3. DER NATÜRLICHE LOGARITHMUS

ln

Der natürliche Logarithmus

$$\ln(x)$$

betrachtet als Funktion in x, ist die

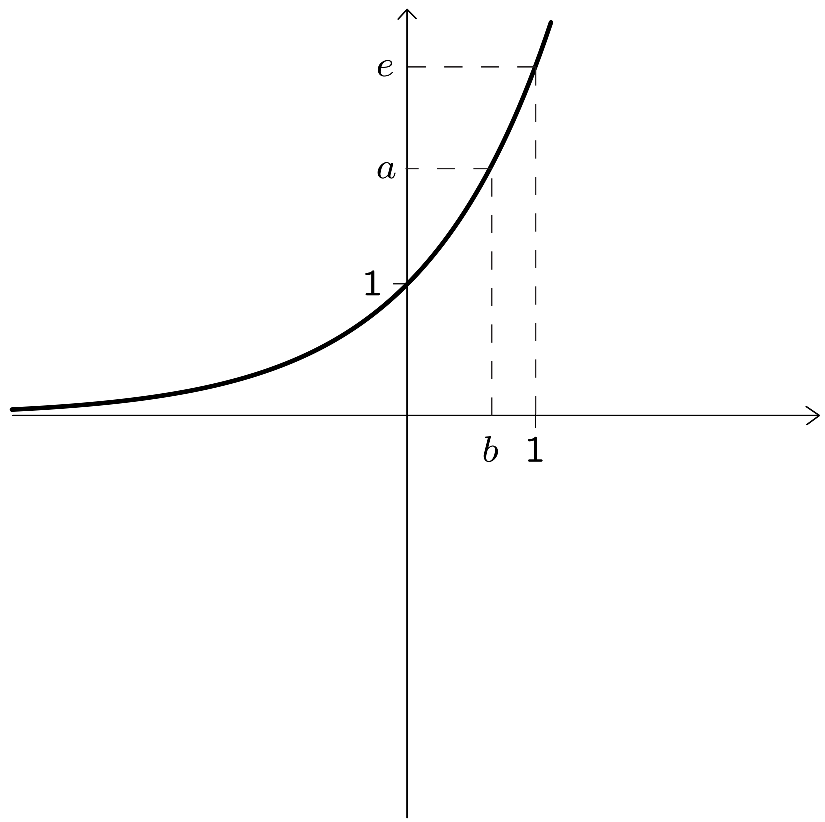
Umkehrfunktion

der Exponentialfunktion $\exp(x)$. Das bedeutet, für reelle Zahlen a und b gilt

$$b = \ln(a) \qquad \Leftrightarrow \qquad a = \exp(b)$$

Dazu muss $a > 0$ sein (weil die Exponentialfunktion nur positive Werte annimmt).

Graphische Darstellung von $\exp(x)$:

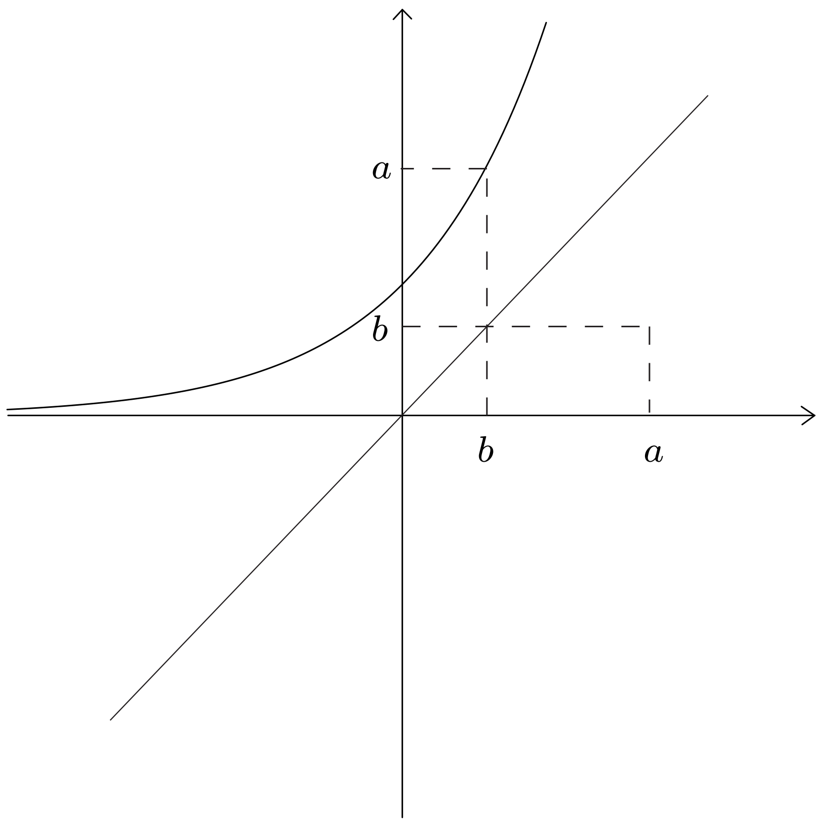


$$\exp(0) = 1$$

$$\exp(1) = e$$

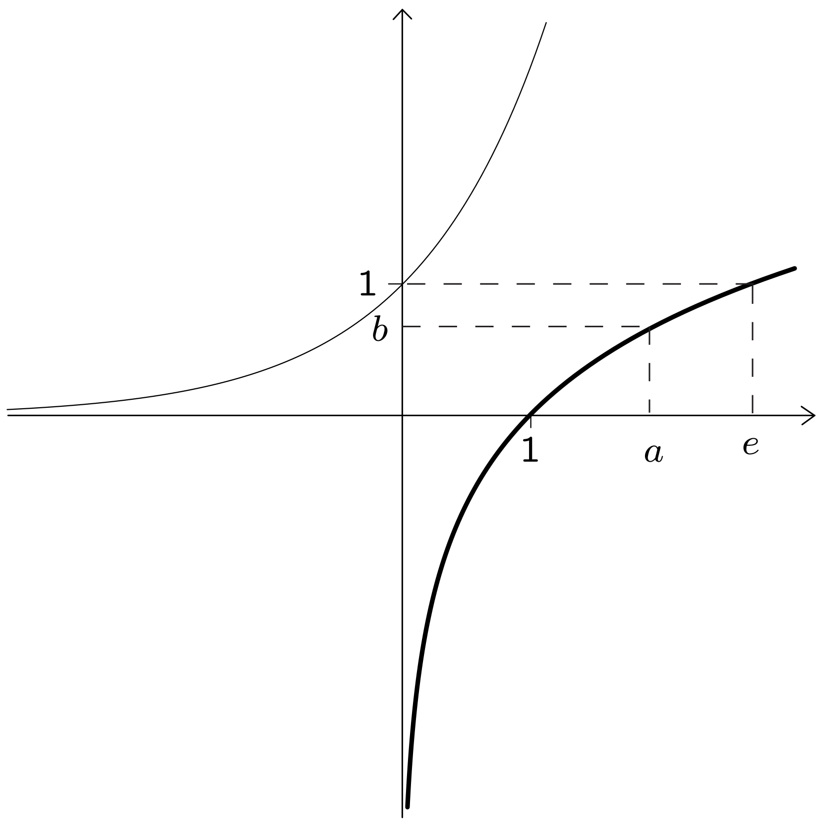
$$\exp(b) = a$$

Übergang zur Umkehrfunktion: Vertauschen von a und b:



Spiegeln an der Geraden $y = x$, der Winkelhalbierenden

Graphische Darstellung von $\ln(x)$:



$\exp(0) = 1$

$\exp(1) = e$

$\ln(1) = 0$

$\ln(e) = 1$

$\ln(a) = b$

Einsetzen der beiden Gleichungen

$$b = \ln(a) \quad \text{und} \quad a = \exp(b)$$

ergibt

$$a = \exp(\ln(a))$$

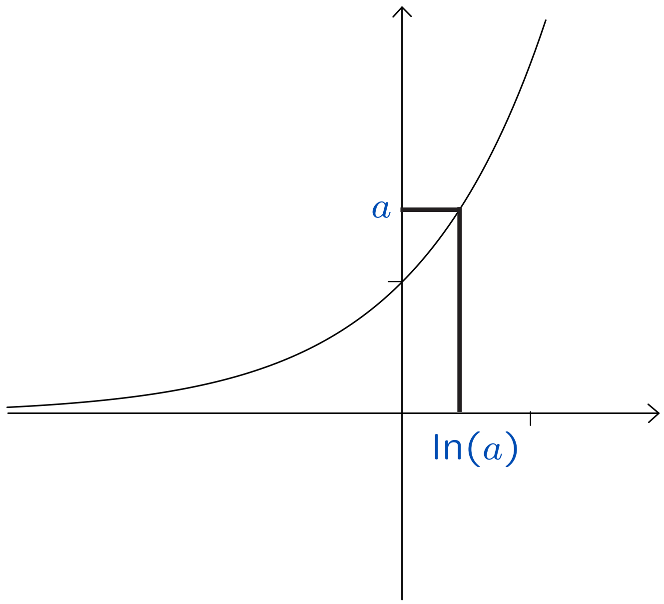
und umgekehrt $b = \ln(\exp(b))$.

Es ist also $\ln(a)$ für $a > 0$ genau die Zahl, die die Gleichung

$$a = \exp(x)$$

auflöst.

Auflösung der Gleichung $\exp(x) = a$ mit Lösung $\ln(a)$:



Was ergibt die Multiplikativität der Exponentialfunktion für den Logarithmus?

Wir erinnern uns an diese Eigenschaft:

$a_1 = \exp(b_1)\ ,\ a_2 = \exp(b_2)\ ,\ a = \exp(b_1 + b_2) \quad \Rightarrow \quad a = a_1 a_2$

Oder mittels Umkehrfunktion

$$\ln(a) = b_1 + b_2 = \ln(a_1) + \ln(a_2)$$

und Multiplikativität

$$\boxed{\ln(a_1 a_2) = \ln(a_1) + \ln(a_2)}$$

Genau für diese Gleichung $\ln a_1 a_2 = \ln a_1 + \ln a_2$ hat 1614 der Schotte John Napier und etwas später der Schweizer Jost Bürgi die Logarithmen erfunden. Sie ist die Grundlage des *Rechenschiebers* (das Lineal des Ingenieurs):

Logarithmische Skalen:

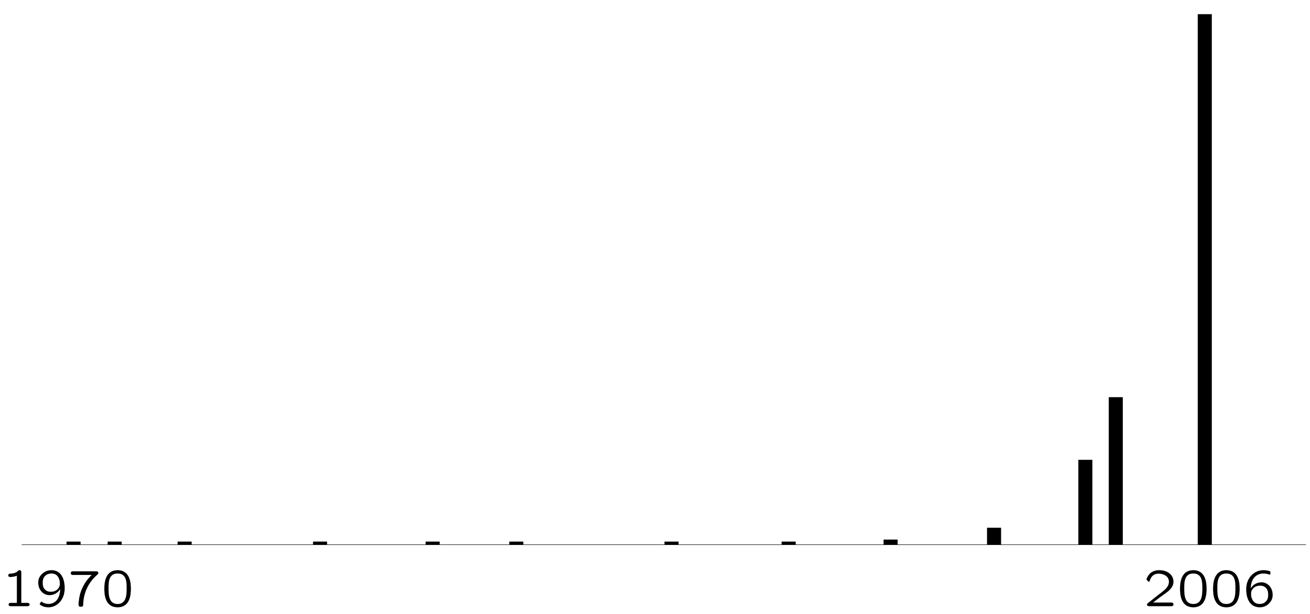
Exponentielles Wachstum $y = ce^{ax}$ ist graphisch kaum erfassen, wenn x über einen weiten Bereich variiert. Viel besser trägt man dann $\ln y$ gegen x ab, weil eine Geradengleichung entsteht:

$$\ln y = ax + b \; , \quad \text{mit } b = \ln c$$

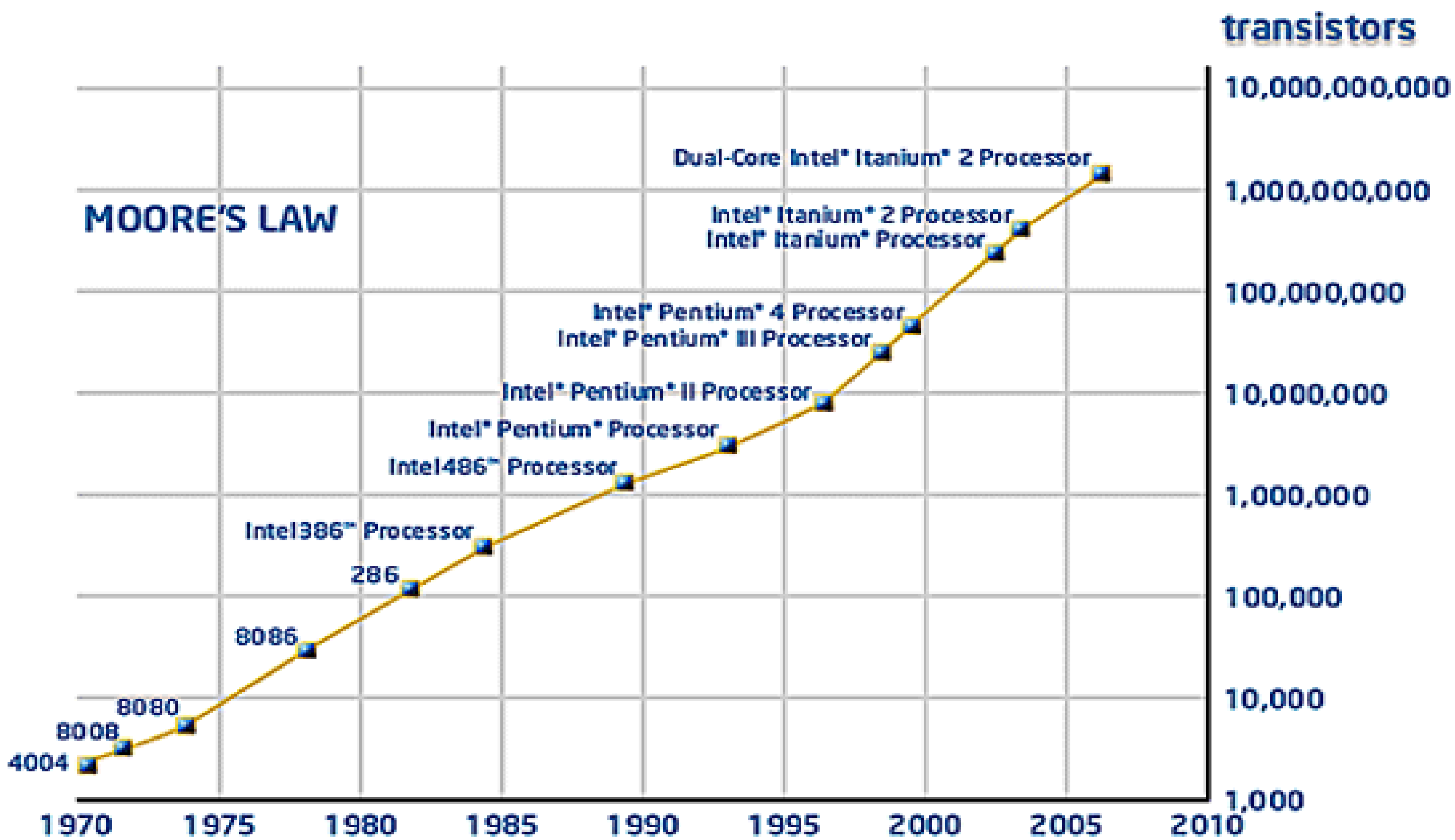
Beispiel: Moore'sches „Gesetz“:

Moore's Law:
„Ca. alle 2 Jahre verdoppelt sich die Anzahl von Transistoren pro Computerchip.“

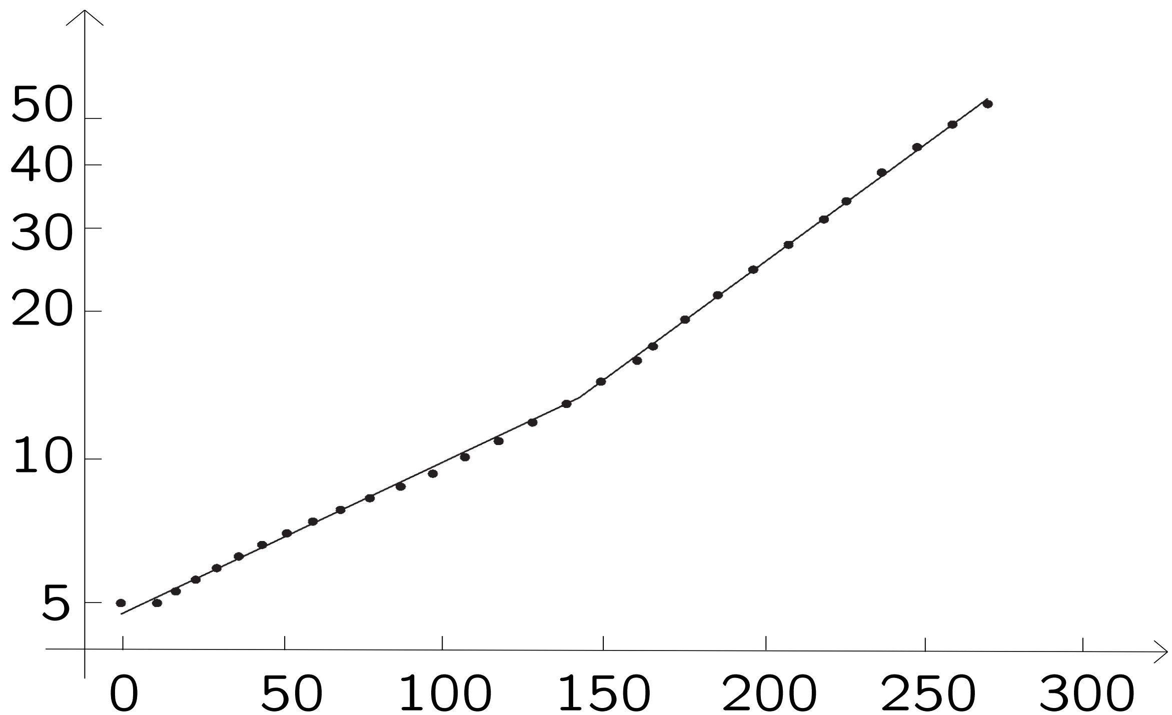
Transistoren pro Computerchip auf normaler Skala:



und mit logarithmischer Skala:



Die Silouette des Eiffelturms:



Höhe von der Spitze gemessen.

Auswertung der Gleichung $\ln a_1 a_2 = \ln a_1 + \ln a_2$.

Für $b > 0$ und natürliche Zahlen m, n gilt

$$\begin{aligned} \ln 1 = 0\ , &\quad \text{also}\ \ln a^0 = 0 \ln a \\ \ln a^m = \ln(a \cdots a) = \ln a + \cdots + \ln a\ , &\quad \text{also}\ \ln a^m = m \ln a \\ \ln a = \ln\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = n \ln a^{1/n}\ , &\quad \text{also}\ \ln a^{1/n} = \frac{1}{n} \ln a \\ 0 = \ln 1 = \ln(a \cdot a^{-1}) = \ln a + \ln a^{-1}\ , &\quad \text{also}\ \ln a^{-1} = -\ln a \end{aligned}$$

Insgesamt für rationale Zahlen $r = \pm\frac{m}{n}$

$$\ln a^r = r \ln a$$

Die Gleichung

$$\boxed{\ln a^b = b \ln a}$$

macht also Sinn für alle reellen Zahlen b. In der Mathematik wird sie deswegen, aufgelöst nach a^b, als *Definitionsgleichung* der Potenz benutzt (denn a^b ist für beliebiges b ja noch gar nicht definiert!):

$$a^b := \exp(b \ln a)$$

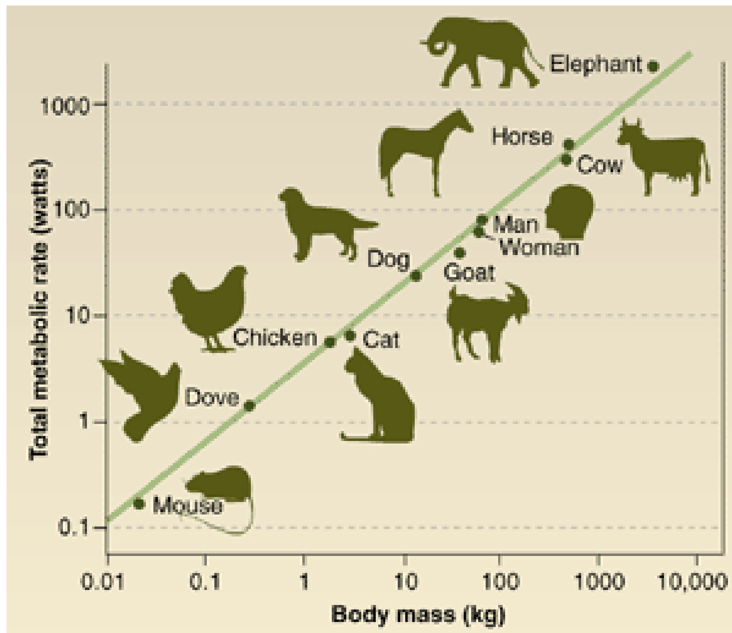
für reelle Zahlen $a > 0$ und b. Die Schreibweise $:=$ weist darauf hin, dass es sich um eine Definitionsgleichung handelt: Die rechte Seite definiert die linke.

Doppelt-logarithmische Skalen

Graphische Darstellung von Potenzgesetzen:
Folgen Daten einer Gleichung $y = cx^a$, so ist es oft günstig, $\ln y$ gegen $\ln x$ aufzutragen, denn dann entsteht die Geradengleichung

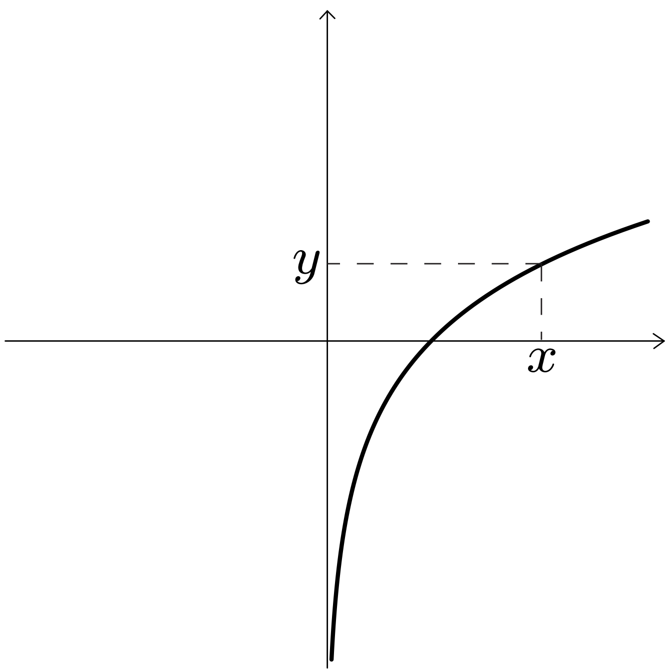
$$\ln y = a \ln x + b \;, \quad \text{mit } b = \ln c$$

Beispiel: Die Stoffwechselrate bei Tieren, „Kleibers Gesetz“



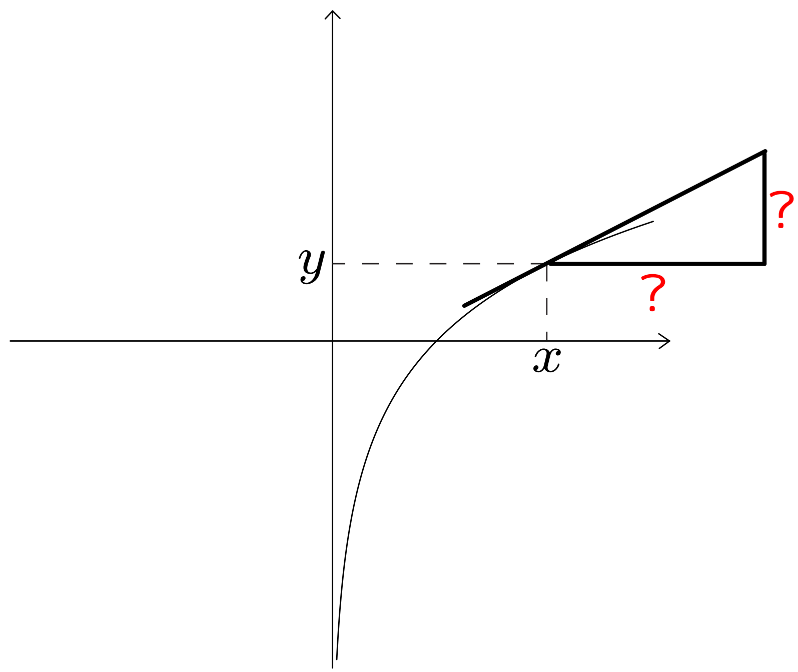
Steigung $a = 3/4$.

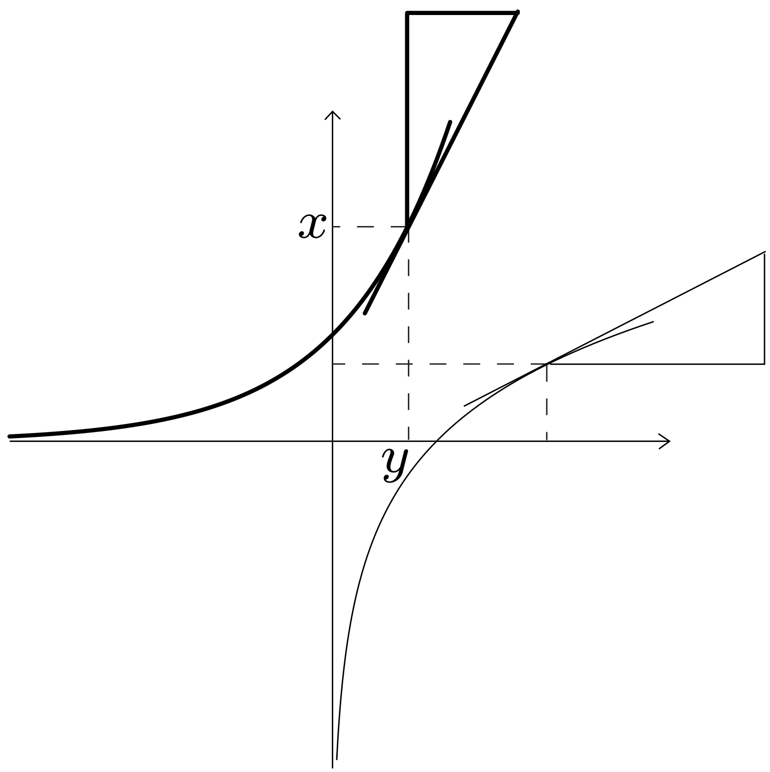
Die Ableitung des Logarithmus:



$$y = \ln(x)$$

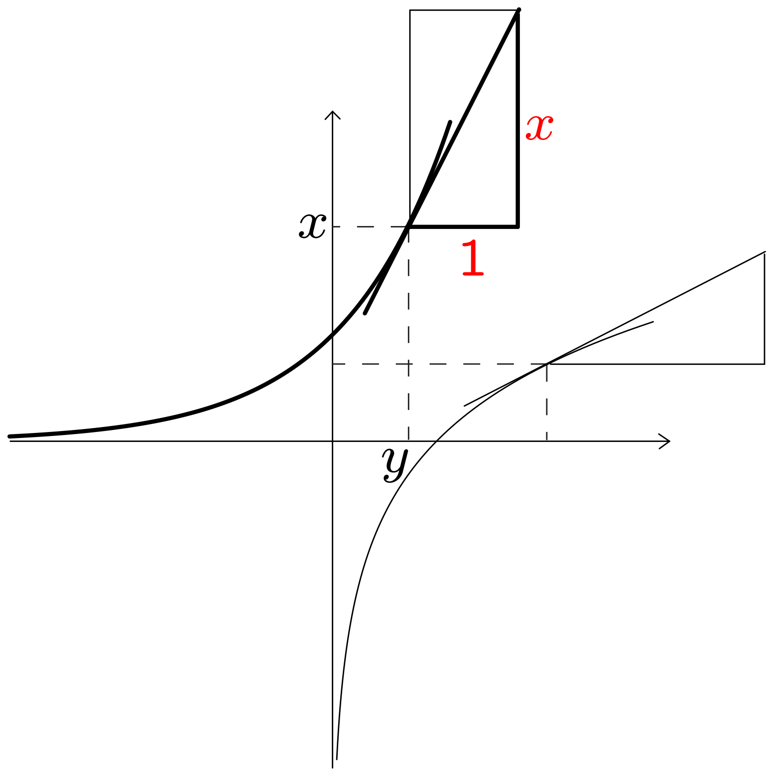
$$y = \ln(x)$$





$y = \ln(x)$

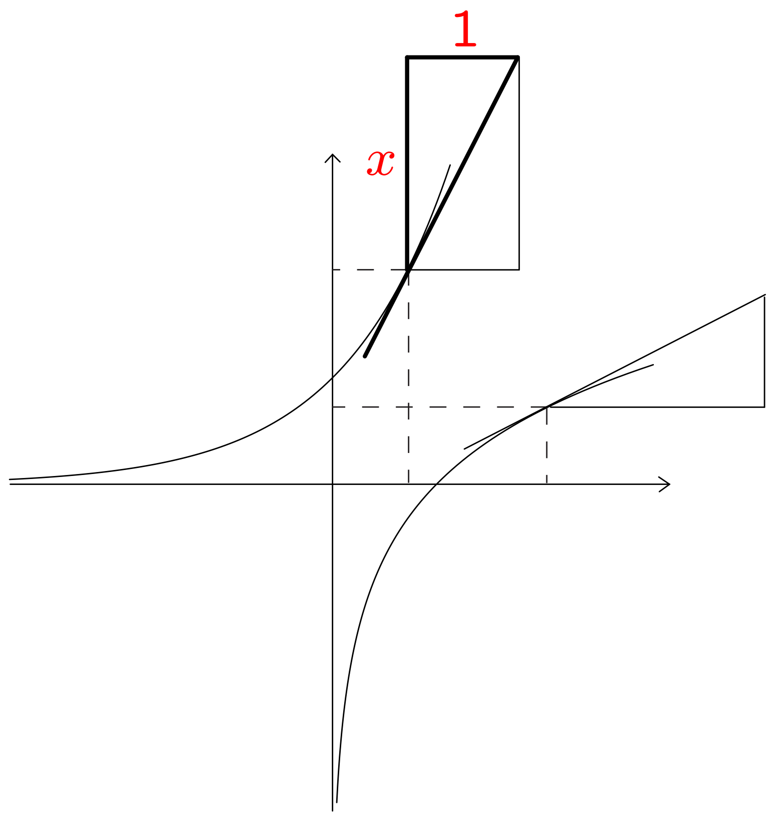
$x = \exp(y)$



$$y = \ln(x)$$

$$x = \exp(y)$$

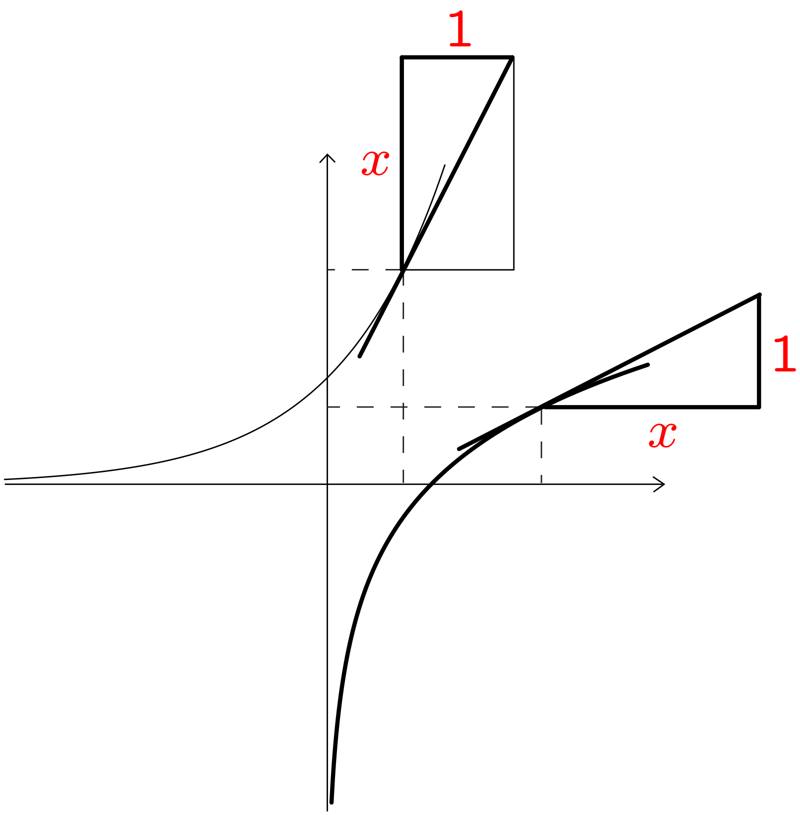
$$\exp'(y) = \exp(y) = x = x/1$$



$$y = \ln(x)$$

$$x = \exp(y)$$

$$\exp'(y) = \exp(y) = x$$



$y = \ln(x)$

$x = \exp(y)$

$\exp'(y) = \exp(y) = x$

$\ln'(x) = 1/x$

$$\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x}}$$

Logarithmen zur Basis 2

Wir erinnern uns: Der natürliche Logarithmus $\ln x$ ist die Umkehrfunktion der e-Funktion e^x.

Die Funktion $\log_2 x$, der *Logarithmus zur Basis 2*, ist analog definiert als die Umkehrfunktion von 2^x. Also

$$b = \log_2 a \quad \Leftrightarrow \quad a = 2^b$$

oder auch

$$a = 2^{\log_2 a}$$

Aus $a = 2^{\log_2 a}$ folgt durch Logarithmieren $\ln a = \log_2 a \ln 2$, also

$$\log_2 a = \frac{\ln a}{\ln 2}$$

Der Logarithmus zur Basis 2 unterscheidet sich also nur um den Faktor $1/\ln 2 \approx 1{,}443$ vom natürlichen Logarithmus. Daher übertragen sich Rechenregeln ohne weiteres vom einen zum anderen Logarithmus:

$$\log_2 1 = 0\ ,\ \log_2 ab = \log_2 a + \log_2 b\ ,\ \log_2 a^b = b \log_2 a$$

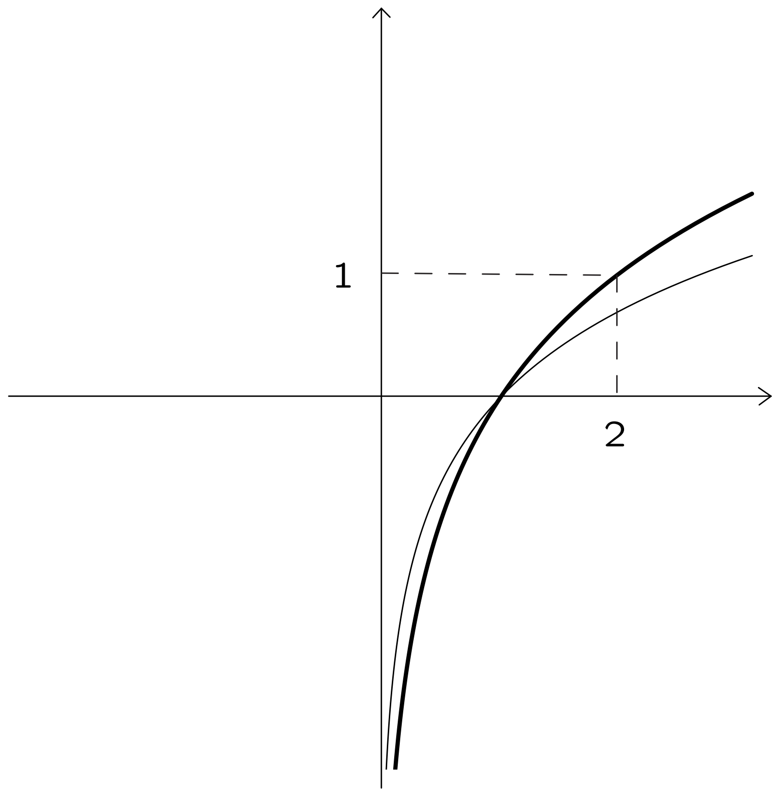
Prinzipiell macht es also keinen wesentlichen Unterschied, mit welchem Logarithmus man rechnet. Hat man es mit 2er-Potenzen zu tun, so ist der Zweierlogarithmus angenehmer:

$$\log_2 1 = 0 \ , \ \log_2 2 = 1 \ , \ \log_2 4 = 2 \ , \ \log_2 8 = 3 \ , \cdots$$

Der natürliche Logarithmus hat die einfachere Ableitung $1/x$.

Bemerkung: Entsprechend verhält es sich mit $\log_{10} x$, dem Logarithmus zur Basis 10, der Umkehrfunktion von 10^x, und allgemein mit $\log_b x$, dem Logarithmus zur Basis $b > 0$, der Umkehrfunktion von b^x.

Logarithmus zur Basis 2 im Vergleich zum natürlichen Logarithmus:



Zum Merken:
Der natürliche Logarithmus $\ln x$ und der Zweierlogarithmus $\log_2 x$ sind für positive Zahlen definiert, sie sind die Umkehrfunktionen von $\exp(x)$ und 2^x:

$$\exp(\ln x) = e^{\ln x} = x \quad , \quad 2^{\log_2 x} = x$$

Die Rechenregeln sind (für beliebige Basen)

$$\log 1 = 0 \ , \ \log ab = \log a + \log b \ , \ \log a^b = b \log a$$

Die Logarithmen zu zwei verschiedenen Basen unterscheiden sich nur durch einen Faktor, also nicht wesentlich voneinander. Der natürliche Logarithmus ist durch die einfache Form seiner Ableitung ausgezeichnet:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}$$