

Analysis Zusammenfassung

Andreas Biri, D-ITET

31.07.13

1. Grundlagen

$A \vee B$: „oder“ ; $A \wedge B$: „und“ ; $\neg A$: „nicht“

$A \cup B$: „vereinigt mit“ ; $A \cap B$: „geschnitten mit“

$\#A = |A|$: Anzahl Elemente (Mächtigkeit, Kardinalität)

$$|a * b| = |a| * |b| ; |a + b| \leq |a| + |b|$$

$$|a - c| \leq |a - b| + |b - c|$$

Vollständige Induktion

1. **Induktionsverankerung:** gilt für $n_0 = 0$ oder 1

2. **Induktionsannahme:** Behauptung gelte

3. **Induktionsschritt:** auf beiden Seiten addieren und umformen

$$A(n) \rightarrow A(n+1) \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0$$

Komplexe Zahlen

$$z = x + i y = r * e^{i\varphi} = r (\cos \varphi + i \sin \varphi), z \in \mathbb{C}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \varphi = \arg(x, y)$$

$\bar{z} = x - i y$: konjugiert komplexe Zahl

$$x = \operatorname{Re}\{z\} = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \operatorname{Im}\{z\} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

$$|z| = \sqrt{z * \bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi ; \quad \overline{e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi}$$

$$\cos(z) = \operatorname{Re}\{e^{iz}\} = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

$$\sin(z) = \operatorname{Im}\{e^{iz}\} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Wurzel einer komplexen Zahl

$$z^n = (r * e^{i\varphi})^n = r^n * e^{i(n*\varphi)}$$

$$\rightarrow \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} * e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + k * \frac{360^\circ}{n}\right)}$$

Vektoren

Skalarprodukt: $\vec{a} * \vec{b} = |a| |b| \cos \varphi$

Vektorprodukt: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ (senkrecht zu a u. b)

$|\vec{a} \times \vec{b}| = |a| |b| \sin \varphi$: Fläche des aufgesp. Parallelogramms

$$|x - a| = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2}$$

$$\|x - a\| := \max_{i=1, \dots, n} |x_i - a_i| \rightarrow \frac{|x - a|}{\sqrt{n}} \leq \|x - a\| \leq |x - a|$$

2. Funktionen

Eigenschaften von Funktionen

Surjektiv: Es gibt für jeden Wert in B einen Wert in A:

$$\forall y \in B \exists x \in A : f(x) = y$$

Injektiv: jeder Punkt hat verschiedene Funktionswerte

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2)$$

Bijektiv: für alle Punkte in B gibt es exakt einen Punkt in A

$$\forall y \in B \exists! x \in A : f(x) = y$$

Falls bijektiv: $\exists!$ Umkehrabbildung $f^{-1} : B \rightarrow A$

$$\text{monoton} \begin{cases} \text{steigend: } f(x_1) \leq f(x_2) \\ \text{fallend: } f(x_1) \geq f(x_2) \end{cases}, \quad x_1 < x_2$$

$$\text{Streng monoton : } f(x_1) < f(x_2) \text{ bzw. } f(x_1) > f(x_2)$$

Intervalle

$$[a, b] := \{a \leq x \leq b\} \text{ abgeschlossen}$$
$$]a, b[:= \{a < x < b\} \text{ offen}$$

Stetigkeit

Eine Funktion $f: A \rightarrow B$ heisst **stetig in x_0** , falls es für jedes $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, sodass für alle Punkte in A:

$$|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Stückweise stetig: ausserhalb einer NS stetig

Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante C:

$$|x - x_0| < \delta \rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|$$

- Kompositionen stetiger Funktionen sind stetig.
- Die Umkehrfunkt. einer stetigen Abb. ist stetig.
- Aus stetigen Funktionen gebildete rationale Ausdrücke sind stetig, sofern definiert.
- Jede differenzierbare Funktion ist lokal lipschitz-stetig.

Stetigkeitssätze: Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion

Zwischenwertsatz: Sei $a < b$. f nimmt jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ an (finde immer x , s.d. ...)

Nullstellensatz: $f(a)$ und $f(b)$ haben verschiedene Vorzeichen. Dann besitzt f in $[a, b]$ mindestens eine Nullstelle.

Extremwertsatz: Da stetig, ist f in $[a, b]$ beschränkt und besitzt ein absolutes Maximum und Minimum.

Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta, \text{ falls } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$$

$$|x - \xi| < \delta \rightarrow |f(x) - \eta| < \varepsilon$$

Sprungstelle: linker und rechter Limes existieren, sind aber verschieden

$$\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \eta, \quad \lim_{y \rightarrow \eta} g(y) = \theta$$

$$\rightarrow \lim_{x \rightarrow \xi} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow \eta} g(y) = \theta$$

Asymptotisch gleich: $\lim_{t \rightarrow \infty} |f(t) - g(t)| = 0$

Vergleichskriterium: $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = 0 ; |g(x)| \leq C f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0, \quad \text{da } f(x) \text{ konvergiert}$$

3. Reihen

Die Reihe konvergiert, falls es einen Grenzwert ξ gibt, s.d.:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} : \forall k > k_0 : |x_k - \xi| < \varepsilon$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ **konvergiert absolut**, falls die dazugehörige Betragsreihe $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert.

Geometrische Reihe: konvergiert mit $|x| < 1$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + \dots = \frac{1}{1-x}$$

Harmonische Reihe: $s \in \mathbb{Q}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k^s} \begin{cases} \text{konvergiert} & , \text{ falls } s > 1 \\ \text{divergiert} & , \text{ falls } s \leq 1 \end{cases}$$

Alternierende Reihe: konvergiert für $c_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k c_k = c_0 - c_1 + c_2 - \dots$$

Binominalreihe: für $|x| < 1$

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$$

Vergleichskriterien

Majorantenkriterium

Für zwei Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k, \sum_{k=0}^{\infty} b_k$ gelte: $|a_k| \leq |b_k|$

- Konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$, so konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$
- Divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$, so divergiert $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$

Quotientenkriterium

$$q := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & , \text{ falls } q < 1 \\ \text{divergiert} & , \text{ falls } q > 1 \end{cases}$$

Wurzelkriterium

$$L := \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & , \text{ falls } L < 1 \\ \text{divergiert} & , \text{ falls } L > 1 \end{cases}$$

Konvergenzradius:

$$\rho = \frac{1}{q} \text{ bzw. } \rho = \frac{1}{L}$$

Potenzreihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \dots$$

$$a_k = \frac{1}{k!} : \text{Exponentialreihe } \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$a_k = 1$: Geometrische Reihe

Konvergenzradius: $0 \leq \rho \leq \infty$

$$\rho := \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \begin{cases} \text{konvergiert absolut} & , \text{ falls } |x| < \rho \\ \text{divergiert} & , \text{ falls } |x| > \rho \end{cases}$$

Exponentialreihe

$$\exp(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}, \quad \rho = \infty$$

- Exponentialfunkt. wächst schneller als jede Potenz
- Logarithmus wächst langsamer als jede Potenz

$$e := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$\cos(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}$$

$$\sin(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

$$\cosh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sinh(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

4. Differenzialrechnung

Eine Funktion $f: I \rightarrow A$ ist an der Stelle $x_0 \in I$ differenzierbar, falls folgender Grenzwert existiert:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Jede differenzierbare Funktion ist stetig.

Landau-Symbol: $o : \lim_{t_0 \rightarrow 0} \frac{A-B}{C} = 0$

$$f(t_0 + h) = f(t_0) + f'(t_0) * h + o(h)$$

Ableitungsregeln

Summenregel

$$\frac{d}{dx} (\lambda f(x) + \mu g(x)) = \lambda * f'(x) + \mu * g'(x)$$

Produktregel

$$\frac{d}{dx} (f(x) * g(x)) = f'(x) * g(x) + f(x) * g'(x)$$

Quotientenregel

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x) * g(x) - f(x) * g'(x)}{g(x)^2}$$

Kettenregel

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) * g'(x)$$

Umkehrsatz: Ableitung der Umkehrfunktion

$$f, g = f^{-1}: \quad g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Partielle Ableitungen: nach je einer Variabel differenzieren, Rest als konstant betrachten

Ableitung der Potenzreihe: ρ bleibt gleich

Kritische Punkte

$f'(x)$	$f''(x)$	$f'''(x)$	
$= 0$	< 0		Lokales Max.
$= 0$	> 0		Lokales Min.
$= 0$	$= 0$	$\neq 0$	Sattelpunkt
	$= 0$	$\neq 0$	Wendepunkt

Extremalwerte auf $[a, b]$

1. kritische Punkte innerhalb I betrachten
2. Randpunkte a, b betrachten

Mittelwertsatz

1. Für eine differenzierbare Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$

$$\exists \xi \in [a, b]: \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Satz von Rolle: $f(a) = f(b) \rightarrow f'(\xi) = 0$

2. $f, g:]a, b[\rightarrow \mathbb{R}, g'(x) \neq 0$

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

Korollar: Sei $|f'(x)| \leq M \quad \forall x \in I$

$$|f(t_2) - f(t_1)| \leq M |t_2 - t_1|$$

Bernoulli – de l'Hôpital

Falls $\lim_{x \rightarrow \xi} f(x) = \lim_{x \rightarrow \xi} g(x) = 0 / \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \xi} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Taylor

Entwicklung bei x_0 , falls mindestens $(n+1)$ -mal diff. bar

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x)$$

$$= f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots$$

Fehlerabschätzung: Man nehme $\tau \in [x, x_0]$

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\tau)}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$$

Konvergenzradius: für $x_0 = 0$:

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} * x^k, \text{ wobei } a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$$

ODER: zB. $\frac{a}{(1-ax)^2} \rightarrow$ Als Ableitung d. geom. Reihe

Newton-Verfahren

x_0 : Startpunkt, möglichst nahe bei Nullstelle ξ

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \xi$$

Bedingung:

- f hat in I genau eine Nullstelle ξ
- f ist entweder konkav oder konvex (kein Extremum)

5. Integration

Seien eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, eine beliebige Zerlegung Z von $[a, b]$ in n Teilintervalle gegeben:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \dots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k] \quad \text{Stützstelle in Intervall}$$

$$\text{Durchmesser } \text{diam}(B) := \sup \{ |x - y| \mid x, y \in B \}$$

$$\text{Korn } \delta(x) = \max_{k=1, \dots, n} \text{diam}(B_k)$$

Dann heisst f **Riemann-integrierbar**, falls der folgende Grenzwert existiert ($\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$)

$$\lim_{\delta(x) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) * \Delta x_k =: \int_a^b f(x) dx$$

Jede stückweise stetige Funktion ist integrierbar.

Hauptsatz der Differenzialrechnung

Stammfunktion: $F(x) := \int_a^x f(t) dt + \text{const.}$

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a) \quad (a, b \in I)$$

$$\frac{d}{dy} \int_a^y f(x) dx = f(y)$$

Mittelwertsatz der Integralrechnung

$$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad : \quad \exists \xi \in [a, b], s.d.$$

$$\int_a^b f(t) dt = f(\xi)(b - a)$$

Eigenschaften des Integrals:

Vertauschen von Grenzen

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

Additivität

$$\int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx$$

Absolutbetrag

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

Integrationstechniken

Partielle Integration

$$\int u(t) * v'(t) dt = u(t) * v(t) - \int u'(t) * v(t) dt$$

$$\text{Trick: } \int \log(x) = \int 1 * \log(x) = x * \log(x) - \dots$$

Substitution

$$1. \varphi(t) := x \rightarrow dx = \varphi'(t) dt$$

$$\int_a^b f(\varphi(t)) * \varphi'(t) dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx$$

$$2. x := \varphi(t), dx := \varphi'(t) dt$$

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f(\varphi(t)) dt$$

Partialbruchzerlegung -> siehe Verschiedenes

Uneigentliche Integrale

$f: B \rightarrow \mathbb{R}^n$: f unbeschränkt, oder B unbeschränkt

Falls das folgende Integral $\forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ definiert ist und

$$\lim_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{a+\varepsilon_1}^{b-\varepsilon_2} f(t) dt$$

existiert ($\neq \pm \infty$), so heisst dieser Grenzwert

das uneigentliche Integral $\int_a^b f(t) dt$.

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+t^2} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{1}{1+t^2} dt$$

1. $f: [a, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig, beschränkt

$$\exists C \geq 0, t_0 > \max\{a, 0\} : \quad \forall t \geq t_0$$

$$i) \quad a > 1 : |f(t)| \leq \frac{C}{t^a}$$

so existiert das uneigentliche Integral $\int_a^\infty f(t) dt$

$$ii) \quad f(t) \geq \frac{C}{t}$$

so divergiert das uneigentliche Integral / existiert nicht..

2. $g: (0, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stückweise stetig auf $[\varepsilon, b], \varepsilon > 0$

$$\exists C > 0, 0 \leq t_0 \leq b : \quad \forall t < t_0$$

$$i) \quad \beta < 1 : |g(t)| \leq \frac{C}{t^\beta}$$

so existiert das uneigentliche Integral $\int_0^b f(t) dt$

$$ii) \quad g(t) \geq \frac{C}{t}$$

so divergiert das uneigentliche Integral / existiert nicht.

6. Differenzialgleichungen

Homogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = 0$$

1. Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x} \rightarrow \text{charakteristisches Polynom}$

$$\text{chp}(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$$

Die Nullstellen heissen Eigenwerte der DGL.

2. Für einen komplexen Eigenwert $\lambda = a + ib$ gilt:

$$y_h(x) = Ae^{\lambda_0 x} + Be^{\bar{\lambda}_0 x} = e^{ax}(A * e^{ibx} + B * e^{-ibx})$$

3. Jeder m -fache Eigenwert führt zu **Fundamentallösungen**

$$e^{\lambda_0 x}, x e^{\lambda_0 x}, x^2 e^{\lambda_0 x}, \dots, x^{m-1} e^{\lambda_0 x}$$

Die allgemeine homogene Lösung $y_h(x)$ besteht aus der *Linearkombination aller Fundamentallösungen*.

Inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1y' + a_0y = K(x)$$

1. Die allgemeine Lösung besteht aus der Summe der homogenen und der partikulären Lösung:

$$y_{\text{allgemein}} = y_{\text{homogen}} + y_{\text{partikulär}}$$

2. Für eine Störfunktion der Form

$$K(x) := q(x)e^{\lambda_0 x}, \quad \text{Grad}(q) = r$$

und einen m -fachen Eigenwert λ_0 , so ist die partikuläre Lösung mit zu bestimmenen Koeffizienten A_k

$$y_p = (A_0 + A_1x + \dots + A_r x^r) * x^m * e^{\lambda_0 x}$$

$$K(x) = x^r, 0 \text{ m-facher EW} \rightarrow y_p = (A_0 + A_1x + \dots + A_r x^r) * x^m$$

$$K(x) = e^{\lambda_0 x}, \lambda_0 \text{ KEIN EW} \rightarrow y_p = \frac{1}{\text{chp}(\lambda)} e^{\lambda_0 x}$$

Separierbare Differentialgleichung

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = f(x) * g(y)$$

Falls y_0 eine NS von $g(y)$ ist, so ist $y(x) = y_0$ eine Lösung.

1. **Separation der Variablen:** Variablen je auf eine Seite

$$\frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx$$

2. Beide Seiten integrieren

i) Allgemeine Lösung:

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

ii) Anfangswertproblem $y(x_0) = y_0$:

$$\int_{y_0}^y \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^x f(x) dx$$

Homogene Differentialgleichung 1. Ordnung

$$y'(x) = f(x) * y$$

Eine homogene DGL 1. Ordnung ist separierbar:

$$\int \frac{1}{y} dy = \log(y) + k = \int f(x) dx = F(x)$$

$$y(x) = C * e^{F(x)}$$

Inhomogene Differentialgleichung 1. Ordnung

1. Homogene Lösung finden:

$$y(x) = C * e^{F(x)} = C * Y(x)$$

2. **Variation der Konstante:** $C \rightarrow C(x)$

3. In ursprüngliche Gleichung einsetzen und lösen:

$$y'(x) = f(x)y + K(x)$$

$$C'(x)Y(x) + C(x)Y'(x) = C(x)f(x)Y(x) + K(x)$$

Da $Y'(x) = f(x) * Y(x)$ (da homogene Lösung)

$$C = \int \frac{K(x)}{Y(x)} dx \rightarrow C + C_0$$

$$y(x) = (C(x) + C_0) * Y(x)$$

Homogene Differentialgleichung

$$y' = f(x, y) = f(\lambda x, \lambda y)$$

1. **Substituiere** $u := \frac{y}{x}$, $y = u * x$,

sodass f nur noch von u abhängt $\rightarrow f(u)$

2. y nach x ableiten \rightarrow Separierbare DGL

$$y' = u' * x + u = f(u)$$

3. u durch Separation der Variablen x, u bestimmen und am Ende y rücksostituieren

$$\frac{du}{dx} x = f(u) - u$$
$$\frac{1}{f(u) - u} du = \frac{1}{x} dx$$

7. Mehrdimensionale

Integralrechnung

Dreidimensionale Berechnungen

Volumen

$$V(K) = \int_K 1 \, d\mu(x, y, z)$$

Variable Massenverteilung

$$m(K) = \int_K \rho(x, y, z) \, d\mu(x, y, z)$$

Schwerpunkt

$$\vec{s} = \begin{pmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \end{pmatrix} = \frac{1}{m(K)} \int_K \rho(x, y, z) * \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} d\mu(x, y, z)$$

Für einen homogenen Körper ($\rho = \text{konst.}$) gilt:

$$\vec{s} = \frac{1}{V(K)} \int_K \vec{r} * d\mu(x, y, z)$$

Trägheitsmoment

Bezüglich der z-Achse gilt

$$\Theta = \int_B \rho(x, y, z)(x^2 + y^2) \, dV$$

Falls Masse m bereits gegeben: $\Theta = m \int (x^2 + y^2) \, dV$

Für einen rotationssymmetrischen Körper gilt

$$\Theta = 2\pi \int_a^b \int_0^{r(z)} \rho(r, z) r^3 \, dr \, dz$$

Satz von Steiner (für parallele Achsen)

$$\Theta_2 = \Theta_1 + m * d^2$$

Variablensubstitution / Transformation

$x : \tilde{B} \rightarrow B$ bijektiv, stückweise stetig $\rightarrow \tilde{f}(u) = f(x(u))$

$$\int_B f(x) \, dx = \int_{\tilde{B}} \tilde{f}(u) |J_f(u)| \, du$$

J_f : Funktionaldeterminante

Integration in **Zylinderkoordinaten**:

$$dV = r \, dr \, d\varphi \, dz$$

Integration in **Kugelkoordinaten**:

$$dV = r^2 \cos \vartheta \, dr \, d\varphi \, d\vartheta$$

Zylinderkoordinaten

$$\begin{cases} x = r * \cos \varphi \\ y = r * \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \varphi = \arg(x, y) \\ z = z \end{cases}$$

Kugelkoordinaten

$$\begin{cases} x = r * \cos \vartheta \cos \varphi \\ y = r * \cos \vartheta \sin \varphi \\ z = r * \sin \vartheta \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \varphi \in [0, 2\pi] \\ \vartheta \in [\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

Rotationskörper

$$\int_B f(x, y, z) \, dV = 2\pi \int_a^b \int_a^{g(z)} f(r * \cos \varphi, r * \sin \varphi, z) r \, dr \, dz$$

$$Vol(B) = \pi \int_a^b g(z)^2 \, dz$$

8. Mehrdimensionale

Differentialrechnung

Richtungsableitung und partielle Ableitung

$$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^n \text{ offen}$$

Die **Richtungsableitung** von f an der Stelle $\vec{x}_0 \in \Omega$ in

Richtung des Einheitsvektors $\vec{e} \in \mathbb{R}^n$ ist der Grenzwert

$$(D_{\vec{e}} f)(\vec{x}_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\vec{x}_0 + t * \vec{e}) - f(\vec{x}_0)}{t}$$

Wählt man für \vec{e} ($|\vec{e}| = 1$) den Koordinateneinheitsvektor

\vec{e}_i , $i = 1, \dots, n$, so erhält man die **partielle Ableitung** von

f nach x_i an der Stelle \vec{x}_0 :

$$\frac{df}{dx_i}(\vec{x}_0) = (D_{\vec{e}_i} f)(\vec{x}_0) = (\nabla f(\vec{x}_0)) * \vec{e}_i$$

Gradient: zeigt in Richtung der stärksten Steigung

-> Partiiell ableiten nach x_1, \dots, x_n

$$(\nabla f)(\vec{x}_0) = (\text{grad } f)(\vec{x}_0) = \begin{pmatrix} \frac{df}{dx_1}(\vec{x}_0) \\ \vdots \\ \frac{df}{dx_n}(\vec{x}_0) \end{pmatrix}$$

Totale Ableitung: Eine differenzierbare Funktion f lässt sich wie folgt approximieren, wobei $\vec{z}_0 \in \Omega$

$$\begin{aligned} f(z) &= f(\vec{z}_0) + (\nabla f)(\vec{z}_0) * (z - \vec{z}_0) + o(|z - \vec{z}_0|) \\ &= f(\vec{z}_0) + \frac{df}{dx_1}(\vec{z}_0)(x_1 - x_{01}) + \dots + \frac{df}{dx_n}(\vec{z}_0)(x_n - x_{0n}) \end{aligned}$$

Tangente

$$T_p \gamma = \begin{pmatrix} x'(p_x) \\ y'(p_y) \end{pmatrix}, \quad p \in \text{Gerade } \gamma$$

Tangentialebene: $z = f(\vec{x}_0) + (\nabla f)(\vec{x}_0) * (\vec{x} - \vec{x}_0)$

Mehrdimensionale Kettenregel

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n : g(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\frac{d}{dt} f(g(t)) = (\nabla f)(g(t)) * g'(t)$$

$$= \frac{d}{dt} f(g(t)) * g'_1(t) + \dots + \frac{d}{dt} f(g(t)) * g'_n(t)$$

Differentiation unter dem Integral

$$\frac{d}{dt} \int_B f(x, t) dx = \int_B \frac{d}{dt} f(x, t) dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{d}{dt} f(x, t) dx - f(a(t), t) * a'(t) + f(b(t), t) * b'(t)$$

Hesse-Matrix

Für eine zweimal diff. bare Funktion f gilt:

$$\mathcal{H}(f)(z_0) = \left(\frac{d^2 f}{dx_i dx_j} (z_0) \right)_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{d^2 f}{dx_1^2} & \dots & \frac{d^2 f}{dx_1 dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{d^2 f}{dx_1 dx_n} & \dots & \frac{d^2 f}{dx_n^2} \end{pmatrix} (z_0)$$

Mehrdimensionale Taylor-Entwicklung

$$f(\vec{x}_0 + h) = f(\vec{x}_0) + (\nabla f(\vec{x}_0)) h + \frac{1}{2} h^T \mathcal{H}(f)(\vec{x}_0) h + o(|h|^2)$$

Taylor 1. Grades: Approximation durch Tangentialebene

$$f(\vec{x}) \approx f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0) * (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Taylor 2. Grades mit 2 Variablen: $\Delta x = x - x_0, \Delta y = y - y_0$

$$f^2(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + f_x(\vec{x}_0) \Delta x + f_y(\vec{x}_0) \Delta y + \frac{1}{2} f_{xx}(\vec{x}_0) \Delta x^2 + f_{xy}(\vec{x}_0) \Delta x \Delta y + \frac{1}{2} f_{yy}(\vec{x}_0) \Delta y^2$$

Taylor 2. Grades mit n Variablen:

$$f^2(\vec{x}_0) = f(\vec{x}_0) + \nabla f(\vec{x}_0)(\vec{x} - \vec{x}_0) + \frac{1}{2} (\vec{x} - \vec{x}_0)^T \mathcal{H}(f)(\vec{x}_0) (\vec{x} - \vec{x}_0)$$

Kritische Punkte

Falls z_0 ein **kritischer Punkt / lokales Extremum** ist, gilt:

$$(\nabla f)(\vec{x}_0) = 0$$

Für die Eigenwerte λ_i der Hessematrix $\mathcal{H}(f)(\vec{x}_0)$ gilt:

- $\forall \lambda_i > 0$: \rightarrow *lokales Minimum*
- $\forall \lambda_i < 0$: \rightarrow *lokales Maximum*
- $\exists \lambda_i > 0 \wedge \exists \lambda_i < 0$: \rightarrow *Sattelpunkt*

$\exists \lambda_i = 0 \rightarrow$ muss näher betrachtet werden

Pos. definiert : Min ; Neg. definiert : Max ; indefinit : Sattelpunkt

Für $n=2$: $f(x,y)$

$$\det \mathcal{H}(f) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$$

$$\text{tr } \mathcal{H}(f) = f_{xx} + f_{yy}$$

$$\mathcal{H}(f) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

- $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 > 0$
 - $f_{xx} + f_{yy} > 0 \rightarrow$ Lok. Minimum
 - $f_{xx} + f_{yy} < 0 \rightarrow$ Lok. Maximum
- $f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2 < 0 \rightarrow$ Sattelpunkt

n -dimensionaler Bereich B

1. kritischen Punkte von f im Innern von B $\rightarrow \nabla f = 0$
 2. „bedingt kritische Punkte“ von f im Innern jeder Seitenfläche (kritische Punkte nach Parametrisierung)
 3. die Werte an den Ecken / Rändern
- \rightarrow finde globales Maximum und Minimum

Lagrange-Multiplikatoren

$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$: Suche kritische Punkte von f auf einer d -dimensionalen Fläche, gegeben durch $r = n-d$ Gleichungen

$$F_1(x_1, \dots, x_n) = 0$$

\vdots

$$F_r(x_1, \dots, x_n) = 0$$

Dann müssen die kritischen Punkte zusätzlich zu den Nebenbedingungen folgende Gleichung erfüllen

$$\nabla f(\vec{x}) = \lambda_1 \nabla F_1(\vec{x}) + \dots + \lambda_r \nabla F_r(\vec{x})$$

Dies folgt aus der Lagrange'sche Prinzipalfunktion

$$\Phi(\vec{x}, \lambda) = f(\vec{x}) - \lambda_1 F_1(\vec{x}) - \lambda_2 * \dots = 0$$

Achtung: λ nicht berechnen

\rightarrow Löse das Gleichungssystem

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = \frac{df}{dx_1} - \dots = 0$$

$$\frac{d\Phi}{dx_1} = \frac{df}{dx_1} - \dots = 0$$

und setze in die Nebenbedingungen F_n ein

Satz über implizite Funktionen

$$\Omega \subset \mathbb{R}^2, f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$C: \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$$

Für $(x_0, y_0) \in C$, $\frac{df}{dy}(x_0, y_0) \neq 0$ gibt es Intervalle I_1, I_2

$$C \cap (I_1 \times I_2) = \{(x, y(x)) \mid x \in I_1\}$$

Insbesondere existiert ein $y(x)$ auf I_2 , s.d.:

$$f(x, y(x)) = 0$$

$$y'(x) = -\frac{f_x(x, y(x))}{f_y(x, y(x))}$$

Allgemeiner Satz über implizite Funktionen

$$f = \begin{bmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+m}) \end{bmatrix}, S: \{f_i(x) = \dots = f_m(x) = 0\}$$

y_i existieren, falls:

$$\det \begin{pmatrix} \frac{df_1}{dx_{n+1}} & \dots & \frac{df_1}{dx_{n+m}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_{n+1}} & \dots & \frac{df_m}{dx_{n+m}} \end{pmatrix} = 0$$

Satz über Umkehrfunktionen

$$y = f(x): C = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0 = y - f(x)\}$$

Wegen $f_y(x_0) \neq 0: \exists$ um y_0 $F(g(y), y) = y - f(g(y))$

$$g'(y_0) = -\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Korollar: Niveaulinie

$$z_0: (x_0, y_0) \text{ regulärer Punkt: } \text{grad } f(z_0) \neq 0 \\ f(z_0) = A$$

$$\text{Niveaulinie } f^{-1}(A) = \{(x, y) \mid f(x, y) = A\}$$

$f^{-1}(A)$ glatt, $\nabla f(z_0)$ steht senkrecht auf T tangente

Die Funktionalmatrix (Jakobi)

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m: f(x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

$$Df(p) := \left[\frac{df}{dx} \right]_p = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dx_1} & \dots & \frac{df_1}{dx_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{df_m}{dx_1} & \dots & \frac{df_m}{dx_n} \end{bmatrix} (p) = \begin{pmatrix} \nabla f_1 \\ \vdots \\ \nabla f_m \end{pmatrix}$$

Die lineare Approximation von f bei \vec{x}_0 ist:

$$f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0) + \left[\frac{df}{dx} \right]_p * (\vec{x} - \vec{x}_0) + o(|(\vec{x} - \vec{x}_0)|)$$

Kettenregel

$$y: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, z: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^s: \varphi(x) = z(y(x))$$

$$\left[\frac{d\varphi}{dx} \right]_p = \left[\frac{dz}{dy} \right]_{y(p)} * \left[\frac{dy}{dx} \right]_p$$

Funktionaldeterminante: singular / regulär

$$J_f(p) := \det \left[\frac{df}{dx} \right]_p$$

f heisst **regulär**, falls maximaler Rang

$$\text{rang} \left[\frac{df}{dx} \right]_p = \min(m, n), \quad \det \left[\frac{df}{dx} \right]_p \neq 0$$

Satz über die Umkehrfunktion

Für $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ regulär gilt:

$$\left[\frac{df^{-1}}{dx} \right]_{f(p)} = \left[\frac{df}{dx} \right]_p^{-1}$$

9. Vektoranalysis

Gradientenfeld von f : $\vec{K}(x, y) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix} = (\nabla f)(x)$

Singulärer Punkt: Nullstelle des Vektorfelds

Feldlinie: Kurve, die in jedem Punkt parallel zu Vektorfeld

Löse das Diff.gl.system

$$\frac{d}{dt} \vec{x}(t) = \vec{v}(\vec{x}(t))$$

$$\ln n = 2$$

$$y'(x) = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}$$

Potential des Vektorfelds: Sei $p_0 \in \Omega$, γ ein Weg zw. p_0 u. p

$$f(p) = \int_{p_0}^p \vec{K} d\vec{x} = \int_{\gamma} \vec{K} d\vec{x} \rightarrow \vec{K} = \nabla f$$

Konservatives Vektorfeld

Alle **Gradientenfelder** sind **konservativ**: $\vec{K} = \nabla f$

Haben γ_1, γ_2 dieselben Anfangs- und Endpunkte, so gilt

$$\int_{\gamma_1} \vec{K} d\vec{x} = \int_{\gamma_2} \vec{K} d\vec{x} = f(x_{\text{Ende}}) - f(x_{\text{Start}})$$

Für eine geschlossene Kurve in Ω gilt: $\oint_{\gamma} \vec{K} d\vec{x} = 0$

Eine notwendige Bedingung, dass K konservativ:

$$\frac{dK_i}{dx_j} = \frac{dK_j}{dx_i}, \quad i \neq j$$

Ist Ω einfach zusammenhängend, gilt:

$$\frac{dQ}{dx} = \frac{dP}{dy} \leftrightarrow \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) = 0 \text{ für } K \text{ konservativ}$$

$$K \text{ konservativ} \leftrightarrow \text{rot}(K) = 0$$

Linienintegral: Zirkulation

Skalares Linienintegral (Länge -> f = 1)

$$\int_{\gamma} f \, d|l| = \int_a^b f(\tilde{\gamma}(t)) * |\tilde{\gamma}'(t)| \, dt$$

Vektorielltes Linienintegral

$$\int_{\gamma} \vec{K} \, d\vec{x} = \int_a^b \vec{K}(\tilde{\gamma}(t)) * \tilde{\gamma}'(t) \, dt$$

$$\int_{\gamma} \vec{K} \, d\vec{x} = \int_{\gamma} \left(\begin{matrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{matrix} \right) d\vec{x} = \int_{\gamma} P \, dx + Q \, dy$$

Flächenintegral: Fluss

Immer nur abhängig von 2 Variablen, zB. r, ϕ

$$\vec{n} = \frac{1}{|\vec{r}_u \times \vec{r}_v|} (\vec{r}_u \times \vec{r}_v), \quad \text{wobei } \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Skalares Flächenintegral

$$\int_S f \, d\vec{\omega} = \int_B f(\vec{r}(u,v)) * |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, d\mu(u,v)$$

Flächeninhalt von S = dB

$$\omega(S) = \int_B 1 \, d\omega = \int_B |\vec{r}_u \times \vec{r}_v| \, d\mu(u,v)$$

Vektorielltes Flächenintegral:

$$\begin{aligned} \int_B \vec{v} \, d\vec{\omega} &= \int_B \vec{v} \, \vec{n} \, d\omega \\ &= \int_B \vec{v}(\vec{r}(u,v)) * (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, d\mu(u,v) \end{aligned}$$

$$d\vec{\omega} = \vec{n} \, d\omega = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) \, d\mu(u,v)$$

Satz von Green

Sei B eine Fläche in \mathbb{R}^2 und dB der Rand von B

$$\int_{dB} P \, dx + Q \, dy = \iint_B \left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy} \right) d\mu(x,y)$$

Flächenberechnung

$$\mu(B) = \int_B 1 \, d\mu = \int_{dB} x \, dy = - \int_{dB} y \, dx$$

Trick: $dx = dx * \frac{dt}{dt} = \frac{dx}{dt} dt = x'(t) dt$

Satz von Stokes: *Linienint. -> Flächenint.*

Dreidimensionale Verallgemeinerung des Satzes von Green

-> Berechnung der **Zirkulation** im Rand über die Fläche

$$\int_{dS} \vec{K} \, d\vec{s} = \int_S \text{rot } \vec{K} * \vec{n} \, d\omega$$

Flächenberechnung: rot $\vec{K} = 1$

$$\vec{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \\ y \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -y \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y \\ \frac{1}{2}x \\ 0 \end{pmatrix}$$

Divergenzatz / Satz von Gauss: *Fläche -> Volumen*

Tangentialvektor: $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

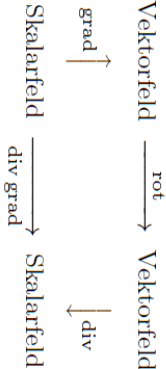
\vec{n} ist der **nach aussen zeigende** Normaleneinheitsvektor

Was am Rand rausfließt, ist gleich dem im Inneren Produzierten

$$\begin{aligned} \int_{d\Omega} \left(\begin{matrix} P \\ Q \end{matrix} \right) \vec{n} \, ds &= \int_{\Omega} \left(\frac{dP}{dx} - \frac{dQ}{dy} \right) d\mu(x,y) \\ &= \int_{\Omega} (\text{div } \vec{v}) \, d\mu(x,y) \end{aligned}$$

Arbeit d. VF: $\int < \dot{\gamma}(t), V(\gamma(t)) >$

Differentialoperatoren



grad f	∇f	$\begin{bmatrix} \partial_1 f \\ \partial_2 f \\ \partial_3 f \end{bmatrix}$
$\text{rot } \vec{K}$	$\nabla \times \vec{K}$	$\begin{bmatrix} \partial_2 K_3 - \partial_3 K_2 \\ \partial_3 K_1 - \partial_1 K_3 \\ \partial_1 K_2 - \partial_2 K_1 \end{bmatrix}$
$\text{div } \vec{K}$	$\nabla \cdot \vec{K}$	$\partial_1 K_1 + \partial_2 K_2 + \partial_3 K_3$
$\text{div grad } f$	Δf	$\partial_1^2 f + \partial_2^2 f + \partial_3^2 f$

$$\Delta f = \nabla * \nabla f$$

Eigenschaften

$$\text{rot grad } f = 0 \quad \text{div rot } \vec{K} = 0$$

grad f = 0	f ist lokal konstant.
$\text{rot } \vec{K} = 0$	\vec{K} ist wirbelfrei bzw. lokal $\exists f$ mit $\text{grad } f = \vec{K}$.
$\text{div } \vec{K} = 0$	\vec{K} ist divergenzfrei bzw. lokal $\exists \vec{L}$ mit $\text{rot } \vec{L} = \vec{K}$.
$\Delta f = 0$	f ist harmonisch.

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{v}) = \nabla \times \nabla \times \vec{v} = \text{grad}(\text{div } \vec{v}) - \begin{pmatrix} \Delta v_1 \\ \Delta v_2 \\ \Delta v_3 \end{pmatrix}$$

10. Verschiedenes

Topologie

Innerer Punkt: Alle Punkte in ϵ -Umgebung von $a \in A$ müssen auch in A liegen.

Randpunkt: Jede noch so kleine Vollkugel muss A UND $\mathbb{R} \setminus \{A\}$ treffen. ACHTUNG: Muss nicht in A liegen!

∂A : Menge aller Randpunkte, „Rand“

\bar{A} : Abschluss von A , $= A \cup \partial A$

Falls $\begin{cases} \partial A \subset A : \text{abgeschlossen} \rightarrow A = \bar{A} \\ \partial A \not\subset A : \text{offen} \rightarrow A = \bar{A} \end{cases}$

Supremum und Infimum

Maximum: $s \in M$, $s \geq \forall y \in M \rightarrow s = \max(M)$

Oben beschränkt: $\exists a \in \mathbb{R} : a \geq x \forall x \in M$

Supremum: kleinste obere Schranke von M

Falls **Supremum** $s \in M$, heisst s auch **globales Maximum**

Kompaktheit

Eine Menge heisst **kompakt**, falls sie abgeschlossen und beschränkt ist. Jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ ist kompakt.

Konvex und Konkav

$$f''(t) \geq 0 : \text{konvex}$$

$$f''(t) \leq 0 : \text{konkav}$$

Givens-Rotation

$$\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Binominalkoeffizient: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}; \quad \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Pascal - Binome und Trinome:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Gamma-Funktion

Interpoliert Fakultätswerte

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt, \quad \alpha > 0$$

$$\Gamma(\alpha + 1) = \alpha * \Gamma(\alpha); \quad \Gamma(n + 1) = n!, \quad n \in \mathbb{N}$$

Logarithmus

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$$

Kreis / Kugel

Kreis: $x^2 + y^2 = r^2$

Umfang: $2\pi r$ *Fläche:* πr^2

Kugel: $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

Fläche: $4\pi r^2$ *Volumen:* $\frac{4\pi}{3} r^3$

Partialbruchzerlegung

1. Polynomdivision, so dass

$$F(x) = P(x) + \frac{r(x)}{q(x)}, \quad \text{Grad}(r) < \text{Grad}(q)$$

2. Nullstellen a_1, \dots, a_n von $q(x)$ finden:

Reelle Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{A_1}{(x-a_k)} + \frac{A_2}{(x-a_k)^2} + \dots + \frac{A_n}{(x-a_k)^n}$$

Paar komplexer Nullstellen n-ter Ordnung:

$$\frac{B_1 x + C_1}{(x-a_k)(x-\bar{a}_k)} + \dots + \frac{B_n x + C_n}{[(x-a_k)(x-\bar{a}_k)]^n} +$$

$$(x-a_k)(x-\bar{a}_k) = (x-Re)^2 + Im^2$$

4. Beide Seiten auf gemeinsamen Nenner ->

Koeffizientenvergleich

(Einfache reelle NS: $A = \lim_{x \rightarrow a} (x-a) * \frac{r(x)}{q(x)}$)

5. Integration:

$$\int \frac{A_n}{(x-a_k)^n} = -\frac{1}{n-1} * \frac{A_n}{(x-a_k)^{n-1}}$$

$$\int \frac{Bx+C}{(x-Re)^2 + Im^2} = c_1 * \int \frac{\frac{d}{dx}[(x-Re)^2 + Im^2]}{(x-Re)^2 + Im^2} + c_2 * \int \frac{1}{(x-Re)^2 + Im^2}$$

$$\rightarrow 1. \log((x-Re)^2 + Im^2); \quad 2. \text{Subst: } t = \frac{x-Re}{Im}$$

Eigenwertproblem

Lösen des charakteristischen Polynoms $\chi_p(\lambda)$:

$$\det(A - \lambda I_n) = 0$$

Bei einer Dreiecksmatrix sind die EW in der Diagonalen.

11. Tabellen

$\tan' x = 1 + \tan^2 x$ $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ $2 * \cos(x)^2 * \sin(x)^2 = \frac{1}{2} \sin(2x)^2$
--

Grad	Rad	$\sin \varphi$	$\cos \varphi$	$\tan \varphi$
0°	0	0	1	0
30°	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45°	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60°	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$
90°	$\frac{1}{2}\pi$	1	0	
120°	$\frac{2}{3}\pi$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$
135°	$\frac{3}{4}\pi$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	-1
150°	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$
180°	π	0	-1	0

$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$
 $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$
 $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$

Grenzwerte

$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$ ($|a| < 1$)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{a} = 1$ ($a \in \mathbb{R}^+$)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[x]{x} = 1$
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{a^x}{x!} = 0$ ($a \in \mathbb{R}$)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$ ($a \in \mathbb{R}$)
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}$)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ ($n \in \mathbb{N}$)
 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \log a$ ($a \in \mathbb{R}^+$)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} [x(\log x)^n] = 0$ ($n \in \mathbb{N}$)
 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\log x)^n}{x} = 0 = 0$ ($n \in \mathbb{N}$)

Doppelwinkel-Funktionen

$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi$ $\sin^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (1 - \cos \varphi)$
 $\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi$ $\cos^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} (1 + \cos \varphi)$
 $\tan 2\varphi = \frac{2 \tan \varphi}{1 - \tan^2 \varphi}$ $\tan^2 \frac{\varphi}{2} = \frac{1 - \cos \varphi}{1 + \cos \varphi}$
 $1 - \cos 2\varphi = 2 \sin^2 \varphi$
 $1 + \cos 2\varphi = 2 \cos^2 \varphi$

Reihenentwicklungen

$e^x = 1 + x + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$
 $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$
 $(1+x)^n = 1 + \binom{n}{1}x + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$
 $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
 $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
 $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$
 $\sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$
 $\cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!}$
 $\operatorname{artanh} x = x + \frac{x^3}{3} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$

Summe der ersten n-Zahlen

$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Geometrische Reihe

$\sum_{k=0}^n x^k = 1 + x + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$

Ableitungen

Potenz- und Exponentialfunktionen			Trigonometrische Funktionen		Hyperbolische Funktionen	
$f(x)$	$f'(x)$	Bedingung	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\sin x$	$\cos x$	$\sinh x$	$\cosh x$
x^n	nx^{n-1}	$n \in \mathbb{Z}_{<0}, x \neq 0$	$\cos x$	$-\sin x$	$\cosh x$	$\sinh x$
x^a	ax^{a-1}	$a \in \mathbb{R}, x > 0$	$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tanh x$	$\frac{1}{\cosh^2 x}$
$\log x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arsinh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
e^x	e^x		$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcosh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
a^x	$a^x \cdot \log a$	$a > 0$	$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{artanh} x$	$\frac{1}{1-x^2}$

Stammfunktionen

$f(x)$	$F(x)$	Bedingung	$f(x)$	$F(x)$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$	$\frac{1}{x}$	$\log x $
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$n \in \mathbb{Z}_{\leq -2}, x \neq 0$	$\tan x$	$-\log \cos x $
x^a	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$	$a \in \mathbb{R}, a \neq -1, x > 0$	$\tanh x$	$\log (\cosh x)$
$\log x$	$x \log x - x$	$x > 0$	$\sin^2 x$	$\frac{1}{2}(x - \sin x \cos x)$
e^{ax}	$\frac{1}{a}e^{ax}$	$a \neq 0$	$\cos^2 x$	$\frac{1}{2}(x + \sin x \cos x)$
a^x	$\frac{a^x}{\log a}$	$a > 0, a \neq 1$	$\tan^2 x$	$\tan x - x$

Standard-Substitutionen

Integral	Substitution	Ableitung	Bemerkung
$\int f(x, x^2 + 1) dx$	$x = \tan t$	$dx = \tan^2 t + 1 dt$	$t \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} (k\pi - \frac{\pi}{2}, k\pi + \frac{\pi}{2})$
$\int f(x, \sqrt{ax+b}) dx$	$x = \frac{t^2-b}{a}$	$dx = \frac{2}{a}t dt$	$t \geq 0$
$\int f(x, \sqrt{ax^2+bx+c}) dx$	$x + \frac{b}{2a} = t$	$dx = dt$	$t \in \mathbb{R}$, quadratische Ergänzung
$\int f(x, \sqrt{a^2-x^2}) dx$	$x = a \sin t$	$dx = a \cos t dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, 1 - \sin^2 x = \cos^2 x$
$\int f(x, \sqrt{a^2+x^2}) dx$	$x = a \sinh t$	$dx = a \cosh t dt$	$t \in \mathbb{R}, 1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$
$\int f(x, \sqrt{x^2-a^2}) dx$	$x = a \cosh t$	$dx = a \sinh t dt$	$t \geq 0, \cosh^2 x - 1 = \sinh^2 x$
$\int f(e^x, \sinh x, \cosh x) dx$	$e^x = t$	$dx = \frac{1}{t} dt$	$t > 0, \sinh x = \frac{t^2-1}{2t}, \cosh x = \frac{t^2+1}{2t}$
$\int f(\sin x, \cos x) dx$	$\tan \frac{x}{2} = t$	$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$	$-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

Ansätze für inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

Störfunktion $K(t)$	Spektralbedingung	Ansatz für $y_p(x)$
x^r	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1 x + \dots + A_r x^r$
	$0 \in \operatorname{spec} L$, m -fach	$A_0 x^m + A_1 x^{m+1} + \dots + A_r x^{m+r}$
$b_0 + b_1 x + \dots + b_r x^r, b_i \in \mathbb{R}$	$0 \notin \operatorname{spec} L$	$A_0 + A_1 x + \dots + A_r x^r$
$e^{\lambda_0 x}, \lambda_0 \in \mathbb{C}$	$\lambda_0 \notin \operatorname{spec} L$	$A e^{\lambda_0 x}$
	$\lambda_0 \in \operatorname{spec} L$, m -fach	$A x^m e^{\lambda_0 x}$
$\cos(\omega x), \sin(\omega x)$	$\pm i\omega \notin \operatorname{spec} L$	$A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$
	$\pm i\omega \in \operatorname{spec} L$, einfach	$x(A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))$
$x^2 e^{-x}$	$-1 \notin \operatorname{spec} L$	$(A_0 + A_1 x + A_2 x^2) e^{-x}$