Mehrfachintegrale

- Masse eines Quaders: $M = \rho \cdot V$
- wenn der Quader inhomogen ist: $\rho = \rho(x, y, z)$

⇨ $\Delta V_i = \Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$

⇨ $\Delta M_i \approx \rho(x_i, y_i, z_i)\,\Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$

$$M \approx \sum_{i=1}^{N} \Delta M_i = \sum_{i=1}^{N} \rho(x_i, y_i, z_i)\,\Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i$$

$$M = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{N} \rho(x_i, y_i, z_i)\,\Delta x_i \cdot \Delta y_i \cdot \Delta z_i = \iiint_V \rho(x, y, z)\,dx \cdot dy \cdot dz$$

Integral der Funktion $\rho = \rho(x, y, z)$ über das Volumen V .

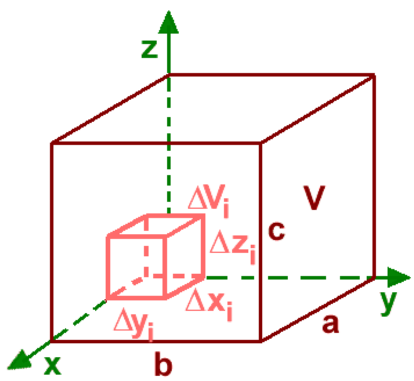
Mehrfachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

- Integration mehrfach nacheinander entsprechend bekannter Regeln
  ⇨ mehrfache Berechnung bestimmter Integrale

- **Beispiel:**
  Berechnung der Masse eines Quaders

$$\int_{z=0}^{c} \int_{y=0}^{b} \int_{x=0}^{a} \rho(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$$

inneres Integral
mittleres Integral
äußeres Integral



Rechenanweisung:

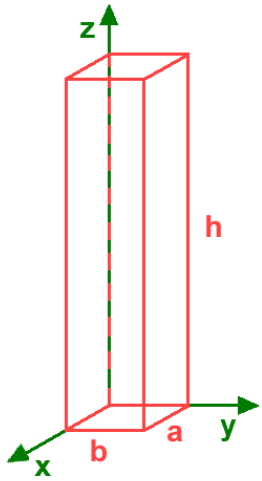
1. Berechnung des inneren Integrals
   (y,z werden als konstant angenommen)
   ⇨ **Ergebnis - eine Funktion von y und z**

2. Berechnung des mittleren Integrals
   (z wird als konstant angenommen)
   ⇨ **Ergebnis - eine Funktion von z**

3. Berechnung des äußeren Integrals
   ⇨ **Ergebnis - eine Funktion der Grenzen a,b,c**

Bei konstanten Integrationsgrenzen kann die Reihenfolge der Integrationen vertauscht werden.

Beispiel: Masse einer Luftsäule

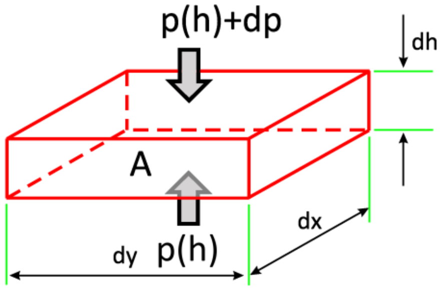


- die Luftsäule habe die Höhe h und die Grundfläche $a \cdot b$
- die Dichte ist $\rho = \rho_0 \cdot e^{-\alpha z}$ mit $\alpha = \frac{\rho_0}{p_0} g$

woher das? Dazu etwas **Physik**:

⇨ wir betrachten die Grundfläche $A = a \cdot b$

⇨ darüber sei ein Volumen der Dicke dh



⇨ auf das kleine Volumen wirkt von unten die Kraft $p \cdot A$ und von oben $(p + dp) \cdot A$
(dp ist hier offensichtlich negativ);
das Volumen selbst wirkt mit seiner Schwerkraft $\rho \cdot g \cdot A \cdot dh$

⇨ im Gleichgewicht gilt: $p \cdot A = (p + dp) \cdot A + \rho \cdot g \cdot A \cdot dh$ also $dp = -\rho \cdot g \cdot dh$

⇨ Die Zustandsgleichung idealer Gase liefert uns

$p \cdot V = m \cdot R' \cdot T$; $p = \rho \cdot R' \cdot T$ mit R' der speziellen Gaskonstante

$p_0 \cdot V_0 = m \cdot R' \cdot T$; $p_0 = \rho_0 \cdot R' \cdot T$ am Erdboden

und damit $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$; $\rho = \frac{p}{p_0} \rho_0$

⇨ $$dp = -\frac{p}{p_0} \rho_0 \cdot g \cdot dh \, ; \quad \frac{dp}{p} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot dh$$

⇨ wir integrieren von $0 \ldots . h$ bzw. $p_0 \ldots . p$

⇨ $$\ln \frac{p}{p_0} = -\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h$$

und mit $\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0}$

⇨ $$\underline{\rho = \rho_0 e^{-\frac{\rho_0}{p_0} \cdot g \cdot h}}$$

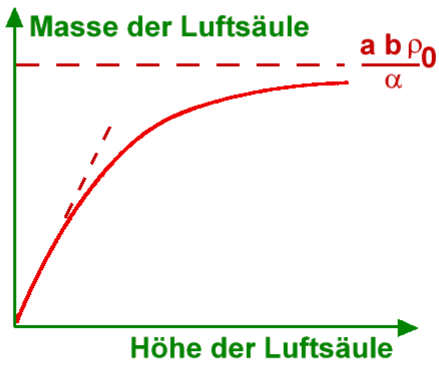
Zur Berechnung der Masse der Luftsäule integrieren wir

$$M = \int_0^h \int_0^b \int_0^a \rho_0 \cdot e^{-\alpha z} \, dx \, dy \, dz$$

1. ***inneres Integral*** $$M=\int_0^h\int_0^b \rho_0 e^{-\alpha z}\left[x\right]_0^a dydz=\int_0^h\int_0^b \rho_0 a e^{-\alpha z}dydz$$

2. ***mittleres Integral*** $$M=\int_0^h \rho_0\, a\, e^{-\alpha z}\left[y\right]_0^b dz=\int_0^h \rho_0 abe^{-\alpha z}dz$$

3. ***äußeres Integral*** $$M=\int_0^h \rho_0 abe^{-\alpha z}dz=ab\rho_0\left[-\frac{1}{\alpha}e^{-\alpha z}\right]_0^h=\frac{ab}{\alpha}\rho_0\left(1-e^{-\alpha h}\right)$$



Mit wachsendem h wächst die Masse nicht beliebig an, sondern nähert sich einem Grenzwert; für kleine h steigt die Masse praktisch linear.

Zerlegung eines Mehrfachintegrals in ein Produkt von Integralen

- ist der Integrand zerlegbar in ein Produkt: $f(x,y,z)=g(x)\cdot h(y)\cdot m(z)$,
  lässt sich auch die Integration als Produkt von Integralen auffassen;
  die Berechnung erfolgt als Berechnung einfacher Integrale

$$\iiint f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\int g(x)\,dx\int h(y)\,dy\int m(z)\,dz$$

- **Beispiele:** Berechnung von Volumen, Masse, Trägheitsmoment, Ladungsverteilung

- Leider sind die Integrale für solche Berechnungen oft nicht vom Typ mit konstanten Integrationsgrenzen.
- Das lässt sich aber in manchen günstigen Fälle durch Transformation in ein anderes Koordinatensystem ändern;
- Vereinfachung bringen können
  Polarkoordinaten / Zylinderkoordinaten / Kugelkoordinaten

Mehrfachintegrale mit konstanten Integrationsgrenzen

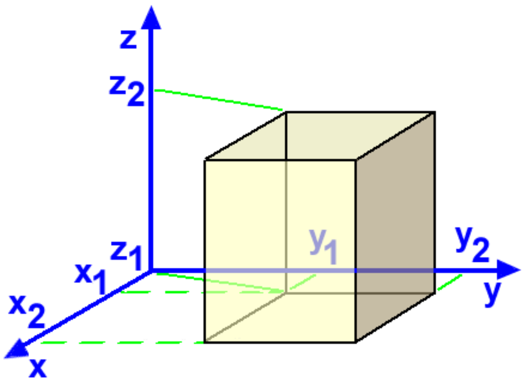
Beispiel 1: Volumenberechnung am Quader

- hier lässt sich das Integral sehr einfach in ein Produkt aus einfachen Integralen schreiben

$$V=\int_{z_1}^{z_2}\int_{y_1}^{y_2}\int_{x_1}^{x_2} dx\,dy\,dz=\int_{z_1}^{z_2} dz\int_{y_1}^{y_2} dy\int_{x_1}^{x_2} dx$$

- mit den konstanten Integrationsgrenzen

⇨ $\underline{V=(x_2-x_1)\cdot(y_2-y_1)\cdot(z_2-z_1)}$



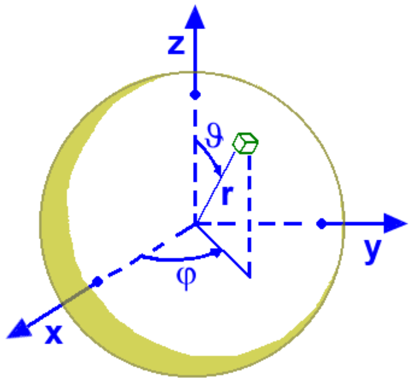
Beispiel 2: Volumenberechnung an der Kugel

- das Integral lässt sich nur durch Transformation in Kugelkoordinaten so gestalten, dass die Integration mit konstanten Grenzen erfolgt und wir das Integral aufspalten können

$$V=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi} r^2\sin\vartheta\,d\varphi\,d\vartheta\,dr=$$

$$=\int_0^R r^2 dr\int_0^\pi \sin\vartheta\,d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$\underline{V=2\cdot 2\pi\,\frac{R^3}{3}=\frac{4\pi}{3}R^3}$$



Beispiel 3: Trägheitsmoment Zylinder (bezüglich geom. Rotationsachse)

- das Integral lässt sich nur durch Transformation in Zylinderkoordinaten so gestalten, dass die Integration mit konstanten Grenzen erfolgt und wir das Integral aufspalten können

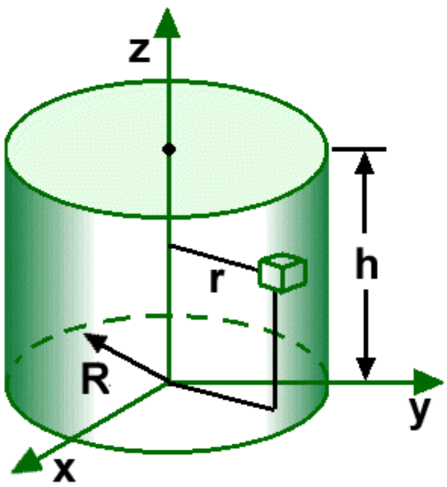
$$J=\int_V r^2\,dm=\int_V r^2\cdot\rho\,dV=\rho\int_V r^2\,dV$$

in Zylinderkoordinaten:

$$dV=r\;d\varphi\,dr\,dz$$

- $J=\rho\int_0^h\int_0^R\int_0^{2\pi} r^3\,d\varphi\,dr\,dz=\rho\int_0^h dz\int_0^R r^3 dr\int_0^{2\pi} d\varphi$

$$\underline{J=\rho\frac{R^4\cdot\pi\cdot h}{2}=\frac{m\cdot R^2}{2}}$$

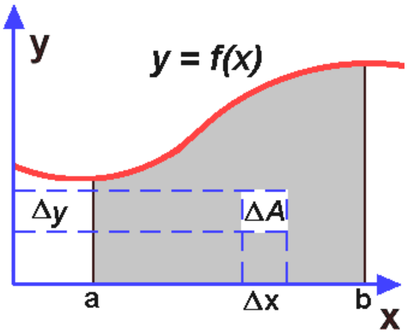


Mehrfachintegrale mit nicht konstanten Grenzen

Erläuterung am Beispiel: Flächenberechnung

- $A = \sum \Delta A$

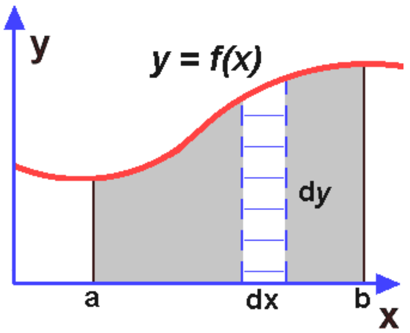
  $A = \iint dA = \iint dx\,dy$
- Das Problem besteht in der Berücksichtigung der begrenzenden Kurven!



- Grenzen für y: $y = 0 \quad y = f(x) \qquad A = \int\limits_{y=0}^{f(x)}\int dx\,dy$

- Grenzen für x: $x = a \quad x = b \qquad A = \int\limits_{y=0}^{f(x)}\int\limits_{x=a}^{b} dx\,dy$

- Reihenfolge der Abarbeitung nicht mehr beliebig!



- Zuerst Integral mit variabler Grenze lösen
  (entspricht Bestimmung der Fläche eines Streifens im Bild)

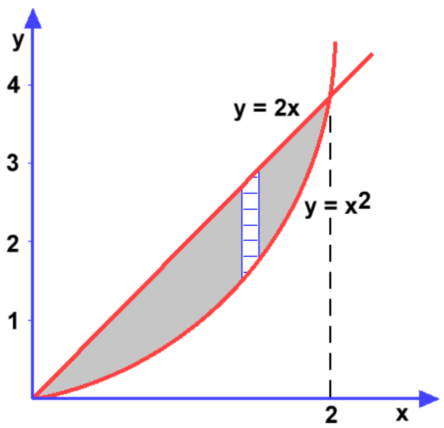
$$A = \int_a^b [f(x) - 0]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$$

- **führt auf bestimmtes Integral**

Beispiel 2: Fläche zwischen 2 Funktionen

- untere Grenze: $y = x^2$
- obere Grenze: $y = 2x$

$$A = \int\limits_{x=0}^{2}\int\limits_{y=x^2}^{2x} dx\,dy$$



Integration des Integrals mit variablen Grenzen:

$$A = \int_0^2 \left(2x - x^2\right)dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = 1{,}333$$

Übertragung auf den allgemeinen Fall:

- Mehrfachintegral muss mindestens für eine Variable feste Grenzen haben.
- Mehrfachintegral wird umgeordnet und schrittweise gelöst.

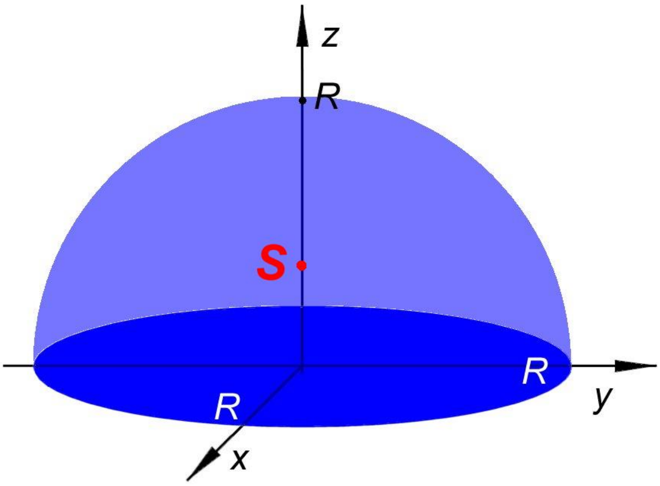
1. Schritt: Variable suchen, die nicht in den Integrationsgrenzen vorkommt
- Integral lösen.

2. Schritt: Prozedur wiederholen ...

letzter Schritt: Lösen des verbliebenen Integrals mit festen Grenzen.

Beispiel: Schwerpunkt einer Halbkugel

Gesucht ist der Schwerpunkt $S(x_s;y_s;z_s)$ einer Halbkugel mit konstanter Dichte und einer begrenzenden Fläche $x^2+y^2+z^2=R^2$ im Halbraum für $z \geq 0$.



Lösung:

Wie leicht zu erkennen müssen aus Gründen der Symmetrie sowohl die x-Koordinate, als auch die y-Koordinate des Schwerpunktes bei Null liegen.

Die z-Koordinate des Schwerpunktes muss berechnet werden:

$$z_s = \frac{\int\limits_K z \cdot dm}{\int\limits_K dm} = \frac{\rho \cdot \iiint\limits_K z \cdot dxdydz}{\rho \cdot V} = \frac{\iiint\limits_K z \cdot dxdydz}{V}$$

Das Volumen einer Halbkugel mit dem Radius *R* ist bekannt(?)

$$V = \frac{2}{3}\pi R^3$$

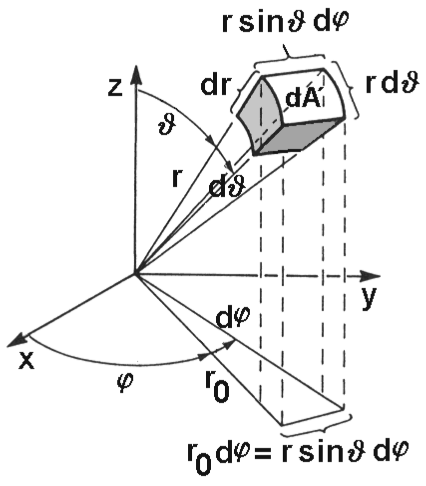
Für die Lösung des Problems bietet sich die Verwendung von Zylinderkoordinaten an.

$$z_s = \frac{1}{V}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}}\int\limits_{z=0}^{R} z \cdot r \cdot dzdrd\varphi = \frac{2\pi}{V}\int\limits_{z=0}^{R}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{R^2-z^2}} z \cdot r \cdot dzdr =$$

$$= \frac{2\pi}{V}\int\limits_0^R z\frac{r^2}{2}\Bigg|_0^{\sqrt{R^2-z^2}} dz = \frac{2\pi}{V}\int\limits_0^R z\frac{R^2-z^2}{2}dz = \frac{\pi}{V}\int\limits_0^R (zR^2-z^3)dz =$$

$$= \frac{\pi}{V}\left[\frac{z^2}{2}R^2 - \frac{z^4}{4}\right]\Bigg|_0^R = \frac{3\pi}{2\pi R^3}\cdot\frac{R^4}{4} = \frac{3}{8}R$$

Gleichfalls geeignet für die Berechnung sind Kugelkoordinaten:



$$x_s = 0; \quad y_s = 0$$

$$z_s = \frac{1}{V} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} r \cdot \cos\vartheta \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta \; dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{2\pi}{V} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \int_{r=0}^{R} r \cdot \cos\vartheta \cdot r^2 \cdot \sin\vartheta \; dr\, d\vartheta =$$

$$= \frac{2\pi}{V} \int_{\vartheta=0}^{\pi/2} \frac{R^4}{4} \sin\vartheta \cos\vartheta \, d\vartheta = \frac{2\pi}{V} \frac{R^4}{4} \cdot \left[-\frac{\cos^2\vartheta}{2} \right]_0^{\pi/2} =$$

$$= \frac{\pi R^4}{4V} = \frac{3}{8} R$$