Zusammenfassung Analysis 1

Sascha Schleef

24.01.2011

1 Reelle Zahlen

(1.1) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) + z = x + (y + z)$ (Asoziativgesetz)

(1.2) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ (Kommutativgesetz)

(1.3) $\exists 0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} :\ x + 0 = x$ (0 heißt Null)

(1.4) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x + y = 0$ (y heißt Negatives von x kurz $-x$)

(1.5) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (Asoziativgesetz)

(1.6) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ (Kommutativgesetz)

(1.7) $\exists 1 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R} :\ x \cdot 1 = x$ (1 heißt Eins)

(1.8) $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 0\ \exists y \in \mathbb{R} :\ x \cdot y = 1$ (y heißt Inverses von x kurz x^{-1})

(1.9) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (Distributivgesetz)

(1.37) **Beispiel**: Regeln angewandt auf x^2, komplexe Zahlen, $\mathbb{F}_2$

Vollständige Induktion:
Zz: $\forall n \in \mathbb{N} A(m)$ richtig.
IA: $A(1)$ richtig.
IV: $\exists n \in \mathbb{N} A(m)$ richtig.
IS: $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$

(1.38) **Definition**: Menge K mit den Regeln ist ein Körper (Körperaxiome).

(1.39) **Satz**: Anzahl verschiedener Permutationen: $n! = \prod_{i=1}^{n} i$
Anzahl verschiedener k-elementiger Teilmengen: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}$

(1.40) (a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
(b) $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{0} = 0$
(c) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$, $\binom{n}{-k} = \binom{n}{n+k} = 0$

(1.41) Binomischer Lehr**Satz**: $(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$

2 Axiome der Anordnung

(2.1) Trichotomie: $\forall x \in \mathbb{N}$:
$x > 0$ positiv, $x = 0$ (Null), $x < 0$ (negativ)

(2.2) Abgeschlossenheit(+) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x + y > 0$

(2.3) Abgeschlossenheit($\cdot$) $x > 0 \wedge y > 0 \Rightarrow x \cdot y > 0$

(2.4) **Definition**: $x > y :\Leftrightarrow x - y > 0$ Rest analog
Für zwei $x, y \in \mathbb{N}$ gilt genau eine Relation:
$x < y$, $x = y$, $x > y$

(2.5) Transitivität ("¡"): $x < y \wedge y < z \Rightarrow x > z$

(2.6) Translationsinvarianz: $x < y \Rightarrow a + x < a + y, a \in \mathbb{N}$

(2.7) Spiegelung: $x < y \Rightarrow (-x) > (-y)$

(2.8) $x < y \wedge a < b \Rightarrow a + x < y + b$

(2.9) $x < y \wedge a > 0 \Rightarrow a \cdot x < a \cdot y$

(2.10) $0 \leq x < y \wedge 0 \leq a < b \Rightarrow a \cdot x < b \cdot y$

(2.11) $x < y \wedge a < 0 \Rightarrow a \cdot x > a \cdot y$

(2.12) $\forall x \neq 0 : x^n > 0, n \in \mathbb{N}$ insbesondere $1 > 0$

(2.13) $x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0$

(2.14) $0 < x < y \Rightarrow x^{-1} > y^{-1}$

(2.15) **Definition**: Körper mit obigen Axiomen heißt: angeordneter Körper

(a) $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$ nicht angeordnet
(b) Wenn K angeordnet, so enthält er ganz $\mathbb{N}_0$
(c) Sei dazu $\mathcal{N}$ kleinste Teilmenge von K mit: $0 \in \mathcal{N}$, $x \in \mathcal{N} \Rightarrow x + 1 \in \mathcal{N}$

(2.16) **Definition**: Peamo-Axiome
Sei $\mathcal{N}$ eine Menge $0 \in \mathcal{N}$ und einer Nachfolgeabbildung $\nu : \mathcal{N} \to \mathcal{N}$

(a) $x \neq y \Rightarrow \nu(x) \neq \nu(y)$
(b) $0 \notin \nu(\mathcal{N} = \{x \in \mathcal{N} \| x = \nu(y), y \in \mathcal{N}\}$
(c) (Induktionsaxiom):
$\mathcal{M} \subset \mathcal{N}$: $0 \in \mathcal{M} \wedge x \in \mathcal{M} \Rightarrow \nu(x) \in \mathcal{M}$

(2.17) **Definition**: Absolutbetrag:

(a) $|x| = x \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

(b) $|x| = \max(x, -x)$

(2.18) **Satz**: Der Absolutbetrag erfüllt:

(a) $|x| \geq 0 \wedge \forall x \in \mathbb{R} |x| = 0 \Rightarrow x = 0$

(b) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$

(c) Δ-Ungleichung: $|x + y| \leq |x| + |y|$

(2.19) **Definition**: Körper K mit $\begin{array}{ccc} K & \to & K \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ heißt bewerteter Körper. $x \mapsto |x|$ heißt Bewertung.

(2.20) **Folgerung**:

(a) $|-x| = |x| \forall x \in K$

(b) $x, y \in \mathbb{R}, y \neq 0$: $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$

(c) $\left.\begin{array}{l} |x-y| \geq |x| - |y| \\ |x-y| \geq |y| - |x| \end{array}\right\} |x-y| \geq ||x| - |y||$

(2.21) Archimediches Axiom: Zu je 2 reellen Zahlen $x, y > 0$ gibt es eine natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ mit: $n \cdot x > y$
$\mathbb{R}, \mathbb{Q}$ sind archimedisch geordnet.
Körper die angeordnet sind, müssen nicht archimedisch geordnet sein.

(2.22) **Folgerung**

(a) $\forall x \in \mathbb{R} \exists n_1, n_2 \in \mathbb{N} : n_1 > x \wedge n_2 < x$

(b) Gaußklammer: $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N} : n \leq x < n + 1$: floor($x$)=$\lfloor x \rfloor$
$\forall x \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N} : m - 1 < x \leq m$: ceil($x$)=$\lceil x \rceil$

(2.23) $\forall \varepsilon > 0\ \exists n \in \mathbb{N}, n > 0 : \frac{1}{n} < \varepsilon$

(2.24) **Satz**: Bernulli-Ungleichung: $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq -1 \wedge \forall n \in \mathbb{N}$:
$(1 + x)^n \geq 1 + n \cdot x$

(2.25) (a) $\forall b \in \mathbb{R}, b > 0\ \exists n \in \mathbb{N} : \quad b^n > K$

(b) $0 < b < 1 : \ \forall \varepsilon > 0 \exists n \in \mathbb{N} : \quad b^n < \varepsilon$

3 Folgen und Grenzwerte

(3.1) **Definition**: Seinen A, B zwei nichtleere Mengen:

(a) Abbildung $f : A \to B$ ist Vorschrift, die **zu jedem** $a \in A$ **genau ein** $f(a) \in B$ zuordnet.
A: Argumentbereich, B: Bildbereich.

(b) $f(A) := \{b \in B | \exists a \in A : b = f(a)\}$

(c) f heißt surjektiv, falls: $B = f(A)$.

(d) f heißt injektiv, falls: $a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b), \quad a, b \in A$

(e) f heißt bijektiv, falls f surjektiv und injektiv

(3.3) **Definition**: Eine Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ mit $f(n) := a_n \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}$ heißt Folge reller Zahlen. Argumentbereich heißt Indexmenge. Auflistung $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ heißt unendliches Tupel. (Auch andere Indexmengen möglich)

(3.4) **Definition**:

(a) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls:
$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; |a_n - a| < \varepsilon$
N hängt von ε ab!
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt konvergent, wenn es ein soles a gibt.

Schreibweisen: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, kurz: $\lim\limits_{n} a_n = a$
∞ ist formale Erweiterung von $\mathbb{R}$ durch: $\overline{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \quad , -\infty < x < +\infty \forall x \in \mathbb{R}$

(b) $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \; a_n \in [a - \varepsilon, a + \varepsilon$
d.h. alle a_n, bis auf endlich viele, liegen in diesem Intervall.

(c) Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nicht gegen irgendein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert heißt divergent.

(3.6) **Definition**: Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt beschränkt nach oben/unten, wenn $\exists K \in \mathbb{R}$: $a_n \leq K \forall n \in \mathbb{N}$ / $a_n \geq K \forall n \in \mathbb{N}$
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, wenn nach oben und unten beschränkt.

(3.7) **Satz**: Eindeutigkeit des Limes: $\lim\limits_{n} a_n = a \wedge \lim\limits_{n} a_n = b \Rightarrow a = b$

(3.8) **Satz**: Jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen ist beschränkt.

(3.10) **Satz**: Summen und Produkte konvergenter Folgen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit a bzw b :

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

(3.11) **Folgerung**: Linearkombination
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.
Dann konvergiert $(\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit: $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha \cdot a_n + \beta \cdot b_n) = \alpha \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (a_n) + \beta \cdot \lim\limits_{n\to\infty} (b_n)$

(3.12) **Satz**: Quotienten reller Folgen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Dann $\exists n_0 \in \mathbb{N} : b_n \neq 0 \forall n \geq n_0$
$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n\geq n_0}$, mit $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

(3.14) **Satz**: Vergleich reeller Folgen
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $a_n \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

(b) $A \leq a_n \leq B \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow A \leq \lim\limits_{n\to\infty} a_n \leq B$

(3.15) **Definition**: Reihe:

(a) $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0} = \sum\limits_{n=0}^{m} a_n$ heißt Reihe mit Gliedern a_n.

(b) $(S_m)_{m\in\mathbb{N}_0} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ heißt unendlcihe Reihe. Konvergiert diese wird ihr Grendwert mit $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ bezeichnet.

(3.15) Bemerkung: Teleskopsumme:
Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lässt sich als Folge von Partialsummen darstellen, denn:
$a_n = a_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1}) \quad , n \in \mathbb{N}$

(3.17) **Beispiel**: unendliche geometrische Reihe
Für $|x| < 1$ gilt: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$
Partialsumme: $\sum\limits_{k=0}^{n} x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

(3.19) **Definition**: bestimmte Divergenz: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt:

(a) bestimmt divergent gegen $+\infty$, falls $\forall K \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n \geq N : |a_n| > K$

(b) bestimmt divergent gegen $-\infty$, falls $(-a_n)$ bestimmt divergent gegen $+\infty$

Man schreibt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ bzw. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Sie sind uneigentlich konvergent gegen $\pm\infty$.

(3.20) (a) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $\pm\infty$. Dann $\exists N \in \mathbb{N} : a_n \neq 0 \forall n \geq N$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = 0$

(b) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Nullfolge, d.h. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ mit $a_n > 0 \forall n$ bzw. $a_n < 0 \forall n$.
Dann divergiert $(\frac{1}{a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$ bzw. $-infty$.

4 Vollständigkeit der reellen Zahlen

(4.1) **Satz**: $\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |a_n - a_m| < \varepsilon\ \forall m, n \geq N$

(4.2) **Definition**: Cauchy-Folge: Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (4.1)

(4.3) **Definition**: $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ Dann ist $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$ das abgeschlossene Intervall mit Endpunkten a, b.
$[a, b]$ hat die Länge/Durchmesser(Diameter): $\mathrm{diam}([a, b]) = b - a$

(4.4) **Definition**: Monotonie: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt:

(a) monoton wachsend falls $a_n \leq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}_0$

(b) streng monoton wachsend falls $a_n < a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}_0$

(c) monoton fallend falls $a_n \geq a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}_0$

(d) streng monoton fallend falls $a_n > a_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}_0$

(4.5) **Satz**: Für $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$ $n \in \mathbb{N}_0$ mit $a, x_0 \in \mathbb{R}^*_+$ gilt:

(a) $x_n > 0$ und $x_n \in \mathbb{Q}$, falls $a \in \mathbb{Q}$ und $x_0 \in \mathbb{Q}$

(b) $\frac{a}{x_n} \leq a \leq {x_n}^2, \quad n \in \mathbb{N}$

(c) $\frac{a}{x_n} \leq \frac{a}{x_{n+1}} \leq x_{n+1} \leq x_n$
d.h. $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und $(\frac{a}{x_n})_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
Für abgeschlossene Intervalle $I_n = [\frac{a}{x_n}, x_n]$ gilt: $I_{n+1} \subset I_n,\ n \in \mathbb{N}$

(d) $\mathrm{diam}(I_n) = x_n - \frac{a}{x_n}$ ist monoton fallend mit: $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(I_n) = 0$.

(4.6) **Definition**: Intervallschachtelung: Sei $I_0 \subset I_1 \subset \ldots \subset I_n \subset I_{n+1}$ eine absteigende Folge abgeschlossener Intervallein $\mathbb{R}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{diam}(I_n) = 0$.

(4.7) Axiom: Vollständigkeit von $\mathbb{R}$
Jede Cauchy-Folge konvergiert in $\mathbb{R}$

(4.8) **Satz**: Die Aussagen

(a) $\mathbb{R}$ ist vollständig (Axiom 4.7)

(b) $\forall (I_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \exists! x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{N} :\ x \in I_n$ (Intervallschachtellungsprinzip)

sind äquivalent.

(4.9) **Definition**: b-adischer Bruch:
$\pm \sum\limits_{n=-k}^{\infty} a_n \cdot b^{-n} \quad , b \in \mathbb{N},\ b \geq 2,\ k \in \mathbb{N}_0,\ 0 \geq a_n \geq b - 1$
oft geschrieben: $\pm \underbrace{a_{-k}a_{-k+1}\ldots a_0}_{Vorkomma}, \underbrace{a_1a_2a_3\ldots}_{Nachkomma}$

(4.10) **Satz**: Sei $b \in \mathbb{N},\ b \geq 2$ dann gilt:

(a) Jeder b-adische Bruch ist eine Cauchy-Folge, d.h. konvergiert gegen eine reelle Zahl.

(b) Jede reelle Zahl lässt sich in einem b-adischen Bruch entwickeln (iA. nicht eindeutig).

(4.11) **Definition**: Teilfolge: Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ Folge und $(n_0 < n_1 < \ldots)$ eine aufsteigende Folge natürlicher Zahlen, dann heißt $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}_0} = (a_{n_0}, a_{n_1}, \ldots)$ Teilfolge von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

(4.12) **Proposition**: Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit Limes $a \in \mathbb{R}$ dann konvergiert auch jede Teilfolge (sofern existent) von (a_n) gegen a,

(4.13) **Satz**: Bolzano-Weierstraß
Jede beschränkte Folge reeller Zahlen hat eine konvergente Teilfolge.

(4.14) **Satz**: Jede beschränkte, monotone Folge (wachsend oder fallend) reeller Zahlen konvergiert.

(4.15) **Definition**: Häufungspunkt Eine Zahl $a \in \mathbb{R}$ heit HP einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wenn es eine Teilfolge von (a_n) gibt, die gegen a konvergiert.

(4.16) Bemerkung: Die reellen Zahlen sind durch:

(a) Körperaxiome (1.1)-(1.9)
(b) Anordnungsaxiome (2)
(c) archimedisches Axiom (2)
(d) Vollständikeitsaxiom

eindeutig bestimmt.

(4.17) **Satz**: Cauchys-Konvergenzkriterium:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen, dann gilt:

(a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n, m \geq N :\ |\sum\limits_{k=m}^{n} a_k| < \varepsilon$

(b) Sei $a_n \geq 0 \forall n \in \mathbb{N} :\ \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert $\Longleftrightarrow S_n := \sum\limits_{k=0}^{n} a_k < K$ (Partialsumme beschränkt)

(4.18) **Beispiel**: harmonische Reihe:
Sei $a_n = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ Dann divergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

(4.19) **Satz**: Leibnitz-Kriterium für alternierende Reihen:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ($a_n \geq 0 \wedge \lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$).
Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$

(4.21) **Satz**: Majorantenkriterium:
Sei $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergente Reihe mit $b_n \geq 0$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $|a_n| \leq b_n \forall n \in \mathbb{N}$ Dann konvergiert $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ und sogar $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ heißt Majorante von $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

(4.22) **Definition**: absolute Konvergenz:
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent, falls $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n|$ (Reihe über den Betrag der Folge) konvergent.

(4.23) **Proposition**: zum Majorantenkriterium

(a) mit $b_n = |a_n|$ folgt die normale Konvergenz aus der absoluten.
(b) Ist $b_n \geq 0$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \geq b_n$ so divergiert auch $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$

(4.24) **Satz**: Quotienten-Kriterium:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ Reihe mit $\exists N \in \mathbb{N}: \ a_n \neq 0 \ \forall n \geq N$ dann:

$\exists q \in \mathbb{R}, \ 0 < q < 1: \ |\frac{a_{n+1}}{a_n}| < q \ \forall n > N \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergiert absolut

(4.26) **Definition**: Umordnung: Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ reihe und $s : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ bijektive Abbildung. Dann heißt $\sum_{n=0}^{\infty} a_{s(n)}$ Umordnung der Reihe.

(4.26) **Satz**: Umordnungssatz:

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergente Reihe, dann konvergiert auch jede Umordnung der Reihe gegen denselben Grenzwert.

(4.27) **Beispiel**: Eine Umordnung der alternierenden harmonische Reihe divergiert.

(4.28) **Satz**: Exponentialreihe: $\exp(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \ \forall x \in \mathbb{R}$ absolut konvergent.

(4.29) **Satz**: Cauchy-Produkt von Reihen:

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergente Reihen: Für $n \in \mathbb{N}_0$: $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot b_{n-k}$
(Achtung: Laufindexwechsel!)
Dann ist auch $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ absolut konvergent mit: $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$

(4.30) **Satz**: Funktionalgleichung für exp: $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y) \ \forall x, y \in \mathbb{R}$

(4.31) **Folgerung**: $\forall x \in \mathbb{R}$:

(a) $\exp(x) > 0$

(b) $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

(c) $\forall m \in \mathbb{Z}: \ \exp(m) = e^m$

4.1 Übungen

- Satz: Wurzelkriterium: $\exists q \in \mathbb{R}, \ 0 < q < 1 \ \forall n \in \mathbb{N}: \ \sqrt{n}|a_n| < q \Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent
- Satz: Sandwich-Theorem:
  $a_n \leq b_n \leq c_n \forall n \geq N: \ N \in \mathbb{N}$ Wenn a_n und c_n konvergent mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = a$ dann ist auch b_n konvergent mit $\lim_{n\to\infty} b_n = a$.

5 Teilmengen von $\mathbb{R}$

(5.1) **Definition**: Intervalle

(a) abgeschlossene: $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \quad [a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a \leq x \leq b\}$

(b) offene: $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \quad]a,b[:= \{x \in \mathbb{R} | a < x < b\}$

(c) halboffene: $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \quad [a,b[:= \{x \in \mathbb{R} | a \leq x < b\}, \quad]a,b] := \{x \in \mathbb{R} | a < x \leq b\}$

(d) uneigentliche: $a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \quad [a,\infty[:= \{x \in \mathbb{R} | x > a\}, \quad]-\infty,b] := \{x \in \mathbb{R} | x < b\}$

(e) $\mathbb{R}_+ := \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}, \quad \mathbb{R}^* :=\}x \in \mathbb{R} | x \neq 0\{, \quad \mathbb{R}_+^* := \mathbb{R}_+ \cup \mathbb{R}^*$

(f) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge d.h. eine Abbildung $a : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$ Dann heißt die Bildmenge $a(\mathbb{N}_0) \subset \mathbb{R}$ die uneigentliche Punktmenge zu (a_n).

(5.2) **Definition**: Abzählbarkeit: Eine nichtleere Menge A heißt abzählbar, wenn es eine surjektive Abbildung $s : \mathbb{N}_0 \to A$ gibt.
Die leere Menge sei abzählbar und eine nichtleere Menge heißt überabzählbar, wenn sie nicht abzählbar ist.

(5.4) **Definition**: abzählbar unendlich: Eine nichtendliche abzählbare Menge.

(5.5) **Satz**: Sei $M \subset \mathbb{N}_0,\ M \neq \emptyset$. Dann besitzt M ein kleinstes Element.

(5.6) **Satz**: Jede Teilmenge von $\mathbb{N}_0$ ist entweder endlich oder abzählbar unendlich.
Im letzteren Fall gibt es eine bijektive Abbildung: $t : M \to \mathbb{N}_0,\ t(m) := \{x \in M | x < m\}$

(5.7) **Satz**: Die Vereinigung abzählbar vieler abzählbarer Mengen $M_n, n \in \mathbb{N}_0$ ist wieder abzählbar (Diagonalmuster).

(5.8) **Folgerung**: Die Menge $\mathbb{Q}$ ist abzählbar unendlich.

(5.9) **Satz**: Die Menge $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.

(5.10) Folgerung: Die Menge der irrationalen Zahlen $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ ist überabzählbar.

(5.11) **Definition**: Sei $A \subset \mathbb{R}$ Teilmenge und $a \in \mathbb{R}$

(a) a heißt Berührpunkt von A, wenn in jeder ε-Umgebung von a, d.h. $U_\varepsilon(a) :=]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, mindestens ein Punkt von A liegt.

(b) a heißt Häufungspunkt von A, falls in jeder ε-Umgebung unendlich viele verschiedene Punkte von A liegen.

(5.14) **Definition**:

(a) Eine Teimenge $A \subset \mathbb{R}$ heißt nach oben bzw. unten beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt mit: $x \leq K$ bzw. $x \geq K\ \forall x \in A$

(b) A heißt beschränkt, wenn A nach oben und unten bschränkt ist.

(c) Eine Folge ist nach oben/unten beschränkt, wenn die zugrundeliegende Menge nach oben/unten beschränkt ist.

(d) K heißt kleinste obere Schranke von A falls:
- $K \in \mathbb{R}$ ist obere Schranke von A
- Ist K' weitere obere Schranke von A, so gilt: $K < K'$.

(e) K heißt Supremum/Infimum von A, falls K kleinste obere/größte untere Schranke von A ist.
Existiert diese, so ist $\sup(A)/\inf(A)$ eindeutig bestimmt.

(5.15) **Satz**: Jede nichtleere, nach oben/unten beschränkte Teilmenge $A \subset \mathbb{R}$ besitzt ein Supremum/Infimum.

(5.17) **Definition**:

(a) Sei $A \subset \mathbb{R}$ Falls $\sup(A)$ existiert und $\sup(A) \in A$ gilt, dann heißt $sup(A)$ Maximum $\max(A)$ von A. (Entsprechend für Minimum $\min(A)$)

(b) Falls $A \subset \mathbb{R}$ nach oben/unten nicht beschränkt, schreibt man: $\sup(A) = \infty$ / $\inf(A) = -\infty$.

(c) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge reeller Zahlen, dann sei $\lim\limits_{n\to\infty} \sup(a_n) := \lim\limits_{n\to\infty} \sup(\{a_k | k \geq n\})$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \inf(a_n) := \lim\limits_{n\to\infty} \sup(\{a_k | k \geq n\})$ Dies wird auuch als $\overline{\lim_n}$ bzw. ... bezeichnet.

(5.19) **Definition**:

(a) Eine Menge $A \subset \mathbb{R}$ heißt abgeschlossene Menge, wenn für jede konvergente Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in A$ gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \in A$.

(b) Eine Menge heißt offene Menge wenn $\mathbb{R} \setminus U$ abgeschlossen ist.

(c) $K \in \mathbb{R}$ heißt kompakte Menge, falls jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Elementen $a_n \in K$ eine konvergente Teilfolge mit Limes in K besitzt.

(5.20) **Satz**:

(a) $U \subset \mathbb{R}$ offen $\iff \forall a \in U \ \exists \varepsilon > 0 :]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset U$

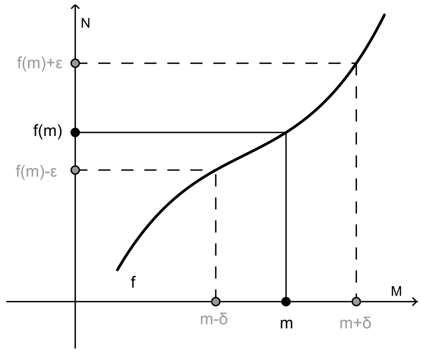
(b) $K \subset \mathbb{R}$ kompakt $\iff K$ ist beschränkt und abgeschlossen.

(c) Vereinigungen offener Mengen sind wieder offen und Durchschnitte abgeschlossene Mengen sind wieder abgeschlossen.

(d) Endliche Durchschnitte offener Mengen sind wieder offen und endliche Vereeinigungen abgschlossener Mengen sin wieder abgschlossen.

6 Stetige Funktionen

Seien $M, N \subset \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen.



- Eine Funktion $f : M \to N$ heißt stetig im Punkt $m \in M$, falls
  $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x : |x - m| < \delta : |f(x) - f(m)| < \varepsilon$
  Zu einer Umgebung $U_\varepsilon(f(m)) := \{x \in N \| x - f(m)| < \varepsilon\}$
  gibt es eine Umgebung $U_\delta(m) := \{x \in M \| x - m| < \delta\}$
  sodass $f(U_\delta(m)) \subset U_\varepsilon(f(m))$
- $f : M \to N$ heißt stetig in M, wenn f in jedem Punkt $m \in M$ stetig ist.

(6.1) **Beispiele**

(a) $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R} id(x) = x$ ist stetig auf $\mathbb{R}$. Wähle $\delta = \varepsilon = 0$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = c \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R}$ (konstant) ist stetig.

(c) Der Betrag $|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \cup \{0\}$ ist stetig, da für $m \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon > 0$ gilt mit $\delta = \varepsilon$: $|x - m| < \delta \Rightarrow ||x| - |m|| \leq |x - m| < \varepsilon = \delta$

(d) $\exp(x)$ ist stetig in $x = 0$
Abschätzung für $N \geq 0$: $\left| exp(x) = \left(1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^N}{N!}\right) \right|$

(6.2) **Satz:** Folgenkriterium für Stetigkeit
Sei $f : M \to N, M, N \subset \mathbb{R}$ nichtleere Teilmengen.
f stetig in $m \in M$
$\iff$ Für jede Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{R}}, x_n \in M$ mit Limes $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = m \in M$ gilt: $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = f(m)$

(6.3) **Satz:** Seien $f, g : M \to N \subset \mathbb{R}, M \subset \mathbb{R}, M \neq \emptyset$ stetig in M. Ferner seinen $c, d \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) $c \cdot f + d \cdot g$ und $f \cdot g$ sind wieder stetig in m

(b) Ist $g(m) \neq 0$, so ist auch $\frac{f}{g}$ in m stetig.

(c) Sei ferner $N' \subset \mathbb{R}$ mit $g : N \to N$
Dann ist die Komposition $g \circ f : M \to N'$ in m stetig, wo $(g \circ f)(x) = g(f(x)), x \in M$, wenn f in $m \in M$ stetig ist und g in $f(m) \in N$ stetig ist.

(d) $\min(f, g) : M \to \mathbb{R}$, wo $f, g : M \to N$ stetig in $m \in M$
$\max(f, g) : M \to \mathbb{R}$, wo $f, g : M \to N$ stetig in $m \in M$
ist, sind wieder in $m \in M$ stetig.
Hier ist $\min(f, g)(x) := \min(f(x), g(x))$ und $\max(f, g)(x) := \max(f(x), g(x))$

(6.4) Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x) := c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \ldots + c_1 + x + c_0$, wo $c_j \in \mathbb{R}$ und $c_n \neq 0$ heißen Polynomfunktionen. Es gilt:

(a) Polynomfunktionen sind auf $\mathbb{R}$ stetig.

(b) Sind P und Q Polynome und $Q(m) \neq 0$, so ist $x \to \frac{P(x)}{Q(x)}$ in $x = m$ stetig.

(6.5) **Satz:** Zwischenwertsatz
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $a < b, \quad a, b \in \mathbb{R}$. Ferner sei $c \in \mathbb{R}$ mit $f(a) < c < f(b)$.
Dann gibt es mindestens ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = c$

Graph einer Funktion f: $G(f) := \{(x, f(x)) | x \in M\} \subset M \times N$

(6.6) **Folgerung:** Jede Polynomfunktion $f(x) := c_n x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \ldots + c_1 + x + c_0$ mit ungeraden Grad $n \in \mathbb{N}$ und Koeffizienten c_j $\mathbb{R}$ besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{R}$.

(6.7) **Folgerung:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall (eigentlich oder uneigentlich) und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(I) \subset \mathbb{R}$ wieder ein Intervall.

(6.8) **Definition:** Folgenbeschränktheit
Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt beschränkt, wenn $f(M) \subseteq \mathbb{R}$ beschränkt ist.
d.h.: $\exists K \in \mathbb{R}_+ : |f(x)| \leq K \forall x \in M$

(6.9) **Satz:** angenommenes Supremum/Infimum
Sei $M \subset \mathbb{R}$ kompakt (z.B. $M = [a, b], -\infty < a < b < \infty$) und $F : M \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(M)$ kompakt und die Funktion f nimmt ihr Supremum b und Infimum a.
d.h. $\exists x_{max} \in M, x_{min} \in M : \quad f(x_{max}) = \sup(f(M)), f(x_{min}) = \inf(f(M))$

(6.10) **Satz:** Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und monoton wachsend/fallend.
Dann bildet f das Intervall I bijektiv auf das Intervall $J := f(I)$ ab und die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist ebenfalls stetig und streng monoton wachsend/fallend.

(6.11) **Satz:** Wurzeln und Logarithmen

(a) Sei $k \geq 2, k \in \mathbb{N}$ Dann ist $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^k$ streng monoton wachsend und stetig, also eine Bijektion von $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$
$\Longrightarrow$ Die Umkehrfunktion $f^{-1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \quad f^{-1}(x) = \sqrt[k]{x}$ ist stren monoton wachsend und stetig.

(b) Falls k ungerade ist, ist durch $f(x) = x^k$ eine strang monoton wachsende. stetige Bijektion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert und entsprechend ist die Umkehrfunktion $f^{-1}(x) = -\sqrt[k]{x}$ eine stetige streng monoton wachsende Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(c) Die Funktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ ist streng monoton wachsend und eine stetige Bijektion mit streng monoton wachsender, stetiger Umkehrfunktion: $\log : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \log(x)$
Es gilt $\forall x, y \in \mathbb{R}, x, y > 0 : \quad \log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$

(6.12) **Definition:** Allgemeine Potenzen
Für die Basis $a > 0$ definiere die Funktion $a^{\square} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $a^x := \exp(x \cdot \log(a))$

(6.13) **Satz:** Die Funktion $a^{\square} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig und es gilt:

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(b) $a^n, n \in \mathbb{Z}$ ist die in §1 definierte Potenz.

(c) $a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}, \quad p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}, q > 2$

(6.14) **Satz:** Potenzregeln Seien $ab, \in \mathbb{R}_+^*, x, y \in \mathbb{R}$

(a) $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$

(b) $(a^x)^y = a^{x \cdot y}$

(c) $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

(d) $\left(\frac{1}{a}\right)^x = a^{-x}$

(6.15) **Definition:** Sei $D \neq 0$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Eine Funktion heißt:

(a) gleichmäßig stetig in D, falls
$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in D, |x - y| < \delta : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

(b) Lipschitz-stetig in D, falls
$\exists L \in \mathbb{R} \quad \forall x, y \in D: \quad |f(x - f(y)| < L \cdot |x - y| \quad$ (L heißt Lipschitz-Konstante)

(6.16) **Beispiel/Bemerkung:**

(a) f Lipschitz-stetig mit $L \Rightarrow f$ gleichmäßig stetig (wähle $\delta = \frac{\varepsilon}{L}$)

(b) $x \mapsto |x|$ ist Lipschitz-stetig ($L = 1$)

(c) Polynome sind auf beschränkten Mengen D Lipschitz-stetig.

(d) $f:]0,1] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \frac{1}{x}$ ist stetig, aber nicht gleichmäßig stetig, denn:
$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right| = \frac{x-y}{xy} > K(x-y)$, falls $|xy| < \frac{1}{K}$

(6.17) **Satz:** Sei $D \subset \mathbb{R}$ kompakt (z.B. $D = [a,b], a < b, \ a, b \in \mathbb{R}$) Dann gilt:
$f: D \to \mathbb{R}$ stetig in $D \Rightarrow f$ ist gleichmäßig stetig.

(6.18) **Bemerkung:** In vielen Fällen ist es möglich eine stetige Funktion $f: M \to \mathbb{R}$ auf eine größere Menge $\overline{M} \supset M$ zu einer Funktion f^* festzusetzen, sodass auch $f^*: \overline{M} \to \mathbb{R}$ stetig ist.

(6.18) **Beispiel:** $f: \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}, \ f(x) = \frac{(e^x-1)^2}{x}$ wird mithilfe einer Folgenkonvergenz auf $f^*: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ erweitert. (Zusammenfassung)

(6.19) **Definition:** Sei $f: M \to \mathbb{R}, \ M \leq \emptyset, \ M \subset \mathbb{R}$ eine Funktion und m ein Häufungspunkt in M.

(a) Dann hat $f(x)$ in $x = m$ einen Grenzwert b, falls für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, \ x_n \in M \setminus \{m\}$
$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n) = m$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = b$ gilt.
Hier muss m nicht aus M sein. Man schreibt dafür:
$\lim\limits_{x\to m} = b$

(b) Falls $f(x)$ in $x = m$ einen Grenzwert b nur für Folgen $x_n \in M \setminus \{m\}$ mit $x_n < m, \ n \in \mathbb{N}$ (bzw. $x_n < m, \ n \in \mathbb{N}$) besitzt, so schreibt man:
$\lim\limits_{x\nearrow m} f(x) = b \qquad$ (bzw. $\lim\limits_{x\searrow m} f(x) = b$)

(6.20) **Proposition:** Sei $f: M \to \mathbb{R}, \ m \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt in M. Es gilt:

(a) $f^*: M \cup \{m\} \to \mathbb{R}$ mit $f^*(x) = \left\{ \begin{array}{c|l} f(x) & x \in M \setminus \{m\} \\ b & x = m \end{array} \right.$ ist genau dann stetig in $x = m$, falls f den Grenzwert b in m hat. f^* heißt dann stetige Fortsetzung von f in m.

(b) $\lim f(x) = b \quad \iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in M, 0 < |x - m| < \delta: \quad |f(x) - b| < \varepsilon$

(c) $\lim f(x)$ existiert
$\iff \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x, y \in M, 0 < |x - m| < \delta, 0 < |y - m| < \delta: \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$
$\lim f(x)$ existiert $\iff \underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \ \underset{x,y\in M}{\forall}, \begin{array}{c} 0 < |x-m| < \delta, \\ 0 < |y-m| < \delta \end{array} : \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

7 Differenzierbare Funktionen

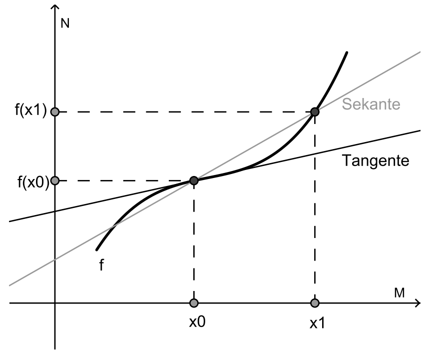
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $\{(x, f(x))| \, x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$ der Graph von f
Gleichung der Sekante: Gerade durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_1, f(x_1))$

$$y = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \cdot (x - x_0) \tag{7.1}$$

Sei x_0 fest gewählt und betrachte x_1 als variabel.
Als Funktion von $x_1 \in \mathbb{R} \setminus \{x_0\}$ ist die Sekantensteigung: $x_1 \to s(x_1) = \frac{f(x_1)-f(x_0)}{x_1-x_0}$
ist $s(x_1)$ in dem Punkt $x_1 = x_0$ stetig fortsetzbar, d.h. hat $s(x_1)$ einen Grenzwert $x_1 \to x_0$ so heißt die Gerade

$$y = f(x_0) + s(x - x_0) \tag{7.2}$$

Grenzgerade der Sekanten oder Tangente an den Graphen von f in $(x_0, f(x_0))$.



(7.1) **Definition:** Sei $f : M \to N, \; M, N \subset \mathbb{R}, \; M \neq \emptyset$. f heißt in $m \in M$ differenzierbar, falls

(a) m ist Häufungspunkt von M.

(b) $c := \lim\limits_{x\to} \left(\frac{f(x)-f(m)}{x-m}\right)$ existiert.
$s : M \setminus \{m\} \to \mathbb{R}, \; s(x) = \frac{f(x)-f(m)}{x-m}$ heißt Differenzenquotient
$c := \lim\limits_{x\to m} \left(\frac{f(x)-f(m)}{x-m}\right)$ heißt Differenzialquotient oder Ableitung von f am Punkt $m \in M$ und wird mit $f'(m)$ oder $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(m)$ bezeichnet.

(7.2) **Proposition:** alternative Definition

- $m \in M$ Häufungspunkt von M $f : M \to N \subset \mathbb{R}, \; M \subset \mathbb{R}$ differenzierbar. $\Longleftrightarrow$ der Differenzialquotient $s(x)$ aus (7.3) ist in $x = m$ eindeutig stetig fortsetzbar.
- $f : M \to N, \; m \in M$ besitzt eine sich "anschmiegende" lineare Approximation in einer Umgebung von m bzw. der Graph von f besitzt eine Tangente in $(m, f(m)) \in \mathbb{R}^2$ d.h.

$$\begin{gathered} f : M \to N \text{ in } m \in M \text{ differenzierbar} \\ \Leftrightarrow \in \mathbb{R} \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : \; |x - m| < \delta \; \forall x \in M \end{gathered} \tag{7.3}$$

$$|f(x) - (f(m) + (x - m))| < \varepsilon \cdot |x - m| \tag{7.4}$$

Hier ist $x \to f(m) + c \cdot (x - m)$ die lineare Tangentenfunktion.

(7.4) **Definition:** f heißt differenzierbar in M, wenn f in jedem Punkt von M differenzierbar ist.

(7.5) **Proposition:** Sei f differenzierbar in $m \in M$, dann ist f stetig in $m \in M$

(7.6) **Beispiel:**

(a) $id_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; id_{\mathbb{R}}(x) := x$ ist in $\mathbb{R}$ differenzierbar mit Ableitung 1. Dann $\lim\limits_{x\to m} \left(\frac{x-m}{x-m}\right) = 1$

(b) konstante Funktion $x \mapsto c$ ist differenzierbar mit Ableitung 0

(c) $|| : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto |x|$ ist in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar, also nicht in $x = 0$.
Für $x \neq 0:\ \frac{|x|-0}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

(d) $f(x) := |x|x^2$ ist differenzierbar in $\mathbb{R}$
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|x^2}{x} = \lim\limits_{x\to 0} |x|x = 0$

(7.7) **Satz:** Rechenregeln für Ableitungen
Seien $f, g : M \to N$ differenzierbar in $m \in M$

(a) Linearität: Seien $c, d \in \mathbb{R}$ Dann ist $cf + dg$ differenzierbar in m mit Ableitung $(cf + dg)'(m) = cf'(m) + dg'(m)$

(b) Produktregel: $(fg)'(m) = f'(m)g(m) + f(m)g'(m)$

(c) Quotientenregel: Ist $g(x) \neq 0 \forall x \in M$ mit $|x - m| < \delta$ So ist $\frac{f}{g}$ in $x = m$ differenzierbar und $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'(m)g(m)-f(m)g'(m)}{g(m)^2}$

(d) Kettenregel: Seien $f : M \to N, g : N \to N',\ M, N, N' \subset \mathbb{R}$ differenzierbar in $m \in M$ bzw. in $n := f(m) \in N$. Dann ist $f \circ g : M \to N'$ in $x = m$ differenzierbar und
$(f \circ g)'(m) = (g(f(m)))' = g'(f(m)) \cdot f'(m) = g'(n) \cdot f'(m)$

(7.8) **Korollar:**

(a) Die Ableitung der Polynomfunktion
$P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$ ist $P'(x) = \sum\limits_{k=1}^{n} k \cdot a_k x^{k-1}$

(b) Die Ableitung $f(x) := \exp(x)$ ist $f'(x) = \exp(x)$

(7.9) **Definition & Proposition**

(a) Sei $m \in M$ ein Häufungspunkt von $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt k-mal in $m \in M$ differenzierbar, wenn $K \in \mathbb{N}, K \geq 2$, wenn f in M differenzierbar ist und die Ableitung $f' : M \to \mathbb{R}$ ist $(k-1)$-mal differenzierbar in m.

(b) f heißt k-mal differenzierbar in $m \in M$, falls f k-mal differenzierbar ist in M und $x \mapsto f^{(k)}(x)$ stetig in $x = m$ ist.

(c) f heißt k-mal stetig differenzierbar in M, wenn f in jedem Punkt $m \in M$ k-mal stetig differenzierbar ist.

(7.10) **Satz:** Sei $f : I \to M$ auf dem offenen Intervall $I \subset \mathbb{R}$ differenzierbar und streng monoton (wachsend oder fallend). $J := f(I)$ ist nach nach Folgerung 6.7 ein offenes Intervall. Ist $f'(x) \neq 0 \forall x \in I$, so ist die Umkehrfunktion von f: $g : J \to I$ mit $f \circ g(y) = y$:
$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(g(y))}$

(7.11) **Korollar:**

(a) Die Funktion $g(y) := \sqrt[n]{y}, n \in \mathbb{N}$ ist differenzierbare Bijektion $\mathbb{R}_+\mathbb{R}_+$ mit Ableitung:
$g'(y) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{y})^{n-1}} = \frac{\sqrt[n]{y}}{n \cdot y} = \frac{1}{n} y^{\frac{1}{n}-1}$, denn $f(x) := x^n$ ist streng monoton wachsend und $f'(x) \neq 0, x > 0$

(b) $f((x) = \exp(x)$ streng monoton wachsend auf $\mathbb{R}$ $f'(x) = \exp(x) \neq 0$ auf $\mathbb{R}$
$\log : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ ist differenzierbare Bijektion mit Ableitung $(\log(y))' = \frac{1}{\exp(\log(y))} = \frac{1}{y}, y > 0$

(c) $f(x) = x^3$ ist streng monotone Bijektion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}, f'(0) = 0$ daher ist $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f^{-1}\right)(y) = \frac{1}{3} y^{\frac{1}{3}-1}, y \neq 0$, aber $f^{-1}(y)$ ist in $y = 0$ nicht differenzierbar.

(7.12) **Definition:** Extrema $m \in I \subset \mathbb{R}$, I Intervall, m nicht Endpunkt von I

(a) f hat ein lokales Maximum (bzw. Minimum) in m, falls es ein $\delta > 0$ gibt mit $f(m) \geq f(x)$ (bzw. $f(m) \leq f(x)$) für alle $x \in]m-\delta, m+\delta[\subset I$

(b) gilt $f(m) > f(x)$ (bzw. $f(m) < f(x)$) für alle $x \in]m-\delta, m+\delta[\subset I, x \neq m$ so heißt m strenges lokales Maximum (bzw. Minimum).

(c) f hat globales Maximum (bzw. Minimum) auf I in m, falls $f(m) \geq f(x)$ (bzw. $f(m) \leq f(x)$) für alle $x \in I$.

(d) entsprechend strenges globales Maximum/Minimum.
Maxima und Minima heißen Extremalpunkte.

(7.13) **Satz:** Sei $m \in I$ siehe Def. 7.11 ein lokales Extremum von $f : I \to \mathbb{R}$ und sei f differenzierbar in m. Dann ist $f'(m) = 0$.

(7.14) **Satz von Rolle:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ a < b$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar.
Sei $f(a) = f(b)$ dann gibt es ein $a < c < b$ mit $f'(c) = 0$

(7.15) **Satz:** Mittelwertsatz der Diffentialrechnung
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R},\ a < b$ stetig und in $]a,b[$ differenzierbar, dann gibt es ein $c \in]a,b[$, sodass $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ (mittlere Steigung).

(7.16) **Satz:** Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf $]a,b[$ differenzierbar

(a) Gilt $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) > 0, f'(x) \leq 0, f'(x) < 0$) für alle $x \in]a,b[$, so ist f auf $[a,b]$ monoton wachsend (bzw. streng monoton wachsend, monoton fallend, streng monoton fallend).

(b) Ist f monoton wachsend (bzw. fallend), so ist $f'(x) \geq 0$ (bzw. $f'(x) \leq 0$ für alle $x \in]a,b[$).

(c) Ist f in $m \in]a,b[$ zweimal stetig differenzerbar und $f'(m) = 0 \wedge f''(m) < 0$ (bzw. $f''(m) > 0$), so hat f in m ein strenges lokales Makimum (bzw. Minimum).

(d) Falls für $m \leq M,\ m, M \in \mathbb{R}$ gilt: $f'(x) \in [m, M] \forall x \in]a,b[$, so folgt: $m(y_2 - y_1) \leq f(x_1) - f(x_2) \leq M(y_2 - y_1) \forall x_1, x_2 \in [a,b],\ x_1 < x_2$

(7.17) **Bemerkung:** f streng monoton wachsend $\not\Rightarrow f'(x) > 0 \forall x \in]x_1, x_2[$
Beispiel: $f(x) = x^3$ in $x = 0$

(7.18) **Folgerung:** Falls $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und in]a,b[differenzierbar mit $f'(x) = 0, x \in]a,b[$, so ist f konstant.

(7.19) **Lemma:**

(a) Sei $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $\lim\limits_{x \searrow 0} f(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \searrow 0} f'(x) = c \in \mathbb{R}$, dann $\lim\limits_{x \searrow 0} \frac{f(x)}{x} = c$

(b) Sei $f :]a,\infty[\to \mathbb{R}$ differenzierbar, $\lim\limits_{x \to \infty} f'(x) = 0$, dann $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = c$

(7.20) **Satz:** Regeln von de l'Hospital
Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen auf $I =]a,b[,\ -\infty \leq a \leq b \leq \infty$. Sei $g(x) \neq 0 \forall x \in I$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f'(x)}{g'(x)} = c \in \mathbb{R}$ existiert, dann:

(a) Falls $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = \lim\limits_{x \nearrow b} f(x) = 0$, so ist $g(x) = 0 \forall x \in I$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

(b) Falls $\lim\limits_{x \nearrow b} g(x) = \pm\infty$, so ist $g(x) \neq 0, x \geq x_0, x_0 \in]a,b[$ und $\lim\limits_{x \nearrow b} \frac{f(x)}{g(x)} = c$

(c) Analoge Definition für $x \searrow a$.

(7.21) **Definition:** Die Hyperbelfunktionen

$$\cosh(x) := \tfrac{\exp(x)+\exp(-x)}{2} = \tfrac{e^x+e^{-x}}{2}$$
$$\sinh(x) := \tfrac{\exp(x)-\exp(-x)}{2} = \tfrac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$\tanh(x) := \tfrac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$
$$\coth(x) := \tfrac{\cosh(x)}{\sinh(x)}$$
$$\cosh(0) = 1,\ \sinh(x) = -\sinh(-x),\ \cosh(x) = \cosh(-x)$$

(7.22) **Bemerkung:** Mittels $\exp'(x) = exp(x) : \cosh'(x) = \sinh(x), \sinh'(x) = \cosh(x)$

8 Komplexe Zahlen und trigonometrische Funktionen

$$x^2 + 1 \geq 1 > 0 \forall x \in \mathbb{R} \tag{8.1}$$

d.h. $x^2 + 1 = 0$ ist nicht lösbar in $\mathbb{R}$ daher wird $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ als Lösung von (8.1) definiert.

$$z := a + \sqrt{-1}b = a + b\mathrm{i}, \;\; a, b \in \mathbb{R} \tag{8.2}$$

8.1 Vergleich mit Kapitel 1

$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}, \;\; (a, b) \mapsto a + b\mathrm{i}$ ist ein Isomorphismus von Körpern:

$$\begin{aligned}
1 \in \mathbb{C} &\cong (1, 0) \in \mathbb{R}^2 \\
\mathrm{i} \in \mathbb{C} &\cong (0, 1) \in \mathbb{R}^2 \\
a &= \mathrm{Re}(a + b\mathrm{i}) = \Re(a + b\mathrm{i}) \\
b &= \mathrm{Im}(a + b\mathrm{i}) = \Im(a + b\mathrm{i}) \\
\mathrm{conj}(a + b\mathrm{i}) &= \overline{a + b\mathrm{i}} := a - b\mathrm{i} && \text{konjugiert Komplexes} \\
|a + b\mathrm{i}| &= |z| = \sqrt{a^2 + b^2} && \text{Betrag}
\end{aligned}$$

Dann gilt für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$z = |z|\frac{z}{|z|} = |z|\epsilon_z, \;\; |\epsilon_z| = 1 \tag{8.3}$$

$$|z^2| = z \cdot \overline{z}, \;\; \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}, \;\; \overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}, \;\; \overline{\overline{z}} = z, \;\; \overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}, z \neq 0 \tag{8.4}$$

$$\text{Bemerkung: } \frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \cdot \overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}, \quad z \neq 0$$

Vergleiche Betragseigenschaft in Satz 2.4 und Definition 2.5

$$|z + w| \leq |z| + |w| \qquad (\Delta\text{-Ungleichung}) \tag{8.5}$$

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w| \qquad (\text{Multiplikativität}) \tag{8.6}$$

$\mathbb{C}$ ist ein bewerteter Körper mit: $z \mapsto |z| = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2}$

$$z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z), \quad z - \overline{z} = 2\mathrm{Im}(z)\mathrm{i} \tag{8.7}$$

$$|\mathrm{Re}(z)| \leq |z| \leq \mathrm{Im}(z) \tag{8.8}$$

Durch Ersetzen der Betragsfunktion können alle Definitionen für die Konvergenz von Folgen aus (3.) auf $\mathbb{C}$ erweitert werden.
Wichtiger Unterschied: $\mathbb{C}$ ist nicht angeordnet!
In den Definitionen ersetze offenes ε-Intervall $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[\subset \mathbb{R}$ um $a \in \mathbb{R}$ durch:
$\{x \in \mathbb{R} | \, |x - a| < \varepsilon\} \quad \to \quad \{z \in \mathbb{C} | \, |z - a| < \varepsilon\}, a \in \mathbb{C}$ Es gelten: Def.: 3.4, 3.6; Satz: 3.7, 3.10, 3.11, 3.12, 3.15; Bsp.: 3.17, 3.18

(8.1) **Definition:** $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy-Folge in $\mathbb{C} \iff \forall\varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n, m \geq N : |z_n - z_m| < \varepsilon$

(8.2) **Satz:**

(a) $\mathbb{C}$ ist bezüglich $|\;|$ vollständig.

(b) Jede beschränkte Folge in $\mathbb{C}$ besitzt mindestens einen Häufungspunkt.
$(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt $\;\Leftrightarrow \exists K > 0 \; \forall n \in \mathbb{N} : \;|z_n| \leq K$

Es gelten: Satz: 4.17, (4.18 NICHT!), 4.21(Majorante), 4.22 (absolute K.), 4.24, 4.26, 4.29
Definition 5.19: offene/abgeschlossene/kompakte Mengen gelten auch für $\mathbb{C}$. Ferner gilt Satz 5.20b)-d) Satz 5.20i) mit:$]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ ersetzt durch $K_\varepsilon(a)$

(8.3) **Definition:** Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist definiert durch die absolut konvergenze Reihe: $\exp(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}$ (Quotientenkriterium)

Die Konvergenzabschätzung 6.1d) gilt genauso: $\left|\exp(z) - \sum\limits_{j=0}^{N} \frac{z^j}{j!}\right| \leq 2\frac{|z|^{N+1}}{N+1}$ für $|z| < \frac{N+2}{2}$

Die Definitionen für Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen $f : M \to N,\ M, N \subset \mathbb{C}$ ist analog zu Def. 6.1. Sätze 6.2, 6.3 gelten analog. Def.: 6.8, 6.15; Satz: 6.9, 6.17 gelten in $\mathbb{C}$ auch.
Zwischenwertsatz (Satz 6.5) gilt nicht!

(8.5) **Definition:** Für $x \in \mathbb{R}$ sei:
$\cos(x) := \mathrm{Re}(\exp(\mathrm{i}x)) = \frac{\exp(\mathrm{i}x)+\exp(-\mathrm{i}x)}{2}$
$\sin(x) := \mathrm{Im}(\exp(\mathrm{i}x)) = \frac{\exp(\mathrm{i}x)-\exp(-\mathrm{i}x)}{2\mathrm{i}}$
Dann sind $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $x \mapsto \sin(x),\ x \mapsto \cos(x)$ also stetig.
Analog zu Satz 4.30 gilt für $z, w \in \mathbb{C}$:

$$\exp(z+w) = \exp(z) \cdot \exp(w) \tag{8.9}$$
$$\exp(z) \neq 0 \forall z \in \mathbb{C} \tag{8.10}$$

(8.6) **Satz:**

(a) $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist komplex differenzierbar
(b) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z}), z \in \mathbb{C}$

(8.6) **Definition:** Mit den Definitionen von sin und cos gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\exp(\mathrm{i}x) = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x) \qquad \text{Eulerische Formel} \tag{8.11}$$
$$\begin{aligned} |\exp(\mathrm{i}x)|^2 &= \exp(\mathrm{i}x)\overline{\exp(\mathrm{i}x)} \\ &= \exp(\mathrm{i}x)\exp(-\mathrm{i}x) \qquad \text{nach Satz 8.5} \quad (8.12) \\ &= \exp(\mathrm{i}x - \mathrm{i}x) = \exp(0) = 1 \end{aligned}$$
$$\mathrm{i}^n = \left\{ \begin{array}{c|l} 1 & n = 4m \\ \mathrm{i} & n = 4m+1 \\ -1 & n = 4m+2 \\ -\mathrm{i} & n = 4m+3 \end{array} \right. , m \in \mathbb{N}_0 \tag{8.13}$$

(8.7) **Satz:** $\forall x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

(a) $\cos(-x) = \cos(x),\ \sin(-x) = -\sin(x)$
(b) $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$
(c) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
(d) $\cos(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
$\sin(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$

(e) $x \mapsto \sin(x),\ x \mapsto \cos(x)$ sind differenzierbar in $\mathbb{R}$ mit:
$\sin'(x) = cos(x),\ \cos'(x) = -\sin(x)$

(f) Bemerkung: Hierraus folgt: $\sin(0) = 0,\ \cos(0) = 1$

(8.8) **Satz:**

(a) $x \mapsto \cos(x)$ besitzt in $[0, 2]$ genau eine Nullstelle τ mit $\pi = 2\tau$

(b) $\forall x \in \mathbb{R}$ gilt:
$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos(x), \quad \sin(x + \pi) = -\sin(x)$
$\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin(x), \quad \cos(x + \pi) = -\cos(x)\ \sin(x + 2\pi) = \sin(x)\ \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$
2π heißt Periode von sin / cos. Sie sind 2π-periodisch $(\exp(\mathrm{i}(x + 2\pi))) = \exp(\mathrm{i}x))$

(8.9) **Korollar:** $\pi\mathbb{Z} := \{\, x \in \mathbb{R} | \sin(x) = 0\} = \{\, k\pi | \, k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z} := \{\, x \in \mathbb{R} | \cos(x) = 0\} = \left\{\, k\pi + \frac{\pi}{2} \middle| \, k \in \mathbb{Z}\right\}$

(8.10) **Definition:** $\tan : \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + \pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \tan(x) := \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
$\cot : \mathbb{R} \setminus \{\pi\mathbb{Z}\} \to \mathbb{R},\ \tan(x) := \frac{\cos(x)}{\sin(x)}$

(8.11) Die Funktionen

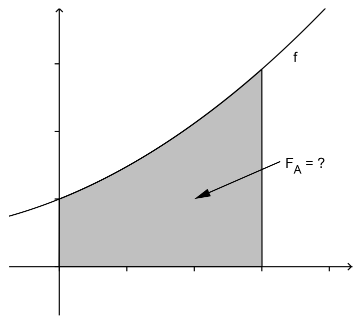
- $[0, \pi] \to [-1, 1], \quad x \to \cos(x)$
- $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1], \quad x \to \sin(x)$
- $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}, \quad x \to \tan(x)$
- $[0, \pi] \to \mathbb{R}, \quad x \to \cot(x)$

sind bijektiv. Ihre Umkehrfunktionen heißen arccos, arcsin, arctan, arccot (Arcus-Funktionen)

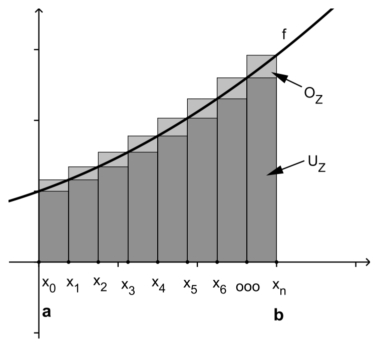
9 Das Riemann-Integral

Problem:
Die Fläche F_A unter einer Funktion f bestimmen.
Ist das für jede Funktion möglich?

Antwort:
Ja, zumindest, wenn f stetig ist.
Das Riemannintegral, benannt nach Bernhard Riemann (1826-1866)



(9.1) **Definition:** Zerlegung, feinere Zerlegung, Zerlegungsintervall, gemeinsame Verfeinerung



Sei $a < b,\ a, b \in \mathbb{R} \quad I = [a, b]$ kompaktes Intervall

- Eine Zerlegung von I ist ein $(n + 1)$-Tupel:
  $Z = (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n),\ n \in \mathbb{N},\ a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$
- Eine weitere Zerlegung $Z' = (x'_0, x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ heißt feiner als Z, falls gilt:
  $\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq \{x'_0, \ldots, x'_n\}.$
  Wir schreiben $Z' \geq Z$ (partielle Ordnung).
- Zur Zerlegung Z gehören die Zerlegungsintervalle
  $I_k = [x_{k-1}, x_k], k = 1, \ldots, n.$
  Dann gilt für die Zerlegungsintervalle I_j von $Z' \geq Z$:
  Zu jedem j gibt es ein $k(j)$ mit $I_j \subset I_{k(j)}$.
- Zu Zerlegungen Z, Z' von I gibt es stets eine feinere Zerlegung Z'' mit $Z'' \geq Z' \wedge Z'' \geq Z$

(9.2) **Definition:** Riemannsche Obersumme/Untersumme
Sei I ein Intervall wie in Def 9.1 und $f : I \to \mathbb{R}$ beschränkt und Z eine Zerlegung von I. Dann heißen:
$O_Z(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} ((x_i - x_{i-1}) \sup (\{ f(x) | \, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}))$
$U_Z(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} ((x_i - x_{i-1}) \inf (\{ f(x) | \, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}))$
Riemannsche Obersumme bzw. Untersumme bezüglich der Zerlegung Z.
Man approximiert f also von oben bzw. unten durch stückweise konstante Funktionen auf I_j

(9.2) **Bezeichnungen:**

- $|I_k| := x_k - x_{k-1}$ (Länge des Intervalls)
- $\sup\limits_A f := \sup (\{ f(x) | \, x \in A\})$
- $\inf\limits_A f := \inf (\{ f(x) | \, x \in A\})$
- $O_Z(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} |I_k| \sup\limits_{I_k} f$
- $U_Z(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} |I_k| \inf\limits_{I_k} f$

(9.3) **Satz:** Seien $I = [a, b]$ wie oben, $f, g : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, Z, Z' Zerlegungen von I:

(a) $U_Z(f) + U_Z(g) \leq U_Z(f+g) \leq O_Z(f+g) \leq O_Z(f) + O_Z(g)$

(b) Für $\lambda > 0$: $U_Z(\lambda f) = \lambda U_Z(f)$; $O_Z(\lambda f) = \lambda O_Z(f)$

(c) Falls $|f(x)| \leq c \forall x \in I, c \in \mathbb{R}$:
$|U_Z(f)| \leq c|I| = c(b-a)$; $|O_Z(f)| \leq c|I| = c(b-a)$

(d) Aus $Z' \geq Z$ folgt $U_Z(f) \leq U_{Z'}(f) \leq O_{Z'}(f) \leq O_Z(f)$. D.h. Untersummen sind monoton wachsend in Z und Obersummen sind monoton fallend in Z.

(e) Für beliebige Zerlegungen Z, Z' gilt: $U_(f) \leq O_{Z'}(f)$

(9.4) **Definition:**Riemann-Ober-/Unterintegral, Riemannintegral
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt, $I = [a, b]$. Dann heißt:
$U(f) := \sup \{U_Z(f)| \, Z \text{ Zerlegung von } I\}$
$O(f) := \inf \{U_Z(f)| \, Z \text{ Zerlegung von } I\}$
das Riemann-Unter-Oberintegral von f, es gilt: $U(f) \leq O(f)$
Falls $O(f) = U(f)$, so heißt dieser Wert das Riemannintegral von f und man schreibt: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = O(f) = U(f)$ und sagt: f ist R(iemann)-integrierbar.

(9.4) **Schreibweise:** Ist f R-integriebar und $a < b$ setze:

- $\int\limits_b^a f(x)\mathrm{d}x = -\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x, \ \int\limits_a^a f(x)\mathrm{d}x = 0$
- $U_a^b(f) = \sup(\{U_Z(f)| \, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\})$
- $O_a^b(f) = \inf(\{U_Z(f)| \, Z \text{ Zerlegung von } [a, b]\})$

(9.6) **Satz:** Seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ beschränkt, $\lambda \geq 0$ Dann:

(a) $U_a^b(f) + U_a^b(g) \leq U_a^b(f+g) \leq O_a^b(f) + O_a^b(g)$

(b) $U_a^b(\lambda f) = \lambda U_a^b(f), \quad O_a^b(\lambda f) = \lambda O_a^b(f)$

(c) $U_a^b(-f) = -O_a^b(f)$

(d) Für $a < c < b$: $U_a^c(f) + U_c^b(f) = U_a^b(f), \ O_a^c(f) + O_c^b(f) = O_a^b(f)$

(9.7) **Satz:** Die R-integrierbaren Funktionen bilden einen <u>reellen Vektorraum</u> $\mathcal{R}$ und $f \mapsto \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x$ ist eine liniare Abbildung $\mathcal{R} \to \mathbb{R}$ mit: $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\mathrm{d}x, \ a \leq c \leq b$

(9.8) **Satz:** $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei beschränkt, $a \leq c \leq b$:
f ist auf $[a, b]$ R-integrierbar $\iff f_{|[a,c]}$ R-integierbar und $f_{|[c,b]}$ R-integierbar

(9.9) **Satz:** <u>Integrabilitätskriterium</u>
$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt.
f R-integrierbar $\iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists Z_{[a,b]} : \ O_Z(f) - U_Z(f) < \varepsilon$

(9.10) **Satz:** Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ R-integierbar

(a) Dann sind auch $|f|$, $\max(f, g)$, $\min(f, g)$, $f \cdot g$, $|f|^p, 1 \leq p \leq \infty$ R-inegrierbar

(b) Falls $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$, so ist $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x \leq \int\limits_a^b g(x)\mathrm{d}x$, $\left|\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \leq \int\limits_a^b |g(x)|\mathrm{d}x$

(c) f stetig auf $[a, b] \Rightarrow$ f ist R-integrierbar

10 Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung

(10.1) **Satz:** Mittelwertsatz/Zwischenwertsatz der Integralrechnung

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es ein $c \in [a,b]$ mit $\int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x = (b-a) \cdot f(c)$

(10.2) **Satz:** Hauptsatz
Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall $I = [a,b],\ a < b$ und $F : I \to \mathbb{R}$ stetig.
Die Funktion $F(x) = \int\limits_a^b f(x)\mathrm{d}x, x \in I, \quad F : I \to \mathbb{R}$ ist $\forall x \in I$ differenzierbar mit: $F'(x) = f(x)$.

(10.2) **Bemerkung:** Satz 10.2 liefert: Die Abbildung $f \mapsto \int\limits_{\circ}^{\circ} f = F$ ist eine lineare Abbildung vom vektorraum der k-mal differenzierbaren Funktionen $\varrho^k(I)$ in den Vektorraum der $(k+1)$-mal differenzierbaren Funktionen $\varrho^{k+1}(I)$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \circ \int\limits_{\circ}^{\circ} = id : \varrho^k(I) \to \varrho^k(I)$

(10.3) **Definition:** Stammfunktion, unbestimmtes Integral
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von f, falls F auf $[a,b]$ differenzierbar und $F' = f$ ist.
$F : [a,b]$ heißt unbestimmtes Intagral von f, falls f auf jedem teilintervall $[x_o, x] \subset I$ R-integrierbar ist und $F(x) = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\mathrm{d}x = F(x) - F(x_0)$ gilt. Schreibe dafür: $\int f(x)\mathrm{d}x$

(10.4) **Satz:**

(a) Seien $F; G : [a,b] \to \mathbb{R}$ Stammfunktionen zu $f : [a,b]\mathbb{R}$, wobei f stetig. Dann gilt: $F(x) = G(x) + c \forall x \in [a,b]$

(b) Sei $f \in \varrho^1([a,b])$. Dann gilt $\forall x_0, x \in [a,b], x_< x : \int\limits_{x_0}^{x} f'(t)\mathrm{d}t = f(x) - f(x_0)$

(c) Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:
F Stammfunktion zu $f \iff F$ uneigentliches Integral zu f

(10.4) **Beispiel:** Betrachte die unstetige Funktion $f(x) = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{array} \right.$

Diese Funktion ist R-integrierbar auf jedem kompakten Intervall $F(x) = \left\{ \begin{array}{c|c} 0 & x \leq 0 \\ x & x > 0 \end{array} \right.$
F ist jedoch keine Stammfunktion zu f, da F in $x = 0$ nicht differenzierbar ist.

(10.5) **Beispiel:**

$\mathbf{f(x)}$	**Stammfunktion**
$(x-a)^n$	$\frac{1}{1-n}(x-a)^{n+1},\ n \in \mathbb{Z} \setminus \{1\}$
$\exp(x)$	$\exp(x)$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$
$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\frac{1}{x-a}$	$\log(x-a),\ x \neq a$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x),\ x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$	$\operatorname{arsinh}(x),\ x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x),\ x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{1-x^2}$	$\left\{ \begin{array}{c\|c} \operatorname{artanh}(x) & \|x\| < 1 \\ \operatorname{arcot}(x) & \|x\| > 1 \end{array} \right.$

(10.6) **Satz:** Partielle Integration, Substitutionsregel

(a) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $f, g \in \varrho^1(I) \forall a, b \in I$.
$\int\limits_a^b f(x) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = (f \cdot g)|_a^b - \int\limits_a^b f'(x) \cdot g(x)\mathrm{d}x, \quad h|_a^b = h(b) - h(a)$
Für unbestimmtes Integral: $\int fg' = fg - \int f'g$

(b) Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ Intervall $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, $g : [c, d] \to I,\ c, d \in \mathbb{R},\ c < d$ stetig differenzierbar.
Dann gilt:
$\int\limits_c^d f(g(x)) \cdot g'(x)\mathrm{d}x = \int\limits_{g(c)}^{g(d)} f(y)\mathrm{d}y$