Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf
Mathematisches Institut
Lehrstuhl für Algebra und Zahlentheorie
Prof. Dr. Oleg Bogopolski

23.07.2011

Klausur zur Vorlesung
Lineare Algebra I

Bearbeitungszeit: 120 min

Bitte in <u>Druckschrift</u> ausfüllen!

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnr.: ____________________

Studienfach: ____________________

Fachsemester: ____________________

Mit meiner Unterschrift melde ich mich zur oben genannten Klausur an und bestätige, dass ich mich momentan nicht in einem Urlaubssemester befinde und damit berechtigt bin eine Prüfung abzulegen.

....
(Unterschrift)

Hinweis: Wie üblich müssen Sie bei den Aufgaben 2-7 den Lösungsweg angeben.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$
Punkte								

Note: ____

Aufgabe 1 [18 Punkte]

Die Aufgabenteile a)-h) in Aufgabe 1 müssen nicht begründet werden.

Bei den Multiple-Choice Aufgaben a)-e) gibt jede richtige Antwort zwei Punkte, jede nicht beantwortete 0 Punkte und für jede falsche Antwort werden zwei Punkte abgezogen. Falls Sie im Teil a)-e) insgesamt eine negative Anzahl an Punkten erreichen, wird dieser Teil mit 0 Punkten gewertet.

		Ja	Nein
a)	Sind U und V Untervektorräume eines Vektorraums W, so ist $U \cup V$ auch ein Untervektorraum von W.	☐	☒
b)	Die Vektoren $v_1, \cdots, v_n \in \mathbb{R}^n$ heißen linear unabhängig, wenn gilt: Sind $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$, so folgt $\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0$.	☐	☒
c)	Eine lineare Abbildung φ ist genau dann bijektiv, wenn $\ker(\varphi) = 0$ ist.	☐	☒
d)	Es gilt $\det(A \cdot B) = \det(B \cdot A)$ für alle Matrizen $A, B \in M(n, n, \mathbb{R})$.	☒	☐
e)	Die Nullmatrix ist diagonalisierbar.	☒	☐

f) Geben Sie alle Untergruppen der Gruppe $(\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$ an. [2 Punkte]

Lösung

$$\{0\},\ \{0,5,10\},\ \{0,3,6,9,12\},\ (\mathbb{Z}_{15}, +_{15})$$

g) Stellen Sie die Permutation $\sigma = (3\,4\,5) \circ (3\,7\,8\,1) \circ (9\,2\,8\,3) \in S_9$ als Produkt von unabhängigen Zyklen dar und berechnen Sie $\mathrm{Sign}(\sigma)$ und $\mathrm{Ord}(\sigma)$. [3 Punkte]

Lösung

- $\sigma = (1\,4\,5\,3\,9\,2) \circ (7\,8)$
- $\mathrm{Sign}(\sigma) = (-1)^5(-1) = 1$
- $\mathrm{Ord}(\sigma) = 6$

h) Sei $\varphi : (\mathbb{Z}_6, +_6) \to (\mathbb{Z}_9, +_9)$ ein Gruppenhomomorphismus definiert durch $\varphi(1) = 3$. Berechnen Sie $\ker(\varphi)$ und $\mathrm{im}(\varphi)$. [3 Punkte]

Lösung

$$\ker(\varphi) = \{0, 3\}, \quad \mathrm{im}(\varphi) = \{0, 3, 6\}$$

Aufgabe 2 [14 Punkte]

a) Zeigen Sie mit dem Euklidischen Algorithmus, dass $\mathrm{ggT}(50, 13) = 1$ ist.

[4 Punkte]

b) Finden Sie $a, b \in \mathbb{Z}$, so dass $1 = 50a + 13b$ gilt.

[5 Punkte]

c) Finden Sie ein Element $b \in \mathbb{Z}_{50}^*$, so dass $13b = 1$ in $\mathbb{Z}_{50}^*$ gilt.

[3 Punkte]

d) Finden Sie ein Element $b \in \mathbb{Z}_{50}^*$, so dass $13b = 3$ in $\mathbb{Z}_{50}^*$ gilt.

[2 Punkte]

Lösung

---

a) Mit dem Euklidischen Algorithmus erhalten wir

$$\begin{array}{rcl} 50 & = & 3 \cdot 13 + 11 \\ 13 & = & 11 + 2 \\ 11 & = & 5 \cdot 2 + 1 \\ 2 & = & 2 \cdot 1 + 0 \end{array}$$

Also ist $\mathrm{ggT}(50, 13) = 1$.

b) Aus a) folgt

$$\begin{array}{rcl} 1 & = & 11 - 5 \cdot 2 = (50 - 3 \cdot 13) - 5(13 - 11) = 50 - 8 \cdot 13 + 5 \cdot 11 = \\ & = & 50 - 8 \cdot 13 + 5(50 - 3 \cdot 13) = 6 \cdot 50 - 23 \cdot 13 \end{array}$$

Also $a = 6$ und $b = -23$.

c) Aus dem Augabenteil b) haben wir die Gleichung $50 \cdot 6 + 13 \cdot (-23) = 1$ in $\mathbb{Z}$. Diese gilt auch in $\mathbb{Z}_{50}^*$. Da $6 \cdot 50 = 0$ in $\mathbb{Z}_{50}^*$ haben wir $13 \cdot (-23) = 1$. Also $b = -23$, reduziert modulo 50 ist $b = 27$.

d) $13 \cdot 27 = 1$ ist äquivalent zu $13 \cdot 27 \cdot 3 = 1 \cdot 3$. Also $b = 27 \cdot 3 = 81$, reduziert modulo 50 ergibt es $b = 31$.

Aufgabe 3 [12 Punkte]

a) Bestimmen Sie alle Lösungen des inhomogenen reellen Gleichungssystems:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & -6x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

[7 Punkte]

b) Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem des reellen Gleichungssystems:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & -6x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

[5 Punkte]

Lösung

Das lineare Gleichungssystem

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & -6x_4 & = & 5 \end{array}\right.$$

mit der Addition des (-2)–fachen der 2. Zeile zu der 3. Zeile ist äquivalent zu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} & & & & 3x_3 & + & 6x_4 & = & -3 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & -3x_3 & & -6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

und weiter mit der Addition der 3. Zeile zu der 1. Zeile ist äquivalent zu

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 1 \\ & & & & -3x_3 & & -6x_4 & = & 3 \end{array}\right.$$

Zuerst lösen wir das homogene Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & & & = & 0 \\ & & & & -3x_3 & & -6x_4 & = & 0 \end{array}\right.$$

Für die Basisvektoren des homogenen Gleichungssystems setzen wir

1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -3x_3 - 6 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_3 = 0 \\ x_1 + 1 + 2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_1 = -1 \end{array}$

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} -3x_3 - 6 \cdot 1 = 0 \Rightarrow x_3 = -2 \\ x_1 + 0 + 2 \cdot (-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 4 \end{array}$

b) Das homogene Gleichungssystem hat eine Basis

$$\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

a) Wir suchen eine spezielle Lösung. Für diese setzen wir $x_2 = 0$ und $x_4 = 0$. Also ist $-3x_3 - 6 \cdot 0 = 3 \Rightarrow x_3 = -1$ und $x_1 + 0 + 2(-1) = 1 \Rightarrow x_1 = 3$. Alle Lösungen des inhomogenen Gleichungssystems sind:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

Eine andere Schreibweise:

$$= \left\{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\{\begin{pmatrix} 3 - \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ \lambda_1 \\ -1 - 2\lambda_2 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \mid \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\right\}$$

Aufgabe 4 [14 Punkte]

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

a) Berechnen Sie die Eigenwerte von A. [4 Punkte]

b) Berechnen Sie zu jedem Eigenwert λ den zugehörigen Eigenraum $\mathrm{Eig}(A, \lambda)$. [6 Punkte]

c) Entscheiden Sie, ob die Matrix A diagonalisierbar ist und geben Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix T und eine Diagonalmatrix D an, so dass

$$T^{-1}AT = D.$$

[4 Punkte]

Lösung

---

a)

$$\begin{aligned} \chi_A(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = (1-\lambda)(\lambda^2 - 1) \\ &= (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1) = -(\lambda-1)^2(\lambda+1) \end{aligned}$$

$\chi_A(\lambda) = 0$ gilt genau dann wenn $\lambda \in \{-1, 1\}$, also die Matrix A hat Eigenwerte 1 und -1.

b)
- Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = 1$.

$$\begin{aligned} \mathrm{Eig}(A,1) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A - E_3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \end{aligned}$$

Das lineare homogene Gleichungssystem.

$$\left\{ \begin{array}{rrl} -x_1 & +x_3 & = 0 \\ x_1 & -x_3 & = 0 \end{array} \right. \text{ ist äquivalent zu } x_1 - x_3 = 0$$

mit führenden Unbekannten x_1 und Parameterunbekannten x_2, x_3. Für die Lösung setzen wir

1) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - 0 = 0 \Rightarrow x_1 = 0$ und

2) $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

Also ist

$$\mathrm{Eig}(A,1) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

- Eigenraum zum Eigenwert $\lambda = -1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Eig}(A,-1) &= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid (A+E_3)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \\
&= \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}
\end{aligned}$$

Das lineare homogene Gleichungssystem.

$$\left\{\begin{array}{cccl} x_1 & & +x_3 & = 0 \\ & 2x_2 & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & = 0 \end{array}\right. \text{ ist äquivalent zu } \left\{\begin{array}{rl} x_1 + x_3 & = 0 \\ x_2 & = 0 \end{array}\right.$$

mit führenden Unbekannten x_1, x_2 und Parameterunbekannten x_3. Für die Lösung setzen wir $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \; x_2 = 0 \Rightarrow x_1 + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = -1$ Also ist

$$\mathrm{Eig}(A,-1) = \mathcal{L}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

c) Die Matrix A ist diagonalisierbar, weil $\dim \mathrm{Eig}(A,1) + \dim \mathrm{Eig}(A,-1) = 2 + 1 = 3$. Es gilt für

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$T^{-1}AT = D$$

Aufgabe 5 [14 Punkte]

Seien

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und

$$V = \mathcal{L}(v_1, v_2),\ W = \mathcal{L}(w_1, w_2)$$

zwei Untervektorräume von $\mathbb{R}^4$.

a) Berechnen Sie eine Basis von $V \cap W$. [8 Punkte]

b) Berechnen Sie eine Basis von $V + W$. [6 Punkte]

Lösung

(a)

$$\begin{aligned} V \cap W &= \{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und es existieren } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \\ &\quad \text{so dass } \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2\}. \end{aligned}$$

Die Gleichung $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2$ ist äquivalent zu

$$\left\{ \begin{array}{lllll} \alpha_1 & & -\beta_1 & & = 0 \\ & \alpha_2 & +\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ \alpha_1 & +\alpha_2 & & +\beta_2 & = 0 \\ \alpha_1 & +2\alpha_2 & +\beta_1 & & = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{lllll} \alpha_1 & & -\beta_1 & & = 0 \\ & \alpha_2 & +\beta_1 & +\beta_2 & = 0 \\ & & & -\beta_2 & = 0 \end{array} \right.$$

Es folgt, dass $\beta_2 = 0$ und β_1 kann beliebig gewählt werden. Also ist

$$\begin{aligned} V \cap W &= \{\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 \mid \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \text{ und } \beta_2 = 0\} \\ &= \{\beta_1 w_1 \mid \beta_1 \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{ \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \mid \beta_1 \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Also ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $V \cap W$.

(b) $V + W = \mathcal{L}(v_1, v_2, w_1, w_2)$. Wir schreiben die Erzeugenden als Zeilen einer Matrix, bringen diese auf Zeilenstufenform. Dann sind die nicttrivialen Zeilen linear unabhängig und erzeugen v_1, v_2, w_1, w_2, also eine Basis.

$$
\begin{array}{rrrrl}
1 & 0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
1 & -1 & 0 & -1 & (-\text{ 1. Zeile}) \\
0 & -1 & -1 & 0 & (+\text{ 2. Zeile}) \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & -1 & -1 & -2 & (+\text{ 2. Zeile}) \\
0 & 0 & 0 & 2 & \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & \\
0 & 1 & 1 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 2 & \\
0 & 0 & 0 & 0 &
\end{array}
$$

Eine Basis von $V + W$ ist

$$
\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}
$$

Aufgabe 6 [14 Punkte]

Für $x \in \mathbb{R}$ sei die Matrix $M(x)$ definiert durch

$$M(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x^2 \end{pmatrix}$$

a) Finden Sie alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $M(x)$ invertierbar ist. [4 Punkte]

b) Berechnen Sie für die in a) gefundenen x den Eintrag in der 1-ten Zeile und 3-ten Spalte von $(M(x))^{-1}$. [4 Punkte]

c) Berechnen Sie für $x = -1$ die inverse Matrix $(M(-1))^{-1}$. [6 Punkte]

Lösung

---

a) Die Matrix $M(x)$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(M(x)) \neq 0$.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & x & 0 \\ 2 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = x^3 - 4x = x(x^2 - 4) = x(x-2)(x+2)$$

Also $M(x)$ ist invertierbar genau dann wenn $x \notin \{0, -2, 2\}$.

b)

$$\left[(M(x))^{-1}\right]_{13} = \frac{\det M(x)'_{31}}{\det(M(x))} =$$

$$= \frac{1}{x(x-2)(x+2)} \det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ x & 0 \end{pmatrix} = \frac{-2x}{x(x-2)(x+2)} = \frac{-2}{(x-2)(x+2)}$$

c)

$$\begin{array}{rrr|rrr|l}
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \\
2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & (-2)\cdot\ \text{1. Zeile} \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdot(-1) \\
0 & 0 & -3 & -2 & 0 & 1 & \cdot(-1/3) \\
\hline
1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & (-2)\cdot\ \text{3. Zeile} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & \cdot(-1/3) \\
\hline
1 & 0 & 0 & -1/3 & 0 & 2/3 & (-2)\cdot\ \text{3. Zeile} \\
0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & \\
0 & 0 & 1 & 2/3 & 0 & -1/3 & \cdot(-1/3)
\end{array}$$

$$M(-1)^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 0 & 2/3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 7 [14 Punkte]

Sei $(G, *)$ eine Gruppe und sei h ein Element von G. Zeigen Sie, dass die Teilmenge $U = \{g \in G \mid g * h = h * g\}$ eine Untergruppe von $(G, *)$ ist.

Lösung

- Seien $g_1, g_2 \in U$. Dann ist $(g_1 * g_2) * h \stackrel{g_2 \in U}{=} g_1 * h * g_2 \stackrel{g_1 \in U}{=} h * g_1 * g_2$, also $g_1 * g_2 \in U$.
- Sei $g \in U$. Dann gilt $g * h = h * g$. Das ist äquivalent zu

$$\begin{aligned} & g^{-1} * g * h = g^{-1} * h * g \\ \Leftrightarrow \quad & g^{-1} * g * h * g^{-1} = g^{-1} * h * g * g^{-1} \\ \Leftrightarrow \quad & h * g^{-1} = g^{-1} * h \end{aligned}$$

  Also ist $g^{-1} \in U$.

Damit ist U eine Untergruppe von $(G, *)$.