LORE LORENTZ SCHULE

Gegenüberstellung lineares Wachstum – exponentielles Wachstum

<table>
<tr><th>lineares Wachstum</th><th>exponentielles Wachstum</th></tr>
<tr><td>Eine Größe wächst in derselben Zeitspanne immer um denselben Wert m (d.h., derselbe Wert wird addiert).</td><td>Eine Größe wächst in derselben Zeitspanne immer um denselben Faktor a.</td></tr>
<tr><td>Die Steigung ist überall gleich.</td><td>Die Steigung ist erst ganz schwach, dann immer stärker und übersteigt schließlich das menschliche Vorstellungsvermögen.
Für jede noch so stark steigende ganzrationale Funktion gilt: es gibt immer irgendeine Stelle, ab der die Exponentialfunktion noch stärker steigt und sich nicht mehr einholen lässt.</td></tr>
<tr><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>b</td><td>m+b</td><td>2m+b</td><td>3m+b</td></tr>
</table>
+m +m +m
Dabei bezeichnet b den y-Achsenabschnitt und m die Steigung.</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>0</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td></tr>
<tr><td>$f(x)$</td><td>c</td><td>c·a</td><td>$a \cdot b^{2}$</td><td>$a \cdot b^{3}$</td></tr>
</table>
·a ·a ·a
Dabei bezeichnet a den Anfangswert (und y-Achsenabschnitt), c die Basis der Exponentialfunktion (also den Vervielfachungsfaktor in einer „Zeiteinheit“).</td></tr>
<tr><td>Differenzengleichheit: f (x+1) – f (x) = m</td><td>Quotientengleichheit: $\frac{f(x+1)}{f(x)} = a$</td></tr>
</table>

Anwendungsbeispiel 1: Zinseszinsrechnung

Aufgabe: Ein Kapital von 2000 € wird zu 4,5% verzinst. Wie hoch ist das Guthaben nach 8 Jahren?
Bezeichnung: K(x) : Kapital nach x Jahren; Funktionsgleichung: $K(x) = 2000 \cdot 1{,}045^{x}$.
Gesucht: K(8)
$K(8) = 2000 \cdot 1{,}045^{8} = \underline{\underline{2844{,}20}}$.
A.: Nach 8 Jahren ist das Guthaben auf 2844,20 € angewachsen.

Beispiel: Berechnung des Restbuchwerts bei (geometrisch degressiver Abschreibung: hier

Anwendungsbeispiel 2: radioaktiver Zerfall

Radioaktives Iridium-195 zerfällt so schnellt, dass bereits nach einer Stunde ca. 24,21% zerfallen sind. Wenn in einem Labor 3 Mengeneinheiten (ME) Iridium-195 hergestellt werden, welche Menge ist dann nach 2,5 Stunden noch vorhanden?
Bezeichnung: I(x): Menge an Iridium-195 nach x Stunden.
Funktionsgleichung: $I(x) = 3 \cdot 0{,}7579^{x}$ (Da von 100% nach 1 Stunde 24,21 % zerfallen sind, bleiben 100%-24,21% = 75,79% = 75,79/100 = 0,7579 übrig.)
Gesucht: I(2,5)
$I(2{,}5) = 3 \cdot 0{,}7579^{2{,}5} \approx \underline{\underline{1{,}5}}$.
A: Nach 2,5 Stunden sind noch 1,5 ME Iridium-195 vorhanden. (Bemerkung: Das ist genau die Hälfte der ursprünglichen Menge. Die Halbwertszeit von Iridium-195 beträgt demnach 2,5 Stunden.)

Berechnung der Basis a:

Anwendungsbeispiel 3:

Eine Bakterienkultur von anfangs 2800 Bakterien vermehrt bei optimalen Wachstumsbedingungen innerhalb eines Tages auf 716800. Stellen Sie das entsprechende Wachstumsgesetz (also die Funktionsgleichung) auf, wobei B(x) die Bakterienanzahl nach x Stunden ist.
$B(x) = 2800\, a^{x}$.
Gesucht: a.
$B(12) = 2800\, a^{24} = 716800 \mid : 2800$
$\Leftrightarrow a^{24} = 256 \mid \sqrt[24]{\ }$ (keine negative Lösung, da a >0 sein muss.)
$\Leftrightarrow a \approx 1{,}2599$
$B(x) = \underline{\underline{2800 \cdot 1{,}2599^{x}}}$.

Beispiel: Berechnung des Zinssatzes: hier