トポス理論における諸定理
とくに Local Set Theory のトポスモデルにおける健全性定理

川嶋 康太

名古屋大学 情報文化学部 自然情報学科 複雑システム系

February 8, 2019

発表の流れ

1. 卒業研究の成果
2. 圏論の基本概念
3. トポスの異なる定義の同値性
4. トポスにおける余極限の構成
5. トポスの持つ性質・構造
6. まとめ

卒業研究の成果

やったこと

- 圏論の勉強
- トポス理論における諸定理の証明
- トポスと数学の基礎（とくに ZFC）の関係の調査

動機

- 圏論が近年多くの分野（計算機科学，物理学，生物学，論理学，哲学など）に応用されており，多くの研究者に注目されていたこと
- トポス理論が圏論，論理学，幾何学などの分野と密接に関係しており，興味深い数々の結果を明らかにしたこと
  - 例えば，トポス理論においては論理と幾何を統一的に扱うことができること

卒業研究の成果

やったこと

- 圏論の勉強
- トポス理論における諸定理の証明
- トポスと数学の基礎（とくに ZFC）の関係の調査

動機

- 圏論が近年多くの分野（計算機科学，物理学，生物学，論理学，哲学など）に応用されており，多くの研究者に注目されていたこと
- トポス理論が圏論，論理学，幾何学などの分野と密接に関係しており，興味深い数々の結果を明らかにしたこと
  - 例えば，トポス理論においては論理と幾何を統一的に扱うことができること

卒業研究の成果

やったこと

- 圏論の勉強
- トポス理論における諸定理の証明
- トポスと数学の基礎（とくに ZFC）の関係の調査

動機

- 圏論が近年多くの分野（計算機科学，物理学，生物学，論理学，哲学など）に応用されており，多くの研究者に注目されていたこと
- トポス理論が圏論，論理学，幾何学などの分野と密接に関係しており，興味深い数々の結果を明らかにしたこと
  - 例えば，トポス理論においては論理と幾何を統一的に扱うことができること

卒業研究の成果

オリジナリティ

- 本研究で取り上げた定理を日本語で体系的に扱い，編集したこと
  - 本研究で取り上げた定理を体系的に扱った日本語の文献が存在しなかった
- 参照した文献に載っていた証明の省略箇所を補ったこと
  - 参照した文献に載っていた証明は，いくらか省略されていた
- 参照した文献に載っていた証明の一部に間違いを発見し，訂正したこと

参照した文献とは，次の２つである．

- Sheaves in Geometry and Logic（Mac Lane/Moerdijk，1992）
- Toposes and Local Set Theory（Bell，1988）

卒業研究の成果

オリジナリティ

- 本研究で取り上げた定理を日本語で体系的に扱い，編集したこと
  - 本研究で取り上げた定理を体系的に扱った日本語の文献が存在しなかった
- 参照した文献に載っていた証明の省略箇所を補ったこと
  - 参照した文献に載っていた証明は，いくらか省略されていた
- 参照した文献に載っていた証明の一部に間違いを発見し，訂正したこと

参照した文献とは，次の２つである．

- Sheaves in Geometry and Logic（Mac Lane/Moerdijk，1992）
- Toposes and Local Set Theory（Bell，1988）

証明した諸定理

- トポスの異なる定義の同値性
- 前層圏はトポスであること
- トポスにおける余極限の構成
- エピ-モノ分解定理（トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できるという定理）
- トポスの基本定理（トポスをスライスしてもトポスであるという定理）
- Local Set Theory（高階直観主義論理）のトポスモデルにおける健全性定理

証明した諸定理

- トポスの異なる定義の同値性
- 前層圏はトポスであること
- トポスにおける余極限の構成
- エピ-モノ分解定理（トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できるという定理）
- トポスの基本定理（トポスをスライスしてもトポスであるという定理）
- Local Set Theory（高階直観主義論理）のトポスモデルにおける健全性定理

証明した諸定理

- トポスの異なる定義の同値性
- 前層圏はトポスであること
- トポスにおける余極限の構成
- エピ-モノ分解定理（トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できるという定理）
- トポスの基本定理（トポスをスライスしてもトポスであるという定理）
- Local Set Theory（高階直観主義論理）のトポスモデルにおける健全性定理

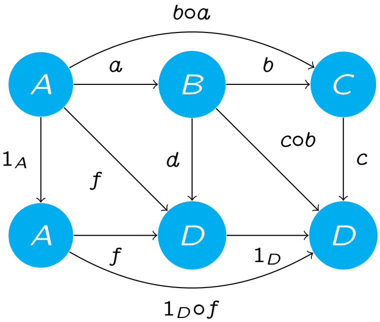
圏

- 対象 $A, B, C, D, \ldots$ と射 $a, b, c, d, \ldots$ によって定められる
- 対象と射が「ある条件」を満たした有機的なネットワークのこと
- 射 a, b に対して合成射 $b \circ a$ が存在する
- 結合律：$(c \circ b) \circ a = c \circ (b \circ a)$
- 単位律：$f \circ 1_A = 1_D \circ f$

- 圏は至る所に現れる

圏

- 対象 $A, B, C, D, \ldots$ と射 $a, b, c, d, \ldots$ によって定められる
- 対象と射が「ある条件」を満たした有機的なネットワークのこと
- 射 a, b に対して合成射 $b \circ a$ が存在する
- 結合律：$(c \circ b) \circ a = c \circ (b \circ a)$
- 単位律：$f \circ 1_A = 1_D \circ f$



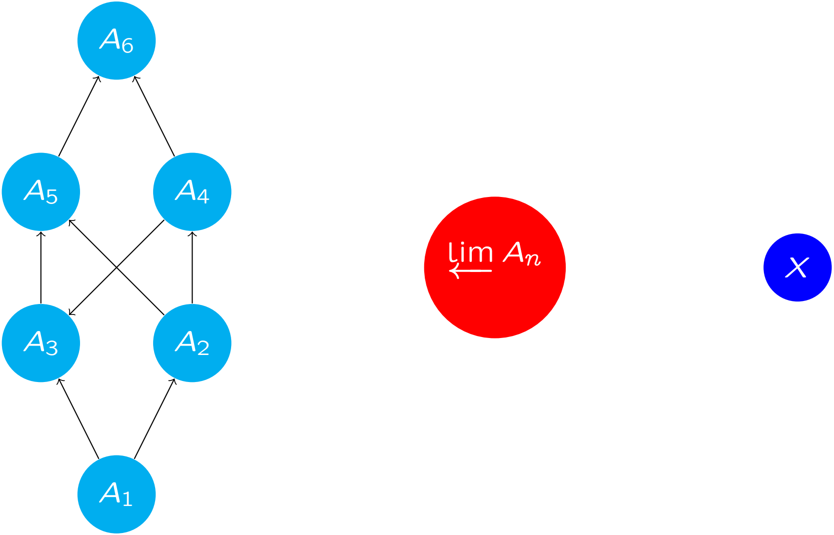
- 圏は至る所に現れる

極限

- 極限とは，次のような可換図式のこと

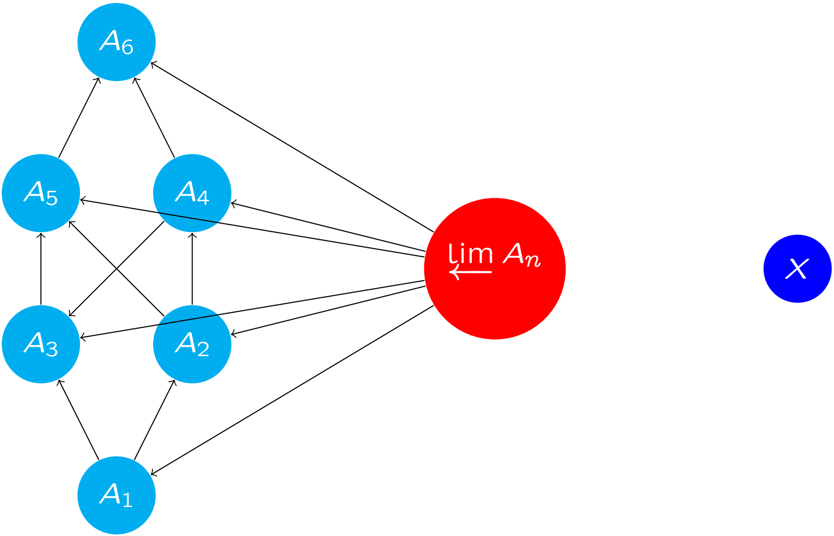
極限

- 極限とは，次のような可換図式のこと



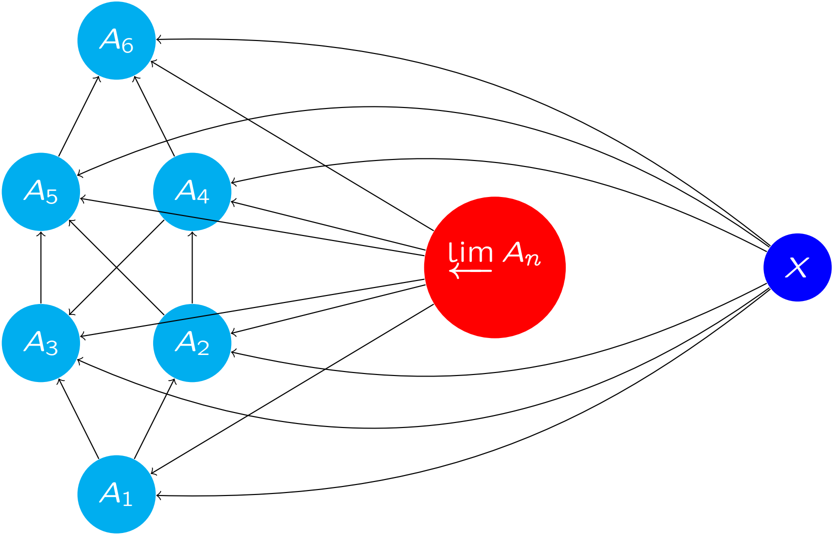
極限

- 極限とは，次のような可換図式のこと



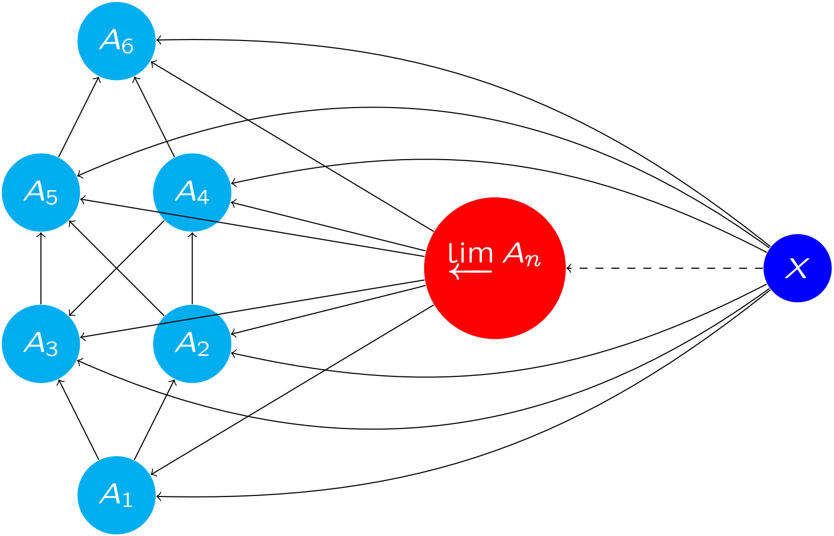
極限

- 極限とは，次のような可換図式のこと



極限

- 極限とは，次のような可換図式のこと



極限

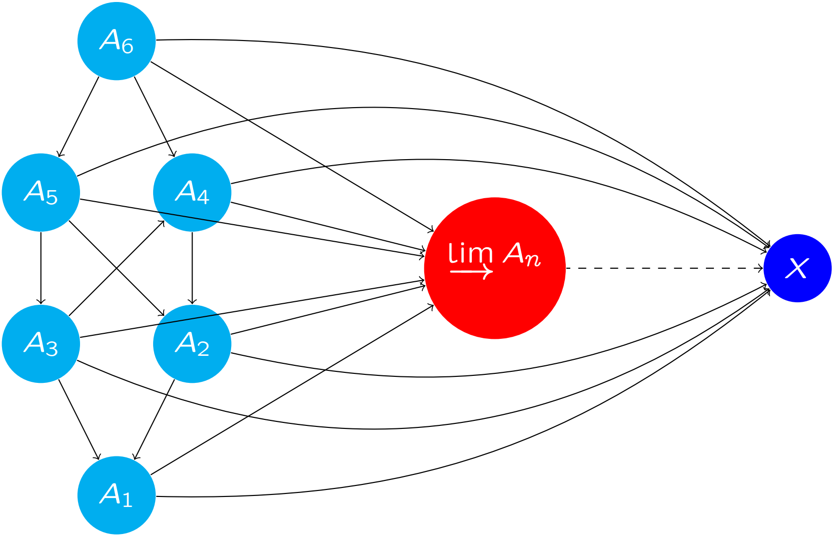
定義（極限）

関手 $F : \mathbf{D} \longrightarrow \mathbf{C}$ が与えられたとする．F 上の極限とは，以下の条件を満たす F 上の錐 $(L, (p_D)_{D\in\mathbf{D}})$ のことである．任意の対象 $D \in \mathbf{D}$ と，任意の F 上の錐 $(M, (q_D)_{D\in\mathbf{D}})$ に対して，$q_D = p_D \circ m$ となる射 $m : M \longrightarrow L$ がただ一つ存在する．しばしば，このような対象 L のことを $\varprojlim_{D\in\mathbf{D}} F(D)$ とか書き（または，単に $\varprojlim_{\mathbf{D}} F$ とも書く），極限対象という．

$$
\begin{tikzcd}
 & \varprojlim\limits_{D\in\mathbf{D}} F(D) \arrow[dl, "p_D"'] \arrow[dr, "p_{D'}"] & & M \arrow[ll, dashed, "m"'] \arrow[dlll, "q_D"] \arrow[dl, "q_{D'}"] \\
FD \arrow[rr, "Fd"'] & & FD' &
\end{tikzcd}
$$

余極限

- 余極限とは，次のような可換図式のこと



完備・余完備

定義（完備）

任意の極限を持つ圏のことを完備な圏という

定義（余完備）

任意の余極限を持つ圏のことを余完備な圏という

完備・余完備

定義（完備）

任意の極限を持つ圏のことを完備な圏という

定義（余完備）

任意の余極限を持つ圏のことを余完備な圏という

トポスの定義

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbb{E}$ のことである:
(1) 圏 $\mathbb{E}$ は有限完備である.
(2) 圏 $\mathbb{E}$ は部分対象分類子を持つ.
(3) 圏 $\mathbb{E}$ は冪対象を持つ.

- 「部分対象分類子」とは圏論において，主に「真理値判定」を行う概念のこと
- 「冪対象」とは圏論において，「カリー化」を可能にする概念のこと

トポスの定義

定義（トポス$_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:
(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.
(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.
(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

- 「部分対象分類子」とは圏論において，主に「真理値判定」を行う概念のこと
- 「冪対象」とは圏論において，「カリー化」を可能にする概念のこと

トポスの定義

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:
(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.
(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.
(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

- 「部分対象分類子」とは圏論において，主に「真理値判定」を行う概念のこと
- 「冪対象」とは圏論において，「カリー化」を可能にする概念のこと

部分対象分類子

定義（部分対象分類子）

有限完備な圏 $\mathbf{C}$ の部分対象分類子とは，組 $(\Omega, \ \mathrm{true})$ のことであり，以下の二つの条件を満たすものである (なお，1 は終対象とする)：
(1) 対象 $\Omega \in \mathbf{C}$ で, 射 $\mathrm{true} : 1 \longrightarrow \Omega \in \mathbf{C}$ である.
(2) 任意のモノ射 $f : B \longrightarrow A$ に対して, 以下の図式をプルバックにするような射 $\chi_B : A \longrightarrow \Omega$ が一意的に存在する:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "!_B"] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

このような一意的に定まる射 χ_B のことを A の部分対象 B に対する特性射という．合成射 $\mathrm{true}\circ !_C$ を単に true_C と書くこともある．

冪対象

定義（冪対象）

圏 $\mathbf{C}$ を二項積を持つ任意の圏とする．対象 $A, C \in \mathbf{C}$ による冪対象とは，対象と射の組 (C^A, e_A) のことであり，以下の条件を満たすもののことである：「任意の射 $f : A \times B \to C (B \in \mathbf{C}, f \in \mathbf{C})$ に対して，以下の図式を可換にするような，射 $\bar{f}$ が唯一に存在する」

$$
\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, "1_A \times \bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times C^A \arrow[r, "e_A"'] & C
\end{tikzcd}
$$

$\bar{f}$ を f の transpose という．また，e_A を評価射という．

トポスの3つの定義

定義（トポス$_1$）

トポスとは，次の3つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.

(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定義（トポス$_2$）

(3) パワー対象を持つ.

定義（トポス$_3$）

(1) 任意の有限積を持つ.

(3) パワー対象を持つ.

トポスの３つの定義

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:
(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.
(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.
(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定義（トポス $_2$）

(3) パワー対象を持つ.

定義（トポス $_3$）

(1) 任意の有限積を持つ.
(3) パワー対象を持つ.

トポスの３つの定義

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:
(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.
(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.
(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定義（トポス $_2$）

(3) パワー対象を持つ.

定義（トポス $_3$）

(1) 任意の有限積を持つ.
(3) パワー対象を持つ.

トポスの３つの定義

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.

(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定義（トポス $_2$）

(3) パワー対象を持つ.

定義（トポス $_3$）

(1) 任意の有限積を持つ.

(3) パワー対象を持つ.

トポスの異なる定義の同値性

定理（トポスの異なる定義の同値性）

定義 (1)，定義 (2)，定義 (3) は同値である．

- 一見すると満たすべき条件の厳しさが異なるように見える定義が，実は同じであるということを主張している
- トポスがどのような概念によって（本質的に）支えられているかを知る上で重要に思える
- この定理の証明は「極限の存在定理」や「パワー対象」などの圏論の基本概念の扱いに慣れていれば，比較的簡単に理解することができる

トポスの異なる定義の同値性

定理（トポスの異なる定義の同値性）

定義 (1)，定義 (2)，定義 (3) は同値である．

- 一見すると満たすべき条件の厳しさが異なるように見える定義が，実は同じであるということを主張している
- トポスがどのような概念によって（本質的に）支えられているかを知る上で重要に思える
- この定理の証明は「極限の存在定理」や「パワー対象」などの圏論の基本概念の扱いに慣れていれば，比較的簡単に理解することができる

トポスの異なる定義の同値性

定理（トポスの異なる定義の同値性）

定義 (1)，定義 (2)，定義 (3) は同値である．

- 一見すると満たすべき条件の厳しさが異なるように見える定義が，実は同じであるということを主張している
- トポスがどのような概念によって（本質的に）支えられているかを知る上で重要に思える
- この定理の証明は「極限の存在定理」や「パワー対象」などの圏論の基本概念の扱いに慣れていれば，比較的簡単に理解することができる

トポスの異なる定義の同値性

定理（トポスの異なる定義の同値性）

定義 (1)，定義 (2)，定義 (3) は同値である．

- 一見すると満たすべき条件の厳しさが異なるように見える定義が，実は同じであるということを主張している
- トポスがどのような概念によって（本質的に）支えられているかを知る上で重要に思える
- この定理の証明は「極限の存在定理」や「パワー対象」などの圏論の基本概念の扱いに慣れていれば，比較的簡単に理解することができる

トポスにおける余極限の構成

定義（トポス 1）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.

(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定理（トポスにおける余極限の構成）

圏 $\mathbf{E}$ をトポスとする．このとき，$\mathbf{E}$ は任意の有限余極限を持つ．つまり，$\mathbf{E}$ は有限余完備である.

- トポスは「極限」のみならず「余極限」も持つ，たくさんの圏論的性質を持つ圏である
- 定理の証明には「モナディック関手は極限を創出する」という定理や，「The Beck-Chevalley Condition」という定理を使う

トポスにおける余極限の構成

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.

(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定理（トポスにおける余極限の構成）

圏 $\mathbf{E}$ をトポスとする．このとき，$\mathbf{E}$ は任意の有限余極限を持つ．つまり，$\mathbf{E}$ は有限余完備である.

- トポスは「極限」のみならず「余極限」も持つ，たくさんの圏論的性質を持つ圏である
- 定理の証明には「モナディック関手は極限を創出する」という定理や，「The Beck-Chevalley Condition」という定理を使う

トポスにおける余極限の構成

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:
(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.
(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.
(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定理（トポスにおける余極限の構成）

圏 $\mathbf{E}$ をトポスとする．このとき，$\mathbf{E}$ は任意の有限余極限を持つ．つまり，$\mathbf{E}$ は有限余完備である.

- トポスは「極限」のみならず「余極限」も持つ，たくさんの圏論的性質を持つ圏である
- 定理の証明には「モナディック関手は極限を創出する」という定理や，「The Beck-Chevalley Condition」という定理を使う

トポスにおける余極限の構成

定義（トポス $_1$）

トポスとは，次の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:
(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.
(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.
(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

定理（トポスにおける余極限の構成）

圏 $\mathbf{E}$ をトポスとする．このとき，$\mathbf{E}$ は任意の有限余極限を持つ．つまり，$\mathbf{E}$ は有限余完備である.

- トポスは「極限」のみならず「余極限」も持つ，たくさんの圏論的性質を持つ圏である
- 定理の証明には「モナディック関手は極限を創出する」という定理や，「The Beck-Chevalley Condition」という定理を使う

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

トポスの性質・構造

- トポスは有限完備である
- トポスは有限余完備である（余極限の構成）
- トポスは部分対象分類子を持つ
- トポスはパワー対象を持つ
- トポスは冪対象を持つ（異なる定義の同値性）
- トポスは前層圏をモデルに持つ（前層圏はトポスである）
- トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる（エピ-モノ分解定理）
- トポスをスライスしてもトポスである（基本定理）
- トポスと高階直観主義論理の体系との間に健全性と完全性が成り立つ（健全性定理・完全性定理）

- とある特別な条件を満たすトポスは「数学の基礎」としても機能し得る

トポスは豊かな数学的性質・構造を持つ数学的対象

1. 卒業研究の成果
2. 圏論の基本概念
3. トポスの異なる定義の同値性
4. トポスにおける余極限の構成
5. トポスの持つ性質・構造
6. まとめ

まとめ

やったこと

- 圏論の勉強
- トポス理論における諸定理の証明
- トポスと数学の基礎（とくに ZFC）の関係を調査

オリジナリティ

- 本研究で取り上げた定理を日本語で体系的に扱い，編集したこと
- 参照した文献に載っていた証明の省略箇所を補ったこと
- 参照した文献に載っていた証明の一部に間違いを発見し，訂正したこと

展望

- （本研究では扱えなかった）より高等な定理の理解
- トポスをモナドに相対化させることで展開される「圏論的普遍論理」の理解

まとめ

やったこと

- 圏論の勉強
- トポス理論における諸定理の証明
- トポスと数学の基礎（とくに ZFC）の関係を調査

オリジナリティ

- 本研究で取り上げた定理を日本語で体系的に扱い，編集したこと
- 参照した文献に載っていた証明の省略箇所を補ったこと
- 参照した文献に載っていた証明の一部に間違いを発見し，訂正したこと

展望

- （本研究では扱えなかった）より高等な定理の理解
- トポスをモナドに相対化させることで展開される「圏論的普遍論理」の理解

おわり

ご静聴ありがとうございました！

圏論の応用先

- 計算機科学 → 関数型プログラミング言語（Haskell など），プログラム意味論（領域理論など）
- 物理学 → 圏論的量子力学，トポス量子論，量子古典対応，量子計算※詳しくは谷村先生へ
- 生物学 → システム生物学
- 論理学 → 圏論的論理，トポス，証明論，モデル理論
- 哲学 → 数理哲学（構造主義）

トポスの誕生

トポスのテーマはスキームのテーマから生まれました．スキームが出現したのと同じ年です──しかしトポスのテーマは，その広がりにおいては，はるかに源となったスキームのテーマを超えています．幾何学と代数，トポロジーと数論，数理論理学と圏論，連続の世界と「不連続」または「離散」構造の世界が結び合う，この「ベッド」，あるいはこの「深い川」は，スキームのテーマではなくて，トポスのテーマです．スキームのテーマが新しい幾何学の核心としてあるとすれば，トポスのテーマはこの幾何学の外皮あるいは住まいです．それは，豊かな幾何学的響きを持つ同一の言語によって，数学上の事柄からなる広大な宇宙のあれこれの地域から由来する，相互に非常に隔たった状況に共通する「エッセンス」を繊細に捉えるために私がより広く構想したものです　（収穫と蒔いた種と，グロタンディーク）

トポスの発展

1963 年の前後に・・・，幾何と論理学の分野で５つの著しい発展が為された．これらの成果の本質的な統一ということこそが，われわれをして新しい集合概念（トポス）の真剣な考察へと向かわせたと，私は信じている．それらは以下の５つである．

・超準解析 (A．ロビンソン)
・集合論における独立性証明 (P．J．コーエン)
・直観主義的述語論理の意味論 (S．クリプキ)
・集合論の圏論的な公理化 (F．W．ローヴェア)
・グロタンディーク・トポスの特徴づけ (J．ジロー) （カテゴリー論と認識の理論，丸山不二夫）

積

定義（積）

圏 $\mathbf{C}$ における対象 X, Y の (二項) 積とは，３つ組 (P, p_A, p_B) のことであり，以下を満たす:
(1) P は $\mathbf{C}$ の対象である．
(2) $p_A : P \to A, p_B : P \to B$ は $\mathbf{C}$ の射である．
さらに，任意の３つ組 (Q, q_1, q_2) が，
(1) Q は $\mathbf{C}$ の対象
(2) $q_A : Q \to A, q_B : Q \to B$ は $\mathbf{C}$ の射
であるとき，$q_A = p_A \circ r$，$q_B = p_B \circ r$ を満たす射 $r : Q \to P$ がただ一つ存在する．図式で表現すると以下のようになる：

$$
\begin{tikzcd}
& Q \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr, "q_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

イコライザ

定義（イコライザ）

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $f, g : A \to B$ に対するイコライザとは，組 (K, k) のことであり，以下の条件を満たす：
(1) K は $\mathbf{C}$ の対象である.
(2) $k : K \to A$ は $f \circ k = g \circ k$ を満たす $\mathbf{C}$ の射である.
さらに，任意の組 (M, m) が，
(1) M が $\mathbf{C}$ の対象
(2) $m : M \to A$ は $f \circ m = g \circ m$ を満たす $\mathbf{C}$ の射
であるとき，$m = k \circ n$ となる射 $n : M \to K$ がただ一つ存在する.
図式で表現すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ M \arrow[u, dashed, "n"] \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

プルバック

定義（プルバック）

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $f : A \to C$, $g : B \to C$ に対する，つまり組 (f, g) に対するプルバックとは，３つ組 (P, f', g') のことであり，以下の条件を満たす：

(1) P は $\mathbf{C}$ の対象である．

(2) $f' : P \to B$, $g' : P \to A$ は $f \circ g' = g \circ f'$ を満たす $\mathbf{C}$ の射である．さらに，任意の組 (Q, f'', g'') が，

(1) Q が $\mathbf{C}$ の対象

(2) $f'' : P \to B$, $g'' : P \to A$ は $f \circ g'' = g \circ f''$ を満たす $\mathbf{C}$ の射であるとき，$f'' = f' \circ q$ かつ $g'' = g' \circ q$ となる射 $q : Q \to P$ がただ一つ存在する．図式で表現すると以下のようになる：

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "q"] \arrow[drr, bend left, "f''"] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] & B
\end{tikzcd}
$$

カリー化

カリー化 （currying，カリー化された＝curried）とは、複数の引数をとる関数を、引数が「もとの関数の最初の引数」で戻り値が「もとの関数の残りの引数を取り結果を返す関数」であるような関数にすること（あるいはその関数のこと）である。クリストファー・ストレイチーにより論理学者ハスケル・カリーにちなんで名付けられたが、実際に考案したのは Moses Sch ö nfinkel とゴットロープ・フレーゲである。ごく簡単な例として、f(a，b) ＝ c という関数 f があるときに、F(a) ＝ g（ここで、g は g(b) ＝ c となる関数である）という関数 F が、f のカリー化である。（wikipedia，2/7 参照）

- 「$f(a, b) = c$」を「$F(a)(b) = C$」に変形すつ操作
- 「$(A \wedge B) \implies C$」を「$A \implies (B \implies C)$」に変形する操作

冪対象

定義（冪対象）

圏 $\mathbf{C}$ を二項積を持つ任意の圏とする．対象 $A, C \in \mathbf{C}$ による冪対象とは，対象と射の組 (C^A, e_A) のことであり，以下の条件を満たすもののことである：「任意の射 $f : A \times B \to C (B \in \mathbf{C}, f \in \mathbf{C})$ に対して，以下の図式を可換にするような，射 $\bar{f}$ が唯一に存在する」

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[d, "1_A \times \bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \times C^A \arrow[r, "e_A"'] & C \end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ を f の transpose という．また，e_A を評価射という．

パワー対象

定義（パワー対象）

部分対象分類子 Ω を持つ有限完備な任意の圏を $\mathbf{C}$ とする．パワー対象 (power object) とは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 A に対して，対象と射の組 (PA, $\in_A$) のことであり，以下の条件を満たすもののことである:
「圏 $\mathbf{C}$ における任意の射 $f : A \times B \to \Omega$ に対して，以下の図式を可換にするような射 $\hat{f}$ が唯一に存在する.」

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, "1_A \times \hat{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times PA \arrow[r, "\in_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

$\hat{f}$ を f の P-transpose という．また，$\in_A$ を評価射という．

定義 (ETCS)

以下の 10 個の公理を満たす公理系を ETCS という：

1. 関数の合成は結合的で恒等射をもつ
2. 終対象が存在する
3. 元のない集合が存在する
4. 関数は元への効果で決定される
5. 集合 A と B について，積 $A \times B$ が構成できる
6. 集合 A と B について，A から B への関数の集合が構成できる
7. $f : A \longrightarrow B$ と $b \in B$ について，逆像 $f^{-1}\{b\}$ を構成できる
8. A の部分集合は，A から $\{0, 1\}$ への関数と対応する
9. 自然数たちが集合をなす
10. すべての全射は切片をもつ

この 10 個の公理を合わせたものは「自然数対象が存在し，選択公理が成り立つ well-pointed トポス」というトポスで，このトポス上で集合論が展開できるということである．

健全性定理

1. シンボルクラス，型，項によって Local Language を定義する
2. Local language 上に論理演算子，公理，規則，導出可能性を定義する
3. 導出可能性のもとで閉じたシーケントの集まりとして，Local Set Theory を定義する
4. Local Set Theory をトポスで解釈する
5. トポス解釈のもとで論証の妥当性を定義する
6. 健全性定理（妥当 $\Longrightarrow$ 導出可能（証明可能））
7. 完全性定理（導出可能（証明可能） $\Longrightarrow$ 妥当）

グロタンディーク位相

定義（グロタンディーク位相）

圏 $\mathbf{C}$ 上のグロタンディーク位相とは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 C に対して，以下のようにして C 上の sieve の集合を割り当てる関数 J のことである：
(i) 極大 sieve t_C は $J(C)$ にの要素である．
(ii)(stability) もし，$S \in J(C)$ であるなら，そのとき，任意の射 $h : D \to C$ に対して，$h^*(S) \in J(D)$ となる．
$(h^*(S) = \{g | cod(g) = D, hg \in S\})$
(iii)(transitivity) もし，$S \in J(C)$ でかつ R が S における任意の射 $h : D \to C$ に対して，$h^*(R) \in J(D)$ となる任意の C 上の sieve であるなら，そのとき $R \in J(C)$ となる．

定理

開被覆はグロタンディーク位相である．

定理

完備ハイティング代数はグロタンディーク位相である．

展望

- より高等な定理 → 「Sheaves in Geometry and Logic (1992)」「Skeches of an Elephant (2002)」などに当たってみる予定
- 「圏論的普遍論理」 ＝ 「部分構造論理」＋「量子論理」（丸山善宏氏の論文）
- トポスを「ハイパードクトリン」と捉えて「モナド（普遍代数）」に相対化
- 特定の証明系に依存しないため，「論理の本質」を垣間見ることができる

モナド

定義（モナド）

圏 $\mathbf{C}$ 上のモナドとは，三つ組 (T, ϵ, μ) のことで，$T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は関手，$\epsilon : 1_{\mathbf{C}} \to T$ と $\mu : TT \to T$ は共に自然変換で，

$$\mu \circ (\epsilon * 1_T) = 1_T = \mu \circ (1_T * \epsilon), \mu \circ (\circ * 1_T) = \mu \circ (1_T * \mu)$$

を満たすようなもののことである．つまり，以下の二つの図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\epsilon * 1_T"] \arrow[dr, "1_T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "1_T * \epsilon"'] \arrow[dl, "1_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TTT \arrow[r, "\mu * 1_T"] \arrow[d, "1_T * \mu"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\
TT \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}$$

T-代数

定義（T-代数）

(T, ϵ, μ) を圏 $\mathbf{C}$ 上のモナドとする．モナド $\mathbf{T} = (T, \epsilon, \mu)$ 上の $\mathbf{T}$ 代数とは，対象 $C \in \mathbf{C}$ と射 $\xi : T(C) \to C$ の組 (C, ξ) であり，
$\xi \circ \epsilon_C = 1_C$ と $\xi \circ T(\xi) = \xi\mu_C$ を満たすもののことである．つまり，以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "\epsilon_C"] \arrow[dr, "\xi"'] & T(C) \arrow[d, "1_C"] \\
& C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TT(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "T(\xi)"'] & T(C) \arrow[d, "\xi"] \\
T(C) \arrow[r, "\xi"'] & C
\end{tikzcd}
$$

T-代数

定義（T-代数）

また，(D, ζ) を異なる (T, ϵ, μ) 上の $\mathbf{T}$ 代数とする，このとき $\mathbf{T}$ 代数の写像 $f : (C, \xi) \longrightarrow (D, \zeta)$ とは，$f \circ \xi = \zeta \circ T(f)$ を満たす射 $f : C \longrightarrow D$ のことである．つまり，以下の図式を可換にする：

$$
\begin{tikzcd}
T(C) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\xi"'] & T(D) \arrow[d, "\zeta"] \\
C \arrow[r, "f"'] & D
\end{tikzcd}
$$