Mathematik für Naturwissenschaften I

Wintersemester 2020

Prof. Dr. Sebastian Herr

Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld

Stand: 21. Januar 2021

Vorwort

Dieses Kurzskript basiert auf Vorlesungen des Autors an der Universität Bielefeld und ist als Begleitmaterial für Hörerinnen und Hörer der Vorlesung bestimmt. Es dient primär als Referenz für die wesentlichen Definitionen und Sätze. Es kann und soll die Vorlesung nicht ersetzen (auch nicht Lehrbücher!): Unter anderem werden dort zusätzlich wichtige Beispiele, Bemerkungen, Beweise und Erläuterungen sowie Skizzen angegeben und diskutiert.

Eine Weiterverbreitung ist nicht zulässig.

Fehler können leider nie ausgeschlossen werden. Falls Sie einen solchen gefunden haben, schreiben Sie bitte eine E-Mail an `herr@math.uni-bielefeld.de`.

Sebastian Herr

Inhaltsverzeichnis

Teil 1

Analysis

1. Die reellen Zahlen

Im ersten Teil dieser Vorlesung untersuchen wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ und reelle Funktionen. Zunächst widmen wir uns der genaueren Beschreibung der reellen Zahlen.

Unseren Startpunkt bilden die natürliche Zahlen $\mathbb{N}$, bestehend aus 1, $2 = 1 + 1$, $3 = 2 + 1$ usw. Die natürlichen Zahlen kommen beispielsweise beim Zählen von Dingen oder beim Vorgang des Ordnens durch Numerierung vor. Man kann natürlich Zahlen

(a) addieren: $n + m$. Das Ergebnis nennt man die Summe.
(b) multiplizieren: $n \cdot m$. Das Ergebnis nennt man das Produkt.

Subtraktion natürlicher Zahlen führt zu den ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$, bestehend aus 0, $\pm$ 1, $\pm$ 2, $\pm$ 3, usw.. Das Ergebnis einer Subtraktion nennt man Differenz.

Setzt man ganze Zahlen zueindander ins Verhältnis (Division), so führt dies zu den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$, bestehend aus Brüchen $\frac{p}{q}$ für $p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0$.

Nach dem Satz von Pythagoras erfüllt die Länge der Diagonale d im Einheitsquadrat $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, mit anderen Worten ist $d = \sqrt{2}$. Nun beweisen wir, dass d keine rationale Zahl, also kein Bruch ist.

Wir führen einen Widerspruchsbeweis, auch indirekter Beweis oder Reductio ad absurdum genannt. Diese Beweisstrategie basiert auf folgender aussagenlogischer Regel:

$$A \Rightarrow B \text{ ist äquivalent zu } \neg B \Rightarrow \neg A.$$

Also nehmen wir das Gegenteil der zu beweisenden Behauptung an, in diesem Fall: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, für $p, q \in \mathbb{N}$. Wir können ohne Einschränkung zusätzlich annehmen, dass p, q teilerfremd (sonst: Kürzen). Durch Quadrieren erhalten wir $2q^2 = p^2$. Daher muss 2 ein Teiler von p^2 sein, somit auch von p. Es folgt $p = 2r$, für ein $r \in \mathbb{N}$, was wiederum durch quadrieren $2q^2 = 4r^2$ impliziert. Also gilt $q^2 = 2r^2$, wonach 2 ein Teiler von q^2 und somit auch von q ist. Dies steht im Widerspruch zu unserer Annahme, dass p, q teilerfremd sind.

Nicht nur diese Erkenntnis motiviert die Erweiterung der rationalen Zahlen zu den reellen Zahlen $\mathbb{R}$. Es ist möglich, zunächst die ganzen, dann die rationalen und dann die reellen Zahlen aus den natürlichen Zahlen zu konstruieren. Das ist etwas langwierig und stattdessen wollen wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ axiomatisch beschreiben und $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ als Teilmengen von $\mathbb{R}$ identifizieren. Das heißt, dass wir Axiome (grundlegende Regeln, die nicht begründet werden) für $\mathbb{R}$ festlegen werden, die präzise beschreiben, wie wir mit reellen Zahlen operieren dürfen.

Die Existenz (Konstruktion) der reellen Zahlen führen wir hier nicht aus.

Die Axiome der reellen Zahlen untergliedern sich in drei Gruppen:

(a) Die Körperaxiome
(b) Die Anordnungsaxiome
(c) Das Vollständigkeitsaxiom

Nach diesen Vorbemerkungen definieren wir nun den Begriff des Körpers.

Definition 1.1 (Körper). Es sei K eine Menge mit den zwei Verknüpfungen

$$\text{Addition } + : K \times K \longrightarrow K,$$
$$\text{Multiplikation } \cdot : K \times K \longrightarrow K,$$

welche folgende Eigenschaften erfüllen:

(K1) Für alle a, b, c $\in K$ gilt $(a+b)+c = a+(b+c)$. (Assoziativgesetz $+$)
(K2) Es gibt ein Element $0 \in K$, so dass für alle $a \in K$ gilt $a+0=a$. (neutrales Element $+$)
(K3) Zu jedem $a \in K$ gibt es ein $b \in K$ mit $a+b=0$. (inverses Element $+$)
(K4) Für alle $a, b \in K$ gilt $a+b=b+a$. (Kommutativgesetz $+$)
(K5) Für alle $a, b, c \in K$ gilt $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. (Assoziativgesetz $\cdot$)
(K6) Es gibt ein Element $1 \in K \setminus \{0\}$, so dass für alle $a \in K$ $a \cdot 1 = a$ gilt. (neutrales Element $\cdot$)
(K7) Für alle $a \in K \setminus \{0\}$ existiert ein $b \in K$ mit $a \cdot b = 1$. (inverses Element $\cdot$)
(K8) Für alle $a, b \in K$ gilt $a \cdot b = b \cdot a$. (Kommutativgesetz $\cdot$)
(K9) Für alle $a, b, c \in K$ gilt $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$. (Distributivgesetz)

Dann heißt $(K, +, \cdot)$ ein Körper.

Wir unterdrücken oft das Symbol $\cdot$ und schreiben beispielsweise ab statt $a \cdot b$. Oft werden wir auch nur vom Körper K statt $(K, +, \cdot)$ sprechen.

Bemerkung 1.2. Siehe Vorlesung.

Nun kommen wir zu den Ordnungsaxiomen. Dazu legen wir zunächst fest, was eine Relation ist. Eine Relation auf einer Menge M ist eine Teilmenge $R \subseteq M \times M$ und wir schreiben xRy für $(x, y) \in R$.

Definition 1.3 (Angeordneter Körper). Ein angeordneter Körper $(K, +, \cdot, <)$ ist ein Körper $(K, +, \cdot)$ mit einer Relation $<$, so dass Folgendes gilt:

(O1) Für alle $x, y \in K$ gilt genau eine der drei Aussagen
$$x < y\ , \quad x = y\ , \quad y < x.$$
(O2) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: Aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.
(O3) Für alle $x, y, z \in K$ gilt: Wenn $x < y$, dann $x + z < y + z$.
(O4) Für $x, y, z \in K$ mit $z > 0$ gilt: Wenn $x < y$, dann $x \cdot z < y \cdot z$.

Oft werden wir kurz vom angeordneten Körper K statt $(K, +, \cdot, <)$ sprechen.

Bemerkung 1.4. Siehe Vorlesung.

Definition 1.5. Es sei K ein angeordneter Körper. Eine Teilmenge $M \subseteq K$ heißt

(a) nach oben beschränkt, falls ein $o \in K$ existiert, so dass für alle $m \in M$ gilt $m \leq o$. Ist dies der Fall, so heißt o obere Schranke von M.
(b) nach unten beschränkt, falls ein $u \in K$ existiert, so dass für alle $m \in M$ gilt $u \leq m$. Ist dies der Fall, so heißt u untere Schranke von M.
(c) beschränkt, falls M nach oben und nach unten beschränkt ist.

Definition 1.6 (Supremum und Infimum). Es sei K ein angeordneter Körper und $M \subseteq K$ nichtleer.

(a) $s \in K$ heißt kleinste obere Schranke oder Supremum von M, falls s eine obere Schranke von M ist und für alle weiteren oberen Schranken o von M gilt $s \leq o$. Dann schreiben wir $s = \sup M$.
(b) $l \in K$ heißt größte untere Schranke oder Infimum von M, falls l eine untere Schranke von M ist und für alle weiteren unteren Schranken u von M gilt $l \geq u$. Dann schreiben wir $l = \inf M$.

Wir schreiben $\sup M = +\infty$, falls M nicht nach oben beschränkt ist. Analog schreiben wir $\inf M = -\infty$, falls M nicht nach unten beschränkt ist. Zusätzlich setzen wir $\sup \emptyset = -\infty$, $\inf \emptyset = +\infty$.

Wie angekündigt legen wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nun axiomatisch fest.

Definition 1.7 (Axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen). Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind ein angeordneter Körper, in welchem jede nichtleere und nach oben beschränkte Teilmenge ein Supremum besitzt.

Bemerkung 1.8. Siehe Vorlesung.

Nun haben wir also die Rechenregeln für den Umgang mit reellen Zahlen festgelegt. Für $x \in \mathbb{R}$ definieren wir den Betrag

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}.$$

Satz 1.9. *Für $x, y \in \mathbb{R}$ gelten*

$$|x| \geq 0, \text{ sowie } |x| = 0 \iff x = 0, \tag{1.1}$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|, \tag{1.2}$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|, \tag{1.3}$$

$$||x| - |y|| \leq |x - y|. \tag{1.4}$$

Die Ungleichung (1.3) *nennt man auch Dreiecksungleichung.*

Definition 1.10 (Maximum und Minimum). Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $m \in M$.

(a) m heißt Maximum von M, falls $x \leq m$ für alle $x \in M$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $m = \max M$.
(b) m heißt Minimum von M, falls $m \leq x$ für alle $x \in M$ gilt. In diesem Fall schreiben wir $m = \min M$.

Beispiel 1.11. Siehe Vorlesung.

Satz 1.12. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ nichtleer und nach oben beschränkt. Das Maximum von M existiert genau dann, wenn $\sup M \in M$. Ist dies der Fall, so gilt $\max M = \sup M$.*

Eine analoger Satz gilt für das Infimum und Minimum.

Nun identifizieren wir die natürlichen Zahlen in $\mathbb{R}$. Mit dem neutralen Element der Multiplikation aus (K6) können wir sukzessive die Zahlen

$$1,\ 2 = 1 + 1,\ 3 = 2 + 1,\ \ldots$$

bilden. Dies wollen wir präzisieren:

Definition 1.13 (induktive Menge). Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt induktiv, falls gilt:

(a) $1 \in M$
(b) Wenn $m \in M$, dann $m + 1 \in M$.

Bemerkung 1.14. Siehe Vorlesung.

Definition 1.15. Die Menge der $\mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen ist der Durchschnitt aller induktiven Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{Für jede induktive Menge } M \subseteq \mathbb{R} \text{ gilt } x \in M\}.$$

Klar: $1 \in \mathbb{N}$, $2 \in \mathbb{N}$ usw.

Satz 1.16. *Ist $M \subseteq \mathbb{N}$ induktiv, so gilt $M = \mathbb{N}$.*

Dies ist die Basis für das Beweisprinzip der vollständigen Induktion, einer Art logischen Dominoeffekts:

Satz 1.17 (Vollständige Induktion). *Es seien B_n für $n \in \mathbb{N}$ zu beweisende Aussagen. Es seien folgende zwei Bedigungen erfüllt:*

(a) *Induktionsanfang: B_1 ist wahr.*
(b) *Induktionsschluss: Wenn B_n für ein beliebiges $n \in \mathbb{N}$ wahr ist, dann ist auch B_{n+1} wahr.*

Dann ist B_n für alle $n \in \mathbb{N}$ wahr.

Satz 1.18 (Eigenschaften natürlicher Zahlen). (a) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \geq 1$.*
(b) *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ gilt $n + m \in \mathbb{N}$ und $n \cdot m \in \mathbb{N}$.*

(c) *Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $n = 1$ oder $n - 1 \in \mathbb{N}$.*
(d) *Für alle $n, m \in \mathbb{N}$ mit $n > m$ gilt $n - m \in \mathbb{N}$.*

Satz 1.19. *Es sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gibt es kein $n \in \mathbb{N}$ mit $m < n < m+1$ oder $m-1 < n < m$.*

Definition 1.20. (a) $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.
(b) $\mathbb{Z} = \mathbb{N}_0 \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ (ganze Zahlen)
(c) $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q} \mid p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0\}$ (rationale Zahlen)

Man überzeugt sich leicht davon, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt $a + b \in \mathbb{Z}$, $a - b \in \mathbb{Z}$, und dass für alle $a, b \in \mathbb{Q}$ gilt $a + b \in \mathbb{Q}$, $a - b \in \mathbb{Q}$. Übrigens ist auch $\mathbb{Q}$ ein angeordneter Körper.

Ein wichtiger Unterschied zwischen $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ wird an folgendem Beispiel deutlich. Die Menge

$$\{x \in \mathbb{Q} \,|\, x^2 < 2\}$$

besitzt in $\mathbb{Q}$ kein Supremum und kein Infimum, da es keine rationale Zahl d mit $d^2 = 2$ gibt.

Satz 1.21. *(Archimedische Eigenschaft) Zu jedem $x \in \mathbb{R}$ existiert $n \in \mathbb{N}$ mit $x < n$.*

Analog zeigt man, dass es zu jedem $x \in \mathbb{R}$ ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $-n < x$.

Satz 1.22. *Jede nichtleere Menge $M \subseteq \mathbb{N}$ besitzt ein Minimum.*

Definition 1.23. Zwei Mengen M, N heißen gleichmächtig (schreibe $M \sim N$), falls es eine bijektive Abbildung $f : M \to N$ gibt.

Bemerkung 1.24. Siehe Vorlesung.

Beispiel 1.25. Siehe Vorlesung.

Definition 1.26. Eine Menge M heißt endlich, wenn $M \sim A_n$ für eine der Mengen

$$A_n = \{k \in \mathbb{N} \mid k \leq n\}$$

gilt, oder $M = \emptyset$ ist. Dann nennt man n die Anzahl der Elemente von M (auch Kardinalität von M) und wir schreiben $\#M = n$, $\#\emptyset = 0$. Andernfalls nennen wir M unendlich.

Bemerkung 1.27. Siehe Vorlesung.

Das Induktionsprinzip erlaubt es rekursive Definitionen zu treffen.

Definition 1.28. Es seien $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$. Definiere die endliche Summe s_n rekursiv durch $s_1 := a_1$, $s_k := s_{k-1} + a_k$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $2 \leq k \leq n$. Wir schreiben dafür

$$\sum_{k=1}^{n} a_k := s_n.$$

Ähnlich definieren wir das endliche Produkt p_n rekursiv durch $p_1 = a_1, p_k := p_{k-1} \cdot a_k$ bei $2 \leq k \leq n$ und schreiben dafür

$$\prod_{k=1}^{n} a_k := p_n.$$

Analog definieren wir für beliebiges $m \in \mathbb{N}$ mit $n \geq m$ die Summe $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k$ und das Produkt $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k$. Für $n < m$ setzen wir noch $\sum\limits_{k=m}^{n} a_k = 0$ und $\prod\limits_{k=m}^{n} a_k = 1$.

In endlichen Summen und Produkten darf man aufgrund der Kommutativgesetze die Reihenfolge der Summanden bzw. Faktoren beliebig vertauschen.

Weiterhin definieren wir für $n \in \mathbb{N}_0$ die Fakultäten $0! = 1$, $n! = \prod\limits_{k=1}^{n} k = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot n$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ und eine reelle Zahl a definieren wir die $n-$te Potenz rekursiv durch $a^0 = 1$, $a^n := a \cdot a^{n-1}$. Für $n \in \mathbb{Z}$ mit $n < 0$ und $a \neq 0$ setzen wir $a^{-n} := (a^{-1})^n$.

Satz 1.29. *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Die Anzahl der möglichen Anordnungen (Permutationen)* $f : A_n \to M$ *einer Menge mit* n *Elementen ist* $n!$.

Wir definieren für $k, n \in \mathbb{N}_0, 0 \leq k \leq n$, den Binomialkoeffizienten

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!},$$

und für $k \in \mathbb{Z}$ mit $k < 0$ oder $k > n$ setzen wir $\binom{n}{k} := 0$.

Satz 1.30. *Es seien* $k, n \in \mathbb{N}_0$. *Die Anzahl der* k*-elementigen Teilmengen einer* n*-elementigen Menge ist* $\binom{n}{k}$.

Bemerkung 1.31. Siehe Vorlesung.

Die folgende Aussage wird durch das Pascalsche Dreieck veranschaulicht.

Lemma 1.32. *Für* $k, n \in \mathbb{N}_0$ *und* $0 \leq k \leq n+1$ *gilt*

$$\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}.$$

Satz 1.33 (Binomischer Satz). *Für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k.$$

Satz 1.34 (Geometrische Summe). *Für* $q \in \mathbb{R}$ *und* $n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 - q^{n+1}$$

2. Folgen reeller Zahlen und Konvergenz

Reellwertige Abbildungen nennen wir Funktionen.

Definition 2.1. Eine Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (bzw. $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}$) heißt Folge reeller Zahlen (oder reelle Zahlenfolge, kurz Folge). Die Funktionswerte $a_n := f(n)$ heißen Folgenglieder. Man schreibt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (bzw. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$) anstelle von f, kurz auch einfach (a_n).

Beispiel 2.2. Siehe Vorlesung.

Definition 2.3. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt [nach oben bzw. nach unten] beschränkt, falls das Bild $f(M) = \{f(m) \,|\, m \in M\} \subseteq \mathbb{R}$ [nach oben bzw. nach unten] beschränkt ist.

Bemerkung 2.4. Siehe Vorlesung.

Beispiel 2.5. Siehe Vorlesung.

Definition 2.6. Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. (a_n) heißt konvergent gegen den Grenzwert $a \in \mathbb{R}$, falls gilt:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ n_0 \in \mathbb{N}\ \forall n \geq n_0 : |a_n - a| < \varepsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ oder $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a$ oder auch $a_n \to a$ für $n \to \infty$. (a_n) heißt konvergent, falls ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass (a_n) gegen den Grenzwert a konvergiert. Eine Folge, die nicht konvergent ist, heißt divergent. Ist (a_n) konvergent gegen den Grenzwert 0, so nennen wir (a_n) eine Nullfolge.

Beispiel 2.7. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 2.8. Siehe Vorlesung.

Satz 2.9. *Eine Folge reeller Zahlen (a_n) besitzt höchstens einen Grenzwert.*

Satz 2.10. *Jede konvergente Folge ist beschränkt.*

Bemerkung 2.11. Siehe Vorlesung.

Satz 2.12 (Sandwich-Prinzip). *Es seien (l_n) und (u_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} l_n = a$. Es sei (a_n) eine Folge mit der Eigenschaft:*

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : l_n \leq a_n \leq u_n.$$

Dann folgt die Konvergenz von (a_n) und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Beispiel 2.13. Siehe Vorlesung.

Satz 2.14. *Es seien (a_n), (b_n) konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Dann folgt $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$. Für $b \neq 0$ ist auch $b_n \neq 0$ für große n und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.*

Beispiel 2.15. Siehe Vorlesung.

Satz 2.16. *Seien* $(a_n), (b_n)$ *konvergente Folgen reeller Zahlen. Gibt es* $n_0 \in \mathbb{N}$ *so dass* $a_n \leq b_n$ *für alle* $n \geq n_0$ *gilt, so folgt* $\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$.

Definition 2.17. Es sei $M \subset \mathbb{R}$. Eine Funktion $f : M \to \mathbb{R}$ heißt

(a) [streng] monoton wachsend, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \overset{[<]}{\leq} f(y)$

(b) [streng] monoton fallend, falls für alle $x, y \in M$ gilt: $x < y \Rightarrow f(x) \overset{[>]}{\geq} f(y)$

Bemerkung 2.18. Siehe Vorlesung.

Beispiel 2.19. Siehe Vorlesung.

Lemma 2.20. *Es gilt* $(\frac{n}{3})^n \leq n! \leq (\frac{n}{2})^n$ *für alle* $n \geq 6$.

Beispiel 2.21. Siehe Vorlesung.

Definition 2.22. Eine Folge reeller Zahlen (a_n) strebt gegen $+\infty$ bzw. gegen $-\infty$, falls gilt:

$$\forall\, C > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, n \geq n_0 : a_n < C \text{ bzw. } a_n < -C.$$

In diesem Fall nennen wir (a_n) bestimmt divergent gegen $+\infty$ bzw. $-\infty$ und wir schreiben $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$ bzw. $a_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Beispiel 2.23. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 2.24. Siehe Vorlesung.

3. Vollständigkeit der reellen Zahlen

Satz 3.1. *Eine monoton wachsende Folge reeller Zahlen ist genau dann konvergent, wenn sie nach oben beschränkt ist.*

Bemerkung 3.2. Siehe Vorlesung.

Da die Folge $(l_n) = (1 + \frac{1}{n})^n$ monoton wachsend und beschränkt ist, ist folgende Definition sinnvoll:

Definition 3.3. Wir definieren die Eulersche Zahl $e := \lim_{n\to\infty} l_n = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n$.

Beispiel 3.4. Siehe Vorlesung.

Satz 3.5. *Es sei $y > 0$. Für jedes $x_0 > 0$ konvergiert die Folge (x_n) positiver Zahlen, welche rekursiv durch $x_{n+1} := \frac{1}{2}(x_n + \frac{y}{x_n})$ definiert wird gegen eine positive reelle Zahl x. Es gilt $x^2 = y$.*

Definition 3.6. Die zu $y > 0$ eindeutig bestimmte Zahl $x > 0$ mit $x^2 = y$ heißt Quadratwurzel von y und wir schreiben $x = \sqrt{y}$.

Eine Modifikation des Beweises, welcher auf Satz 3.1 beruht, liefert die Existenz k-ter Wurzeln ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$): Zu $y > 0$ existiert genau ein $x > 0$ mit $x^k = y$. Wir schreiben dafür $x = \sqrt[k]{y}$.

Beispiel 3.7. Siehe Vorlesung.

Wir definieren nun spezielle Teilmengen von $\mathbb{R}$, sogenannte Intervalle: Für $a, b \in \mathbb{R}$ sind beschränkte Intervalle definiert durch

$$\begin{aligned}
[a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}, \\
(a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}, \\
[a, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}, \\
(a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}
\end{aligned}$$

Unbeschränkte Intervalle sind

$$\begin{aligned}
[a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a \geq x\} \\
(-\infty, b] &:= \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \\
(a, \infty) &:= \{x \in \mathbb{R} : a > x\} \\
(-\infty, b) &:= \{x \in \mathbb{R} : x < b\}
\end{aligned}$$

Intervalle $[a, b], [a, \infty)$ und $(-\infty, b]$ heißen abgeschlossen $(a, b), (a, \infty)$ und $(-\infty, b)$ heißen offen, $[a, b)$ und $(a, b]$ heißen halboffen. $[a, b]$ nennt man auch ein kompaktes Intervall. Ist I eines der obigen beschränken Intervalle, so nennen wir die Punkte a und b linken bzw. rechten Randpunkt und $|I| := b - a$ die Intervalllänge (falls $b \geq a$).

Satz 3.8 (Intervallschachtelungsprinzip). *Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei I_n ein nichtleeres kompaktes Intervall. Es gelte $I_{n+1} \subseteq I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie $\lim_{n\to\infty} |I_n| = 0$. Dann gibt es genau ein $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*

Satz 3.9 (Cauchysches Konvergenzkriterium). *Eine Folge reeller Zahlen konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 : |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{3.1}$$

Eine Folge mit der Eigenschaft (3.1) nennen wir eine Cauchy-Folge. Mit anderen Worten sagt der Satz also aus, dass eine Folge genau dann konvergent ist, wenn sie eine Cauchy-Folge ist. Bemerkenswert an dieser Bedingung ist, dass zum Nachweis der Grenzwert der Folge nicht bekannt sein muss.

Beispiel 3.10. Siehe Vorlesung.

Nun diskutieren wir die Dezimalbruchentwicklungen reeller Zahlen. Allgemeiner behandeln wir b-adische Entwicklungen. Zum Beispiel steht der Dezimalbruch $1,23$ für $1 \cdot 10^0 + 2 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$. Für jede reelle Zahl lässt sich eine Dezimalbruchentwicklung angeben. Anstelle von $b = 10$ können wir allgemeine b-adische Entwicklungen untersuchen. Darunter verstehen wir Summen der Form

$$\pm \sum_{k=-m}^{n} a_k b^{-k} \text{ für } n \to \infty.$$

Hier sei $m \in \mathbb{N}_0$ und $a_k \in \{0, 1, \cdots b-1\}$. Für gegebenes b schreiben wir dafür auch

$$\pm a_{-m} \; a_{-m+1} \ldots a_1 a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

Ein wichtiges Beispiel ist $b = 2$, in diesem Fall spricht man auch von der Binärentwicklung reeller Zahlen.

Satz 3.11. *Sei $b \in \mathbb{N}, b \geq 2$.*

(a) *Jede b-adische Entwicklung konvergiert gegen eine reelle Zahl für $n \to \infty$.*
(b) *Für jede reelle Zahl x existiert eine b-adische Entwicklung, die gegen x konvergiert.*

Man beachte, dass die b-adische Entwicklung einer reellen Zahl i.A. nicht eindeutig ist: Für $b = 10$ z.B. gilt $1 = 1,0000\cdots$ und $1 = 0,9999\cdots$, denn

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} 9 \cdot 10^{-k} = 9\Big(\frac{1}{1 - \frac{1}{10}} - 1\Big) = 9 \cdot \frac{1}{9} = 1.$$

Korollar 3.12. *Sei $x \in \mathbb{R}$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $y_1 \in \mathbb{Q}$ sowie $y_2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ mit $|x - y_j| < \varepsilon$ für $j = 1, 2$.*

Definition 3.13. Eine Menge M heißt

(a) abzählbar unendlich, falls M gleichmächtig zu $\mathbb{N}$ ist.
(b) abzählbar, falls M endlich oder abzählbar unendlich ist.
(c) überabzählbar, falls M nicht abzählbar ist.

Bemerkung 3.14. Siehe Vorlesung.

Satz 3.15. *Es gibt eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, also ist $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ abzählbar unendlich.*

Bemerkung 3.16. Siehe Vorlesung.

Ist N eine nichtleere Menge und M_n für jedes $n \in N$ eine Menge, so definieren wir die Vereinigung und den Schnitt

$$\bigcup_{n \in N} M_n := \{m \mid \exists n \in N : m \in M_n\} \text{ und } \bigcap_{n \in N} M_n := \{m \mid \forall n \in N : m \in M_n\}.$$

Im Falle $N = \mathbb{N}$ schreiben wir auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ und $\bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$ dafür.

Satz 3.17. (a) *Seien A, B abzählbar unendliche Mengen. Dann ist auch $A \times B$ abzählbar unendlich.*

(b) *Ist M_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ abzählbar unendlich, dann ist auch $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} M_n$ abzählbar unendlich.*

Bemerkung 3.18. Siehe Vorlesung.

Satz 3.19. $\mathbb{R}$ *ist überabzählbar.*

Bemerkung 3.20. Siehe Vorlesung.

Nun betrachten wir Teilfolgen reeller Zahlenfolgen und betrachten beispielhaft die Folge (a_n) mit $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$.

$$(a_{2j})_{j\in\mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, \ldots) = (\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{6}, \ldots)$$
$$(a_{2j-1})_{j\in\mathbb{N}} = (a_1, a_3, a_5, \ldots) = (-1, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{5}, \ldots)$$

sind zwei Beispiele für Teilfolgen von (a_n).

Definition 3.21. Es seien $f = (a_n)$ eine Folge reeller Zahlen und $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine streng monoton wachsende Abbildung. Dann heißt $f \circ \varphi = (a_{\varphi(n)})$ eine Teilfolge von f. Mit $n_j = \varphi(j)$ schreiben wir (a_{n_j}) dafür.

Bemerkung 3.22. Siehe Vorlesung.

Definition 3.23. Eine Zahl $h \in \mathbb{R}$ heißt Häufungswert der Folge (a_n) falls diese eine Teilfolge (a_{n_j}) besitzt mit $\lim_{j\to\infty} a_{n_j} h$. Mit $H(a_n)$ bezeichnen wir die Menge aller Häufungswerte.

Beispiel 3.24. Siehe Vorlesung.

Lemma 3.25. *Es sei (a_n) eine Folge und $h \in \mathbb{R}$. Es gilt $h \in H(a_n)$ genau dann, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ existieren mit $|a_n - h| < \varepsilon$.*

Satz 3.26 (Bolzano-Weierstraß). *Jede beschränkte Folge reeller Zahlen besitzt eine konvergente Teilfolge.*

Mit anderen Worten sagt der Satz von Bolzano-Weierstraß, dass jede beschränkte Folge reeller Zahlen einen Häufungswert besitzt.

Definition 3.27. Es sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen mit $H(a_n) \neq \emptyset$. Ist (a_n) nach oben bzw. nach unten beschränkt, dann heißt

$$\limsup a_n := \sup H(a_n) \text{ bzw. } \liminf a_n = \inf H(a_n)$$

der Limes superior bzw. der Limes inferior von (a_n).

Bemerkung 3.28. Siehe Vorlesung.

Beispiel 3.29. Siehe Vorlesung.

Satz 3.30. *Es sei (a_n) eine nach oben bzw. nach unten beschränkte Folge reeller Zahlen mit $H(a_n) \neq \emptyset$. Dann gilt $\limsup a_n \in H(a_n)$ bzw. $\liminf a_n \in H(a_n)$ und*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\ k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k \geq k_0 : a_k < \limsup a_n + \varepsilon \ \textit{bzw.}\ a_k > \liminf a_n - \varepsilon.$$

Bemerkung 3.31. Siehe Vorlesung.

4. Konvergenz von Reihen

Definition 4.1. Für eine Folge (a_n) reeller Zahlen heißt (s_n) für $s_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ die Folge der Partialsummen. Diese nennen wir auch (unendliche) Reihe und bezeichnen diese mit $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Wenn (s_n) konvergiert, dann heißt die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent und $\sum_{k=1}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} s_n$ bezeichnet ebenfalls die Reihensumme. Nicht konvergente Reihen heißen divergent.

Bemerkung 4.2. Siehe Vorlesung.

Satz 4.3. (a) *Es sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *eine konvergente Reihe. Dann gilt* $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ *und* $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=n}^{\infty} a_k = 0$.

(b) *Es sei* $a_k \geq 0$ *für alle* $k \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $\sum_{k=1}^{\infty} a_n$ *genau dann konvergent, wenn die Folge der Partialsummen* (s_n) *nach oben beschränkt ist.*

Beispiel 4.4. Siehe Vorlesung.

Satz 4.5 (Cauchy-Kriterium). *Eine Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert genau dann, wenn*

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists n_0 \in \mathbb{N} \; \forall n \geq m \geq n_0 : \left| \sum_{k=m}^{n} a_k \right| < \varepsilon.$$

Satz 4.6. *Es sei* (a_n) *eine monoton fallende Folge nicht-negativer reeller Zahlen und es sei* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergent. Dann folgt* $\lim_{k\to\infty} k \cdot a_k = 0$.

Satz 4.7 (Leibniz-Kriterium). *Es sei* (a_n) *eine monoton fallende Nullfolge. Dann konvergiert* $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_k$.

Beispiel 4.8. Siehe Vorlesung.

Definition 4.9. Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt absolut konvergent, falls die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Satz 4.10. *Absolut konvergente Reihen reeller Zahlen sind konvergent.*

Beispiel 4.11. Siehe Vorlesung.

Satz 4.12 (Majoranten-Kriterium). *Es seien* (a_k) *und* (b_k) *zwei Folgen reeller Zahlen und es gebe ein* $k_0 \in \mathbb{N}$, *so dass für alle* $k \geq k_0$ *gilt* $|a_k| \leq b_k$. *Wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konvergiert, dann konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *absolut.*

Nun vergleichen wir Reihen mit einer speziellen Reihe, dessen Summe wir gut verstehen, nämlich mit der geometrischen Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

Satz 4.13 (Wurzelkriterium). *Wenn $s := \limsup \sqrt[k]{|a_k|}$ existiert und $s < 1$ gilt, dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Wenn hingegen $\sqrt[k]{|a_k|} \geq 1$ für unendlich viele k gilt, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.*

Satz 4.14 (Quotientenkriterium). *Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $a_k \neq 0$ und es existiere $s := \limsup \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$ und es gelte $s < 1$. Dann ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent. Gilt jedoch $\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} \geq 1$ für alle $k \geq k_0 \in \mathbb{N}$, dann divergiert $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$.*

Bemerkung 4.15. Siehe Vorlesung.

Beispiel 4.16. Siehe Vorlesung.

Nun kommen wir zu Umordnungen konvergenter Reihen

Bemerkung 4.17. Siehe Vorlesung.

Satz 4.18. *Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist genau dann absolut konvergent, wenn für jede bijektive Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ die umgeordneten Reihen $\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)}$ konvergieren. In diesem Fall gilt*

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{\varphi(l)} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k.$$

Nun kommen wir zur Multiplikation absolut konvergenter Reihen: Seien $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ und $s'_n = \sum_{l=0}^{n} a'_l$ konvergent mit $s_n \to s$, $s'_n \to s'$. Nach Satz 2.14 ist $s \cdot s' = \lim_{n\to\infty} (s_n \cdot s'_n)$.

Wir betrachten nun $s_n \cdot s'_n$. Es werden alle Paare $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$ in einem Quadrat mit der Seitenlänge n und linkem unteren Eckpunkt $(0, 0)$ aufsummiert, denn es gilt

$$s_n \cdot s'_n = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) \left(\sum_{l=0}^{n} a'_l\right) = \sum_{0\leq k,l\leq n} a_k a'_l = \sum_{m=0}^{n} g_m,$$

wobei g_m die Teilsummen

$$g_m = \sum_{(k,l):\ \max(k,l)=m} a_k a'_l$$

bezeichne. Also folgt für konvergente Reihen $s \cdot s' = \sum_{m=0}^{\infty} g_m$.

Alternativ kann man bei absolut konvergenten Reihen die Doppelsumme auch in Teilsummen über gewisse Diagonalen aufspalten. Setze dazu

$$d_m := \sum_{(k,l):\ k+l=m} a_k a'_l = \sum_{j=0}^{m} a_j a'_{m-j}.$$

Es gilt $\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m = s \cdot s'$ genau dann, wenn die Fehlerterme

$$r_n := s_n \cdot s_n' - \sum_{m=0}^{n} d_m = \sum_{0 \le k,l \le n:\, k+l>n} a_k a_l'$$

eine Nullfolge bilden. Die Summe wird hier also über alle Paare $(k,l) \in \mathbb{N}_0^2$ gebildet, die im Teildreieck $k+l>n$ des Quadrats mit der Seitenlänge n und linkem unteren Eckpunkt $(0,0)$ liegen.

Satz 4.19 (Cauchy-Produkt). *Es seien* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ *und* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l'$ *absolut konvergent und* $d_m = \sum\limits_{j=0}^{m} a_j a_{m-j}'$. *Dann ist auch* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m$ *absolut konvergent und es gilt* $\sum\limits_{m=0}^{\infty} d_m = \left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k\right)\left(\sum\limits_{l=0}^{\infty} a_l'\right)$

Beispiel 4.20. Siehe Vorlesung.

Wir beschließen diesen Abschnitt mit der Diskussion der Reihe $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ für $x \in \mathbb{R}$. Nach dem Quotientenkriterium konvergiert diese Reihe absolut für jedes $x \in \mathbb{R}$, denn für $x \neq 0$ gilt

$$\frac{\frac{|x|^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{|x|^k}{k!}} = \frac{|x|}{k+1} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Definition 4.21. Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\exp(x) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

Bemerkung 4.22. Siehe Vorlesung.

Die Exponentialfunktion erfüllt folgende Funktionalgleichung.

Satz 4.23. *Es gilt für* $x, y \in \mathbb{R}$ *gilt* $\exp(x+y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$.

Satz 4.24. *Es sei* $x \in \mathbb{R}$. *Die Exponentialfunktion erfüllt folgende Eigenschaften:*

(a) $\exp(x) > 0$ *und* $\exp(-x) = (\exp(x))^{-1}$
(b) $\exp(x) = \lim\limits_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n$.
(c) *Für jedes* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $|x| \le 1$ *gilt:* $\left|\exp(x) - \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\right| \le \frac{2}{(n+1)!}|x|^{n+1}$.

Satz 4.25. *Die Eulersche Zahl*

$$e = \lim_{n\to\infty} (1 + \frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

ist irrational.

5. Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

Erinnerung: reellwertige Abbildungen nennen wir Funktionen. Hier betrachten wir Funktionen $f : D \to \mathbb{R}$, wobei der Definitionsbereich D stets eine (nichtleere) Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$, so setzen wir

$$\begin{aligned}
&f + g : D \to \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x)\\
&f \cdot g : D \to \mathbb{R}, (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)\\
&\lambda f : D \to \mathbb{R}, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)
\end{aligned}$$

Ist $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D$, so definieren wir auch

$$\frac{f}{g} : D \to \mathbb{R},\ (\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

Für eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ und eine Teilmenge $M \subseteq D$ definieren wir die Einschränkung $f\,|_M : M \to \mathbb{R}, f\,|_M\,(x) = f(x)$.

Definition 5.1. Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. a heißt Häufungspunkt der Menge M, falls für alle $\varepsilon > 0$ die Menge $M \cap \{x \in \mathbb{R} : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ nichtleer ist.

Beispiel 5.2. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 5.3. Siehe Vorlesung.

Satz 5.4. *Es sei $M \subseteq \mathbb{R}$. a ist Häufungspunkt von M genau dann, wenn es eine Folge (a_n) gibt mit $a_n \in M\backslash\{a\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.*

Definition 5.5. Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$, a ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$.

(a) $l \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert (oder Limes) von f in a, falls gilt:
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \quad \forall x \in D\backslash\{a\} : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$
Wir schreiben $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l$ oder $f(x) \to l$ für $x \to a$.

(b) Wir sagen f divergiert bestimmt gegen $+\infty$ oder strebt gegen $+\infty$ für $x \to a$, falls
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \quad \forall x \in D\backslash\{a\} : |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$
Wir schreiben dafür $f(x) \to +\infty$ für $x \to a$.

(c) Wir sagen f divergiert bestimmt gegen $-\infty$ oder strebt gegen $-\infty$ für $x \to a$, falls
$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0 \quad \forall x \in D\backslash\{a\} : |x - a| < \delta \Longrightarrow f(x) > -\frac{1}{\varepsilon}.$$
Wir schreiben dafür $f(x) \to -\infty$ für $x \to a$.

Manchmal schreiben wir für $+\infty$ einfach ∞.

Bemerkung 5.6. Siehe Vorlesung.

Beispiel 5.7. Siehe Vorlesung.

Satz 5.8. *Es seien $D \subseteq \mathbb{R}$ mit Häufungspunkt $a \in \mathbb{R}$, eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$, sowie $l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ gegeben. Es gilt $f(x) \to l$ für $x \to a$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D \setminus \{a\}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ folgt $f(x_n) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} l$.*

Beispiel 5.9. Siehe Vorlesung.

Definition 5.10. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von

$$D_{<a} = \{x \in D : x < a\} \text{ bzw.} D_{>a} = \{x \in D : x > a\}$$

sowie $f : D \to \mathbb{R}$.

(a) $l \in \mathbb{R}$ heißt linksseitiger bzw. rechtsseitiger Grenzwert oder Limes von f in a, falls l Grenzwert von $f\,|_{D_{<a}}$ bzw. $f\,|_{D_{>a}}$ ist und wir setzen

$$\lim_{x\uparrow a} f(x) := \lim_{x\to a} f\,|_{D_{<a}} \text{ bzw. } \lim_{x\downarrow a} f(x) := \lim_{x\to a} f\,|_{D_{>a}}.$$

(b) Wir sagen, f divergiert bestimmt oder strebt gegen $+\infty$ [gegen $-\infty$] für $x \uparrow a$ bzw. $x \downarrow a$, falls $f\,|_{D_{<a}}$ bzw. $f\,|_{D_{>a}}$ gegen $+\infty$ [gegen $-\infty$] strebt für $x \to a$.

Beispiel 5.11. Siehe Vorlesung.

Definition 5.12. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ nach unten bzw. nach oben unbeschränkt und $f : D \to \mathbb{R}$.

(a) $l \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert oder Limes von f in $-\infty$ bzw. in $+\infty$, falls gilt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D : x < -\frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$
$$\text{bzw. } x > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow |f(x) - l| < \varepsilon.$$

Wir schreiben dafür

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \text{ oder auch } f(x) \to l \text{ für } x \to -\infty$$
$$\text{bzw. } \lim_{x\to\infty} f(x) = l \text{ oder auch } f(x) \to l \text{ für } x \to +\infty$$

(b) Wir sagen, f divergiert bestimmt gegen $+\infty$ oder strebt gegen $+\infty$ für $x \to -\infty$ bzw. für $x \to +\infty$ falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D : x < -\frac{1}{\delta} \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$$
$$\text{bzw. } x > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow f(x) > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Wir schreiben dafür $f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$.

(c) Wir sagen, f divergiert bestimmt gegen $-\infty$ oder strebt gegen $-\infty$ für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$ falls

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D : x < -\frac{1}{\delta} \Longrightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$
$$\text{bzw. } x > \frac{1}{\delta} \Longrightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}.$$

Wir schreiben dafür $f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$ bzw. $x \to +\infty$.

Lemma 5.13. *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Es gilt $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^k}{\exp(x)} = 0$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} x^k \exp(x) = 0$*

Bemerkung 5.14. Siehe Vorlesung.

Satz 5.15. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$ sei Häufungspunkt von D oder $a = \infty$ und D sei nach oben unbeschränkt oder $a = -\infty$ und D sei nach unten unbeschränkt. Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ mit den Grenzwerten $\lim\limits_{x\to a} f(x) = l \in \mathbb{R}$ sowie $\lim\limits_{x\to a} g(x) = m \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = l + m$ und $\lim\limits_{x\to a}(f \cdot g)(x) = l \cdot m$. Ist $m \neq 0$, so gilt auch $\lim\limits_{x\to a} \frac{f}{g}(x) = \frac{l}{m}$.*

Definition 5.16. Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$.

(a) f heißt stetig in $a \in D$, falls
$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in D : |x - a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$
(b) f heißt stetig (auf D), falls für jedes $a \in D$ gilt, dass f stetig in a ist.

Bemerkung 5.17. Siehe Vorlesung.

Satz 5.18. *Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $a \in D$ sei ein Häufungspunkt von D und $f : D \to \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(a) *f ist stetig in a.*
(b) *Es gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.*
(c) *Für jede Folge (x_n) mit $x_n \in D$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$.*

Bemerkung 5.19. Siehe Vorlesung.

Beispiel 5.20. Siehe Vorlesung.

Satz 5.21. *Es seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ stetig in $a \in D$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g, \lambda f, f \cdot g$ stetig in a. Ist $g(a) \neq 0$, so gibt es $\delta > 0$, so dass $g(x) \neq 0$ für alle $x \in D' := D \cap (a - \delta, a + \delta)$ gilt und $\frac{f|_{D'}}{g|_{D'}}$ ist in a stetig.*

Bemerkung 5.22. Siehe Vorlesung.

Beispiel 5.23. Siehe Vorlesung.

Satz 5.24. *Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$, $g : E \to \mathbb{R}$ und $f(D) \subseteq E$. Ist f in a und g in $f(a)$ stetig, so ist auch $g \circ f : D \to \mathbb{R}$ in a stetig.*

Beispiel 5.25. Siehe Vorlesung.

Satz 5.26 (Zwischenwertsatz). *Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sei stetig.*

(a) *Ist $f(a) < f(b)$, so gibt es zu jedem $c \in (f(a), f(b))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.*
(b) *Ist $f(a) > f(b)$, so gibt es zu jedem $c \in (f(b), f(a))$ ein $\xi \in (a, b)$ mit $f(\xi) = c$.*

Bemerkung 5.27. Siehe Vorlesung.

Wir beweisen nun die Existenz von k-ten Wurzeln mit den Zwischenwertsatz.

Satz 5.28. *Seien $k \in \mathbb{N}$, $y \geq 0$. Dann existiert genau eine $k-$te Wurzel ($x = \sqrt[k]{y}$) von y, d.h. eine Zahl $x \geq 0$ mit $x^k = y$.*

Satz 5.29. *Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$ ist streng monoton wachsend, stetig und bijektiv.*

Definition 5.30. Die Logarithmusfunktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist die Umkehrfunktion der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to (0, \infty)$.

Bemerkung 5.31. Siehe Vorlesung.

Satz 5.32. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ streng monoton und stetig. Dann ist auch $f(I) =: J$ ein Intervall die Umkehrfunktion $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ ist stetig.*

Satz 5.33. *Die Logarithmusfunktion $\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ ist stetig, streng monoton wachsend und bijektiv. Es gilt $\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$ für alle $x, y > 0$.*

Bemerkung 5.34. Siehe Vorlesung.

Definition 5.35. Für $a > 0, b \in \mathbb{R}$ definieren wir $a^b := \exp(b \ln(a))$

Bemerkung 5.36. Siehe Vorlesung.

Zur Erinnerung: Ein kompaktes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ ist von der Form $I = [a, b]$ für reelle Zahlen a, b mit $a \leq b$.

Satz 5.37. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ sei stetig. Dann ist f beschränkt und f nimmt sowohl das Maximum und als auch das Minimum an.*

Bemerkung 5.38. Siehe Vorlesung.

Beispiel 5.39. Siehe Vorlesung.

6. Differenzialrechnung

In diesem Abschnitt betrachten wir Intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ mit mehr als einem Punkt und nennen diese echte Intervalle.

Definition 6.1. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$. f heißt differenzierbar in $a \in I$, falls

$$f'(a) := \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

existiert. Dieser Grenzwert $f'(a)$ heißt dann die Ableitung von f an der Stelle a. f heißt differenzierbar, falls für alle $a \in I$ gilt, dass f in a differenzierbar ist.

Beispiel 6.2. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 6.3. Siehe Vorlesung.

Satz 6.4. *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f, g : I \to \mathbb{R}$ in $a \in \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Es gelten:*

(a) *$f + g$ ist in a differenzierbar mit $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$.*
(b) *$f \cdot g$ ist in a differenzierbar mit $(f \cdot g)'(a) = f'(a)\ g(a) + f(a)\ g'(a)$.*
(c) *Ist $g(a) \neq 0$, so gilt $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}$.*

Beispiel 6.5. Siehe Vorlesung.

Satz 6.6 (Kettenregel). *Es seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ echte Intervalle, $f : I \to J$, $g : J \to \mathbb{R}$, f sei in $a \in I$ differenzierbar und g sei in $f(a)$ differenzierbar. Dann ist $g \circ f : I \to \mathbb{R}$ in $a \in I$ differenzierbar und es gilt $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.*

Satz 6.7. *Seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Dann ist $J := f(I)$ ein echtes Intervall. Ist zusätzlich f in a differenzierbar mit $f'(a) \neq 0$, so ist auch $f^{-1} : J \to I$ in $f(a)$ differenzierbar mit $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$.*

Beispiel 6.8. Siehe Vorlesung.

Definition 6.9. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall. Ist $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar und $f' : I \to \mathbb{R}$ stetig, so heißt f stetig differenzierbar. Wir schreiben $C^1(I) = C^1(I, \mathbb{R})$ für die Menge aller stetig differenzierbaren Funktionen. Wir setzen $f^{(0)} = f$ und $f^{(1)} = f'$ und für $k \in \mathbb{N}$ definieren wir rekursiv $f^{(k+1)}(a) = (f^{(k)})'(a)$, falls die k-te Ableitung $f^{(k)} : I \to \mathbb{R}$ existiert und in a differenzierbar ist. Die Menge $C^{k+1}(I) = C^{k+1}(I, \mathbb{R})$ ist definiert als die Menge der $(k+1)$-mal differenzierbaren Funktionen f, für die $f^{(k+1)} : I \to \mathbb{R}$ stetig ist und nennen die Elemente von $C^{k+1}(I)$ $(k+1)$-mal stetig differenzierbare Funktionen. Wir setzen $C^\infty(I) := \bigcap_{k=1}^{\infty} C^k(I)$ und bezeichnen dessen Elemente als unendlich oft differenzierbare Funktionen.

Bemerkung 6.10. Siehe Vorlesung.

Beispiel 6.11. Siehe Vorlesung.

Die Exponentialfunktion hatten wir über eine sogenannte Potenzreihe definiert, d.h. durch eine Funktionsvorschrift der Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k.$$

Nach dem Wurzelkriterium konvergiert diese Reihe, wenn $\limsup \sqrt[k]{|a_k(x-x_0)^k|} < 1$. Der sogenannte Konvergenzradius ist definiert als $\rho = (\limsup \sqrt[k]{|a_k|})^{-1}$ (hier lassen wir $\rho = +\infty$ zu, falls $\limsup \sqrt[k]{|a_k|} = 0$, auch setzen wir $\rho = 0$, falls die Folge $\sqrt[k]{|a_k|}$ nach oben unbeschränkt ist). Ist $\rho \in (0, \infty)$, so konvergiert die Potenzreihe also für jedes $x \in (x_0 - \rho, x_0 + \rho)$. Im Fall $\rho = +\infty$ konvergiert die Reihe für jedes $x \in \mathbb{R}$ und wir lesen $(x_0 - \rho, x_0 + \rho) = \mathbb{R}$.

Satz 6.12. *Es sei $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \neq 0$. Dann definiert diese eine differenzierbare Funktion $f : (x_0-\rho, x_0+\rho) \to \mathbb{R}$ mit $f'(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_{k+1}(x-x_0)^k$. Die Funktion f ist sogar unendlich oft diffenzierbar.*

Definition 6.13. Die Funktionen *Sinus* und *Cosinus* sind definiert durch

$$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1},$$
$$\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ \cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k}.$$

Satz 6.14. *Es seien $x, y \in \mathbb{R}$.*

(a) $\sin, \cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sind (beliebig oft) differenzierbar mit* $\sin' = \cos$ *und* $\cos' = -\sin$.
(b) $\sin(-x) = -\sin(x), \cos(-x) = \cos(x)$
(c) $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$
(d) $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$
(e) $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$

Definition 6.15. Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ hat ein lokales Maximum [Minimum] in $a \in I$, falls es $\delta > 0$ gibt mit:

$$\forall x \in I : |x-a| < \delta \Longrightarrow f(x) \leq f(a)\ [f(x) \geq f(a)].$$

In diesem Fall heißt a lokale Maximalstelle [Minimalstelle] von f.

Von nun an bezeichnen wir Minima und Maxima von f (also von $f(I)$) oft als globale Minima und Maxima (entspricht $\delta = +\infty$). Ein lokales Extremum ist ein lokales Minimum oder Maximum.

Satz 6.16. *Es sei I ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ besitze in a ein lokales Extremum. Ist f differenzierbar in a, so gilt $f'(a) = 0$.*

Bemerkung 6.17. Siehe Vorlesung.

Satz 6.18 (Rolle). *Sei $f \in C\,[a,b]$ eine auf (a,b) differenzierbare Funktion mit $f(a) = f(b)$. Dann gibt es $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = 0$.*

Satz 6.19 (1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung). *Es sei $f \in C[a,b]$ auf (a,b) differenzierbar. Dann existiert $\xi \in (a,b)$ mit $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.*

Korollar 6.20. *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in I$. Dann ist f konstant.*

Satz 6.21. *Es sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar.*

(a) *Gilt $f'(x) \geq 0$ [bzw. $f'(x) > 0$ bzw. $f'(x) \leq 0$ bzw. $f'(x) < 0$] für alle $x \in (a,b)$, so ist f in (a,b) monoton wachsend [bzw. streng monoton wachsend bzw. monoton fallend bzw. streng monoton fallend].*

(b) *Ist f monoton wachsend [fallend], so folgt $f'(x) \geq 0$ [$f'(x) \leq 0$] für alle $x \in (a,b)$.*

Nun kommen wir zu hinreichenden Kriterien für lokale Extrema.

Satz 6.22. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f'(a) = 0$ für ein $a \in I$.*

(a) *Wechselt f' das Vorzeichen in a von $-$ zu $+$ [von $+$ zu $-$], d.h.*

$$\exists\, \delta > 0 \quad \forall\, x \in I : |x-a| < \delta \Longrightarrow (x-a)\ f'(x) \geq 0\ [\leq 0],$$

so besitzt f ein lokales Minimum [Maximum] in a.

(b) *Ist zusätzlich f' in a differenzierbar und gilt $f''(a) > 0$ [$f''(a) < 0$], dann hat f ein lokales Minimum [Maximum] in a.*

Bemerkung 6.23. Siehe Vorlesung.

Beispiel 6.24. Siehe Vorlesung.

Satz 6.25. *Es gibt genau eine positive reelle Zahl, die sog. Kreiszahl π, mit den Eigenschaften*

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \qquad \textit{und } \cos(x) > 0 \textit{ für alle } x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Bemerkung 6.26. Siehe Vorlesung.

Satz 6.27 (Regeln von de l'Hospital). *Es seien $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ und $f, g : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b)$. Es gelte*

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \downarrow a} l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}.$$

(a) *Gilt $f(x) \to 0$ und $g(x) \to 0$ für $x \downarrow a$, so folgt $\frac{f(x)}{g(x)} \longrightarrow l$ für $x \downarrow a$.*

(b) *Gilt $f(x) \to +\infty$ und $g(x) \to +\infty$ für $x \downarrow a$, so folgt $\frac{f(x)}{g(x)} \to l$ für $x \downarrow a$.*

Bemerkung 6.28. Siehe Vorlesung.

Beispiel 6.29. Siehe Vorlesung.

7. Das Riemann-Integral

Für die Definition des Flächeninhalts ebener Mengen ist unser Ausgangspunkt, dass Rechtecke mit den Seitenlängen $a \geq 0$ und $b \geq 0$ den Flächeninhalt $a \cdot b$ haben sollten. Ausserdem sollte der Flächeninhalt endlich vieler disjunkter Rechtecke die Summe der Flächeninhalte der einzelnen Rechtecke sein.

Definition 7.1. Eine Zerlegung $\mathcal{Z}$ eines kompakten Intervalls $[a, b]$ ist eine endliche Teilmenge von $[a, b]$ mit $a, b \in \mathcal{Z}$. Die Feinheit einer Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ ist durch

$$\triangle(\mathcal{Z}) = \max\{x_k - x_{k-1} : k \in \{1, \ldots, n\}\}$$

definiert. Eine Funktion $t : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion (bzgl. der Zerlegung $\mathcal{Z}$), falls die Einschränkungen $t|_{(x_{k-1}, x_k)}$ konstant sind für jedes $1 \leq k \leq n$. Die Menge aller Treppenfunktionen (bzgl. einer beliebigen Zerlegung) auf $[a, b]$ bezeichnen wir mit $T[a, b]$.

Die Werte $t(x_k)$ an den Zerlegungsstellen x_k sind dabei also unerheblich.

Definition 7.2. Es sei $t \in T[a, b]$ eine Treppenfunktion bzgl. der Zerlegung $\mathcal{Z} = \{a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b\}$ und es sei $t_k \in \mathbb{R}$ mit $t(x) = t_k$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$, $k = 1, \ldots, n$. Das Integral von t ist definiert durch

$$\int_a^b t(x)dx := \sum_{k=1}^{n} t_k \cdot (x_k - x_{k-1}).$$

Dies kann als orientierter Inhalt der Fläche betrachten werden, die durch den Graph von t und die $x-$Achse berandet wird.

Bemerkung 7.3. Siehe Vorlesung.

Definition 7.4. Es sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann heißt

$$\int_a^{b*} f(x)dx := \inf\{\int_a^b t(x)dx : t \in T[a, b], t \geq f\}$$

das Oberintegral von f, und

$$\int_{a*}^{b} f(x)dx := \sup\{\int_a^b t(x)dx : t \in T[a, b], t \leq f\}$$

das Unterintegral von f.

Bemerkung 7.5. Siehe Vorlesung.

Beispiel 7.6. Siehe Vorlesung.

Definition 7.7. Eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt (Riemann-)integrierbar, falls f beschränkt ist und

$$\int_a^{b*} f(x)dx = \int_{a*}^{b} f(x)dx$$

gilt. In diesem Fall definieren wir das (Riemann-)Integral als $\int\limits_a^b f(x)dx := \int\limits_a^{b*} f(x)dx$ und bezeichnen die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen auf $[a,b]$ mit $R[a,b]$.

Bemerkung 7.8. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 7.9. Siehe Vorlesung.

Satz 7.10. *Es seien $f, g \in R[a,b]$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f + \lambda g$ Riemann-integrierbar und es gilt*

(a) $\int\limits_a^b (f+\lambda g)(x)dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \lambda \int\limits_a^b g(x)dx$

(b) *Aus $f \leq g$ folgt $\int\limits_a^b f(x)dx \leq \int\limits_a^b g(x)dx$*

Ohne Beweis.

Satz 7.11. (a) *Jede monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*
(b) *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar.*

Beispiel 7.12. Siehe Vorlesung.

Definition 7.13. Für $f : D \to \mathbb{R}$ seien $f_+, f_- : D \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x), & \text{falls } f(x) > 0 \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

und $f_- := f_+ - f$.

Es gilt offenbar $f_+, f_- \geq 0,\ f = f_+ - f_-,\ |f| = f_+ + f_-$.

Satz 7.14. *Seien $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.*

(a) *f_+, f_- und $|f|$ sind Riemann-integrierbar und $|\int\limits_a^b f(x)dx| \leq \int\limits_a^b f(x)dx$.*

(b) *$f \cdot g$ und $|f|^p$ (für $p \geq 1$) sind Riemann-integrierbar.*

Satz 7.15 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Es seien $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar mit $g \geq 0$. Dann existiert ein $\xi \in [a,b]$, so dass*

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

Bemerkung 7.16. Siehe Vorlesung.

Wir setzen nun $\int\limits_b^a f(x)dx := -\int\limits_a^b f(x)dx$ für a < b und $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$.

Definition 7.17. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall. Eine differenzierbare Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ heißt Stammfunktion von $f : I \to \mathbb{R}$, falls $F' = f$ gilt.

Bemerkung 7.18. Siehe Vorlesung.

Satz 7.19 (Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung). (a) *Seien $I \subset \mathbb{R}$ ein echtes Intervall und $a \in I$. Für eine stetige Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x) := \int\limits_a^x f(y)dy$ eine Stammfunktion von f.*

(b) *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Stammfunktion zu f, so gilt*

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Bemerkung 7.20. Siehe Vorlesung.

Beispiel 7.21. Siehe Vorlesung.

Satz 7.22 (Partielle Integration). *Seien $f, g \in C^1([a,b])$. Es gilt*

$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f \cdot g|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

Beispiel 7.23. Siehe Vorlesung.

Satz 7.24 (Substitutionsregel). *Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f :\to \mathbb{R}$ stetig und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g([a,b]) \subseteq I$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

Beispiel 7.25. Siehe Vorlesung.

Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f : I \to \mathbb{R}$. Inwieweit kann man Funktionen in einer Umgebung von a durch Polynome approximieren?

Gilt

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m} a_k (x-a)^k \quad x \in (a-\rho, a+\rho), \rho > 0.$$

so ist offenbar $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

Definition 7.26. Es sei $I \subset \mathbb{R}$ offenes Intervall, $m \in \mathbb{N}_0$, $a \in I$ und f $m-$mal differenzierbar in a. Das Polynom $T_m^a(f)(x) := \sum\limits_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ nennt man das Taylor-Polynom vom Grad m zu f in a.

Beispiel 7.27. Siehe Vorlesung.

Satz 7.28 (Taylor). *Es seien $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $a \in I$ und $f \in C^{m+1}(I)$. Dann gilt für $x \in I$:*

$$f(x) = T_m^a(f)(x) + R_{m+1}^a(f)(x) \text{ mit } R_{m+1}^a(f)(x) = \int_a^x f^{(m+1)}(t)\frac{(x-t)^m}{m!}dt.$$

Es sei $\delta > 0$ mit $[a-\delta, a+\delta] \subset I$ und $c_m := \frac{1}{m!}\sup_{|t-a|\leq\delta}|f^{(m+1)}(t)|$. Für das Restglied $R_{m+1}^a(f)$ gilt

$$|R_{m+1}^a(f)(x)| \leq c_m|x-a|^{m+1}, \text{ für alle } x \text{ mit } |x-a| \leq \delta.$$

Bemerkung 7.29. Siehe Vorlesung.

Man kann den Taylorschen Satz auch benutzen, um Potenzreihenentwicklungen von gewissen Funktionen $f \in C^\infty(I)$ herzuleiten. Dazu sind Abschätzungen an das Restglied für $m \to \infty$ erforderlich. Im Allgemeinen kann man keine Konvergenz der Taylorrreihe ($T_m^a(f)$ für $m \to \infty$) gegen f erwarten, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 7.30. Siehe Vorlesung.

Beispiel 7.31. Siehe Vorlesung.

Teil 2

Lineare Algebra

8. Vektorräume

Definition 8.1. Sei G eine Menge und $\circ$ eine Abbildung

$$\circ : G \times G \to G, (a, b) \mapsto a \circ b.$$

Dann $(G, \circ)$ heißt *Gruppe*, wenn die drei folgenden Eigenschaften erfüllt sind:

(G1)	$(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c) \forall a, b, c \in G$	(assoziativ)
(G2)	$\exists\, e \in G$ mit $e \circ a = a \; \forall a \in G$	(linksseitig neutrales Element)
(G3)	$\forall\, a \in G \; \exists\, b \in G$ mit $b \circ a = e$	(linksseitig inverses Element)

Eine Gruppe G heißt *abelsch*, wenn $a \circ b = b \circ a$ für alle $a, b \in G$ gilt.

Beispiel 8.2. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 8.3. Siehe Vorlesung.

Definition 8.4. Sei $(V, +)$ eine abelsche Gruppe, K ein Körper, und $\cdot$ eine Abbildung $K \times V \to V$. Dann heißt V *Vektorraum über* K (oder K-*Vektorraum*), wenn $\forall\, a, b \in K, \forall\, v, w \in V$

V1) $a \cdot (v + w) = a \cdot v + a \cdot w$
V2) $(a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
V3) $(ab) \cdot v = a \cdot (b \cdot v)$
V4) $1 \cdot v = v, 1 \in K$ das neutrale multiplikative Element

Das Neutralelement $0 \in V$ heißt *Nullvektor*.

Bemerkung 8.5. Siehe Vorlesung.

Beispiel 8.6. Siehe Vorlesung.

Definition 8.7. Sei V ein Vektorraum über K und W eine nichtleere Teilmenge von V. W heißt *Unterraum* von V, wenn $\forall\, v, w \in W, a \in K$ gilt: $v + w \in W, a \cdot v \in W$. Man schreibt $W \leq V$.

Bemerkung 8.8. Siehe Vorlesung.

Beispiel 8.9. Siehe Vorlesung.

Satz 8.10. *Seien W_1, W_2 Unterräume des K-Vektorraums V. Dann sind $W_1 \cap W_2$ und*

$$W_1 + W_2 := \{v + w \mid v \in W_1 \wedge w \in W_2\}$$

(„Summe von W_1 und W_2") Unterräume von V. Es ist $W_1 \cap W_2$ der größte Unterraum, der in W_1 und W_2 enthalten ist und $W_1 + W_2$ der kleinste Unterraum, der W_1 und W_2 enthält.

Beispiel 8.11. Siehe Vorlesung.

Definition 8.12.

(a) Seien W_1, W_2 Unterräume des Vektorraums V mit

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}, \quad W_1 + W_2 = V.$$

Dann heißt V *direkte Summe* von W_1 und W_2, geschrieben $V = W_1 \oplus W_2$.

(b) Seien V_1 und V_2 Vektorräume über demselben Körper K. Dann heißt

$$V_1 \oplus V_2 := \{(v_1, v_2) \mid v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\}$$

abstrakte (oder *externe*) *direkte Summe* von V_1 und V_2, wobei $+$ und $\cdot$ komponentenweise erklärt sind, das heißt $\forall\, v_i, w_i \in V_i, \forall\, a \in K$,

$$(v_1, v_2) + (w_1, w_2) := (v_1 + v_2, w_1 + w_2), \quad a \cdot (v_1, v_2) = (av_1, av_2).$$

Beispiel 8.13. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 8.14. Siehe Vorlesung.

Definition 8.15. Seien V ein K-Vektorraum und $v_1, \ldots, v_n \in V$ und $a_1, \ldots, a_n \in K$. Dann heißt $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in V$ *Linearkombination* der Vektoren $v_1, \ldots v_n$.

Beispiel 8.16. Siehe Vorlesung.

Definition 8.17. Sei S eine nichtleere Teilmenge des Vektorraums V. Dann heißt

$$\mathcal{L}(S) = \operatorname{span}(S) := \{(\text{endliche) Linearkombinationen von Vektoren aus } S\}$$

die (K-)*lineare Hülle* von S. Weiter sei $\mathcal{L}(\{\}) := \{0\}$. Gilt $\mathcal{L}(S) = V$, so heißt S *Erzeugendensystem* von V.

Bemerkung 8.18. Siehe Vorlesung.

Beispiel 8.19. Siehe Vorlesung.

Definition 8.20. Sei $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine endliche Teilmenge des Vektorraums V. Dann heißt S (bzw. die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$) *linear unabhängig*, wenn aus

$$\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 (\lambda_i \in K)$$

folgt, dass $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$. Eine unendliche Teilmenge von V heißt linear unabhängig, wenn jede endliche Teilmenge linear unabhängig ist. Ist S nicht linear unabhängig, so heißt S *linear abhängig.*

Beispiel 8.21. Siehe Vorlesung.

Definition 8.22. Eine linear unabhängige Teilmenge $B \subseteq V$ heißt *Basis* von V, wenn $\mathcal{L}(B) = V$ gilt, d.h. wenn B ein EZS von V ist.

Beispiel 8.23. Siehe Vorlesung.

Bemerkung 8.24. Siehe Vorlesung.

Definition 8.25. Ein Vektorraum V heißt *endlich erzeugt*, falls er ein endliches EZS hat.

Lemma 8.26. *Sei S eine linear abhängige Teilmenge von V. Dann existiert eine echte Teilmenge $S' \subset S$ mit $\mathcal{L}(S') = \mathcal{L}(S)$.*

Korollar 8.27. *Sei $S \subset V$ endlich. Dann existiert eine linear unabhängige Teilmenge $T \subseteq S$ mit $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(S)$.*

Satz 8.28. *Jeder endlich erzeugte Vektorraum besitzt eine (endliche) Basis.*

Bemerkung 8.29. Siehe Vorlesung.

Nächstes Ziel: Gleichmächtigkeit (endlicher) Basen $\rightsquigarrow$ Dimensionsbegriff.

Satz 8.30. *Sei $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V und $S = \{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann gilt: Es gibt eine Teilmenge B' von B, so dass $S \cup B'$ eine Basis von V ist. Insbesondere folgt $k \leq n$*

Korollar 8.31. *Sei V endlich erzeugt. Dann haben alle Basen die gleiche Zahl von Vektoren.*

Definition 8.32. Sei V ein Vektorraum über K. Dann heißt

$$\dim V := \begin{cases} \text{Kardinalität einer Basis,} & \text{falls } V \text{ endlich erzeugt ist} \\ \infty, & \text{falls } V \text{ nicht endlich erzeugt ist} \end{cases}$$

die *Dimension* von V über K.

Bemerkung 8.33. Siehe Vorlesung.

Beispiel 8.34. Siehe Vorlesung.

Korollar 8.35 (Basisergänzungssatz). *Sei V n-dimensional und $S = \{u_1, \ldots, u_k\} \subseteq V$ linear unabhängig. Dann existieren Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_n$, so dass $B = \{u_1, \ldots, u_k, v_{k+1}, \ldots, v_n\}$ eine Basis ist.*

Die folgenden Sätze sind Anwendungen des Basisergänzungssatzes 8.35:

Satz 8.36. *Seien U und V endlich dimensionale Vektorräume über K. Dann gilt:*

(a) $\dim_K(U \oplus V) = \dim_K U + \dim{}_K V$
(b) $U \leq V \Rightarrow \dim_K U \leq \dim_K V$
(c) *Sei $U \leq V$. Dann gilt $\dim_K U = \dim_K V$ genau dann, wenn $U = V$.*

Satz 8.37. *Seien W_1, W_2 Unterräume eines endlich-diemensionalen Vektorraums V. Dann gilt:*

$$\dim_K W_1 + \dim_K W_2 = \dim_K(W_1 \cap W_2) + \dim_K(W_1 + W_2)$$

Insbesondere gilt: $W_1 + W_2$ ist genau dann eine direkte Summe, wenn $\dim_K W_1 + \dim_K W_2 = \dim_K(W_1 + W_2)$.