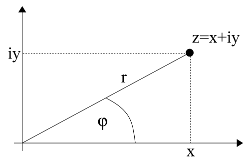
Komplexe Zahlen

- **Kartesische Darstellung:** $z = x + iy$
- **Polare Darstellung:** $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
- **Eulersche Darstellung:** $z = re^{i\varphi}$



Umformung: $\leftrightarrow$

Kartesische Koordinaten x, y	Polare Koordinaten r, ϕ
$x = r\cos\varphi$ (Realteil von z)	Betrag $r = \lvert z\rvert = \sqrt{x^2 + y^2}$
$y = r\sin\varphi$ (Imaginärteil von z)	Argument $\arg(z) := \phi$ ergibt sich aus
	$\tan\varphi = \frac{y}{x}$ Quadrant beachten!

Konjugiert komplexe Zahl: $\overline{z} := x - iy = r(\cos\varphi - i\sin\varphi) = re^{-i\varphi}$

Eigenschaften: $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$ $\quad \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$ $\quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{w}}$ $\quad z + \overline{z} = 2x$

$z - \overline{z} = 2iy$ $\quad z \cdot \overline{z} = \lvert z\rvert^2$ $\quad \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \lvert z\rvert$ $\quad \lvert z\rvert^2 = \lvert z^2\rvert$ $\quad \left\lvert \frac{z}{w} \right\rvert = \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert}$

Addition $z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$

Multiplikation

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (x + iy)(u + iv) && \text{Klammern auflösen} \\ &= (xu - yv) + i(xv + yu) && \boxed{i^2 = -1!} \\ &= \lvert z\rvert e^{i\varphi} \cdot \lvert w\rvert e^{i\psi} = \lvert z\rvert\,\lvert w\rvert e^{i(\varphi+\psi)} && \text{Beträge multiplizieren} \\ &= \lvert z\rvert\,\lvert w\rvert (\cos(\varphi+\psi) + i\sin(\varphi+\psi)) && \text{Winkel addieren} \end{aligned}$$

Division

$$\begin{aligned} \frac{z}{w} &= \frac{x + iy}{u + iv} = \frac{(x + iy)(u - iv)}{(u + iv)(u - iv)} && \text{Erweitern mit konjugiert} \\ &= \frac{(xu + yv) + i(yu + xv)}{u^2 + v^2} && \text{komplexen des Nenners} \\ &= \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert} e^{i(\varphi-\psi)} && \text{Beträge dividieren} \\ &= \frac{\lvert z\rvert}{\lvert w\rvert} \cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi) && \text{Winkel subtrahieren} \end{aligned}$$

Potenzen

$$\begin{aligned} z^n &= (re^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} && \text{Betrag hoch } n \\ &= (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) && \text{Winkel mal } n \end{aligned}$$

Wurzeln: Formel von MOIVRE

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi + k\cdot 2\pi}{n})$$

für $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$