, y \in V$.
Somit erhält f Längen und Winkel. Ist f bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung f^{-1} eine Isometrie.
Bzgl. zweier ONB gilt für f außerdem:

$$f \text{ Isometrie} \Leftrightarrow A^T A = 1_m$$

(mit $A^{-1} = A^T$).

orthogonale Gruppe Die Menge $O(V) := \{f \in End(V) : f \text{ ist Isometrie}\}$ ist eine Gruppe bzgl. $\circ$ und wird *orthogonale Gruppe* von V genannt. Gleiches lässt sich für Matrizen definieren:
$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = 1_n\}$

isometrisch isomorph werden zwei EVR genannt, für die eine bijektive Isometrie existiert (wieder ist dies eine Äquivalenzrelation). Zwei EVR sind genau dann *isometrisch isomorph*, wenn sie die gleiche Dimension haben.

Spiegelung Für einen EVR V und $0 \neq v \in V$ wird die Abbildung:

$$s_v : V \to V, x \mapsto x - \frac{2(v|x)}{(v|v)} v$$

die *Spiegelung* an der Hyperebene $(\mathbb{R}v)^\perp$ genannt. Die Determinante einer Spiegelung ist stets -1. Eine Isometrie f lässt sich als Produkt von Spiegelungen schreiben.

Drehung Die Matrix einer *Drehung* f um den Winkel ϑ sieht folgendermaßen (oder ähnlich) aus:

$$A = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

16 Selbstadjungierte lineare Abbildungen und symmetrische Matrizen

selbstadjungiert Für einen EVR V nennt man eine Abbildung $f \in End(V)$ für die gilt: $(f(x)|y) = (x|f(y))$ für alle $x, y \in V$ *selbstadjungiert*.
f ist genau dann selbstadjungiert, wenn die Matrix A von f symmetrisch ist.

Fundamentalsatz der Algebra Ein komplexes Polynom n-ten Grades besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
Hieraus folgt, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einen reellen Eigenwert besitzt.

Hauptachsentransformation (auch Spektralsatz) werden folgende Sätze genannt:

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $\Leftrightarrow$ es exisitiert ein $S \in O(n)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
- Es existiert eine ONB von V bzgl. der die Matrix A von f aus Eigenvektoren von f besteht $\Leftrightarrow$ f ist selbstadjungiert.