1.3.2 Quadratische Ergänzung

Die Technik der Faktorzerlegung funktioniert fast nur dann, wenn die Lösungen ganzzahlig sind. Im anderen Fall ist es praktisch unmöglich, die entsprechenden Summanden der beiden Faktoren herauszufinden.

In diesen Fällen führt die Methode der quadratischen Ergänzung zum Ziel. Sie basiert auf den **binomischen Formeln**!

Beispiel 1 (mit der 1.binomischen Formeln):

Gleichung: $x^2 + 8x + 7 = 0$ **D = R**

Schritt 1 (Gleichung ordnen):

Variablen x^2 und x auf die linke, Konstante auf die rechte Seite der Gleichung trennen *(falls der Faktor vor $x^2 \neq 1$ ist, muss die Gleichung noch durch diesen dividiert werden)*

$x^2 + 8x = -7$ (geordnete Gleichung)

Überlegung via 1. binomischer Formel

Schritt 2:

Linke Seite der Gleichung als Teil einer 1. oder 2. **binomischen Formel** auffassen

$\underbrace{x^2 + 8x}_{} = -7$

$\boxed{(x + b)^2 = x^2 + 2bx + b^2}$

Wert für b herausfinden:

$x^2 + \mathbf{8x} = -7$

$x^2 + \mathbf{2bx} + b^2$

$2bx = 8x \rightarrow$ <u>$b = 4$</u> (nach **b** auflösen)

Schritt 3:

Fehlendes Glied $\mathbf{b^2}$ (=sog. „quadratische Ergänzung“) auf beiden Seiten addieren

$\underbrace{x^2 + 2\,(4)\,x + \mathbf{b^2}}_{} = -7 + \mathbf{b^2}$

$\overbrace{x^2 + 8x \mathbf{+ 16}}^{(x + 4)^2} = -7 \mathbf{+ 16}$

Schritt 4:

Linken Teil der Gleichung als **binomische Formel** schreiben:

$\mathbf{(x + 4)^2} = -7 + 16$

Schritt 5:

Die Gleichung auflösen:

$(x + 4)^2 = -7 + 16$

$(x + 4)^2 = 9 \qquad | \sqrt{}$

$x + 4 = \pm\sqrt{9} \qquad | -4$

$x_{1,2} = \pm\sqrt{9} - 4$

$x_{1,2} = \pm 3 - 4$

$\mathbf{x_1} = \underline{-7}$

$\mathbf{x_2} = \underline{-1}$

Schritt 6:

Lösungsmenge angeben:

$L = \{-7 ; -1\}$

Beispiel 2 (mit der 2. Binomischen Formel):

Gleichung: $3x^2 - 18x - 6 = 0$ **D = R**

Schritt 1 (Gleichung ordnen):

Variablen x^2 und x auf die linke, Konstante auf die rechte Seite der Gleichung trennen

$3x^2 - 18x = 6$ ¦ **:3** (d.h. durch den Faktor x^2 dividieren)

$\mathbf{x^2 - 6x = 2}$

Überlegung via 2. binomischer Formel

Schritt 2:

Linke Seite der Gleichung als Teil einer 1. oder 2. **binomischen Formel** auffassen

$\underbrace{x^2 - 6x} = 2$

$\boxed{(x - b)^2 = x^2 - 2bx + b^2}$

Wert für b herausfinden:

$x^2 - \mathbf{6x} = 2$

$x^2 - \mathbf{2bx} + b^2$

$-2bx = -6x \rightarrow$ <u>$b = 3$</u> (nach **b** auflösen)

Schritt 3:

Fehlendes Glied $\mathbf{b^2}$ (=sog. „quadratische Ergänzung“) auf beiden Seiten addieren

$\underbrace{x^2 + 2\,(3)\,x + \mathbf{b^2}}_{\boxed{(x-3)^2}} = 2 + \mathbf{b^2}$

$x^2 - 6x \mathbf{+ 9} = 2 \mathbf{+ 9}$

Schritt 4:

Linken Teil der Gleichung als **binomische Formel** schreiben:

$\mathbf{(x - 3)^2} = 2 + 9$

Schritt 5:

Die Gleichung auflösen:

$(x - 3)^2 = 2 + 9$

$(x - 3)^2 = 11$ ¦$\sqrt{}$

$x - 3 = \pm\sqrt{11}$ ¦-4

$x_{1,2} = \pm\sqrt{11} + 3$

$x_{1,2} = \pm 3.3166\ldots + 3$

$\mathbf{x_1}$ = $\underline{-0.32}$

$\mathbf{x_2}$ = $\underline{6.32}$

Schritt 6:

Lösungsmenge angeben:

L = {-0.32 ; 6.32}