5.5. Aufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1: Stammfunktionen
Bestimmen Sie jeweils alle Stammfunktionen für die folgenden Funktionen:

a) $f(x) = 0$
b) $f(x) = 1$
c) $f(x) = 2$
d) $f(x) = a \in \mathbb{R}$
e) $f(x) = x$
f) $f(x) = x^2$
g) $f(x) = x^3$
h) $f(x) = x^{-3}$
i) $f(x) = x^{-2}$
j) $f(x) = x^{-1}$
k) $f(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$
l) $f(x) = 5x^2 - 3x + 6$
m) $f(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
n) $f(u) = 4u^3 - 3u^2 + 7u$
o) $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 3x + \sqrt{x} - 5$
p) $f(x) = 16x^4 + x - 7 + \frac{5}{x^2} - \frac{30}{x^3}$
q) $f(t) = \frac{3}{2}t - \frac{1}{2\sqrt{t}}$
r) $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{x-1} + ... + a_1 x + a_0$
s) $f(t) = \sin t$
t) $f(t) = \cos t$

Aufgabe 2: Hauptsatz und Eigenschaften des Integrals
Berechnen Sie die folgenden Integrale:

a) $\int_{-1}^{1}(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2})dx$
b) $\int_{-1}^{2}(x^3 + x^2)dx$
c) $\int_{-3}^{-2}(x^2 + 3x + 2)dx$
d) $\int_{1}^{2}x^2dx$, $\int_{2}^{3}x^2dx$ und $\int_{1}^{3}x^2dx$ (Intervalladditivität)
e) $\int_{2}^{1}x^2dx$ (Vertauschung der Grenzen bzw. dx < 0)
f) $\int_{0}^{3}(x^2 - 4x + 3)dx$ (Flächen unterhalb der x-Achse bzw. f(x) < 0)

Aufgabe 3: Flächen unterhalb der x-Achse
Berechnen Sie den Gesamtinhalt F aller Flächen, die von den Senkrechten x = a bzw. x = b sowie von der x-Achse und dem Schaubild von f begrenzt werden:

a) $f(x) = x^2 - 1$ mit $a = -1$ und $b = 2$
b) $f(x) = -x^2 - 4x - 3$ mit $a = -4$ und $b = -1$
c) $f(x) = x^3$ mit $a = -1$ und $b = 2$
d) $f(x) = x^3 - x$ mit $a = -1$ und $b = 1$
e) $f(x) = x^3 - x$ mit $a = -1$ und $b = 2$
f) $f(t) = \sin t$ mit $a = -\pi$ und $b = \pi$

Aufgabe 4: Flächen unterhalb der x-Achse
Berechnen Sie den Gesamtinhalt der Flächen, die durch das Schaubild von f und die x-Achse eingeschlossen werden.

a) $f(x) = -x^2 + 1$
b) $f(x) = x^3 - 4x$
c) $f(x) = -x^4 + x^2$
d) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Aufgabe 5: Flächen zwischen zwei Schaubildern
Berechnen Sie den Gesamtinhalt A aller Flächen, die durch die Schaubilder der Funktionen f und g sowie die Senkrechten x = a und x = b eingeschlossenen werden.

a) $f(x) = -x^2 + 2$, $g(x) = -x^2 + 3$, $a = -1$ und $b = 1$
b) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2$, $a = -1$ und $b = 1$
c) $f(x) = 3x$, $g(x) = -x + 2$, $a = 0$ und $b = 1$
d) $f(x) = x^2$, $g(x) = x$, $a = 0$ und $b = 2$
e) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$, $a = -2$ und $b = -1$
f) $f(t) = \sin t$, $g(t) = \cos t$, $a = -\frac{\pi}{4}$, $b = \frac{\pi}{4}$

Aufgabe 6: Flächen zwischen zwei Schaubildern
Berechnen Sie den Gesamtinhalt A der Flächen, die durch die Schaubilder der Funktionen f und g eingeschlossen werden.

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = 2 - x^2$
b) $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$
c) $f(x) = x^3$, $g(x) = x$
d) $f(x) = x^3 - 3x$, $g(x) = 2x^2$

Aufgabe 7: Variable Grenzen
Geben Sie an, für welches t die Fläche A(t) genau 2 FE groß wird.

a) $A(t) = \int_{0}^{t}(-x^2 + \frac{7}{3})dx$
b) $A(t) = \int_{0}^{t}(x^2 + \frac{4}{3}x + 1)dx$
c) $A(t) = \int_{1}^{t}(x^2 - \frac{1}{3})dx$
d) $A(t) = \int_{2}^{t}(x^2 - \frac{4}{3}x - 1)dx$
e) $A(t) = \int_{1}^{2}(x^2 + t)dx$
f) $A(t) = \int_{0}^{t}(x^2 - \frac{2}{3}tx + 2)dx$

Aufgabe 8: Substitutionsmethode
Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Substitutionsmethode:

a) $\int_0^3 (2x \cdot e^{x^2-2})dx$ f) $\int_0^9 \frac{1}{(x+1)^2}dx$ k) $\int_0^1 \left(x - \frac{2tx}{x^2+t}\right)dx$ p) $\int_0^1 x \cdot \ln(x^2+1)\ dx$

b) $\int_1^2 (4x \cdot e^{x^2-4})dx$ g) $\int_0^1 \frac{4x-10}{(x^2-5x+6)^2}dx$ l) $\int_2^3 \frac{11x-4}{x-1}dx$ q) $\int_2^3 \frac{(\ln x)^2}{x}dx$

c) $\int_0^1 e^{3x+1}dx$ h) $\int_0^{0,5} \frac{2x}{x^4-2x^2+1}dx$ m) $\int_0^1 \frac{x^2+t}{x+t}dx$ r) $\int_1^2 \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$

d) $\int_0^5 e^{-x}dx$ i) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$ n) $\int_{-1}^1 \frac{t^2-1}{t^2}xdx$ s) $\int_e^{2e} \frac{\ln x}{x}dx$

e) $\int_{-3}^0 e^{1-x}dx$ j) $\int_2^4 \frac{x}{x^2-1}dx$ o) $\int_1^2 \ln x\ \ dx$ t) $\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx$

Aufgabe 9: Produktregel
Berechnen Sie die folgenden Integrale mit Hilfe der Produktregel:

a) $\int_0^2 (x \cdot e^x)dx$ c) $\int_{-1}^1 (x \cdot e^{2x})dx$ e) $\int_0^1 (x^2 \cdot e^{-x})dx$ g) $\int_1^3 (\ln x)^2\ \ dx$

b) $\int_0^1 (x^2 \cdot e^x)dx$ d) $\int_1^2 (x \cdot e^{-x})dx$ f) $\int_e^{e^2} x \cdot \ln x\ \ dx$ h) $\int_1^2 \frac{\ln x}{x}$

Aufgabe 10: Substitutions- und Produktregel mit beliebigen Grenzen
Zeigen Sie durch Integration von f(x) über ein beliebiges Intervall [a; b], daß F(x) eine Stammfunktion von f(x) ist.

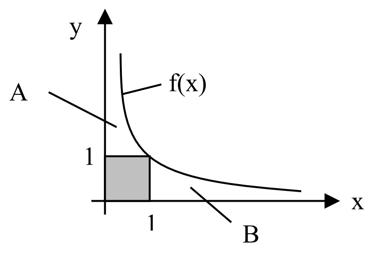
a) $f(x) = 4e^{2x}$ mit $F(x) = 2e^{2x}$
b) $f(x) = e^{-0,5x-1}$ mit $F(x) = -2e^{-0,5x-1}$
c) $f(x) = -6e^{-3x+1}$ mit $F(x) = 2e^{-3x+1}$
d) $f(x) = 2x \cdot e^{0,5x^2}$ mit $F(x) = 2\,e^{0,5x^2}$
e) $f(x) = -6x \cdot e^{x^2+1}$ mit $F(x) = -3\,e^{x^2+1}$
f) $f(x) = (4x-2)\,e^{-x^2+x-1}$ mit $F(x) = -2\,e^{-x^2+x-1}$
g) $f(x) = (x+3)e^x$ mit $F(x) = (x+2)e^x$
h) $f(x) = (-2x-1)e^x$ mit $F(x) = (-2x+1)e^x$
i) $f(x) = x^2e^x$ mit $F(x) = (x^2-2x+2)e^x$
j) $f(x) = (x+3)e^{-x}$ mit $F(x) = -(x+4)e^{-x}$
k) $f(x) = (-3x+11)e^{3x}$ mit $F(x) = (-x+4)e^{3x}$
l) $f(x) = -(6x+1)e^{-3x+1}$ mit $F(x) = (2x+1)e^{-3x+1}$
m) $f(x) = (2x-5)e^{2x+1}$ mit $F(x) = (x-3)e^{2x+1}$
n) $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ mit $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2+1)$
o) $f(x) = \frac{1}{(2x+4)^2}$ mit $F(x) = -\frac{1}{4x+8}$
p) $f(x) = 1 + \ln(x)$ mit $F(x) = x \cdot \ln(x)$
q) $f(x) = (\ln(x))^2$ mit $F(x) = x \cdot (\ln(x))^2 - 2x \cdot \ln(x) + 2x$
r) $f(x) = 1 - (\ln(1-x))^2$ mit $F(x) = (1-x) \cdot (1-\ln(1-x))^2$

Aufgabe 11: Uneigentliche Integrale
Schreiben Sie die folgenden uneigentlichen Integrale als Grenzwert und berechnen sie ihn:

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1,5}}dx$ e) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$ g) $\int_0^\infty x \cdot e^{-x^2}dx$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}dx$ d) $\int_0^1 \frac{1}{x^{0,5}}dx$ f) $\int_0^\infty e^{-x}dx$ h) $\int_0^1 \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}}dx$

Aufgabe 12: Uneigentliche Integrale
Geben Sie alle n > 0 an, für die die Flächen A bzw. B zwischen der Hyperbel $f(x) = x^{-n}$ und der y-Achse bzw, x-Achse endlich sind und berechnen Sie ihren Inhalt in Abhängigkeit von n.



5.5. Lösungen zu den Aufgaben zur Integralrechnung

Aufgabe 1: Stammfunktionen ($c \in \mathbb{R}$)

a) $F_c(x) = c$

b) $F_c(x) = x + c$

c) $F_c(x) = 2x + c$

d) $F_c(x) = ax + c$

e) $F_c(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$

f) $F_c(x) = \frac{1}{3}x^3 + c$

g) $F_c(x) = \frac{1}{4}x^4 + c$

h) $F_c(x) = -\frac{1}{2}x^{-2} + c$

i) $F_c(x) = -x^{-1} + c$

j) $F_c(x) = \ln x + c$

k) $F_c(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$

l) $F_c(x) = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 6x + c$

m) $F_c(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x + c$

n) $F_c(u) = u^4 - u^3 + \frac{7}{2}u^2 + c$

o) $F_c(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^{1,5} - 5x + c$

p) $F_c(x) = \frac{16}{5}x^5 + \frac{1}{2}x^2 - 7x + c - \frac{5}{x} + \frac{15}{x^2}$

q) $F_c(t) = \frac{3}{4}t^2 - \sqrt{t} + c$

r) $F_c(x) = \frac{a_n}{n+1}x^{n+1} + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + ... + \frac{a_1}{2}x^2 + a_0x + c$

s) $F_c(t) = -\cos t + c$

t) $F_c(t) = \sin t + c$

Aufgabe 2: Hauptsatz und Eigenschaften des Integrals

a) $\int_{-1}^{1}(-\frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2})dx = \left[-\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x\right]_{-1}^{1} = -\frac{1}{6}\left[x^3 + 3x^2 - 9x\right]_{-1}^{1} = -(-\frac{5}{6}) - (-\frac{11}{6}) = \frac{8}{3}$ FE

b) $\int_{-1}^{2}(x^3 + x^2)dx = \left[\frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = (4 + \frac{8}{3}) - (\frac{1}{4} - \frac{1}{3}) = 6\frac{3}{4}$ FE

c) $\int_{-3}^{-2}(x^2 + 3x + 2)dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2x\right]_{-3}^{-2} = \frac{1}{6}\left[2x^3 + 9x^2 + 12x\right]_{-3}^{-2} = \frac{5}{6}$ FE

d) $\int_{1}^{2}x^2dx = \frac{7}{3}$ FE, $\int_{2}^{3}x^2dx = \frac{19}{3}$ FE, $\int_{1}^{3}x^2dx = \frac{26}{3}$ FE,

e) $\int_{2}^{1}x^2dx = -\frac{7}{3}$ FE

f) $A = \left|\int_{0}^{1}(x^2 - 4x + 3)dx\right| + \left|\int_{1}^{3}(x^2 - 4x + 3)dx\right| = |\frac{4}{3}| + |-\frac{4}{3}| = \frac{8}{3}$ FE

Aufgabe 3: Flächen unterhalb der x-Achse

a) $A = \left|\int_{-1}^{1}(x^2 - 1)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^2 - 1)dx\right| = \frac{4}{3} + \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$ FE

b) $A = \left|\int_{-4}^{-3}(-x^2 - 4x - 3)dx\right| + \left|\int_{-3}^{-1}(-x^2 - 4x - 3)dx\right| = |-\frac{4}{3}| + |\frac{4}{3}| = \frac{8}{3}$ FE

c) $A = \left|\int_{-1}^{0}x^3dx\right| + \left|\int_{0}^{2}x^3dx\right| = \frac{1}{4} + 4 = \frac{17}{4}$ FE

d) $A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ FE

e) $A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - x)dx\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{9}{4} = \frac{11}{3}$ FE

f) $A = 2\left|\int_{0}^{\pi}(\sin t)dt\right| = 4$ FE

Aufgabe 4: Flächen unterhalb der x-Achse

a) $A = 2\cdot\int_{0}^{1}(-x^2 + 1)dx = 2\cdot\left[-\frac{1}{3}x^3 + x\right]_0^1 = 2\cdot\frac{2}{3} = \frac{4}{3}$ FE

b) $A = 2\cdot\left|\int_{0}^{2}(x^3 - 4x)dx\right| = 2\cdot\left|\left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^2\right]_0^2\right| = 2\cdot|-4| = 8$ FE

c) $A = 2\cdot\int_{0}^{1}(-x^4 + x^2)dx = 2\cdot\left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{3}x^2\right]_0^1 = 2\cdot\frac{2}{15} = \frac{4}{15}$ FE

d) $A = \int_{0}^{1}(x^3 - 3x^2 + 2x)dx + \left|\int_{1}^{2}(x^3 - 3x^2 + 2x)dx\right| = \left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_0^1 + \left|\left[\frac{1}{4}x^4 - x^3 + x^2\right]_1^2\right| = \frac{1}{4} + \left|-\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{2}$ FE

Aufgabe 5: Flächen zwischen zwei Schaubildern

a) $A = \int_{-1}^{1} 1dx = 2$ FE

b) $A = \left|\int_{-1}^{1}(x^2 - 2)dx\right| = 3\frac{1}{3}$ FE

c) $A = \left|\int_{0}^{0,5}(4x - 2)dx\right| + \left|\int_{0,5}^{1}(4x\text{-}2)dx\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$ FE

d) $A = \left|\int_{0}^{1}(x^2 - x)dx\right| + \left|\int_{1}^{2}(x^2 - x)dx\right| = \frac{1}{6} + \frac{5}{6} = 1$ FE

e) $A = \left|\int_{-2}^{-1}(x^3 - x^2)dx\right| = 6\frac{1}{12}$ FE

f) $A = \left|\int_{-0,75\pi}^{0,25\pi}(\cos t - \sin t)dt\right| = 2\sqrt{2}$ FE

Aufgabe 6: Flächen zwischen zwei Schaubildern

a) $A = \left|\int_{-1}^{1}(2x^2 - 2)dx\right| = \frac{8}{3}$

b) $A = \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x^2)dx\right| = \frac{1}{12}$

c) $A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx\right| + \left|\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx\right| = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

d) $A = \left|\int_{-1}^{0}(x^3 - 2x^2 - 3x)dx\right| + \left|\int_{0}^{3}(x^3 - 2x^2 - 3x)dx\right| = \frac{7}{12} + \frac{45}{4} = \frac{71}{6}$

Aufgabe 7: Variable Grenzen

a) $A(t) = \int_0^t (-x^2 + \frac{7}{3})dx = -\frac{1}{3}t^3 + \frac{7}{3}t = 2 \Leftrightarrow t^3 - 7t + 6 = 0 \Leftrightarrow t = 1$

b) $A(t) = \int_0^t (x^2 + \frac{4}{3}x + 1)dx = \frac{1}{3}t^3 + \frac{2}{3}t^2 + t = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 + 3t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2$

c) $A(t) = \int_1^t (x^2 - \frac{1}{3})dx = \frac{1}{3}t^3 - \frac{1}{3}t - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 2 \Leftrightarrow t^3 - t - 6 = 0 \Rightarrow t = 2$

d) $A(t) = \int_2^t (x^2 - \frac{4}{3}x - 1)dx = \frac{1}{3}t^3 - \frac{2}{3}t^2 - t - \frac{8}{3} + \frac{8}{3} + 2 = 2 \Leftrightarrow t^3 - 2t^2 - 3t = 0 \Rightarrow t = 3$

e) $A(t) = \int_1^2 (x^2 + t)dx = \frac{1}{3}2^3 + 2t - \frac{1}{3}1^3 - 1t = \frac{7}{3} + t = 2 \Leftrightarrow 14 + 6t = 12 \Rightarrow t = -\frac{1}{3}$

f) $A(t) = \int_0^t (x^2 - \frac{2}{3}tx + 2)dx = \frac{1}{3}t^3 - \frac{t}{3}t^2 + 2t = 2 \Leftrightarrow 2t = 2 \Rightarrow t = 1$

Aufgabe 8: Substitutionsmethode

a) $\int_0^3 (2x \cdot e^{x^2-2})dx = \int_{-2}^7 e^z dz = e^7 - e^{-2} \approx 1096{,}50$ mit $z(x) = x^2 - 2$

b) $\int_1^2 (4x \cdot e^{x^2-4})dx = 2\int_1^2 2x \cdot e^{x^2-4}dx = 2\int_{-3}^0 e^z dz = 2(1 - e^{-3}) \approx 1{,}90$ mit $z(x) = x^2 - 4$

c) $\int_0^1 e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int_0^1 3 \cdot e^{3x+1}dx = \frac{1}{3}\int_1^4 e^z dz = \frac{1}{3}(e^4 - e) \approx 17{,}29$ mit $z(x) = 3x + 1$

d) $\int_0^5 e^{-x}dx = -\int_0^5 (-1) \cdot e^{-x}dx = -\int_0^{-5} e^z dz = -(e^{-5} - 1) \approx 0{,}99$ mit $z(x) = -x$

e) $\int_{-3}^0 e^{1-x}dx = -\int_{-3}^0 (-1) \cdot e^{1-x}dx = -\int_4^1 e^z dz = -(e - e^4) \approx 51{,}88$ mit $z(x) = 1 - x$

f) $\int_0^9 \frac{1}{(x+1)^2} dx = \int_1^{10} \frac{1}{z^2} dz = \left[-\frac{1}{z}\right]_1^{10} = 0{,}9$ mit $z(x) = x + 1$

g) $\int_0^1 \frac{4x - 10}{(x^2 - 5x + 6)^2} dx = \left[-\frac{2}{x^2 - 5x + 6}\right]_0^1 = -\frac{2}{3}$

h) $\int_0^{0,5} \frac{2x}{x^4 - 2x^2 + 1} dx = \int_0^{0,5} \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} dx = \left[-\frac{1}{x^2 - 1}\right]_0^{0,5} = \frac{1}{3}$

i) $\int_0^1 \frac{1}{x+1} dx = \ln 2$

j) $\int_2^4 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2 - 1)\right]_2^4 = \frac{1}{2}\ln 5$

k) $\int_0^1 \left(x - \frac{2tx}{x^2 + t}\right)dx = \int_0^1 x dx - \int_t^{1+t} \frac{t}{z} dz = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 - t \ln z \Big|_t^{1+t} = \frac{1}{2} - t(\ln(1 + t) - \ln t)$ mit $z(x) = x^2 + t$

l) $\int_2^3 \frac{11x - 4}{x - 1} dx = \int_1^2 \frac{11z + 7}{z} dz = \int_1^2 \left(11 + \frac{7}{z}\right) dz = 11z + 7\ln(z) \Big|_1^2 = 11 + 7\ln(2) \approx 15{,}85$ mit $z(x) = x - 1$

m) $\int_0^1 \frac{x^2 + t}{x + t} dx = \int_t^{1+t} \frac{z^2 - 2tz + t^2 + t}{z} dz = \int_t^{1+t} \left(z - 2t + \frac{t^2 + t}{z}\right) dz = \left[\frac{1}{2}z^2 - 2tz + (t^2 + t)\ln(z)\right]_t^{1+t} = \frac{1}{2} - t + (t^2 + t)\ln\left(1 - \frac{1}{t}\right)$

n) $\int_{-1}^{1} \frac{t^2-1}{t^2} x \;\; dx \;=\; \frac{t^2-1}{t^2} \int_{-1}^{1} xdx \;=\; \frac{t^2-1}{t^2} \left[\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{1} \;=\; 0$

o) $\int_{1}^{2} \ln(x)dx \;=\; x \cdot \ln(x) - x \,\Big|_1^2 \;=\; (2{\cdot}\ln(2) - 2) - (0 - 1) \;\approx\; 0{,}39$ mit Stammfunktion aus Formelsammlung

p) $\int_{0}^{1} x \cdot \ln(x^2+1) \;\; dx \;=\; \frac{1}{2}\int_{0}^{1} 2x \cdot \ln(x^2+1) \;\; dx \;=\; \int_{1}^{2} \ln(z)dz \;=\; \frac{1}{2}\ln(2) - \frac{1}{2} \;\approx\; 0{,}19$ mit $z(x) = x^2 + 1$

q) $\int_{2}^{3} \frac{(\ln x)^2}{x} dx \;=\; \int_{\ln 2}^{\ln 3} z^2 dz \;=\; \frac{1}{3}(\ln(3))^3 - \frac{1}{3}(\ln(2))^3 \;\approx\; 0{,}33$ mit $z(x) = \ln(x)$

r) $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx \;=\; \int_{\ln 1}^{\ln 2} \sqrt{z} \;\; dz \;=\; \left[\frac{2}{3}z^{1,5}\right]_0^{\ln 2} \;=\; \frac{2}{3}(\ln(2))^{1,5} \;\approx\; 0{,}38$ mit $z(x) = \ln(x)$

s) $\int_{e}^{2e} \frac{\ln x}{x} dx \;=\; \int_{\ln e}^{\ln 2e} zdz \;=\; \frac{1}{2}(\ln(2e))^2 - \frac{1}{2} \;\approx\; 0{,}93$ mit $z(x) = \ln(x)$

t) $\int_{0}^{1} \frac{\ln(x+1)}{x+1} dx \;=\; \int_{\ln(1)}^{\ln(2)} z \cdot dz \;=\; \frac{1}{2}(\ln(2))^2 \;\approx\; 0{,}24$ mit $z(x) = \ln(x + 1)$

Aufgabe 9: Produktregel

a) $\int_{0}^{2} (x \cdot e^x)dx \;=\; \left[x \cdot e^x\right]_0^2 - \int_{0}^{2} (1 \cdot e^x)dx \;=\; \left[x \cdot e^x\right]_0^2 - \left[e^x\right]_0^2 \;=\; \left[(x-1) \cdot e^x\right]_0^2 = e^2 + 1 \approx 8{,}39$

b) $\int_{0}^{1} (x^2 \cdot e^x)dx \;=\; \left[x^2 \cdot e^x\right]_0^1 - \int_{0}^{1} (2x \cdot e^x)dx \;=\; \left[x^2 \cdot e^x\right]_0^1 - 2\left[(x-1) \cdot e^x\right]_0^1 \;=\; \left[(x^2-2x+2) \cdot e^x\right]_0^1 \;=\; e - 2 \;\approx\; 0{,}72$

(Ergebnis aus a) einsetzen!)

c) $\int_{-1}^{1} (x \cdot e^{2x})dx = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} (1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x})dx = \left[x \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_{-1}^{1} = \left[(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}) \cdot e^x\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{4}e^2 + \frac{3}{4}e^{-2} \approx 1{,}90$

d) $\int_{1}^{2} (x \cdot e^{-x})dx = \left[x \cdot (-e^{-x})\right]_1^2 - \int_{1}^{2} (1 \cdot (-e^{-x}))dx = \left[-x \cdot e^{-x}\right]_1^2 - \left[e^{-x}\right]_1^2 = \left[(-x-1) \cdot e^{-x}\right]_1^2 = -3e^{-2} + 2e^{-1} \approx 0{,}33$

e) $\int_{0}^{1} (x^2 \cdot e^{-x})dx = \left[x^2 \cdot (-e^{-x})\right]_0^1 - \int_{0}^{1} (2x \cdot (-e^{-x}))dx \;=\; \left[-x^2 \cdot e^{-x}\right]_0^1 + 2\int_{0}^{1} (x \cdot e^{-x})dx \;=\; \left[-x^2 \cdot e^{-x}\right]_0^1 + 2$

$\left[(-x-1) \cdot e^{-x}\right]_0^1 = \left[(-x^2-2x-2) \cdot e^{-x}\right]_0^1 = -5{\cdot}e^{-1} + 2 \approx 0{,}16$ (Ergebnis aus d) einsetzen!)

f) $\int_{e}^{e^2} x \cdot \ln(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right]_e^{e^2} - \int_{e}^{e^2} \frac{1}{2}x^2 \cdot \frac{1}{x} \;\; dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \cdot \ln(x)\right]_e^{e^2} - \left[\frac{1}{4}x^2\right]_e^{e^2} = \left[\frac{1}{4}x^2(2\ln(x)-1)\right]_e^{e^2} = \frac{1}{4}e^2(3e^2 - 1) \approx 39{,}10$

g) $\int_{1}^{3} (\ln(x))^2 \;\; dx \;=\; (x\ln(x) - x) \cdot \ln(x)\,\Big|_1^3 - \int_{1}^{3} (x \cdot \ln(x) - x) \cdot \frac{1}{x} \;\; dx \;=\; \left[x(\ln(x))^2 - x\ln(x)\right]_1^3 - \int_{1}^{3} (\ln(x) - 1) \;\; dx \;=$

$\left[x(\ln(x))^2 - x\ln x\right]_1^3 - (x\ln(x) - x - x\,\Big|_1^3 = \left[x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\right]_1^3 = 3{\cdot}(\ln(3))^2 - 6{\cdot}\ln(3) + 6 - 2 \approx 1{,}03$

h) $\int_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{x} dx = \int_{1}^{2} \frac{1}{x} \cdot \ln(x)dx \;=\; l(x) \cdot \ln(x)\,\Big|_1^2 - \int_{1}^{2} \ln(x) \cdot \frac{1}{x} dx \Rightarrow \int_{1}^{2} \frac{\ln(x)}{x} dx = \frac{1}{2} \;\; \ln(x) \cdot \ln(x)\,\Big|_1^2 \;=\; \frac{(\ln(2))^2}{2} \;\approx 0{,}24.$

Aufgabe 10: Substitutions- und Produktregel mit beliebigen Grenzen

a) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 2\cdot 2e^{2x}dx = \int_{2a}^{2b} 2e^z dz = \left[2e^z\right]_{2a}^{2b} = \left[2\cdot e^{2x}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

b) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (\frac{1}{-0,5})\cdot(-0,5)e^{-0,5x-1}dx = \int_{-0,5a-1}^{-0,5b-1} -2e^z dz = \left[-2e^z\right]_{-0,5a-1}^{-0,5b-1} = \left[-2e^{-0,5x-1}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

c) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-6)\cdot e^{-3x+1}dx = \int_a^b 2\cdot(-3)e^{-3x+1}dx = \int_{-3a+1}^{-3b+1} 2e^z dz = \left[2e^z\right]_{-3a+1}^{-3b+1} = \left[2\cdot e^{-3x+1}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

d) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 2\cdot xe^{0,5x^2}dx = \int_{0,5a^2}^{0,5b^2} 2e^z dz = \left[2\cdot e^z\right]_{0,5a^2}^{0,5b^2} = \left[2\cdot e^{0,5x^2}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

e) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-3)\cdot 2xe^{x^2+1}dx = \int_{a^2+1}^{b^2+1} -3e^z dz = \left[-3e^z\right]_{a^2+1}^{b^2+1} = \left[-3\cdot e^{x^2+1}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

f) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (-2)\cdot(-2x+1)e^{-x^2+x-1}dx = \int_{-a^2+a-1}^{-b^2+b-1} -2e^z dz = \left[-2e^z\right]_{-a^2+b-1}^{-b^2+b-1} = \left[-2\cdot e^{-x^2+x-1}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

g) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (3x^2-2x-2)e^{x^3-x^2-2x+1}dx = \int_{a^3-a^2-2a+1}^{b^3-b^2-2b+1} e^z dz = \left[e^z\right]_{a^3-a^2-2b+1}^{b^3-b^2-2b+1} = \left[e^{x^3-x^2-2x+1}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

h) $\int_a^b f(x)dx = \left[(x+3)\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 1\cdot e^x dx = \left[(x+3)\cdot e^x\right]_a^b - \left[e^x\right]_a^b = \left[(x+3)e^x - 1e^x\right]_a^b = \left[(x+2)\cdot e^x\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

i) $\int_a^b f(x)dx = \left[(-2x-1)\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b (-2)\cdot e^x dx = \left[(-2x-1)\cdot e^x\right]_a^b - \left[(-2)e^x\right]_a^b = \left[(-2x-1)e^x - (-2)e^x\right]_a^b =$
$\left[(-2x+1)\cdot e^x\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

j) $\int_a^b f(x)dx = \left[x^2\cdot e^x\right]_a^b - \int_a^b 2x\cdot e^x dx = \left[x^2\cdot e^x\right]_a^b - \left[\left[2xe^x\right]_a^b - \int_a^b 2e^x dx\right] = \left[x^2\cdot e^x\right]_a^b - \left[\left[2xe^x\right]_a^b - \left[2e^x\right]_a^b\right] =$
$\left[x^2e^x - 2xe^x + 2e^x\right]_a^b = \left[(x^2-2x+2)\cdot e^x\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

k) $\int_a^b f(x)dx = \left[(x+3)\cdot(-e^{-x})\right]_a^b - \int_a^b 1\cdot(-e^{-x})dx = \left[(-x-3)\cdot e^{-x}\right]_a^b - \left[e^{-x}\right]_a^b = \left[(-x-3)e^{-x} - 1e^{-x}\right]_a^b =$
$\left[(-x-4)e^{-x}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

l) $\int_a^b f(x)dx = \left[(-3x+11)\cdot(\frac{1}{3}e^{3x})\right]_a^b - \int_a^b (-3)\cdot\frac{1}{3}e^{3x})dx = \left[(-x+\frac{11}{3})\cdot e^{3x}\right]_a^b - \left[-\frac{1}{3}e^{3x}\right]_a^b =$
$\left[(-x+\frac{11}{3})e^{3x} + \frac{1}{3}e^{3x}\right]_a^b = \left[(-x+4)e^{3x}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

m) $\int_a^b f(x)dx = \left[(-6x-1)\cdot(-\frac{1}{3}e^{-3x+1})\right]_a^b - \int_a^b (-6)\cdot(-\frac{1}{3}e^{-3x+1})dx = \left[(2x+\frac{1}{3})\cdot e^{-3x+1}\right]_a^b - \left[-\frac{2}{3}e^{-3x+1}\right]_a^b =$
$\left[(2x+\frac{1}{3})e^{-3x+1} + \frac{2}{3}e^{-3x+1}\right]_a^b = \left[(2x+1)e^{-3x+1}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

n) $\int_a^b f(x)dx = \left[(2x-5)\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_a^b - \int_a^b 2\cdot\frac{1}{2}e^{2x+1}dx = \left[(x-\frac{5}{2})\cdot e^{2x+1}\right]_a^b - \left[\frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_a^b = \left[(x-\frac{5}{2})e^{2x+1} - \frac{1}{2}e^{2x+1}\right]_a^b =$
$\left[(x-3)e^{2x+1}\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

o) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{2}\cdot 2x\cdot\frac{1}{x^2+1} = \int_{a^2+1}^{b^2+1} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z}dz = \left[\frac{1}{2}\ln(z)\right]_{a^2+1}^{b^2+1} = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_a^b = F(x)\,_a^b$

p) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{1}{2}\cdot 2\cdot \frac{1}{(2x+4)^2}dx = \int_{(2a+4)^2}^{(2b+4)^2} \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z^2}dz = \left[-\frac{1}{2z}\right]_{(2a+4)^2}^{(2b+4)^2} = \left[-\frac{1}{2(2x+4)}\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$

q) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b (1+\ln(x))dx = x + x\cdot\ln(x) - x\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b$ (mit Stammfunktion des ln aus Formelsammlung)

r) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \ln(x)\cdot\ln(x)\,dx = \left[(x\ln(x)-x)\ln(x)\right]_a^b - \int_a^b (x\ln(x)-x)\cdot\frac{1}{x}dx = \left[x(\ln(x))^2 - x\ln(x)\right]_a^b - \int_a^b (\ln(x)-1)dx$

$= \left[x(\ln(x))^2 - x\ln(x)\right]_a^b - x\ln(x)-x-x\Big|_a^b = \left[x(\ln(x))^2 - 2x\ln(x) + 2x\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$

s) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b 1-(\ln(1-x))^2\;dx = x\Big|_a^b - \int_a^b (\ln(1-x))^2\;dx$

$= x\Big|_a^b + \left[(1-x)(\ln(1-x))^2 - 2(1-x)\ln(1-x) + 2(1-x)\right]_a^b = \left[(1-x)(\ln(1-x))^2 - 2(1-x)\ln(1-x) + (1-x) + 1\right]_a^b$

$= \left[(1-x)((\ln(1-x))^2 - 2\ln(1-x) + 1) + 1\right]_a^b = \left[(1-x)(\ln(1-x)-1)^2 + 1\right]_a^b = \left[(1-x)(1-\ln(1-x))^2\right]_a^b = F(x)\Big|_a^b$

(Die 1 fällt bei der Differenzbildung weg!)

NR: $-\int_a^b (\ln(1-x))^2\;dx = \int_{1-a}^{1-b} \ln z\cdot\ln z\;dz = (z\ln z - z)\ln z\Big|_{1-a}^{1-b} - \int_{1-a}^{1-b} (z\ln z - z)\cdot\frac{1}{z}dz$

$= \left[z(\ln z)^2 - z\ln z\right]_{1-a}^{1-b} - \int_{1-a}^{1-b} (\ln z - 1)dz = \left[z(\ln z)^2 - z\ln z\right]_{1-a}^{1-b} - z\ln z - z - z\Big|_{1-a}^{1-b} = \left[z(\ln z)^2 - 2z\ln z + 2z\right]_{1-a}^{1-b}$

$= \left[(1-x)(\ln(1-x))^2 - 2(1-x)\ln(1-x) + 2(1-x)\right]_a^b$ mit $z(x) = 1-x$

Aufgabe 11: Uneigentliche Integrale

a) $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$

b) $\int_0^\infty \frac{1}{(x+1)^2}dx = 1$

c) $\int_1^\infty \frac{1}{x^{1,5}}dx = 2$

d) $\int_0^1 \frac{1}{x^{0,5}}dx = 2$

e) $\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx = 2$

f) $\int_0^\infty e^{-x}dx = 1$

g) $\int_0^\infty x\cdot e^{-x^2}dx = \frac{1}{2}$

h) $\int_0^1 \frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}}dx = \frac{1}{e}$

Aufgabe 12: Uneigentliche Integrale

Für $n < 1$ ist $A = \int_0^1 \frac{1}{x^n}dx = \left[\frac{1}{1-n}x^{1-n}\right]_0^1 = \frac{1}{1-n}$ und

für $n > 1$ ist $A = \int_1^\infty \frac{1}{x^n}dx = \lim_{b\to\infty}\left[\frac{1}{1-n}x^{1-n}\right]_0^b = \frac{1}{n-1}$.