§ 17 Logarithmus und allgemeine Potenz

Bisher kennen wir als stetige Funktionen über $\mathbb{R}$ die Polynome, die Exponentialfunktion und hieraus mittels Rechenregeln zusammengesetzte Funktionen wie z.B. $x^3 exp(x^2) + x^9(exp(x))^{11}$. Als Funktionen, die auf $\mathbb{R} \setminus E$ — mit endlichen E — definiert sind, kennen wir die rationalen Funktionen. Auch sie sind in jedem Punkte ihres Definitionsbereiches stetig. Insbesondere mit Hilfe des Satzes über die Umkehrfunktion stetiger Funktionen werden wir nun weitere Klassen von stetigen Funktionen kennenlernen:

(1) Die Logarithmusfunktionen als stetige Funktionen auf $\mathbb{R}_+$.

(2) Die Exponentialfunktion a^x zur Basis $a \in \mathbb{R}_+$ als stetige Funktion auf $\mathbb{R}$.

(3) Die Potenzfunktion x^b (für $b \in \mathbb{R}$) als stetige Funktion auf $\mathbb{R}_+$.

17.1 Der natürliche Logarithmus

(i) Die Exponentialfunktion $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und stetig. Sie bildet $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab.

(ii) Die Umkehrfunktion $ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ der Exponentialfunktion ist streng monoton wachsend und stetig. Sie bildet $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}$ ab und heißt der *natürliche Logarithmus*, in Zeichen ln.
Es gilt die Funktionalgleichung

$$ln(a \cdot b) = ln(a) + ln(b) \text{ für } a, b \in \mathbb{R}_+.$$

(iii) Für den natürlichen Logarithmus ln gilt ferner:

$$ln(1) = 0, \qquad ln(e) = 1,$$

$$ln(t) < 0 \text{ für } t \in]0, 1[, \qquad ln(t) > 0 \text{ für } t \in]1, \infty[,$$

$$ln(1/t) = -ln(t) \text{ für } t \in \mathbb{R}_+.$$

(iv) $\lim_{t \downarrow 0} ln(t) = -\infty$ und $\lim_{t \to \infty} ln(t) = \infty$.

Beweis. ***(i)*** Nach 14.5(i) ist exp stetig. Ferner ist:

(1) $$exp(t) \underset{10.13(\mathrm{i})}{>} 0 \text{ für jedes } t \in \mathbb{R}.$$

Nach Definition der Exponentialfunktion gilt ferner:

(2) $$exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \geq 1 + t > 1 \text{ für } t > 0.$$

Ist nun $t_1 < t_2$, also $t_2 - t_1 > 0$, so gilt:

$$exp(t_2) \underset{10.12}{=} exp(t_1)exp(t_2 - t_1) \underset{(1),(2)}{>} exp(t_1),$$

d.h. exp ist streng monoton wachsend.

Es ist $exp(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}_+$ nach (1). Ist umgekehrt $r \in \mathbb{R}_+$, dann gibt es $t_1 < t_2$ mit $exp(t_1) < r < exp(t_2)$ (siehe 16.14(ii)). Da $f := exp|[t_1, t_2]$ stetig ist, gibt es nach dem Zwischenwertsatz (siehe 15.2) ein $t' \in \,]t_1, t_2[$ mit $exp(t') = f(t') = r$. Also ist exp eine surjektive Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+$. Als streng monotone Abbildung ist exp auch injektiv, also ist exp eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+$.

(ii) Mit (i) folgt aus 15.6(ii), daß $ln : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ streng monoton wachsend und stetig ist. Da exp eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+$ ist, ist ln eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_+ (= exp(\mathbb{R}))$ auf $\mathbb{R}$.

Zum Beweis der Funktionalgleichung: Setze

(3) $$s := ln(a) \text{ und } t := ln(b).$$

Dann ist nach Definition der Umkehrfunktion

(4) $$a = exp(s) \text{ und } b = exp(t).$$

Also folgt aus der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion (siehe 10.12):

$$a \cdot b \underset{(4)}{=} exp(s)exp(t) \underset{10.12}{=} exp(s + t).$$

Wiederum nach Definition der Umkehrfunktion gilt daher $s + t = ln(a \cdot b)$ und somit

$$ln(a \cdot b) = s + t \underset{(3)}{=} ln(a) + ln(b).$$

(iii) Aus $exp(0) = 1$ und $exp(1) = e$ (siehe 10.13(iii)) folgt $ln(1) = 0$ und $ln(e) = 1$, da $ln(x)$ die Umkehrfunktion von $exp(x)$ ist.

Da ln nach (ii) streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}_+$ ist, folgt aus $ln(1) = 0$:

$$ln(t) < 0 \text{ für } t \in \,]0, 1[\text{ und } ln(t) > 0 \text{ für } t \in \,]1, \infty[.$$

Ferner ist nach (ii) für $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 = ln(1) = ln(t \cdot 1/t) \underset{(\mathrm{ii})}{=} ln(t) + ln(1/t),$$

also $ln(1/t) = -ln(t)$.

(iv) Da ln monoton wachsend ist und da ln weder nach unten noch nach oben beschränkt ist, folgt aus 16.11:

$$\begin{aligned} \lim_{t \downarrow 0} ln(t) &\underset{16.11}{=} \inf\{ln(t) : t \in \mathbb{R}_+\} = -\infty, \\ \lim_{t \to \infty} ln(t) &\underset{16.11}{=} \sup\{ln(t) : t \in \mathbb{R}_+\} = \infty. \end{aligned}$$

□

Zur Vorbereitung der Einführung der allgemeinen Exponentialfunktion benötigen wir noch einen Satz, der von eigenem Interesse ist.

17.2 Stetige Funktionen sind durch ihre Werte auf $\mathbb{Q}$ eindeutig bestimmt

Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{Q}$. Dann ist $f = g$, d.h. $f(t) = g(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$.

Beweis. Sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $q_n \to r$ (siehe 7.23). Da f und g stetig sind, folgt

(1) $$f(q_n) \to f(r) \text{ und } g(q_n) \to g(r).$$

Da $f(q_n) = g(q_n)$ nach Voraussetzung gilt, folgt $f(r) = g(r)$ aus (1), da der Grenzwert einer Folge eindeutig bestimmt ist. □

17.3 Die allgemeine Potenz

Sei $a \in \mathbb{R}_+$ und $b \in \mathbb{R}$. Setze

$$a^b := exp(b \cdot ln(a)).$$

Wegen $ln(e) = 1$ ist also insbesondere $e^b = exp(b)$. Es ist $a^b \in \mathbb{R}_+$, und es gilt für $a, a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$ und $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$

(i) $a^{b_1+b_2} = a^{b_1} \cdot a^{b_2}$;

(ii) $(a_1 \cdot a_2)^b = a_1^b \cdot a_2^b$;

(iii) $a^{b_1 \cdot b_2} = (a^{b_1})^{b_2}$;

(iv) $a^{-b} = 1/a^b$ und $(1/a)^b = 1/a^b$

(v) $a^{b_1-b_2} = a^{b_1}/a^{b_2}$;

(vi) $(a_1/a_2)^b = a_1^b/a_2^b$.

(vii) Es ist $a^1 = a$, $a^{n+1} = a^n \cdot a$ für $n \in \mathbb{N}$ und $a^0 = 1$ sowie $a^{-n} = 1/a^n$ für $n \in \mathbb{N}$.

Also stimmt die vor 3.8 und in 3.14 gegebene Definition der Potenz a^m für $m \in \mathbb{Z}$ mit der jetzigen Definition überein.

Ist nun $m \in \mathbb{Z}$ und $2 \leq n \in \mathbb{N}$, dann ist $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$.

Also stimmt insgesamt die in 4.10 gegebene Definition von a^q für $q \in \mathbb{Q}$ mit der jetzigen Definition überein.

Beweis. ***(i)***
$$a^{b_1+b_2} = exp((b_1 + b_2) \cdot ln(a)) = exp(b_1 \cdot ln(a) + b_2 \cdot ln(a)) \underset{10.12}{=} exp(b_1 ln(a)) \cdot exp(b_2 \cdot ln(a)) = a^{b_1} \cdot a^{b_2}.$$

(ii)
$$(a_1 \cdot a_2)^b = exp(b \cdot ln(a_1 \cdot a_2)) \underset{17.1(\text{ii})}{=} exp(b \cdot ln(a_1) + b \cdot ln(a_2)) \underset{10.12}{=} exp(b \cdot ln(a_1)) \cdot exp(b \cdot ln(a_2)) = a_1^b \cdot a_2^b.$$

(iii) Es gilt $(a^{b_1})^{b_2} = exp(b_2 \cdot ln(a^{b_1}))$ und $a^{b_1 \cdot b_2} = exp(b_1 \cdot b_2 \cdot ln(a))$. Somit reicht es für $b \in \mathbb{R}$ zu zeigen:

$$ln(a^b) = b \cdot ln(a).$$

Dies folgt aus: $ln(a^b) = ln(exp(b \cdot ln(a))) = b \cdot ln(a)$.

(iv) $a^0 = a^{b+(-b)} \underset{\text{(i)}}{=} a^b \cdot a^{-b}$. Wegen $a^0 = exp(0 \cdot lna) = 1$ folgt $a^{-b} = 1/a^b$.

$1^b = (a \cdot 1/a)^b \underset{\text{(ii)}}{=} a^b \cdot (1/a)^b$. Wegen $1^b = exp(b \cdot ln(1)) = 1$ folgt $(1/a)^b = 1/a^b$.

(v) $a^{b_1 - b_2} \underset{\text{(i)}}{=} a^{b_1} \cdot a^{-b_2} \underset{\text{(iv)}}{=} a^{b_1}/a^{b_2}$.

(vi) $(a_1/a_2)^{b_1} \underset{\text{(ii)}}{=} a_1^b \cdot (1/a_2)^b \underset{\text{(iv)}}{=} a_1^b/a_2^b$.

(vii) Es ist $a^1 = exp(1 \cdot lna) = exp(ln(a)) = a$ und $a^{n+1} \underset{\text{(i)}}{=} a^n \cdot a^1 = a^n \cdot a$.

Wegen (iv) gilt auch $a^{-n} = 1/a^n$. Somit ist also gezeigt, daß die in 17.3 gegebene Definition von a^m für $m \in \mathbb{Z}$ mit der früheren Definition übereinstimmt. Wir zeigen nun

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a}, \tag{1}$$

also (wegen $a^{1/n} \in \mathbb{R}_+$) die Gleichung $(a^{1/n})^n = a$. Dies folgt aus (ii).

Ist nun $m \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$, dann gilt für die in 17.3 definierte Potenz $a^{m/n}$:

$$a^{m/n} = a^{m \cdot 1/n} \underset{\text{(iii)}}{=} (a^m)^{1/n} \underset{(1)}{=} \sqrt[n]{a^m}.$$ □

Satz 17.3 sagt aus, daß die allgemeine Definition der Potenz a^b den bisherigen Potenzbegriff a^q von rationalem q auf beliebiges reelles b fortsetzt. Ist eine andere „vernünftige“ Fortsetzung von a^q für $q \in \mathbb{Q}$ auf a^b für $b \in \mathbb{R}$ möglich? Ist $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so gibt es eine Folge $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $\mathbb{Q}$ mit $q_n \to b$. Eine vernünftige Forderung ist, daß $a^b = \lim_{n\to\infty} a^{q_n}$ sein sollte. Dies ist, wie der Satz 17.4 zeigt, in der Tat der Fall und legt darüber hinaus auch eindeutig die Ausdehnung von a^q für $q \in \mathbb{Q}$ auf a^r für $r \in \mathbb{R}$ fest. Die Antwort auf die eingangs gestellte Frage lautet daher nein.

17.4 Die Exponentialfunktion zur Basis *a*

Sei $a \in \mathbb{R}_+$. Dann heißt die Funktion, die jedem $b \in \mathbb{R}$ den Wert $a^b = exp(b \cdot ln(a))$ zuordnet, die *Exponentialfunktion zur Basis a*. Man bezeichnet sie mit a^x. Also ist

$$a^x = exp \circ (x \cdot ln(a)) =: exp(x\ ln(a)).$$

Insbesondere ist daher $e^x = exp \circ x = exp(x)$.

(i) Die Exponentialfunktion zur Basis a ist die einzige stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(q) = a^q$ für alle $q \in \mathbb{Q}$.

(ii) Ist $a = 1$, so ist a^x konstant gleich 1. Ist $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$, so ist $a^x(\mathbb{R}) = \mathbb{R}_+$, und es ist a^x streng monoton wachsend (fallend) für $a > 1$ ($a < 1$). Insbesondere bildet also a^x für $a \neq 1$ die Menge $\mathbb{R}$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab.

Beweis. ***(i)*** Es ist a^x als Komposition der stetigen Exponentialfunktion mit der stetigen Funktion $x \cdot ln(a)$ stetig. Die Eindeutigkeitsaussage folgt aus 17.2.

(ii) Wegen $ln(1) \underset{17.1(\text{iii})}{=} 0$ ist $1^x = exp(x \cdot ln(1)) = 1$. Ist $a > 1$ $(a < 1)$, so ist $ln(a) > 0$ $(ln(a) < 0)$ nach 17.1(iii). Ist $a > 1$, so wird daher $\mathbb{R}$ durch $x \cdot ln(a)$ streng monoton wachsend und bijektiv auf $\mathbb{R}$ abgebildet. Also ist $a^x = exp(x \cdot ln(a))$ als Komposition zweier streng monoton wachsender Funktionen streng monoton wachsend mit Bild $\mathbb{R}_+$ (vgl. 17.1(i)). Ist $a < 1$, so wird $\mathbb{R}$ durch $x \cdot ln(a)$ streng monoton fallend und bijektiv auf $\mathbb{R}$ abgebildet. Die Aussage folgt daher für $a < 1$ wieder aus 17.1(i). □

Hält man in der Definition der allgemeinen Potenz b fest und betrachtet a^b als Funktion von $a \in \mathbb{R}_+$, so gelangt man zu den allgemeinen Potenzfunktionen.

17.5 Die Potenzfunktion zum Exponenten *b*

Sei $b \in \mathbb{R}$. Dann heißt die Funktion, die jedem $a \in \mathbb{R}_+$ den Wert $a^b = exp(b\ ln(a))$ zuordnet, *die Potenzfunktion zum Exponenten b*. Man bezeichnet sie mit x^b. Also ist

$$x^b = exp \circ (b \cdot ln(x)) =: exp(b \cdot ln(x)).$$

(i) Die Potenzfunktion ist stetig.

(ii) Ist $b = 0$, so ist x^b auf $\mathbb{R}_+$ konstant gleich 1. Ist $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so ist $x^b(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$, und es ist x^b streng monoton wachsend (fallend) für $b > 0 (b < 0)$. Insbesondere bildet also x^b für $b \neq 0$ die Menge $\mathbb{R}_+$ bijektiv auf $\mathbb{R}_+$ ab.

(iii) Ist $b \neq 0$, so ist die nach (ii) auf $\mathbb{R}_+$ existierende Umkehrfunktion von x^b durch $x^{1/b}$ gegeben.

(iv) Für $b \in \mathbb{R}_+$ setzt man $0^b := 0$. Mit dieser Festsetzung ist dann für $b \in \mathbb{R}_+$

$$x^b : [0, \infty[\to [0, \infty[$$

stetig. Ferner ist x^b streng monoton wachsend auf $[0, \infty[$. Die Umkehrfunktion auf $[0, \infty[$ ist wieder durch $x^{1/b}$ gegeben.

Beweis. ***(i)*** Nach 17.1(ii) ist $ln(x)$ und somit $b \cdot ln(x)$ eine stetige Abbildung von $\mathbb{R}_+$ in $\mathbb{R}$. Da auch $exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist, ist x^b als Komposition der stetigen Exponentialfunktion mit der stetigen Funktion $b \cdot ln(x)$ selbst stetig.

(ii) $t^0 = exp(0 \cdot ln(t)) = exp(0) = 1$ für $t \in \mathbb{R}_+$. Ist $b > 0 (b < 0)$, so ist $b \cdot ln(x)$ eine streng monoton wachsende (fallende) Abbildung von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}$ (siehe 17.1(ii)). Da exp eine streng monoton wachsende Abbildung von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}_+$ ist, folgt nach Definition von x^b, daß x^b für $b > 0 (b < 0)$ eine streng monoton wachsende (fallende) Abbildung von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}_+$ ist.

(iii) Zu zeigen ist $x^{1/b} \circ x^b = x|\mathbb{R}_+$, d.h. für $t \in \mathbb{R}_+$ ist nachzuweisen:

$$(t^b)^{1/b} = t.$$

Diese Gleichung folgt unmittelbar aus 17.3(iii).

(iv) Nach Festsetzung und (ii) ist die erweiterte Funktion eine Abbildung von $[0,\infty[$ in $[0,\infty[$. Zur Stetigkeit reicht es wegen (ii), die Stetigkeit in 0 zu beweisen (benutze auch 14.7(ii)). Somit reicht es zu zeigen (wende 16.5 auf $f|D = x^b|\mathbb{R}_+$ an), daß

$$t_n^b \to 0 \text{ für } 0 < t_n \to 0$$

gilt. Dies folgt aus $ln(t_n) \underset{17.1(\mathrm{iv})}{\longrightarrow} -\infty$ wegen $b > 0$ mit

$$t_n^b = exp(b \cdot ln(t_n)) \underset{16.14(\mathrm{ii})}{\longrightarrow} 0.$$

Da $x^b :]0,\infty[\to]0,\infty[$ eine streng monoton wachsende Abbildung für $b > 0$ nach (ii) ist, macht die Festsetzung $0^b := 0$ die Funktion x^b zu einer streng monoton wachsenden Abbildung von $[0,\infty[$ in $[0,\infty[$. Die Aussage über die Umkehrfunktion folgt aus (ii) und der Festsetzung $0^b := 0$. □

17.6 Die Logarithmusfunktion zur Basis *a*

Für $a \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$ sei

$$log_a(x) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$$

die Umkehrfunktion von a^x. Dann ist

(i) $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$, und ist somit eine bijektive und stetige Abbildung von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}$. Für $a > 1$ ist log_a streng monoton wachsend und für $a < 1$ streng monoton fallend.

(ii) Es gilt die Funktionalgleichung:

$$log_a(b \cdot c) = log_a(b) + log_a(c) \text{ für } b, c \in \mathbb{R}_+.$$

(iii) $log_a(b^c) = c \cdot log_a(b)$ für $b \in \mathbb{R}_+, c \in \mathbb{R}$.

Beweis. Nach 17.4(ii) folgt, daß die Umkehrfunktion von a^x eine bijektive Abbildung von $\mathbb{R}_+$ auf $\mathbb{R}$ ist.

(i),(ii) Für $t \in \mathbb{R}_+$ gilt nach Definition von log_a:

$$\begin{aligned} b = log_a(t) \quad &\iff \quad a^b = t \underset{17.3}{\iff} exp(b \cdot ln(a)) = t \\ &\underset{17.1(\mathrm{ii})}{\iff} \quad b \cdot ln(a) = ln(t) \iff b = \frac{ln(t)}{ln(a)}. \end{aligned}$$

Also gilt $log_a(t) = \frac{ln(t)}{ln(a)}$ für $t \in \mathbb{R}_+$, d.h $log_a(x) = \frac{ln(x)}{ln(a)}$. Der Rest von (i) und (ii) folgt aus dieser Gleichung zusammen mit 17.1(ii) und den nach 17.1(iii) gültigen Beziehungen $ln(a) < 0$ für $a < 1$ sowie $ln(a) > 0$ für $a > 1$.

(iii) Dies folgt wegen (i) aus

$$ln(b^c) \underset{17.4}{=} ln(exp(c \cdot ln(b))) = c \cdot ln(b).$$ □

Ist $n \in \mathbb{N}$, so ist n^α für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ definiert, und es ist $n^\alpha \in \mathbb{R}_+$ (siehe 17.3). Da $ln(n) \in \mathbb{R}_+$ für $n \geq 2$ ist, ist $(ln(n))^\alpha \in \mathbb{R}_+$. Also sind die folgenden Reihen bildbar:

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^\alpha}, \qquad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\cdot(ln(n))^\alpha}.$$

Ihre Konvergenz oder Divergenz in Abhängigkeit von α läßt sich nun leicht mit Hilfe des folgenden Satzes von Cauchy beweisen.

17.7 Der Cauchysche Verdichtungssatz

Sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine Reihe mit nicht-negativen Gliedern a_n. Ferner sei (a_n) monoton fallend. Dann ist $\sum_{n=1}^\infty a_n$ genau dann konvergent, wenn die „verdichtete Reihe" $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ konvergent ist.

Beweis. „$\Rightarrow$": Sei $\sum_{n=1}^\infty a_n$ eine konvergente Reihe mit Summe s. Dann gilt, da alle a_n nicht-negativ und (a_n) monoton fallend ist:

$$\begin{aligned} s &\geq a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \ldots + a_8) + \ldots + (a_{2^{n-1}+1} + \ldots + a_{2^n}) \\ &\geq a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \ldots + 2^{n-1}a_n. \end{aligned}$$

Also ist $2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots + 2^n a_{2^n} \leq 2s$, daher ist $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n} \equiv 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \ldots$ konvergent nach dem Monotoniekriterium für Reihen (siehe 9.5).

„$\Leftarrow$": Sei nun umgekehrt $\sum_{n=1}^\infty 2^n a_{2^n}$ konvergent mit Summe t. Dann gilt für k mit $2^k \geq n$

$$\begin{aligned} a_1 + \ldots + a_n &\leq a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + \ldots + a_7) + \ldots + (a_{2^k} + \ldots + a_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \ldots + 2^k a_{2^k} \leq t + a_1. \end{aligned}$$

Das Monotoniekriterium liefert wiederum die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty a_n$. □

17.8 Anwendung des Cauchyschen Verdichtungssatzes

(i) Es ist $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ für $\alpha \leq 1$ divergent und für $\alpha > 1$ konvergent.

(ii) Es ist $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\cdot(ln(n))^\alpha}$ für $\alpha \leq 1$ divergent und für $\alpha > 1$ konvergent.

Beweis. ***(i)*** Sei zunächst $\alpha \leq 1$. Es ist $\sum_{n=1}^\infty 1/n$ divergent (siehe Beispiel 9.3(ii)). Da $n^\alpha \leq n$ (siehe 17.4(ii)) ist, erhält man $1/n^\alpha \geq 1/n$. Also ist nach dem Minorantenkriterium (siehe 10.1(ii)) auch $\sum_{n=1}^\infty 1/n^\alpha$ divergent.

Sei nun $\alpha > 1$. Dann ist $n \to n^\alpha$ monoton wachsend (siehe 17.5(ii)) und $n \to 1/n^\alpha$ daher monoton fallend. Nach 17.7 reicht es, die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty 2^n \cdot (1/(2^n)^\alpha)$ zu beweisen. Nun ist

$$2^n \cdot \frac{1}{2^{n\alpha}} \underset{17.3(\mathrm{iv})}{=} \frac{1}{2^{n\alpha}\cdot 2^{-n}} \underset{17.3(\mathrm{i})}{=} \frac{1}{2^{(\alpha-1)n}} \underset{17.3(\mathrm{iii})}{=} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^n.$$

Wegen $\alpha > 1$ ist $1 < 2^{\alpha-1}$ und somit $q := 1/2^{\alpha-1} < 1$. Die Konvergenz von $\sum_{n=1}^\infty 2^n \cdot (1/(2^n)^\alpha) \equiv \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{(2^{\alpha-1})^n}$ folgt daher aus der Konvergenz der geometrischen Reihe $\sum_{n=1}^\infty q^n$ (siehe Beispiel 9.3(i)).

(ii) Wir zeigen zunächst die Divergenz für $\alpha = 1$. Es ist $0 \leq \frac{1}{n \cdot ln(n)}$ für $n \geq 2$ monoton fallend. Nun ist $\frac{2^n}{2^n \cdot ln(2^n)} = \frac{1}{n \cdot ln(2)}$, also ist $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n ln(2^n)}$ divergent und daher auch $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot ln(n)}$ (siehe 17.7). Wegen $\frac{1}{n \cdot (ln(n))^\alpha} \geq \frac{1}{n \cdot ln(n)}$ für $\alpha \leq 1$ und $n \geq 3$ (siehe 17.4(ii) und beachte $ln(n) > 1$ für $n \geq 3$) folgt die Divergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} 1/(n \cdot (ln(n))^\alpha)$ nach dem Minorantenkriterium.

Sei $\alpha > 1$. Dann ist $0 \leq \frac{1}{n(ln(n))^\alpha}$ $(n \geq 2)$ monoton fallend. Es bleibt nach 17.7 die Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{2^n (ln(2^n))^\alpha}$ nachzuweisen. Diese folgt, wegen $(ln(2^n))^\alpha = n^\alpha (ln(2))^\alpha$, aus der Konvergenz von $\sum_{n=2}^{\infty} 1/n^\alpha$ (siehe (i)). □

Ergänzung:

Die für $s > 1$ definierte Funktion

$$\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

heißt die *Riemannsche Zetafunktion*. Spezielle Werte für $s = 2$ und $s = 4$ sind erstmals von Euler im Jahre 1736 berechnet worden. Wir werden in Analysis III mit Hilfe der Theorie der Fourier-Reihen ebenfalls eine Reihe von Werten der Riemannschen Zetafunktion bestimmen können.

(Literatur: Walter, Analysis I: Seite 183 und 327)