# Zusammenfassung Lineare Algebra I.

Tim Hebenstreit

18. Februar 2019

## 1 Grundbegriffe der Logik

**Aussage** entweder wahr oder falsch

**Negation** $\neg A$

**Konjunktion** $A \wedge B$

**Disjunktion** $A \vee B$

**Implikation** $A \Rightarrow B$

**Äquivalenz** $A \Leftrightarrow B$

**Wahrheitstafel**

## 2 Grundbegriffe der Mengenlehre

**Elemente** Objekte einer Menge

**Vereinigung** $A \cup B$

**Durchschnitt** $A \cap B$

**Differenzmenge** $A \setminus B$

**disjunkt** $\Leftrightarrow M \cup N = \emptyset$

**Potenzmenge** $\mathcal{P}(A)$

**vollständige Induktion** $A_0$ wahr (Induktionsanfang), $A_n \Rightarrow A_{n+1}$ Induktionsschritt

**geordnetes Paar** $(a, b)$

**kartesisches Produkt** $M \times N$

**Quantoren** Allquantor $\forall$ und Existenzquantor $\exists$

## 3 Relationen und Funktionen

**Relation** Tripel $(M, N, R)$ aus Mengen $M, N$ und einer Teilmenge $R$ von $M \times N$

**Funktion** Relation, für die gilt: Zu jedem $x \in M$ existiert genau ein $y \in N$

**Definitions- und Wertebereich** einer Funktion $f$:
$f : X \to Y, x \mapsto f(x)$

**Bild** von $f$: $Bld(f) := f(X)$

**Urbild** von $Y$ unter $f$: $f^{-1}(Y)$

**injektiv** $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

**surjektiv** $Bld(f) = Y$

**bijektiv** falls $f$ injektiv und surjektiv ist

**Komposition** $f \circ g$

**Umkehrabbildung** Wenn $f$ bijektiv, so existiert $f^{-1}$ mit $f^{-1} \circ f = id_X$ und $f \circ f^{-1} = id_Y$

**Einschränkung, Fortsetzung einer Funktion**

**Familie bzw. Folge**

## 4 Algebraische Grundbegriffe

**Verknüpfung** $M \times M \to M$

**Gruppe** Paar $(G, *)$ mit Menge $G$ und Verknüpfung $*$ und folgenden Eigenschaften:

- Assoziativität
- Existenz eines neutralen Elements
- Existenz inverser Elemente
- abelsche Gruppe falls Kommutativität gegeben

**Körper** Tripel $(K, +, \cdot)$ aus Menge $K$ und zwei Verknüpfungen $+, \cdot$ auf K mit folgenden Eigenschaften:

- $(K, +)$ ist abelsche Gruppe
- $(K \setminus \{0\}, \cdot)$ ist abelsche Gruppe
- Distributivität

# 5 Vektorräume

**Vektorraum** Tripel $(V, +, \cdot)$ aus einer Menge V und Abbildungen
$+ : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$ (Addition) und
$\cdot : K \times V \to V, (a, v) \mapsto av$ (Skalarmultiplikation) ist K-Vektorraum, wenn gilt:

- $(V, +)$ ist abelsche Gruppe
- Distributivität (zwei mal)
- Assoziativität
- $1_K v = v$ für $v \in V$

**Untervektorraum** wenn gilt:

- $a, b \in K, u, v \in U \Rightarrow au + bv \in U$

**Summe von Untervektorräumen** ist wieder Untervektorraum (in Zeichen: $U_1 + U_2$)

**direkte Summe** von Vektorräumen $U_1 \oplus U_2$, wenn gilt: $U_1 \cap U_2 = \{0\}$

**Linearkombination** von Vektoren: $Span_K(v_1, ..., v_n)$

# 6 Lineare Gleichungssysteme

**Lineares Gleichungssystem** mit *Variablen* $x_1, ..., x_n$, *Koeffizienten* $b_1, ..., b_n$ und *Lösungsmenge* $L$ - darstellbar als *Matrix*

**Elementare Umformungen** von Typ I., Typ II. und Typ III.

**Gauß-Verfahren** bzw. Eliminationsverfahren mittels elementarer Zeilenumformungen

**reduzierte Zeilenstufenform** Matrix mit *führenden Einsen*

**homogenes LGS** LGS mit allen Absolutgliedern gleich Null (*inhomogen* falls nicht); dabei gilt für deren Lösungsmenge:
$L(I) = s + L(H)$

# 7 Matrizen

**Produkt von Matrizen** ¨Zeile mal Spalte”(falls Formate passend)

**Hauptdiagonale** für quadratische Matrizen definiert

**Einheitsmatrix** Hauptdiagonale bestehend aus Einsen, ansonsten nur Nullen

$A \in K^{m \times n}$ heißt:

- linksinvertierbar, falls gilt:
  $\exists B \in K^{n \times m} : BA = 1_n$
- rechtsinvertierbar, falls gilt:
  $\exists C \in K^{n \times m} : AC = 1_m$
- invertierbar, falls $A$ links- und rechtsinvertierbar ist (dafür muss $A$ quadratisch sein)

**inverse Matrix** Falls Matrix invertierbar ist, existiert genau eine sog. *inverse Matrix*

**allgemeine lineare Gruppe** des Grades $n$ über $K$ (in Zeichen: $GL(n, K)$ - Gruppe bzgl. Matrizenmultiplikation

**transponierte Matrix** $A^T$. Es gilt: $(AB)^T = B^T A^T$

**symmetrische Matrix** falls $A^T = A$ (bzw. *schiefsymmetrisch*, falls $A^T = -A$)

**Spur** von $A$: Summe der Koeffizienten auf der Hauptdiagonalen

# 8 Basis und Dimension

**Lineare Unabhängigkeit** Falls das LGS $\lambda_1 v_1 + ... + \lambda_n v_n = 0$ nur die triviale Lösung für $\lambda_1, ..., \lambda_n$ besitzt, sind $v_1, ..., v_n$ linear unabhängig.

**Basis** Sind $b_1, ..., b_n \in V$ linear unabhängig und $V$ n-dimensional, so bilden $b_1, ..., b_n$ eine *Basis* von $V$

**Standardbasis** bzw. kanonische Basis: besonders praktische Basis des $K^n$ oder auch *Matrixeinheiten* des $K^{m \times n}$

**Austauschsatz von Steinitz** K-VR $V$ der von Elementen $e_1, ..., e_k$ aufgespannt wird. Außerdem: $u_1, ..., u_l \in V$ linear unabhänig. Dann existieren $i_1, ..., i_m \in \{1, .., k\}$ mit der Eigenschaft, dass $u_1, ..., u_l, e_{i_1}, ..., e_{i_m}$ eine Basis von V bilden.

**Dimension** Anzahl der linear unabhängigen Vektoren, welche $V$ aufspannen, wird als Dimension bezeichnet (ggf. ist die Dimension unendlich). Man schreibt: $dimV = n$. Untervektorräume der Dimension $n = 1$ (bzw. $n = 2$ oder $n - 1$) bezeichnet man als *Geraden* (bzw. *Ebenen* oder *Hyperebenen*).

**Dimensionsformel** für UVR:
$dim(U+V) + dim(U \cap V) = dim(U) + dim(V)$

**Komplement** Zu jedem UVR $U$ eines VR $V$ existiert ein $U'$, sodass gilt: $V = U \oplus U'$

## 9 Der Rang von Matrizen

**Zeilenraum und -rang** Die Zeilen einer Matrix spannen den sog. *Zeilenraum* $ZR(A)$ einer Matrix auf. Die Dimension dieses Raums nennt sich *Zeilenrang* $zr(A)$.

**Elementare Matrizen** *Elementar von Typ I.* nennt sich eine Matrix $U_{ij}(r)$, wenn sie sich von der Einheitsmatrix in einem Eintrag (ungleich Null) außerhalb der Hauptdiagonalen unterscheidet. Eine Matrix $D_i(r)$, die sich von der Einheitsmatrix um lediglich einen Eintrag auf der Hauptdiagonalen (ungleich Null) von dieser unterscheidet, wird *elementar von Typ II.* genannt.

Für $A = (a_{ij}) \in K^{n \times n}$ sind gleichwertig:

- $A$ ist invertierbar.
- Das zugehörige LGS besitzt genau eine Lösung.
- Der Gauß-Algorithmus macht aus $A$ die Einheitsmatrix.
- $A$ lässt sich als Produkt elementarer Matrizen schreiben.

**Zeilenäquivalenz** $A \sim_Z B$, wenn $A$ durch elementare Zeilenumformungen in $B$ überführbar (dies ist eine sog. *Äquivalenzrelation*).

Somit lässt sich nun definieren:

- *elementare Spaltenumformungen* einer Matrix
- *reduzierte Spaltenstufenform*
- *Spaltenäquivalenz* $A \sim_S B$
- *Spaltenraum* $SR(A)$
- *Spaltenrang* $sr(A)$

**Rang** einer Matrix. Es gilt:
$sr(A) = zr(A) =: rg(A)$

**Äquivalenz** $A \sim B \Leftrightarrow rg(A) = rg(B) \Leftrightarrow$
$\exists U \in GL(m,K) \exists V \in GL(n,K) : B = UAV$

**Rangkriterium für LGS** Ein LGS ist genau dann lösbar, wenn der Rang der Koeffizientenmatrix mit dem Rang der erweiterten Matrix übereinstimmt.

## 10 Lineare Abbildungen

**Homomorhismus** Eine Abbildung $f : V \to W$ ist linear, wenn gilt:
$f(ax+by) = af(x) + bf(y)$ für $a, b \in K, x, y \in V$. In diesem Fall ist $f \in Hom(V,W)$.

**Dimensionsformel** Es gilt:
$dimV = dimKer(f) + dimBld(f)$.

**Kern, Rang und Defekt** sind folgendermaßen definiert:

- Kern: $Ker(f) = \{v \in V : f(v) = 0\}$
- Defekt: $def(f) = dimKer(f)$
- Rang: $rg(f) = dimBld(f)$

Es gilt: $f$ injektiv $\Leftrightarrow Ker(f) = \{0\}$.

**Isomorphismus** Ist $f \in Hom(V,W)$ und bijektiv, so wird $f$ auch als Isomorphismus bezeichnet.

**Isomorphie** Existiert ein Isomorphismus $f : V \to W$, so nennt man $V, W$ isomorph (in Zeichen: $V \cong W$). Dies ist wieder eine Äquivalenzrelation. Weiterhin gilt:
$V \cong W \Leftrightarrow dimV = dimW$.

$Hom(V,W)$ wird zu einem Vektorraum, wenn man Addition und Multiplikation wie gewohnt definiert.

**Endomorphismus** $End(V) := Hom(V,V)$

**Allgemeine lineare Gruppe** $GL(V)$
$:= \{f \in End(V) : f\ bijektiv\}$

## 11 Lineare Abbildungen und Matrizen

**Matrix von f bzgl. zweier Basen** $V, W$ K-VR mit Basen $b_1, ..., b_m$ und $c_1, ..., c_n$ und $f \in Hom(V,W)$. Schreibe $f(b_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} c_i$ $(j = 1, ..., m)$ mit $a_{ij} \in K$ für alle $i, j$. Dann heißt $A := (a_{ij}) \in K^{n \times m}$ die Matrix von $f$ bzgl. der obigen Basen.

(Die Matrix von $f$ enthält in der $j$-ten Spalte die Koeffizienten von $f(b_j)$ bzgl. $c_1, ..., c_n$.)

Die Abbildung $\Delta : Hom(V,W) \to K^{n\times m}$ ordnet jeder linearen Abbildung ihre Matrix $\Delta(f)$ bzgl. zweier Basen zu und ist ein VR-Isomorphismus.

**Dualraum** Im Fall $W = K$ nennt man $V^* := Hom(V,K)$ *Dualraum* von V und seine Elemente *Linearformen* auf V.

Es gilt: $f$ bijektiv $\Leftrightarrow$ $A$ invertierbar.

**Basiswechsel** Ist $A$ die Matrix von $f \in Hom(V,W)$ bzgl. zweier Basen, so lässt sich mittels zweier Basiswechselmatrizen $S \in GL(m,K)$ und $T \in GL(n,K)$, die Matrix von $f$ bzgl. zweier neuer Basen studieren. Dabei gilt folgender Zusammenhang: $A' = TAS$.
Für $f \in End(V)$ gilt: $A' = S^{-1}AS$.

**Diagonalisierbarkeit** $f$ ist diagonalisierbar, falls zwei Basen so wählbar sind, sodass Matrix $A$ von $f$ bzgl. dieser Basen eine *Diagonalmatrix* ist. $A$ ist auch diagonalisierbar, wenn $A$ ähnlich zu einer Diagonalmatrix ist.

**Ähnlichkeit** $A, B \in K^{n\times n}$ ähnlich, wenn ein $S \in GL(n,K)$ existiert, sodass $B = S^{-1}AS$ gilt (man schreibt: $A \approx B$).

## 12 Determinanten

**Determinante** Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ definiert man die *Determinante* mittels des *Entwicklungssatzes von Laplace*:
$det(A) := |A| := \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} |A_{ik}|$ für $k = 1, ..., n$.
Determinanten bestimmter Matrizen:

- Die Determinante von *oberen- und unteren Dreiecksmatrizen* ist gleich dem Produkt der Einträge auf der Hauptdiagonalen.
- Die Determinante einer elementaren Matrix $U_{ij}(r)$ vom Typ I. ist stets 1. Die Determinante einer elementaren Matrix $D_i(r)$ vom Typ II. ist stets $r$.
- Die Determinante einer Matrix, welche zwei gleich Zeilen enthält, ist gleich 0. Gleiches gilt für eine Matrix, welche eine Nullzeile enthält.
- $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A \in GL(n,K)$

Die Determinante einer Abbildung $f \in End(V)$ definiert man über dessen zugehörige Matrix $A$.

**Produktregel** für Determinanten:
$A, B \in K^{n\times n} \Rightarrow |AB| = |A| \cdot |B|$.
Weiterhin gilt:
$|A^{-1}| = |A|^{-1}$ und $|A^T| = |A|^T$.
Alles was für Zeilen von Determinanten gilt, gilt also auch für deren Spalten.

**Adjunkte** Für $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ definiert man die *Adjunkte* $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij}) \in K^{n\times n}$ von $A$ durch $\tilde{a}_{ij} := (-1)^{i+j}|A_{ji}|$.
Es gilt: $A\tilde{A} = |A| \cdot 1_n = \tilde{A}A$.

**Cramersche Regel** Ein LGS mit quadratischer Koeffizientenmatrix ist genau dann eindeutig lösbar, wenn gilt: $d := |A| \neq 0$. Ggf. gilt für $i = 1, ...n$:

$$x_i = \frac{1}{d} \begin{vmatrix} a_{11} & ... & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & ... & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & ... & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

**Untermatrix** erhält man durch Streichen von Zeilen und/oder Spalten einer gegebenen Matrix.

## 13 Eigenwerte und Eigenvektoren

**Eigenwert, Eigenvektor und Eigenraum** $V$ K-VR, $f \in End(V)$ und $r \in K$. Man nennt $r$ *Eigenwert* von $f$, falls $f(v) = rv$ für ein $v \in V \setminus \{0\}$ ist. Ggf. heißt $v$ *Eigenvektor* und $E_r(f) := \{x \in V : f(x) = rx\}$ *Eigenraum* von $f$ zum Eigenwert $r$. Für paarweise verschiedene Eigenwerte von $f$ ist die Summe der Eigenräume eine direkte Summe. Zudem gilt:
$r$ Eigenwert von $f \Leftrightarrow |r1_n - A| = 0$.

**charakteristisches Polynom** Für $A \in K^{n\times n}$ nennt man die Abbildung:

$$K \to K, x \mapsto |x1_n - A|$$

das *charakteristische Polynom* von $A$. Es ist von der Form eines Polynoms. Die Nullstellen dieses Polynoms entsprechen den Eigenwerten von $A$.
Ähnliche Matrizen besitzen das gleiche charakteristische Polynom und damit auch die gleichen Eigenwerte.

Wieder lässt sich dies auch auf die zu den Matrizen gehörenden Abbildungen $f \in End(V)$ übertragen, sodass man auch vom charakteristischen Polynom von $f$ sprechen kann.

Gleichwertige Aussagen zur Diagonalisierbarkeit von $f \in End(V)$:

- $f$ ist diagonalisierbar.
- $V$ hat eine Basis, die aus Eigenvektoren von $f$ besteht.
- $V$ ist direkte Summe der Eigenräume von $f$.
- $dim(V)$ ist die Summe der Dimensionen der Eigenräume von $f$.
- $f$ hat $n$ verschiedene Eigenwerte und $dim(V) = n$.

**Anwendungsbeispiele**

- Berechnung expliziter Formeln von zuvor rekursiv definierten Folgen (z.B. *Fibonacci-Zahlen*)
- Wahrscheinlichkeitsrechnung mittels Übergangsmatrizen

## 14 Euklidische Vektorräume

**Skalarprodukt** ist eine Abbildung: $V \times V \to \mathbb{R}, (v, w) \mapsto (v|w)$ mit folgenden Eigenschaften:

- $(av + a'v'|w) = a(v|w) + a'(v'|w)$ für $a, a' \in \mathbb{R}, v, v', w \in V$.
- $(v|w) = (w|v)$ für $v, w \in V$.
- $(v|v) > 0$ für $v \in V \setminus \{0\}$.

**Standardskalarprodukt** Beispiele:

- Auf $\mathbb{R}^n$: $(x|y) := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- Auf $\mathcal{C}[a, b]$: $(f|g) := \int_a^b f(t)g(t)dt$.

**Ungleichung von Cauchy-Schwarz** Für jedes Skalarprodukt auf einem $\mathbb{R}$-VR gilt:

$$(x|y)^2 \leq (x|x)(y|y) \text{ für } x, y \in V$$

(Gleichheit gilt, wenn $x$ und $y$ linear abhängig sind.)

**euklidischer Vektorraum** $\mathbb{R}$-VR, auf dem Skalarprodukt definiert ist.

**Länge (Betrag, Norm)** Für $v \in V$ heißt $||v|| := \sqrt{(v|v)}$ die *Länge* von $v$.
In jedem EVR gilt:

- $0 \leq ||v||$ für $v \in V$
- $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$
- $||av|| = |a| \cdot ||v||$ für $a \in \mathbb{R}, v \in V$
- Dreiecksungleichung $||v + w|| \leq ||v|| + ||w||$ für $v, w \in V$
- Satz des Pythagoras $||v + w||^2 = ||v||^2 + ||w||^2 + 2(v|w)$
- Parallelogrammgleichung $||v+w||^2+||v-w||^2 = 2||v||^2+2||w||^2$

**Abstand, Distanz** Für Elemente $v, w$ eines EVR nennt man $d(v, w) := ||v - w||$ den *Abstand* bzw. die *Distanz* zwischen $v$ und $w$. Die Abbildung $d : V \times V \mapsto \mathbb{R}$ nennt man die *Metrik* von $V$.

**orthogonal** sind Elemente $v, w$ eines EVR, wenn gilt: $(v|w) = 0$.

**Orthonormalsystem und -basis** Von 0 verschiedene Elemente $v_1, ..., v_n \in V$ nennt man:

- ein *Orthogonalsystem*, falls $v_i \perp v_j$ für alle $i, j$ gilt.
- ein *Orthonormalsystem*, falls zusätzlich $||v|| = 1$ für alle $i$ gilt.
- eine *Orthonormalbasis* (ONB) von $V$, falls sie ein Orthonormalsystem und eine Basis von V bilden.

**Orthonormalisierungsverfahren von Gram-Schmidt** Zu jeder Basis $a_1, ..., a_n$ eines EVR $V$ existiert eine ONB $b_1, ..., b_n$ von $V$ mit der Eigenschaft, dass jedes $b_i$ eine Linear-Kombination von $a_1, ..., a_i$ ist.

**orthogonales Komplement** Für jede Teilmenge $M$ eines EVR $V$ nennt man: $M^\perp := \{v \in V : (m|v) = 0 \text{ für } m \in M\}$ das *orthogonale Komplement* von $M$ in $V$. Dabei gilt: $V = M \oplus M^\perp$.

Zu jedem $v \in V$ existiert genau ein $u_0 \in U$, wobei $U$ UVR von $V$ ist, mit: $d(v, u_0) = \min \{d(v, u) : u \in U\}$.
Für jede ONB $u_1, ..., u_m$ von $U$ ist

$$u_0 = \sum_{i=1}^{m} (v|u_i)u_i.$$

**Methode der kleinsten Quadrate** Für gegebene Messwerte lässt sich mithilfe dieser Methode eine polynomielle Approximation finden.

**Winkel** Der *Winkel* $\vartheta$ zwischen zwei Vektoren $a, b \in V \setminus \{0\}$ eines EVR ist definiert als:

$$cos\vartheta = \frac{(a|b)}{||a|| \cdot ||b||}.$$

## 15 Isometrien und orthogonale Matrizen

**Isometrie** Eine *Isometrie* zwischen zwei EVR ist eine lineare Abbildung $f \in Hom(V, W)$ für die gilt:
$(f(x)|f(y)) = (x|y)$ für alle $x, y \in V$.
Somit erhält $f$ Längen und Winkel. Ist $f$ bijektiv, so ist auch die Umkehrabbildung $f^{-1}$ eine Isometrie.
Bzgl. zweier ONB gilt für $f$ außerdem:

$$f \text{ Isometrie} \Leftrightarrow A^T A = 1_m$$

(mit $A^{-1} = A^T$).

**orthogonale Gruppe** Die Menge $O(V) := \{f \in End(V) : f \text{ ist Isometrie}\}$ ist eine Gruppe bzgl. $\circ$ und wird *orthogonale Gruppe* von $V$ genannt. Gleiches lässt sich für Matrizen definieren:
$O(n) := \{A \in \mathbb{R}^{n \times n} : A^T A = 1_n\}$

**isometrisch isomorph** werden zwei EVR genannt, für die eine bijektive Isometrie existiert (wieder ist dies eine Äquivalenzrelation).
Zwei EVR sind genau dann *isometrisch isomorph*, wenn sie die gleiche Dimension haben.

**Spiegelung** Für einen EVR $V$ und $0 \neq v \in V$ wird die Abbildung:

$$s_v : V \to V, x \mapsto x - \frac{2(v|x)}{(v|v)} v$$

die *Spiegelung* an der Hyperebene $(\mathbb{R}v)^\perp$ genannt. Die Determinante einer Spiegelung ist stets $-1$. Eine Isometrie $f$ lässt sich als Produkt von Spiegelungen schreiben.

**Drehung** Die Matrix einer *Drehung* $f$ um den Winkel $\vartheta$ sieht folgendermaßen (oder ähnlich) aus:

$$A = \begin{pmatrix} cos\vartheta & -sin\vartheta \\ sin\vartheta & cos\vartheta \end{pmatrix}.$$

## 16 Selbstadjungierte lineare Abbildungen und symmetrische Matrizen

**selbstadjungiert** Für einen EVR $V$ nennt man eine Abbildung $f \in End(V)$ für die gilt: $(f(x)|y) = (x|f(y))$ für alle $x, y \in V$ *selbstadjungiert.*
$f$ ist genau dann selbstadjungiert, wenn die Matrix $A$ von $f$ symmetrisch ist.

**Fundamentalsatz der Algebra** Ein komplexes Polynom $n$-ten Grades besitzt mindestens eine Nullstelle in $\mathbb{C}$.
Hieraus folgt, dass jede symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einen reellen Eigenwert besitzt.

**Hauptachsentransformation** (auch Spektralsatz) werden folgende Sätze genannt:

- Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch $\Leftrightarrow$ es exisitiert ein $S \in O(n)$, sodass $S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.
- Es existiert eine ONB von $V$ bzgl. der die Matrix $A$ von $f$ aus Eigenvektoren von $f$ besteht $\Leftrightarrow$ $f$ ist selbstadjungiert.