トポス理論における諸定理
とくに Local Set Theory のトポスモデルにおける健全性定理

川嶋 康太

名古屋大学 情報文化学部 自然情報学科 複雑システム系
学籍番号 051500077

2019 年 3 月 22 日

概要

トポス理論は，グロタンディークが創始し，ローヴェアが発展させた圏論の一分野である．本論文では，圏論とトポス理論の基本概念を述べ，トポス理論における以下の定理を証明する．「トポスの異なる定義の同値性」「前層圏はトポスであること」「トポスにおける余極限の構成」「エピ-モノ分解定理（トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できるという定理）」「トポスの基本定理（トポスをスライスしてもトポスであるという定理）」「Local Set Theory のトポスモデルにおける健全性定理」．これらの定理はいずれも重要であるが，体系的に扱った日本語の文献は存在しない．また，教科書に掲載されている証明は，いくらか省略されていた．そこで，私の力量の範囲内で，これらの定理を体系化し，一つ一つの証明をより完全に近いものにした．また，Local Set Theory の教科書に載っていた証明の一部に間違いを発見し，訂正した．さらに，トポス理論と数学の基礎（とくに ZFC）の関係を調べてまとめた．

目次

第 1 章

序論

トポスとは，ギリシャ語で「場所」を意味する語である．学問の基礎を作ったとも言われるアリストテレスが，論理学に関する著作群「オルガノン」の中でトポスに関する論を展開していた．

しかし，本論文における「トポス」は，アリストテレスが論じたような一般的な「場所」を意味するトポスではなく，あくまで数学的対象である．しかし，「トポス」には「場所」という意味に相応しいたくさんの性質を兼ね備えた数学的対象であることも事実である．

1.1 動機

本論文は，（数学理論としての）トポス理論について勉強したことを卒業研究という形でまとめたもの*1である．トポス理論について書かれた日本語の文献は数が少ないが，その一方で，トポス理論が明らかにした興味深い結果の数々（例えば「直観主義論理と空間（幾何）を同一のものと見なせること」など）を耳にして，トポス理論を勉強したいと思う方は多いように思われる．そこで，「英語の文献に当たるのは大変だ．しかし，トポス理論を勉強してみたい．」という方に役に立てばと思い，本論文を執筆するに至った．

また，トポス理論に関する標準的な教科書 [15] や Local Set Theory とトポスとの関係を扱う教科書 [2] は証明がいくらか省略されており，初学者には敷居が高い．本論文では，その省略されていた証明をより完全に近いものにし，初学者にも分かるよう心がけた．さらに，一部 [2] に掲載されている証明の間違いを発見し，訂正した．

1.2 本論文の構成

本論文の構成は，以下の通りである．

まず，第 2 章で圏論やトポスに関するインフォーマルな説明を与える．第 3 章では，トポス理論における諸定理を理解するために必要な圏論の基本的な定義や定理を確認する．

そして，第 4 章，第 5 章ではトポス理論における初等的な定理を紹介し，証明する．具体的には，「トポスの異なる定義の同値性」「前層圏はトポスである」「トポスにおける余極限の構成」「エピ-モノ分解定理（トポスにおける任意の射はエピ射とモノ射に分解できる）」「トポスの基本定理（トポスをスライスしてもトポスである）」「Local Set Theory のトポスモデルにおける健全性定理」という定理である．

*1 本論文で扱う「トポス理論における諸定理」はトポス理論の初等的でほんの一部分に過ぎない．トポス理論を本格的に勉強してみたいと思われる方は，[15] [8] [5] などに当たってみると良い．

最後に，第 6 章では，第 5 章までに紹介した定理からわかることをまとめた．また，トポスと数学の基礎（とくに ZFC）との関係を調べ，まとめた．

第 2 章

トポスの誕生と成長

この章では，トポス理論の歴史振り返ることを通して，トポスについてのインフォーマルな理解を深める．しかし，トポスは「圏」であるので，圏論を少しでも理解していなければ到底理解できない．そのため，まずは「圏論の視点」を簡単に理解することにする．

2.1 圏論の視点

圏論は，1945 年にアイレンベルクとマクレーンの「自然同値の一般論（General theory of natural equivalences)」という論文をきっかにして誕生した数学の一分野である．数学の他の分野（例えば，集合位相や群論，数理論理学）と比べてまだ若いが，既に，数学の他の分野にはもちろんのこと，数学の内に留まらず学問全般（計算機科学，物理学，生物学，言語学，論理学，哲学など）に応用されており，多大なる成功を収めている．

では，これほどまでに成功を収めるのようになった要因は何なのだろうか？圏論のどのような側面が成功へと導いたのだろうか？それは，圏論の持つ「抽象力」と「一般力」にあると言えるだろう．「圏論の歩き方」のまえがきには以下のように書かれている．

> 圏論とは何か？一言で言うと，現代数学のさまざまな場面で使われる「数学のコトバ」です．圏論のコトバは，さまざまな具体的概念に共通する抽象的性質を記述する上で便利な**抽象力**と**一般力**を持っています．それゆえに，数学の中の異なる分野—代数学，幾何学，解析学・・・これらそれぞれの中にも，とても多くの分野がありますね—の間の，（普通の数式による表現では予想もしなかったような）関係性を明らかにしてくれることがあり，現代数学では圏論はもはや基本的な道具です [28].

しばしば，圏論は「数学のための数学」と言われる．そのように言われるくらいに抽象的・一般的であるため，しばしば中身のない，空虚なもののように思われることもある．しかし，それは誤解であり，「（普通の数式による表現では予想もしなかったような）関係性を明らかにする」という抽象的・一般的ゆえに享受できる恩恵も確かにある[*1].

また，同様のことをレンスターは「ベーシック圏論」の冒頭で以下のように表現している．

---

*1 この圏論の「（普通の数式による表現では予想もしなかったような）関係性を明らかにする」という機能は，圏論が「対象 (object)」とその対象間の関係性を定める「射 (arrow)」という二つの基本概念によって成り立っているためであると考える．これは，現代数学の主流の言語である「集合論」の基本概念「集合と要素」とは（多少）異なったものである．その差異が，集合論では明らかにできなかった関係性を明らかにするのだと思う．詳しくは，第 3 章，第 6 章を参照していただきたい．

圏論は鳥の目で数学を俯瞰する．空高くからは詳細は見えなくなるが，地上では見抜けなかったパターンに焦点を当てることができる [11].

この鳥のような目で数学や，その他の応用先の分野を俯瞰することを可能にする抽象力と一般力を兼ね備えた圏論であるが，丸山善宏氏は「圏論は単なる抽象化や一般化の枠組みであるに留まらず、それ以上のものを提供できる」と分析する．それは主に以下の 3 つにまとめられると言う．

・Normativity: CT affects our very way of thinking (esp., doing math), and prescribes our conception of those universal forms that mathematical concepts should have. What is duality? What is implication (or a logical const.)? CT prescribes generic architectures of them, or what such concepts should be. Cf. "Analogies should be functorial."

・Understanding (a.o.t. explanation; cf. Dilthey): CT tells us why a theorem holds at all, by articulating the structure of it within a tailor-made framework, or perspective, or bias. Why Gelfand Duality holds? Why Stone Duality holds? The framework of duality induced by a schizophrenic object (Johnstone, Porst-Tholen) confers an understanding.

・Ontological Picturalism: CT supports diagrammatic reasoning via the graphical play of arrows. It is qualitative, but can also express quantities in certain cases. Picturalism yields an ontology of math (e.g.,　graphical conception of sets) [24].

さらに，丸山氏はこの圏論の潜在能力から，「失われた統一的世界像」を恢復する歴史上実際的見込みのある唯一のものとして「圏論的統一科学」を構想する．詳しくは触れないが，「圏論の視点」を理解する上でとても有意義だと思えるので，最後に丸山氏の構想する「圏論的統一科学」から少し引用して，この節を終えることにする．

圏論とはいわば構造のネットワークの理論である．命題の織りなす演繹ネットワークであれ，物理系の織りなす因果ネットワークであれ，語や文の織りなす意味ネットワークであれ，エージェントやその共同体の織りなす社会ネットワークであれ，それは圏という構造ネットワークの多様なインスタンスに過ぎず，圏論の内に体系的に回収されるものであり，現にされてきたものである．このような探求の結果，例えば部分構造論理の演繹ネットワークと量子系の因果ネットワークが実はかなりの構造を共有していることが分かり，論理という理性の法則の学と物理という自然の法則の学の境界が曖昧になる領域の所在が示された．圏論的統一科学はこのように学問間の構造的連関を解明する方途を与える [25].

2.2　トポスの誕生と成長

トポス理論は，圏論が発展していく中で生まれた理論である．いわば，圏論の子供である．トポス理論がいつ圏論から生まれたかを見るために，一度ここで，1945 年に誕生した圏論が 1970 年代に多くの異分野応用されるまでの歴史を簡単に見ることにする．

1945 年 アイレンベルクとマクレーンの「自然同値の一般論」という論文で圏論が確立した．

1940 年代後半 代数的位相幾何，とくに，ホモロジー論と抽象代数の分野で初めて主要な応用がなされた．

1950 年代 グロタンディーク他が圏論を用いて，代数幾何の分野で多大な成功を収めはじめた．

1960 年代 ローヴェア他が圏論を論理に適用し始め，深淵な驚くべき関連をいくつか明らかにした．

1970 年代 応用がすでに，計算機科学，言語学，認知科学，哲学など多くの他分野に現れつつあった [1].

トポスの産みの親は，２０世紀後半の最大の数学者の一人とも言われるグロタンディークである．彼は，1950 年代，圏論を使って代数幾何を発展させるための研究に打ち込んでいた．その中で 1958 年，現代の代数幾何には欠かせない「スキーム」という概念に思い至り，同じ年に「トポス」という概念に思い至った．「トポス」は，代数幾何の文脈で生まれた概念であり，「スキーム」と双子の兄弟ということができよう．グロタンディーク本人は，「トポス」について以下のように語っている．

> トポスのテーマはスキームのテーマから生まれました．スキームが出現したのと同じ年です—しかしトポスのテーマは，その広がりにおいては，はるかに源となったスキームのテーマを超えています．幾何学と代数，トポロジーと数論，数理論理学と圏論，連続の世界と「不連続」または「離散」構造の世界が結び合う，この「ベッド」，あるいはこの「深い川」は，スキームのテーマではなくて，トポスのテーマです．スキームのテーマが新しい幾何学の核心としてあるとすれば，トポスのテーマはこの幾何学の外皮あるいは住まいです．それは，豊かな幾何学的響きを持つ同一の言語によって，数学上の事柄からなる広大な宇宙のあれこれの地域から由来する，相互に非常に隔たった状況に共通する「エッセンス」を繊細に捉えるために私がより広く構想したものです [7].

このグロタンディークが構想したトポスは，今日では「グロタンディーク・トポス」と言われる古典的なトポスである．グロタンディークは「グロタンディーク・トポス」を数学における空間概念（位相空間）の一般化（グロタンディークの言葉を借りるならば,「空間概念の思いがけない拡張，もっと適切な言い方をすれば，空間概念の変身」）として考えていた．その一般化が可能となったのは，当時注目され始めてた新理論「層の理論」と「圏論」をグロタンディークが巧みに用いて，空間概念を「層」と「圏」の言葉で翻訳したことによる．（以下，カテゴリーとは圏のことであることに注意する．）

> これらの概念の中の最初のもの，つまり空間という概念はいわば「極大な」概念—すでに極めて一般な概念であって，さらに「道理にかなった」拡張をどのように見出すかは非常に想像しにくいものです．ところが，鏡の向こうにある，位相空間から出発して，巡り合ったこれらの「カテゴリー」（または「装備」）は，極めて特殊な性質を持っていることがわかります．実際それらは非常に典型的な一連の性質を有しており，これによって，これらのうちで想像できる限り一番単純なもの—一点からなる空間から出発して得られるもの—の様々な「模作」に類似したものになっているのです．つまり，伝統的な位相空間を一般化している「新しいスタイルの空間（あるいはトポス)」は，必ずしも通常の空間に由来するものでなくとも,「層のカテゴリー」が持つこれらすべての良い性質を持っている（もちろん，はっきりと明確に指定された）「カテゴリー」として単純に叙述されるのです [7].

そして，位相空間において重要なのは「層」と「圏」であると結論づける．

> つまり，位相空間において本当に考慮すべきなのは，その「点」や点からなる部分集合や点の間の近さなどの関係では全くなく，この空間の上の層と，これらが作るカテゴリーであるということです [7].

グロタンディーク自身は，このように位相空間の一般化としての「グロタンディーク・トポス」に大きな期待を寄せていたが，他の数学者たちは「スキーム」ほどに「グロタンディーク・トポス」を歓迎しなかった．

しかしながら，このトポスのテーマはスキームのテーマが受けた評価からははるかにかけ離れたところにあります [7].

ではなぜ，グロタンディークが期待した「グロタンディーク・トポス」は他の数学者に快く受け入れられなかったのだろうか？その理由の一つとして，「グロタンディーク・トポス」は（その定義を見るとわかるように）決して扱いやすいものではなかったからだと考える．しかし，皮肉なことに，グロタンディークが数学界を去った 1970 年以降，トポス理論は急速な発展を見せるようになった（数学界を去るようになったのは，当時，反戦運動に熱心であって，自らが所属していた研究所が軍からの資金援助があることを知ったため）.

その発展の火付け役となったのが，本論文のメインであり，今日通常の意味で使われる「トポス（もしくは初等トポス)」である．トポスは 1958 年の誕生から，一度大きな成長を遂げて，今日通常の意味で用いられるトポスに至ったのである．この「初等トポス」は「グロタンディーク・トポス」の一般化（付録参照）であり，より扱いやすい定義（第 4 章参照）となっている（実際に，層の理論の言葉を用いることなく，圏論の基本的な概念のみによって定式化される)．その「扱いやすさ」のために，多くの数学者に受け入れられ，トポス理論は発展したのだと考える.

さて，「グロタンディーク・トポス」から「初等トポス」へトポスを成長させたのは，ローヴェアとティエルニーという二人の数学者である．とくに，ローヴェアの貢献が大きかったように思われる．実際に，「初等トポス」という概念は，ローヴェアが，集合論の圏論的特徴付けに関する研究をする中で顔を出しはじめた．簡単に流れを追ってみることにする.

ローヴェアは，1963 年に圏論の創設者の一人アイレンベルクの元で博士号を取得した．その後，リード大学にてはじめて教鞭を取るようになり，基礎論的知見から抽象代数学や微分積分学を教育しようと努めた．その中で「現行の公理的集合論は学部生には難しすぎる」と思い，集合と要素の帰属関係 $\in$ による公理的集合論的な基礎づけではなく，集合（もしくは対象）と写像（もしくは射）による圏論的な基礎づけができないか考え，研究するようになった．そうして，そのアイデアが 1964 年の論文「Elementary Theory of the Category of Sets(ETCS） [10]」にまとめられるようになった．この論文がトポス理論が成長する第一段階となったのである [22].

そして，この論文が出版された 1964 年前後に，ローヴェアが関心を持っていた幾何学と論理学の分野でいくつかの重要な結果が示された．驚くべきことに，トポス理論を成長させる（発展させる）動機となったのが，その「幾何学と論理学における様々な成果を本質的に統合する」というものであった．以下のように，ローヴェア自ら証言している.

> 1963 年の前後に・・・，幾何と論理学の分野で 5 つの著しい発展が為された．これらの成果の本質的な統一ということこそが，われわれをして新しい集合概念（トポス）の真剣な考察へと向かわせたと，私は信じている．それらは以下の 5 つである.
> ・超準解析 (A. ロビンソン)
> ・集合論における独立性証明 (P. J. コーエン)
> ・直観主義的述語論理の意味論 (S. クリプキ)
> ・集合論の圏論的な公理化 (F. W. ローヴェア)
> ・グロタンディーク・トポスの特徴づけ (J. ジロー)([26], 本論文の著者により一部編集)

ローヴェアは，この「本質的な統一」のために動き出し，ダルハウジー大学にてティエルニーと共同研究をし，「集合上の層の圏」の効果的な公理化を発見した．そして間も無く「初等トポス」の定義に成功し，トポス

理論は新たな展開を迎えるようになったのである.

そして，彼らは，新たなトポス理論を用いて，これらの成果の統合を見事に果たしたのである．詳しくは，著者も勉強不足でコメントすることができないが，これらの統合によりトポス理論は大きく注目されるようになり，ジョンストン，ミッチェル，マッカイ，フレイド，ジョイヤルらによって更なる展開をみせ，今日に至るのである.

なお，今日のトポス理論はルアーによって「高次トポス」という更なる成長を見せたのちに，「初等高次トポス」という第三の成長を見せつつある [13] [21]．また，カラメロによって「グロタンディーク・トポス」の研究が進み，「（異なる数学理論をつなぐ）橋としてのトポス」というトポスの新たな重要な側面が明らかになった [6].

ぼんやりと，トポスとはどのような数学的対象か見えてきただろうか？「位相空間の一般化」という側面があり，「集合論の圏論的な公理化」をする側面があり，引用が示唆するように「新たな集合概念」という側面があり・・・．とても一言では言い尽くせない．トポスをジョンストンはトポス理論の辞書的教科書 [8] のまえがき中で「像」の比喩を用いて，面白く説明している．また，ジョンストンは，トポスの顕著な特徴を１３個挙げており，以下そのうち５つを紹介する.

(1) トポスとは，景上の層の成す圏である.
(2) トポスとは，有限極限とパワー対象を持つ圏である.
(3) トポスとは，直観主義的高階理論である.
(4) トポスとは，一般化された空間である.
(5) トポスとは，直観主義的形式体系に対するセマンティクスである [8].

(1), (4) は前述したように，「グロタンディーク・トポス」の持つ特徴である (付録参照)．(2) はトポスの備える圏論的性質の一部に「有限極限」と「パワー対象」というものがあることを言っている．本論文では，その他にもいくつか圏論的性質を持っていることを第 4 章で確認する．また，(3), (5) はトポスの論理学的性質を示している．トポスは高階直観主義論理のモデルとしての側面もあり，その間には健全性と完全性が成り立つことが知られている．詳細は第 5 章でベルが考案した Local Set Theory との関係を通して論じる.

第 3 章

圏論の準備

この章は，トポス理論で成り立つ諸定理を理解するために必要となる圏論の準備のために設けられてある．しかし，証明はすべて省略した．ゆえに，ここに書いてあることのみで圏論そのものの入門をすることは到底不可能であるということを先に断っておく．本格的に圏論に入門されたい場合には，[1] [14] [11] [3] [4] などに当たって欲しい．

3.1 圏，関手，自然変換

定義 3.1.1 圏

圏 $\mathbf{C}$ とは，対象クラス $\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ と射クラス $\mathrm{arr}(\mathbf{C})$ によって定まる．$\mathrm{ob}(\mathbf{C})$ の要素は $X, Y, Z, ...$ であり，これらのことを圏 $\mathbf{C}$ における対象 (object) という．$\mathrm{arr}(\mathbf{C})$ の要素は $f, g, h, ...$ であり，これらのことを圏 $\mathbf{C}$ における射 (arrow) という．また，対象と射は以下 (1)〜(5) を満たす．
(1) 任意の射 f はそれぞれ 2 つの対象 $\mathrm{dom}(f)$ と $\mathrm{cod}(f)$ によって関係付けれらており．それぞれの対象のことを f のドメイン，コドメインという．もし，$X = dom(f)$ かつ $Y = cod(f)$ であるなら，f は X から Y への射であるいい，以下のように書く．

$$X \xrightarrow{f} Y \qquad \text{もしくは} \qquad f : X \longrightarrow Y$$

(2) 2 つの射 $f : X \to Y$ と $g : Y \to Z$ に対して，$\mathrm{cod}(f) = \mathrm{dom}(g)$ であるとき，合成射 $g \circ f : X \to Z$ が構成される．この構成は以下のようにも書かれる．

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

(3) 任意の射 f, g, h に対して，結合則：$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ が成立する．
(4) 任意の対象 X について恒等射 $1_X : X \to X$ が存在する．
(5) 任意の射 $f : X \to Y$ に対して，単位則：$1_Y \circ f = f \circ 1_X = f$ が成立する．

注意 3.1.2

つまり，(1)〜(5) を満たす対象と射のクラスのペアのことを圏という．

定義 3.1.3 双対圏

圏 $\mathbf{C}$ の双対圏 $\mathbf{C}^{op}$ とは，$\mathrm{ob}(\mathbf{C}^{op}) = \mathrm{ob}(\mathbf{C})$ であり，圏 $\mathbf{C}$ の任意の射 $f \in \mathrm{arr}(\mathbf{C})$ に対して，ドメインとコド

メインを入れ替えた射を f^{op} と書き，$f^{op} \in \mathrm{arr}(\mathbf{C}^{op})$ となる圏のことであり，逆に，任意の $f^{op} \in \mathrm{arr}(\mathbf{C}^{op})$ に対して，$f \in \mathrm{arr}(\mathbf{C})$ となる圏のことである．（つまり，射の向きを逆にして出来る圏のことを双対圏という．）

例 3.1.4 圏の具体例

以下は圏の具体例である:

- **Set** 圏：集合を対象，写像を射とみなした際にできる圏
  - 合成射は合成写像，恒等射は恒等写像とみなせば結合則，単位則は自明に成り立つ．
- **Pos** 圏：半順序集合を対象，順序を保つ写像を射とみなした際にできる圏
  - 合成射は合成写像，恒等射は恒等写像とみなせば結合則，単位則は自明に成り立つ．
- **Grp** 圏：群を対象，群準同型写像を射とみなした際にできる圏
- **Mon** 圏：モノイドを対象，モノイド準同型写像を射とみなした際にできる圏
- **Top** 圏：位相空間を対象，連続写像を射とみなした際にできる圏
- $\mathbf{Vect_k}$ 圏：k 体上のベクトル空間対象，線形写像を射とみなした際にできる圏

つまり，圏は数学のいたるところに存在する．

注意 3.1.5

半順序集合 $(\mathbf{P}\ ,\ \leq)$ はその元 p, q を対象、その間の順序 $p \leq q$ を射と見なすと，結合則と単位則は半順序集合の公理である推移律と反射律より成り立つことが分かり，半順序集合それ自体が圏となる．また，同様にしてモノイド $(\mathbf{M}\ ,\ \bullet)$ は任意の 1 つの対象に対し，射を $\mathbf{M}$ の要素と見なすと演算 $\bullet$ により合成則が成り立ち，恒等射を M の単位元だと見なすと単位則も自明に成り立つので，モノイドそれ自体は対象が 1 つの圏となる．

定義 3.1.6 有限圏，小圏，局所小圏

圏 $\mathbf{C}$ が有限圏であるとは，クラス $\mathrm{arr}(\mathbf{C})$ が有限集合であることである．圏 $\mathbf{C}$ が小圏であるとは，クラス $\mathrm{arr}(\mathbf{C})$ が集合となることである．圏 $\mathbf{C}$ が局所小圏であるとは，任意の対象 $C, C' \in \mathbf{C}$ に対してクラス $\mathrm{Hom}(C, C')$ が集合となることである．

定義 3.1.7 関手

圏 $\mathbf{C}$ と圏 $\mathbf{D}$ が与えられたとする．このとき，圏 $\mathbf{C}$ と圏 $\mathbf{D}$ の間の関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ とは圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への対象と射についての関数のことであり，以下のような条件を満たすもののことである．

- 圏 $\mathbf{C}$ の任意の射 $f\ ,\ g$ に対して，$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$ を満たす．
- 圏 $\mathbf{C}$ の任意の恒等射 1_X に対して，$F(1_X) = 1_{F(X)}$ を満たす．

例 3.1.8 関手の具体例

以下は関手の具体例である：

- 恒等関手：$1_{\mathbf{C}} : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$
  - つまり，任意の $\mathrm{C} \in \mathrm{ob}(\mathbf{C}), f \in \mathrm{arr}(\mathbf{C})$ に対し，$1_{\mathbf{C}}(C) = C$ かつ，$1_{\mathbf{C}}(f) = f$ となる関手のこと．
- 忘却関手：$U : \mathbf{Grp} \to \mathbf{Set}$

– 構造を忘れる関手．モノイドや環，ベクトル空間の成す圏においても同様である．また，環から加群，ベクトル空間から加群など，構造の一部分を忘れる関手も存在する．

- 自由関手：$\mathbf{Set} \to \mathbf{Grp}$
  – 構造を入れる関手．この場合は集合から自由群を生成する関手となっている．モノイドにおいても同様である．

定義 3.1.9 自然変換

2 つの関手 F , G : $\mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が与えられたとする．関手 F , G の間の自然変換 θ : $F \to G$ とは，圏 $\mathbf{C}$ における任意の対象 C に対する，圏 $\mathbf{D}$ における射 θ_C : $F(C) \to G(C)$ の族 (θ_C)C∈ob($\mathbf{C}$) のことで，圏 $\mathbf{C}$ における任意の射 f : $C \to C'$ に対して以下の図式を可換にするものである：

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\theta_C"] & F(C') \arrow[d, "\theta_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"] & G(C') \end{tikzcd}$$

また，射 θ_C を自然変換 θ のコンポーネント (構成要素) という．

定義 3.1.10 自然変換の水平合成

関手 $F, G : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$，$F', G' : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ と，自然変換 $\alpha : F \to G$，$\beta : F' \to G'$ が与えられたとする．このとき，自然変換 α, β の水平合成とは，自然変換 $F' \circ F \to G' \circ G$ のことであり，$\beta * \alpha$ とかく．また，任意の対象 $A \in \mathbf{A}$ に対して，$\beta * \alpha$ の成分は以下の可換図式における対角線として定義される：

$$\begin{tikzcd} F'FA \arrow[r, "F'(\alpha_A)"] \arrow[d, "\beta_{FA}"'] & F'GA \arrow[d, "\beta_{GA}"] \\ G'FA \arrow[r, "G'(\alpha_A)"'] & G'GA \end{tikzcd}$$

定義 3.1.11 関手圏

任意の圏 $\mathbf{C}$ と圏 $\mathbf{D}$ が与えられたとする．このとき，関手圏 $\mathbf{D}^{\mathbf{C}}$ とは，対象が圏 $\mathbf{C}$ から圏 $\mathbf{D}$ への関手であり，射はその関手の間の自然変換によって構成される圏のことである．

定義 3.1.12 前層，前層圏

任意の圏 $\mathbf{C}$ に対して，関手 $P : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ を圏 $\mathbf{C}$ 上の前層という．また，前層を対象とし，前層の間の自然変換を射として定められる圏のことを前層圏という．

定義 3.1.13 スライス圏

任意の圏 $\mathbf{C}$ が与えられたとする．$\mathbf{C}$ における任意の対象 $I \in ob(\mathbf{C})$ に対して，スライス圏 $\mathbf{C}/I$ とは，対象と射が以下のような圏のことである：

(対象): コドメインが I であるような $\mathbf{C}$ の射を対象とする．
(射): 対象 $f : A \to I$ から $g : B \to I$ への射は $g \circ h = f$ を満たすような $\mathbf{C}$ における射 h のこととする．

3.2 特別な射，随伴，表現可能関手，米田の補題

注意 3.2.1

以後，とくに混乱の恐れがない場合，圏 $\mathbf{C}$ における対象 $C \in \mathrm{ob}(\mathbf{C})$，射 $f \in \mathrm{arr}(\mathbf{C})$ をそれぞれ単純に $C \in \mathbf{C}$，$f \in \mathbf{C}$ と書くことにする．

定義 3.2.2 モノ射

任意の圏 $\mathbf{C}$ において，射 $f : A \to B$ がモノ射であるとは，任意の射 g，$h : C \to A$ に対して，「$fg = fh$ ならば，$g = h$ となる」という条件を満たす射のことである．

定義 3.2.3 エピ射

任意の圏 $\mathbf{C}$ において，射 $f : A \to B$ がエピ射であるとは，任意の射 i，$j : B \to D$ に対して，「$if = jf$ ならば，$i = j$ となる」という条件を満たす射のことである．

命題 3.2.4

任意の圏 $\mathbf{C}$ において以下の二つのことが成り立つ：

(1) 二つの射の合成射 $k \circ f$ がモノ射であるならば，f はモノ射である．

(2) 二つの射の合成射 $f \circ k$ がエピ射であるならば，f はエピ射である．

定義 3.2.5 スプリット・モノ

任意の圏 $\mathbf{C}$ において，射 $f : A \to B$ がスプリット・モノであるとは，左逆射 $g : B \to A$ が存在することを言う．つまり，$g \circ f = 1_A$ となる g が存在するとき，f をスプリット・モノであるという．スプリット・モノはモノ射となることが容易に示される．

定義 3.2.6 スプリット・エピ

任意の圏 $\mathbf{C}$ において，射 $f : A \to B$ がスプリット・エピであるとは，右逆射 $g : B \to A$ が存在することを言う．つまり，$f \circ g = 1_B$ となる g が存在するとき，f をスプリット・エピであるという．スプリット・エピはエピ射となることが容易に示される．

定義 3.2.7 同型射

任意の圏 $\mathbf{C}$ において，射 $f : A \to B$ が同型射であるとは，$f \circ g = 1_A$，$g \circ f = 1_B$ となる射 g: $B \to A$ が存在することである．このような g のことを f の逆射といい，f^{-1} とかく．また，対象 A，B 間に同型射が存在するとき，$A \cong B$ と書き，「A と B は同型である」と読む．

命題 3.2.8 同型射の特徴付け

任意の圏における射 $f : A \to B$ について，以下の 4 つは同値である．

(1) f は同型射である．

(2) f はモノ射かつスプリット・エピである．

(3) f はスプリット・モノかつエピ射である．

(4) f はスプリット・モノかつスプリット・エピである．

定義 3.2.9 忠実

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が忠実であるとは，任意の対象 $C, C' \in \mathbf{C}$ に対して，写像 $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, C') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, FC')$ が単射となることである．

定義 3.2.10 充満

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が充満であるとは，任意の対象 $C, C' \in \mathbf{C}$ に対して，写像 $F : \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(C, C') \to \mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(FC, FC')$ が全射となることである．

定義 3.2.11 射の反射

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ がモノ射 (またはエピ射，または同型射) を反射するとは，任意のモノ射 $F(f) \in \mathbf{D}$ に対して，$f \in \mathbf{C}$ がモノ者 (またはエピ射，または同型射) となることをいう．

命題 3.2.12 関手の特徴

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ が与えられたとする．このとき，以下のことが成立する：

(1) F が忠実 $\implies$ F はモノ射とエピ射を反射する

(2) F が忠実かつ充満 $\implies$ F は同型射を反射する

定義 3.2.13 圏同値

圏 $\mathbf{C}, \mathbf{D}$ が同値であるとは，関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ と $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ に対して，「$G \circ F \cong 1_{\mathbf{C}}$ かつ $F \circ G \cong 1_{\mathbf{D}}$」が成立することであり，$\mathbf{C} \simeq \mathbf{D}$ と書く．

定義 3.2.14 随伴

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ と $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が随伴関係にある，もしくは随伴関手であるとは，以下の同型が任意の対象 $C \in \mathbf{C}$ と $D \in \mathbf{D}$ に対して自然に成り立つことである:

$$\mathrm{Hom}(F(C), D) \cong \mathrm{Hom}(C, G(D))$$

また，このとき $F \dashv G$ と書き，F は G の左随伴，逆に G は F の右随伴であるという．

例 3.2.15 随伴の具体例

圏 $\mathbf{C}$ における任意の対象 $C \in \mathbf{C}$ に対して，関手 $(- \times C)$ は右随伴関手 $(-)^C$ を持つ．つまり，$(- \times C) \dashv (-)^C$ が成立するこのことをカリー化といい，理論計算機科学においてとても重要な役割を果たす変形操作である)．

定義 3.2.16 Hom 関手，表現可能関手

$\mathbf{C}$ を任意の局所小圏とする．任意の対象 $C \in \mathbf{C}$ に対して，関手 $\mathrm{Hom}(C, -) : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ または，関手 $\mathrm{Hom}(-, C) : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ を Hom 関手という．$\mathrm{Hom}(C, -)$ のことを H^C，$\mathrm{Hom}(-, C)$ のことを H_Cもしくは $\mathbf{y}(C)$ と書く．また，関手 $X : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$(または $Y : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$) が $X \cong H^C$(または $Y \cong H_C$) を満たすとき，X(または Y) を表現可能関手という．

定義 3.2.17 米田埋め込み

圏 $\mathbf{C}$ を任意の局所小圏とする．関手 $\mathbf{y} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$，$\mathbf{y}(C) = H_C$ を米田埋め込みという．

定理 3.2.18 米田の補題

圏 $\mathbf{C}$ を任意の局所小圏とする．任意の前層 $X : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Set}$ と任意の対象 $C \in \mathbf{C}$ に対して，以下の同型が

X と C に対して自然に成り立つ：

$$\mathrm{Hom}(\mathbf{y}(C), X) \cong X(C)$$

定理 3.2.19 米田埋め込みは充満忠実

$\mathbf{y} : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathrm{op}}}$ を米田埋め込みとする．$\mathbf{y}$ は忠実かつ充満な関手である．

3.3 極限

定義 3.3.1 終対象

圏 $\mathbf{C}$ における終対象 1 とは，「任意の対象 C に対して，C から 1 へ向かう射がただ一つ存在する」という条件を満たす $\mathbf{C}$ の対象のことである．

定義 3.3.2 始対象

圏 $\mathbf{C}$ における始対象 0 とは，「任意の対象 C に対して，0 から C への射がただ一つ存在する」という条件を満たす $\mathbf{C}$ の対象のことである．なお，始対象は終対象の双対概念である．

定義 3.3.3 積

圏 $\mathbf{C}$ における対象 X, Y の (二項) 積とは，3 つ組 (P, p_A, p_B) のことであり，以下を満たす:
(1) P は $\mathbf{C}$ の対象である．
(2) $p_A : P \to A, p_B : P \to B$ は $\mathbf{C}$ の射である．
さらに，任意の 3 つ組 (Q, q_1, q_2) が,
(1) Q は $\mathbf{C}$ の対象
(2) $q_A : Q \to A, q_B : Q \to B$ は $\mathbf{C}$ の射
であるとき，$q_A = p_A \circ r$，$q_B = p_B \circ r$ を満たす射 $r : Q \to P$ がただ一つ存在する．図式で表現すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd}
& Q \arrow[dl, "q_A"'] \arrow[d, dashed, "r"] \arrow[dr, "q_B"] & \\
A & P \arrow[l, "p_A"] \arrow[r, "p_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

この P のことを $A \times B$ と書く．また，$A \times B$ をとくに二項積という．二項積は以下のように自然に一般の積へ拡張することができる．

I を集合とする．圏 $\mathbf{C}$ における対象 $(C_i)_{i \in I}$ の積とは，組 $(P, (p_i)_{i \in I})$ のことであり，以下を満たす:
(1) P は $\mathbf{C}$ の対象である．
(2) $p_i : P \to C_i$ $(i \in I)$ は $\mathbf{C}$ の射である．
さらに，任意の組 $(Q, (q_i)_{i \in I})$ が,
(1) Q は $\mathbf{C}$ の対象
(2) $q_i : Q \to C_i (i \in I)$ は $\mathbf{C}$ の射
であるとき，$q_i = p_i \circ r (i \in I)$ を満たす射 $r : Q \to P$ がただ一つ存在する．
上記のような積 P のことを $\prod_{i \in I} C_i$ と書く．とくに I が有限集合のとき，P を有限積という．また，I が空集合のとき，P は終対象である．

定義 3.3.4 余積

I を集合とする．圏 $\mathbf{C}$ における対象 $(C_i)_{i\in I}$ の余積とは，組 $(P,(s_i)_{i\in I})$ のことであり，以下を満たす:

(1) P は $\mathbf{C}$ の対象である．

(2) $s_i : C_i \to P(i\in I)$ は $\mathbf{C}$ の射である．

さらに，任意の組 $(Q,(t_i)_{i\in I})$ が,

(1) Q は $\mathbf{C}$ の対象

(2) $t_i : C_i \to Q(i\in I)$ は $\mathbf{C}$ の射

であるとき，$t_i = s_i \circ r(i\in I)$ を満たす射 $r : P \to Q$ がただ一つ存在する．

上記のような余積 P のことを $\coprod_{i\in I} C_i$ と書く．とくに I が有限集合のとき，P を有限余積という．二項余積を図式で表現すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd} & Q & \\ A \arrow[ur, "t_A"] \arrow[r, "s_A"'] & P \arrow[u, dashed, "r"'] & B \arrow[ul, "t_B"'] \arrow[l, "s_B"] \end{tikzcd}$$

命題 3.3.5

圏 C において以下が成立する：

任意の有限積が存在する $\iff$ 終対象と，任意の二つの対象の積が存在する

定義 3.3.6 イコライザ

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $f,g : A \to B$ に対するイコライザとは，組 (K,k) のことであり，以下の条件を満たす：

(1) K は $\mathbf{C}$ の対象である．

(2) $k : K \to A$ は $f\circ k = g\circ k$ を満たす $\mathbf{C}$ の射である．

さらに，任意の組 (M,m) が,

(1) M が $\mathbf{C}$ の対象

(2) $m : M \to A$ は $f\circ m = g\circ m$ を満たす $\mathbf{C}$ の射

であるとき，$m = k\circ n$ となる射 $n : M \to K$ がただ一つ存在する．図式で表現すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ M \arrow[u, dashed, "n"] \arrow[ur, "m"'] & & \end{tikzcd}$$

定義 3.3.7 コイコライザ

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $f,g : B \to A$ に対するコイコライザとは，組 (K,k) のことであり，以下の条件を満たす：

(1) K は $\mathbf{C}$ の対象である．

(2) $k : A \to K$ は $k\circ f = k\circ g$ を満たす $\mathbf{C}$ の射である．

さらに，任意の組 (M,m) が,

(1) M が $\mathbf{C}$ の対象

(2) $m : A \to M$ は $m \circ f = m \circ g$ を満たす $\mathbf{C}$ の射

であるとき，$m = n \circ k$ となる射 $n : K \to M$ がただ一つ存在する．図式で表現すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[d, dashed, "n"'] & A \arrow[l, "k"'] \arrow[dl, "m"] & B \arrow[l, shift right, "f"'] \arrow[l, shift left, "g"] \\
M & &
\end{tikzcd}$$

命題 3.3.8 イコライザはモノ射，コイコライザはエピ射

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $f, g : B \to A$ に対するイコライザを (K, k) とする．このとき，k はモノ射である．双対的に，二つの射 $f, g : B \to A$ に対するコイコライザを (L, l) とする．このとき，l はエピ射である．

定義 3.3.9 プルバック

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $f : A \to C$, $g : B \to C$ に対する，つまり組 (f, g) に対するプルバックとは，3 つ組 (P, f', g') のことであり，以下の条件を満たす：

(1) P は $\mathbf{C}$ の対象である．

(2) $f' : P \to B$，$g' : P \to A$ は $f \circ g' = g \circ f'$ を満たす $\mathbf{C}$ の射である．

さらに，任意の組 (Q, f'', g'') が，

(1) Q が $\mathbf{C}$ の対象

(2) $f'' : P \to B$，$g'' : P \to A$ は $f \circ g'' = g \circ f''$ を満たす $\mathbf{C}$ の射

であるとき，$f'' = f' \circ q$ かつ $g'' = g' \circ q$ となる射 $q : Q \to P$ がただ一つ存在する．図式で表現すると以下のようになる：

$$\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dashed, "q"] \arrow[drr, bend left, "f''"] \arrow[ddr, bend right, "g''"'] & & \\
& P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\
& A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

また，上記のプルバック図式における対象 P のことを対象 A, B の C におけるファイバー積といい $A \times_C B$ と書く．

定義 3.3.10 プッシュアウト

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $f : C \to A$, $g : C \to B$ に対する，つまり組 (f, g) に対するプッシュアウトとは，3 つ組 (P, f', g') のことであり，以下の条件を満たす：

(1) P は $\mathbf{C}$ の対象である．

(2) $f' : B \to P$，$g' : A \to P$ は $g' \circ f = f' \circ g$ を満たす $\mathbf{C}$ の射である．

さらに，任意の組 (Q, f'', g'') が，

(1) Q が $\mathbf{C}$ の対象

(2) $f'' : B \to P$，$g'' : A \to P$ は $g'' \circ f = f'' \circ g$ を満たす $\mathbf{C}$ の射

であるとき，$f'' = q \circ f'$ かつ $g'' = q \circ g'$ となる射 $q : P \to Q$ がただ一つ存在する．図式で表現すると以下の

ようになる：

$$
\begin{tikzcd}
Q & & \\
& P \arrow[ul, dashed, "q"'] & B \arrow[l, "f'"'] \arrow[ull, bend right, "f''"'] \\
& A \arrow[u, "g'"] \arrow[uul, bend left, "g''"] & C \arrow[l, "f"] \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}
$$

補題 3.3.11 2-プルバック補題

以下の図式が可換となる任意の圏 $\mathbf{C}$ において，以下の (1), (2) が成立する．

(1) 左側の四角形と右側の四角形がともにプルバックであるならば，全体の四角形もプルバックである．

(2) 右側の四角形と全体の四角形がともにプルバックであるならば，右側の四角形もプルバックである．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "a"] \arrow[d, "c"'] & B \arrow[r, "b"] \arrow[d, "d"'] & C \arrow[d, "e"] \\
D \arrow[r, "f"'] & E \arrow[r, "g"'] & F
\end{tikzcd}
$$

補題 3.3.12 3-プルバック補題

以下の図式が可換となる任意の圏 $\mathbf{C}$ において, 左側の上と下の四角形と右側の四角形がそれぞれプルバックであるならば，全体の四角形もプルバックである．

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[dd] \\
D \arrow[r] \arrow[d] & E \arrow[d] & \\
F \arrow[r] & G \arrow[r] & H
\end{tikzcd}
$$

命題 3.3.13 モノ射のプルバックはモノ射

以下のようなプルバック図式が与えられたとする：

$$
\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "g'"'] & B \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}
$$

このとき，以下の二つが成立する：

(1) g がモノ射であるならば，g' もモノ射である．

(2) g が同型射であるならば，g' も同型射である．

命題 3.3.14

圏 C において以下が成立する：

$$\text{任意の有限積とイコライザが存在する} \iff \text{終対象と任意のプルバックが存在する}$$

定義 3.3.15 錐

関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が与えられたとする．F 上の錐とは以下のような (1), (2) を満たす組 $(C, (p_D)_{D\in\mathbf{D}})$ のことである：

(1) $C \in \mathbf{C}$ は対象である．

(2) 任意の対象 $D \in \mathbf{D}$ に対して，$p_D : C \to FD \in \mathbf{C}$ は射である．さらに，任意の射 $d : D \to D' \in \mathbf{D}$ に対して $p_{D'} = Fd \circ p_D$ を満たす．つまり，以下の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, "p_D"'] \arrow[dr, "p_{D'}"] & \\
FD \arrow[rr, "Fd"'] & & FD'
\end{tikzcd}$$

定義 3.3.16 極限

関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が与えられたとする．F 上の極限とは，以下の条件を満たす F 上の錐 $(L, (p_D)_{D\in\mathbf{D}})$ のことである．任意の対象 $D \in \mathbf{D}$ と，任意の F 上の錐 $(M, (q_D)_{D\in\mathbf{D}})$ に対して，$q_D = p_D \circ m$ となる射 $m : M \to L$ がただ一つ存在する．しばしば，このような対象 L のことを $\varprojlim_{D\in\mathbf{D}} F(D)$ とか書き (または，単に $\varprojlim_{\mathbf{D}} F$ とも書く)，極限対象という．

$$\begin{tikzcd}
\varprojlim_{D\in\mathbf{D}} F(D) \arrow[d, "p_D"'] \arrow[dr, "p_{D'}"] & & M \arrow[ll, dashed, "m"'] \arrow[dll, "q_D"] \arrow[dl, "q_{D'}"] \\
FD \arrow[r, "Fd"'] & FD' &
\end{tikzcd}$$

定義 3.3.17 余錐

関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が与えられたとする．F 上の余錐とは以下のような (1), (2) を満たす組 $(C, (s_D)_{D\in\mathbf{D}})$ のことである：

(1) $C \in \mathbf{C}$ は対象である．

(2) 任意の対象 $D \in \mathbf{D}$ に対して，$s_D : C \to FD \in \mathbf{C}$ は射である．さらに，任意の射 $d : D' \to D \in \mathbf{D}$ に対して $s_{D'} = s_D \circ Fd$ を満たす．つまり，以下の図式が可換である．

$$\begin{tikzcd}
& C & \\
FD \arrow[ur, "s_D"] & & FD' \arrow[ul, "s_{D'}"'] \arrow[ll, "Fd"]
\end{tikzcd}$$

定義 3.3.18 余極限

関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が与えられたとする．F 上の余極限とは，以下の条件を満たす F 上の余錐 $(L, (s_D)_{D\in\mathbf{D}})$

のことである．任意の対象 $D \in \mathbf{D}$ と，任意の F 上の余錐 $(M, (t_D)_{D\in\mathbf{D}})$ に対して，$t_D = m \circ s_D$ となる射 $m : L \to M$ がただ一つ存在する．しばしば，このような対象 L のことを $\varinjlim_{D\in\mathbf{D}} F(D)$ と書き (または，単に $\varinjlim_{\mathbf{D}} F$ とも書く)，余極限対象という．

$$
\begin{tikzcd}
& \varinjlim_{D\in\mathbf{D}} F(D) \arrow[rr, dashed, "m"] & & M \\
FD \arrow[ur, "s_D"] \arrow[urrr, "t_D"] & & FD' \arrow[ul, "s_{D'}"'] \arrow[ur, "t_{D'}"'] \arrow[ll, "Fd"]
\end{tikzcd}
$$

定義 3.3.19 完備

圏 $\mathbf{C}$ が完備であるとは，任意の関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$(ただし，$\mathbf{D}$ は小圏とする) が極限を持つことをいう．また，圏 $\mathbf{C}$ が有限完備であるとは，任意の関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$(ただし，$\mathbf{D}$ は有限圏とする) が極限を持つことをいう．

定義 3.3.20 余完備

圏 $\mathbf{C}$ が余完備であるとは，任意の関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$(ただし，$\mathbf{D}$ は小圏とする) が余極限を持つことをいう．また，圏 $\mathbf{C}$ が有限余完備であるとは，任意の関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$(ただし，$\mathbf{D}$ は有限圏とする) が余極限を持つことをいう．

命題 3.3.21 極限の普遍性

終対象，始対象，積，余積，イコライザ，コイコライザ，プルバック，プッシュアウト，極限，余極限は同型を除いて一意に定まる．

例 3.3.22

終対象，積，イコライザ，プルバックは極限の具体例である．また，双対的に始対象，余積，コイコライザ，プッシュアウトは余極限の具体例である．これは，極限を与える関手のドメインを，それぞれに該当する特定の圏として取ればわかる．

定理 3.3.23 極限の存在条件

任意の圏 $\mathbf{C}$ において以下が成立する：

$$\text{任意の有限積とイコライザが存在する} \iff \text{任意の有限極限が存在する}$$

定義 3.3.24 極限の保存

関手 $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が極限を保存するとは，以下のことが成り立つことである．
任意の小圏 $\mathbf{D}$ と任意の関手 $G : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$ に対して，G 上の極限 $(L, (p_D)_{D\in\mathbf{D}})$ が存在するなら，$(FL, (Fp_D)_{D\in\mathbf{D}})$ が合成関手 $F \circ G$ の極限となる．

定義 3.3.25 余極限の保存

関手 $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が余極限を保存するとは，以下のことが成り立つことである．
任意の小圏 $\mathbf{D}$ と任意の関手 $G : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$ に対して，G 上の余極限 $(L, (s_D)_{D\in\mathbf{D}})$ が存在するなら，$(FL, (Fs_D)_{D\in\mathbf{D}})$ が合成関手 $F \circ G$ の余極限となる．

定理 3.3.26 表現可能関手は極限を保存する

圏 $\mathbf{C}$ を局所小圏とする．任意の対象 $C \in \mathbf{C}$ に対して，関手 $H^C : \mathbf{C} \to \mathbf{Set}$ は任意の極限を保存する．また，関手 $H_C : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ も極限を保存する．なお，$\mathbf{C}^{\mathbf{op}}$ の極限は $\mathbf{C}$ の余極限であることに注意する．

定理 3.3.27 右随伴は極限を，左随伴は余極限を保存する

関手 $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が左随伴を持つならば，F は任意の極限を保存する．また，双対的に F が右随伴を持つならば，F は任意の余極限を保存する．

定義 3.3.28 極限の創出

圏 $\mathbf{B}$ は完備であるとする．関手 $F : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ が極限を創出するとは，任意の小圏 $\mathbf{D}$ と関手 $J : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$ について，関手 $F \circ J$ 上の任意の極限錐 $(B, q_D)_{D \in \mathbf{D}}$ について，$F(A) = B$ かつ，任意の $D \in \mathbf{D}$ について $F(p_D) = q_D$ となるような J 上の錐 $(A, p_D)_{D \in \mathbf{D}}$ がただ一つ存在し，その錐が J 上の極限錐となることをいう ($A \in \mathbf{A}$ でかつ $B \in \mathbf{B}$ である).

定理 3.3.29 関手圏における極限は点ごとに計算される

圏 $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ を任意の圏，圏 $\mathbf{D}$ を任意の小圏とし，関手 $F : \mathbf{D} \to \mathbf{A}^{\mathbf{C}}$ が与えられたとする．このとき，任意の対象 $C \in \mathbf{C}$ に対して，関手 $F(-)(C) : \mathbf{D} \to \mathbf{A}$ が極限を持つならば，F は極限を持ち，この極限は点ごとに (つまり，対象 C ごとに) 計算される．

定義 3.3.30 元の圏，射影関手

圏 $\mathbf{C}$ を任意の圏，X を $\mathbf{C}$ 上の任意の前層とする．X の元の圏 $\mathbf{E}(X)$ とは，以下で定義される圏である：

(対象について): 対象は $C \in \mathbf{C}$ と $x \in X(C)$ の組 (C, x) である．

(射について): 射 $(C', x') \to (C, x)$ は $(Xf)(x) = x'$ となる $\mathbf{C}$ の射 $f : C' \to C$ である．

また，上記の C, x, f に対して，$P(C, x) = A, P(f) = f$ で定義される関手 $P : \mathbf{E}(X) \to \mathbf{A}$ を射影関手という．

定理 3.3.31 稠密性定理

圏 $\mathbf{C}$ を小圏とし，X を $\mathbf{C}$ 上の任意の前層とする．このとき，前層 X は $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ における図式

$$\mathbf{E}(X) \xrightarrow{P} \mathbf{C} \xrightarrow{\mathbf{y}} \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$$

の余極限である．すなわち，$X \cong \varinjlim_{\mathbf{E}(X)} (\mathbf{y} \circ P)$ が成り立つ．

3.4 カルテシアン閉圏，モナド

定義 3.4.1 冪対象

圏 $\mathbf{C}$ を二項積を持つ任意の圏とする．対象 $A, C \in \mathbf{C}$ による冪対象とは，対象と射の組 (C^A, e_A) のことであり，以下の条件を満たすもののことである：「任意の射 $f : A \times B \to C (B \in \mathbf{C}, f \in \mathbf{C})$ に対して，以下の図式を可換にするような，射 $\bar{f}$ が唯一に存在する」

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[d, "1_A \times \bar{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\
A \times C^A \arrow[r, "e_A"'] & C
\end{tikzcd}$$

$\bar{f}$ を f の transpose という．また，e_A を評価射という．

定義 3.4.2 カルテシアン閉圏

有限完備でかつ，任意の冪対象を持つ圏をカルテシアン閉圏という．

例 3.4.3 カルテシアン閉圏の具体例

集合の圏 $\mathbf{Set}$ はカルテシアン閉圏である．これは容易に示されうる．また，前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ もカルテシアン閉圏である．

定義 3.4.4 モナド

圏 $\mathbf{C}$ 上のモナドとは，三つ組 (T, ϵ, μ) のことで，$T : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ は関手，$\epsilon : 1_{\mathbf{C}} \to T$ と $\mu : TT \to T$ は共に自然変換で，

$$\mu \circ (\epsilon * 1_T) = 1_T = \mu \circ (1_T * \epsilon), \mu \circ (\circ * 1_T) = \mu \circ (1_T * \mu)$$

を満たすようなもののことである．つまり，以下の二つの図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\epsilon * 1_T"] \arrow[dr, "1_T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "1_T * \epsilon"'] \arrow[dl, "1_T"] \\ & T & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTT \arrow[r, "\mu * 1_T"] \arrow[d, "1_T * \mu"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\ TT \arrow[r, "\mu"'] & T \end{tikzcd}$$

定義 3.4.5 T-代数

(T, ϵ, μ) を圏 $\mathbf{C}$ 上のモナドとする．モナド $\mathbf{T} = (T, \epsilon, \mu)$ 上の $\mathbf{T}$ 代数とは，対象 $C \in \mathbf{C}$ と射 $\xi : T(C) \to C$ の組 (C, ξ) であり，$\xi \circ \epsilon_C = 1_C$ と $\xi \circ T(\xi) = \xi \mu_C$ を満たすもののことである．つまり，以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\epsilon_C"] \arrow[dr, "\xi"'] & T(C) \arrow[d, "1_C"] \\ & C \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TT(C) \arrow[r, "\mu_C"] \arrow[d, "T(\xi)"'] & T(C) \arrow[d, "\xi"] \\ T(C) \arrow[r, "\xi"'] & C \end{tikzcd}$$

また，(D, ζ) を異なる (T, ϵ, μ) 上の $\mathbf{T}$ 代数とする，このとき $\mathbf{T}$ 代数の写像 $f : (C, \xi) \to (D, \zeta)$ とは，$f \circ \xi = \zeta \circ T(f)$ を満たす射 $f : C \to D$ のことである．つまり，以下の図式を可換にする：

$$\begin{tikzcd} T(C) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\xi"'] & T(D) \arrow[d, "\zeta"] \\ C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

定義 3.4.6 アイレンベルク-ムーア圏

$\mathbf{T} = (T, \epsilon, \mu)$ を圏 $\mathbf{C}$ 上のモナドとすると，$\mathbf{T}$ 代数とその写像は圏を成す．その圏のことをアイレンベルク-ムーア圏といい，$\mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ と書く．

命題 3.4.7 忘却関手は極限を創出する

圏 $\mathbf{C}$ を完備とする．このとき，忘却関手 $U : \mathbf{C}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{C}$ は極限を創出する．

命題 3.4.8 随伴によるモナド

関手 $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$，$G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が随伴関係 $F \dashv G$ であり，その単位を $\alpha : 1_{\mathbf{C}} \to G \circ F$，余単位を $\beta : F \circ G \to 1_{\mathbf{D}}$ であるとする．このとき，以下のように (T, ϵ, μ) を定めると，(T, ϵ, μ) は $\mathbf{C}$ 上のモナドとなる．

$$T = G \circ F, \epsilon = \alpha, \mu = 1_G * \beta * 1_F$$

定義 3.4.9 モナディック関手

関手 $R : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ がモナディックであるとは, $\mathbf{C}$ 上のモナド $\mathbf{T} \cong (T, \epsilon, \mu)$ が存在して，忘却関手 $U : \mathbf{C}^{\mathbf{T}} \to \mathbf{C}$ と圏同値 $J : \mathbf{D} \to \mathbf{C}^{\mathbf{T}}$ の合成 $U \circ J$ が R と同型になることをいう．

定理 3.4.10 モナディック関手は極限を創出する

圏 $\mathbf{C}$ を完備とする．このとき，モナディック関手 $G : \mathbf{A} \to \mathbf{C}$ は極限を創出する．

定義 3.4.11 スプリット・コイコライザ

圏 $\mathbf{C}$ における二つの射 $u, v : C \to D$ の組 (u, v) がスプリット・コイコライザとは，以下の図式に対して，$q \circ u = q \circ v, q \circ s = 1_Q, u \circ r = 1_D, v \circ r = s \circ q$ が成立することをいう．

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[r, shift left, "u"] \arrow[r, shift right, "v"'] & D \arrow[l, bend right=60, "r"'] \arrow[r, "q"] & Q \arrow[l, bend right=60, "s"']
\end{tikzcd}$$

定理 3.4.12 モナディック関手の特徴づけ

関手 $R : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ が与えられたとする．このとき，R がモナディックであることと，以下の三つが成立することは同値である:

(1)R は左随伴 L を持つ．

(2)R は同型射を反射する．

(3) 二つの射 $u, v : X \to Y \in \mathbf{D}$ に対して，組 $(R(u), R(v))$ が $\mathbf{C}$ においてスプリット・コイコライザを持つならば，組 (u, v) は $\mathbf{D}$ においてコイコライザを持ち，R によって保存される[*1]．

[*1] この特徴づけの仕方は，[4] に掲載されていたものである．[15] に掲載されているものとは少し異なっていることに注意していただきたい．

第 4 章

トポス理論で成り立つ諸定理

この章では，トポス理論で成り立つ初等的な定理の証明をする．主に [15] [5] [2] [30] を参照した．

4.1　トポスの定義

定義 4.1.1　部分対象

圏 $\mathbf{A}$ と対象 $A \in \mathbf{A}$ を考える．二つのモノ射 $f : R \to A$，$g : S \to A$ が同値であるとは，$g \circ \tau = f$ となる同型射 $R \to S$ が存在することをいう．また，コドメインが A であるモノ射の同値類を A の部分対象 (subobject) という．また，コドメインが A である部分対象全体のクラスを $\mathrm{Sub}(A)$ と書く．

定義 4.1.2　部分対象分類子

有限完備な圏 $\mathbf{C}$ の部分対象分類子 (subobject-classifier) とは，組 $(\Omega$，true$)$ のことであり，以下の二つの条件を満たすものである (なお，1 は終対象とする)：

(1) 対象 $\Omega \in \mathbf{C}$ で, 射 $\mathrm{true} : 1 \to \Omega \in \mathbf{C}$ である．

(2) 任意のモノ射 $f : B \to A$ に対して, 以下の図式をプルバックにするような射 $\chi_B : A \to \Omega$ が一意的に存在する:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "!_B"] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

このような一意的に定まる射 χ_B のことを A の部分対象 B に対する特性射という．合成射 $\mathrm{true} \circ !_C$ を単に true_C と書くこともある．また，射 χ_B のことを χ_f と書くこともある．

定義 4.1.3　パワー対象

部分対象分類子 Ω を持つ有限完備な任意の圏を $\mathbf{C}$ とする．パワー対象 (power object) とは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 A に対して，対象と射の組 (PA, $\in_A$[*1]) のことであり，以下の条件を満たすもののことである:

[*1] $\in$ という記号使うのは，圏論的に集合論を公理化する際に射 $\in$ が集合論における要素の帰属関係 $\in$ を表現するからである．しかし，幾らかの制限があることに注意が必要である．詳しくは，[15] の 4 章 1 節を参照してほしい．

「圏 $\mathbf{C}$ における任意の射 $f: A \times B \to \Omega$ に対して，以下の図式を可換にするような射 $\hat{f}$ が唯一に存在する.」

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[d, "1_A \times \hat{f}"'] \arrow[dr, "f"] & \\ A \times PA \arrow[r, "\in_A"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

$\hat{f}$ を f の P-transpose という．また，$\in_A$ を評価射という.

定義 4.1.4 いくつかの記号

この後の議論で必要になるいくつかの記号*2を定義する (A は任意の対象とする) :

(1) 対角射 $\Delta_A : A \to A \times A \iff \langle 1_A, 1_A \rangle$

(2) 射 $\delta_A : A \times A \to \Omega \iff \Delta_A$の特性射

(3) シングルトン射 $\{\cdot\}_A : A \to PA \iff \delta_A$の $\mathrm{P-transpose}$

(4) 射「ϕ」: $1 \to PA$(ϕの名前) $\iff$ 特性射$\phi : A \to \Omega$もしくは，A の部分対象と一対一で対応する射

※ (4) における一対一の対応は，以下の同型対応で与えられる：

$$\mathrm{Sub}(A) \cong \mathrm{Hom}(A, \Omega) \cong \mathrm{Hom}(A \times 1, \Omega) \cong \mathrm{Hom}(1, \Omega^A) = \mathrm{Hom}(1, PA)$$

それでは，トポスを定義する.

定義 4.1.5 トポス$_1$

トポスとは，以下の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.

(3) 圏 $\mathbf{E}$ はパワー対象を持つ.

定義 4.1.6 トポス$_2$

トポスとは，以下の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である.

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ.

(3) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ.

この二つの定義を見比べてみると，定義 4.1.5 の方が強い条件を課しているように見える (というのも，部分対象分類子と冪対象から任意のパワー対象を構成することができるのは明らかなため)．しかし，次の定理はこの直観が間違っていて，この二つの定義は (じつは) 同値であるということを主張する.

定理 4.1.7 定義 4.1.5 $\iff$ 定義 4.1.6

定義 4.1.6 で定義される任意のトポス $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ．つまり，定義 4.1.5 と 4.1.6 は同値である.

Proof. 任意の $\mathbf{E}$ の対象 C，B に対して，対象 C^B が冪対象の定義を満たすことを示せば良い．まず，以下の 3 つの図式を考える.

*2 このような記号を使う理由はもちろんある．[15] の 4 章 1 節を参照してほしい.

$$C \times B \times P(C \times B) \xrightarrow{\in_{C \times B}} \Omega \tag{4.1}$$

$$C \times B \times P(C \times B) \xrightarrow{v} PC \xrightarrow{\sigma_C} \Omega \tag{4.2}$$

$$\begin{tikzcd}
P(C \times B) \arrow[r, "u"] & P(B) \\
C^B \arrow[u, dashed, "m"] \arrow[r, "!"'] & 1 \arrow[u, "\ulcorner \mathrm{true}_B \urcorner"']
\end{tikzcd} \tag{4.3}$$

(4.1) はトポス $\mathbf{E}$ がパワー対象と有限極限を持つことから成り立つ．v は (4.1) における射 $\in_{C \times B}$ の P-transpose として定義される．(4.2) における σ_C は，シングルトン射 $\{\cdot\}_C$ の特性射として定義される．(4.3) における u は (4.2) における合成射 $\sigma_C \circ v$ の P-transpose として定義される．最後に，対象 C^B と射 m は (4.3) がプルバックになるようなものとして定義される．

射「true_B」は終対象 1 をドメインに持つ．終対象からの射は明らかにモノ射であるので，「true_B」はモノ射である．よって，命題 3.3.13(1) より，m はモノ射である．それゆえ，対象 C^B はパワー対象 $P(C \times B)$ の部分対象となる．なお，これが冪対象であるとは，射 $e : B \times C^B \to C$ が存在し，この e が評価射となることと同値である．次に，以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
B \times C^B \arrow[r, "1 \times m"] \arrow[d, "1 \times !"] \arrow[rrr, dashed, bend left, "e"] & B \times P(C \times B) \arrow[r, "v"] \arrow[d, "1 \times u"'] & PC \arrow[d, "\sigma_C"'] & C \arrow[l, "\{\,\cdot\,\}_C"'] \arrow[d, "!"'] \\
B \times 1 \arrow[r, "1 \times \ulcorner \mathrm{true}_B \urcorner"'] \arrow[rrr, bend right, "!"'] & B \times PB \arrow[r, "\in_B"'] & \Omega & 1 \arrow[l, "\mathrm{true}"]
\end{tikzcd} \tag{4.4}$$

この図式は可換である．実際に，左側の四角形は先ほど定義した C^B の定義そのものに右から $B \times$ を適用したものであるので可換であり，真ん中の四角形は，u の定義により可換．また，右側の四角形は，σ_C の定義によりプルバックなので可換であり，一番下は「true」$_B$ の定義による．さらに，右側の四角形がプルバックであることと，以下の図式が可換であることにより，(4.4) を可換にするような唯一の射

$$e : B \times C^B \to C$$

が存在することが分かる．

$$
\begin{tikzcd}
B \times C^B \arrow[r] \arrow[d] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
PC \arrow[r, "\sigma_C"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

上記で与えられている C^B が冪対象であることを示すには，先ほども述べたように，射 e が冪対象の定義を満たすような射であることを示すことができれば良い．すなわち，任意の射 $f: B \times A \to C$ に対して，$f = e(1 \times g)$ を満たすような射 $g: A \to C^B$ が一意的に存在することを示すことができれば良い．もしそのような射 g が存在したとすると，(4.2) における e の定義から以下のような等式を得る．

$$\{\,\cdot\,\}_C f = \{\,\cdot\,\}_C e(1 \times g) = v(1 \times m)(1 \times g) = v(1 \times mg) : B \times A \to PC \tag{4.5}$$

いま，$\{\,\cdot\,\}_C$ は，σ_C の P-transpose であり，v は $\in_{C \times B}$ の P-transpose であるので，(4.5) 式は以下のように書き直すことができる．

$$\sigma_C(1 \times f) = \in_{C \times B} (1 \times 1 \times mg) : C \times B \times A \to \Omega \tag{4.6}$$

実際に，(4.5) が成り立っているとき，以下の 2 つの可換図式を得る．左が σ_C について，右が $\in_{C \times B}$ についての P-transpose した図式である．

$$
\begin{tikzcd}
C \times (B \times A) \arrow[d, "1 \times f"] \arrow[dr, "\sigma_C(1 \times f)"] & \\
C \times C \arrow[r, "\sigma_C"'] \arrow[d, "1 \times \{\,\cdot\,\}_C"'] & \Omega \\
C \times PC \arrow[ur, "\in_C"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \times B \times A \arrow[d, "1 \times 1 \times mg"'] \arrow[dr, "\in_{C \times B}(1 \times 1 \times mg)"] & \\
C \times B \times P(C \times B) \arrow[r, "\in_{C \times B}"] \arrow[d, "1 \times v"] & \Omega \\
C \times PC \arrow[ur, "\in_C"'] &
\end{tikzcd}
$$

よって，以下が成立する．

$$
\begin{aligned}
(4.5) \iff \{\,\cdot\,\}_C f = v(1 \times mg) &\iff (1 \times \{\,\cdot\,\}_C)(1 \times f) = (1 \times v)(1 \times 1 \times mg) \\
&\implies \in_c (1 \times \{\,\cdot\,\}_C)(1 \times f) = \in_C (1 \times v)(1 \times 1 \times mg) \\
&\iff \sigma_C(1 \times f) = \in_{C \times B} (1 \times 1 \times mg) \\
&\iff (4.6)
\end{aligned}
$$

ゆえに，(4.5) が成り立つとき，(4.6) は成立する．なお，(4.6) は $mg = h$ とすると，h は f によって決定されるということを示している．

次に，上記のような射 g が存在すれば一意であることを示す．もし，以下を満たすような，射 $g, g' : A \to C^B$ が存在したとする:

$$\sigma_C(1 \times f) = \in_{C \times B} (1 \times 1 \times mg)$$

$$\sigma_C(1 \times f) = \in_{C \times B} (1 \times 1 \times mg')$$

このとき，上記の 2 つの等式から以下の等式を得る．

$$\in_{C \times B} (1 \times 1 \times mg) = \in_{C \times B} (1 \times 1 \times mg')$$

ここで，$\in_{C \times B}$ に関する P-transpose による普遍性により，さらに以下の等式を得る．

$$1 \times mg = 1 \times mg'(= \sigma_C(\widehat{1 \times f}))$$

よって，$mg = mg'$ を得る．いま，m はモノ射であるので，$g = g'$ となる．

次に，上記のような射 g が実際に存在することを示す．射 $f : B \times A \to C$ を与えられたとする．このとき，$\sigma_C(1 \times f)$ は，以下の等式満たす (以下の図式を可換にする) ような，P-transpose $h : A \to P(C \times B)$ が存在する．(この h は (4.6) と整合的である．)

$$\sigma_C(1 \times f) = \in_{C \times B} (1 \times 1 \times h) : C \times B \times A \to \Omega$$

$$\begin{tikzcd}
 & C \times B \times A \arrow[dl, "1_{C \times B} \times h"'] \arrow[dr, "1 \times f"] \arrow[dd, "\sigma_C(1 \times f)"] & \\
C \times B \times P(C \times B) \arrow[dr, "\sigma_{C \times B}"'] & & C \times C \arrow[dl, "\sigma_C"] \\
 & \Omega &
\end{tikzcd}$$

さらに，上記の図式の両側を $\{\cdot\}_C$ と v の定義に従い,$B \times A \to PC$ へ P-transpose させると，(4.5) に整合的な以下の等式 (4.7) と，可換図式を得る．

$$\{\cdot\}_C f = v(1 \times h) : B \times A \to PC \tag{4.7}$$

$$\begin{tikzcd}
 & B \times A \arrow[dl, "1 \times h"'] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd] & \\
B \times P(C \times B) \arrow[dr, "v"'] & & C \arrow[dl, "\{\cdot\}_C"] \\
 & PC &
\end{tikzcd}$$

(4.7) 式の両辺に σ_C を合成させると，以下のような等式 (4.8) を得る．

$$\mathrm{true}_C \circ f = \sigma_C v(1 \times h) : B \times A \to \Omega \tag{4.8}$$

左辺は，σ_C の定義から，$\sigma_C \circ \{\ \cdot\ \}_C f = \mathrm{true}_C \circ f$ が成立することによる．f のドメインが $B \times A$ であるので，射 $p : B \times A \to B$ に対して，左辺は以下のように変形できる．

$$\mathrm{true}_C \circ f = \mathrm{true}_{B\times A} = \mathrm{true}_B \circ p$$

一方，右辺は，u が $\sigma_C v$ の P-transpose として定義されていたので，u となることが分かる．つまり，以下のような (4.9) 式を得る．

$$\mathrm{true}_B \circ p = u : B \times A \to \Omega \tag{4.9}$$

(4.9) 式の両辺をさらに P-transpose させると，以下のような (4.10) 式を得る．

$$\ulcorner \mathrm{true}_B \urcorner \circ !_A = uh : A \to PB \tag{4.10}$$

(4.10) 式により，以下の図式は可換である．よって，(4.3) より，以下の図式はプルバック図式でもある．そして，(4.5) より，以下の図式における射 g が求めていた射であることが分かる．よって，冪対象の定義を満たす射 g が存在する．ゆえに，C^B は冪対象である．

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, dashed, "g"] \arrow[drr, bend left, "!_A"] \arrow[ddr, bend right, "mg=h"'] & & \\
& C^B \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"] & 1 \arrow[d, "\ulcorner \mathrm{true}_B \urcorner"] \\
& P(C \times B) \arrow[r, "u"'] & PB
\end{tikzcd}$$

□

また，トポスの定義を以下のように書くこともできる．

定義 4.1.8 トポス$_3$

トポスとは，以下の 3 つの条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限積を持つ．

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ．

(3) 圏 $\mathbf{E}$ はパワー対象を持つ．

この定義が私が調べた中で最も簡潔な定義であった．どのような圏論的概念が基本となってトポスが成立しているかを考える際に，この定義が上で見た定義 4.1.5，4.1.6 と同値であることを確認することは重要である．

では，さっそくこの定義が上で見た 2 つの定義 4.1.5，4.1.6 と同値であることを示す．

定理 4.1.9

定義 4.1.6 と定義 4.1.8 は同値である．つまり，定義 4.1.8 を満たす圏は有限完備である．

Proof. 定理 3.3.23 より，イコライザが存在することを示すだけで十分である．射 $f, g : A \to B$ が与えられたとする．このとき，モノ射 $e : C \to A$ をその特性射が $\delta_B \circ \langle f, g \rangle$ となるように定義する．つまり，以下がプ

ルバックになるような唯一の射として e を定義する：

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "!_C"] \arrow[d, "e"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\delta_B \circ \langle f,g \rangle"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

すると，この e が f, g のイコライザとなることを示す．まず，$f \circ e = g \circ e$ が成立することを示す．いま，以下のような可換図式を考えることができる:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[rrrr, bend left, "!_C"] \arrow[dd, "e"'] & & B \arrow[rr, "!_B"'] \arrow[dd, "\Delta_B"] & & 1 \arrow[dd, "\mathrm{true}"] \\ & B & & & \\ A \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\langle f,g \rangle"'] \arrow[dr, "f"'] & & B \times B \arrow[ul, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] \arrow[rr, "\delta_B"'] & & \Omega \\ & B & & & \end{tikzcd}$$

右側の四角形がプルバックであることから，$\Delta_B \circ u = \langle f, g \rangle \circ e$ かつ $!_B \circ u = !_C$ となる，唯一の射 $u : C \to B$ が存在する．よって，以下が成立する：

$$\begin{aligned} \Delta_B \circ u = \langle f, g \rangle \circ e &\iff \langle 1_B, 1_B \rangle \circ u = \langle f, g \rangle \circ e \\ &\iff \langle u, u \rangle = \langle fe, ge \rangle \\ &\iff fe = ge = u \end{aligned}$$

次に，イコライザの普遍性を満たしていることを示す．つまり，$f \circ h = g \circ h$ となる，射 $h : D \to A$ に対して，以下を可換にするような射 $k : D \to C$ がただ一つ存在することを示す．

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ D \arrow[u, dashed, "k"] \arrow[ur, "h"'] & & \end{tikzcd}$$

まず，以下の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} & & B \arrow[d, shift left, "\Delta_B"] \\ D \arrow[r, "h"] \arrow[urr, bend left, "fh"] \arrow[drr, bend right, "gh"'] & A \arrow[r, "\langle f,g \rangle"] \arrow[ur, "f"] \arrow[dr, "g"'] & B \times B \arrow[u, shift left, "\pi_1"] \arrow[d, shift left, "\pi_1"] \\ & & B \arrow[u, shift left, "\Delta_B"] \end{tikzcd}$$

これは，積の普遍性と標準的な射の性質により明らかに可換となる．よって，$\langle f,g\rangle\circ h=\Delta_B\circ f\circ h$ が成立する．したがって以下のような可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "fh"] \arrow[d, "h"'] & B \arrow[r, "!_B"] \arrow[d, "\Delta_B"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\langle f,g\rangle"'] & B\times B \arrow[r, "\delta_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

したがって，

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "!_C"] \arrow[d, "e"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\delta_B\circ\langle f,g\rangle"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

がプルバックであることから，その普遍性により，$e\circ k=h$ となる唯一の射 $k:D\to C$ が存在する． □

4.2　前層圏はトポスである

前節で見てきたように，トポスの定義の仕方は様々ある．以下では（基本的には）一番簡潔な定義である，定義 4.1.8 をトポスの定義として採用することにする．

さて，それでは，具体的にどのような圏がトポスなのであろうか？集合の圏 **Set** はトポスの最も基本的な例である．

定理 4.2.1

集合の圏 **Set** はトポスである．

Proof. 例 3.4.3 より，圏 **Set** はカルテシアン閉圏である．(有限極限を持つことは明らかで，冪対象は二つの集合間の写像の集合として定義できる．) また，圏 **Set** における部分対象分類子は，以下のようにして与えられる．対象 $\Omega=\{T,F\}$(2 点集合) とし，射 $\mathrm{true}:1\to\Omega$ を $\mathrm{true}(*)=T$ と定義する．さらに，与えられた部分対象 $S\subseteq A$ に対して，特性射 $\phi:A\to\Omega$ を元 $a\in A$ ごとに以下のように定義する：

$$\phi(a)=\begin{cases} T & a\in S\text{ のとき} \\ F & a\notin S\text{ のとき}\end{cases}$$

すると，組 (ω,true) が部分対象分類子の定義を満たすこと容易に確かめられる． □

では，集合の圏以外にトポスとなる圏は，他にどのようなものがあるだろうか？じつは，とても重要な圏である前層圏がそれである．さっそく証明に取りかかりたいが，その前に sieve と部分関手を定義する．

定義 4.2.2　sieve

圏 **C** における対象 C 上の sieve S とは，**C** におけるコドメインが C である射の集合のことであり，以下の条件を満たす：

任意の $f \in S$ と任意の射 $g \in \mathbf{C}$ に対して，

$$cod(g) = dom(f) \implies f \circ g \in S$$

また，sieve S が $\mathbf{C}$ におけるコドメインが C であるすべての射を要素に持つとき，C 上の極大 sieve と言い，$\max_C$ と書く．

注意 4.2.3

sieve は (右) イデアルの圏論的一般化である．また，双対概念である cosieve は (左) イデアルの一般化である．

命題 4.2.4

S を圏 $\mathbf{C}$ の対象 C 上の sieve とする．このとき，以下が成立する：

$$S \text{ は極大 sieve}(S = \max_C) \iff 1_C \in S$$

Proof. $(\Rightarrow)$: 定義より明らか．
$(\Leftarrow)$: $1_C \in S$ とすると，任意の $cod(g) = dom(1_C) = C$ となる射 $g \in \mathbf{C}$ に対して，S が sieve であることにより，$1_C \circ g \in S \iff g \circ S$ が成立する．いま，g は $cod(g) = C$ となる任意の射であるので，S は極大 sieve である． □

定義 4.2.5 部分関手

関手 $G : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ が関手 $F : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ の部分関手であるとは，任意の対象 $A, B \in \mathbf{C}$ に対して，$GA \subseteq FA$ が成り立ち，任意の射 $f : A \to B$ に対して，以下の図式が可換になることを言う：

$$\begin{array}{ccc} GA & \xrightarrow{Gf} & GB \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i'} \\ FA & \xrightarrow[Ff]{} & FB \end{array}$$

なお，Gf は Ff の GA への制限写像 $(Gf = Ff \restriction GA)$ として与えられる．

命題 4.2.6

圏 $\mathbf{C}$ における任意の対象 $A \in \mathbf{C}$ に対して，関手 $\mathbf{y}(A)$ の部分関手と A 上の sieve は一対一に対応している．

Proof. 関手 $\mathbf{y}(A)$ の部分関手 F が与えられたとする．このとき，対象 $B \in \mathbf{C}$ に対して集合 $\cup\{FB | B \in \mathbf{C}, FB \subseteq \mathbf{y}(A)(B)\}$ は A 上の sieve を定める．逆に A 上の sieve$S$ が与えられたとする．このとき，任意の対象 $B \in \mathbf{C}$ に対して，関数 $B \mapsto \{f \in S | dom(f) = A, cod(f) = B\}$ は関手 $\mathbf{y}(A)$ の部分関手を定める．よって，関手 $\mathbf{y}(A)$ の部分関手と A 上の sieve は一対一に対応している． □

それでは，前層圏がトポスとなることの証明をしていくことにする．定義 4.1.8 より，有限積と，部分対象分類子と，パワー対象の存在を示すだけで十分であるが，今回は有限極限と冪対象の存在も示した．また，冪対象の存在は 2 通りの方法で示した．

定理 4.2.7 前層圏はトポスである．

圏 $\mathbf{C}$ を任意の小圏とする．このとき，前層圏 $\mathbf{Sets}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}$ はトポスである．

Proof. 前層圏において，任意の有限積 (有限極限) と，部分対象分類子と，冪対象もしくはパワー対象が存在することを示せば良い．(今回は，冪対象とパワー対象をどちらも構成してみることにする．)

(有限積 (有限極限) の存在)：

任意の有限積 (有限極限) が存在するのは，定理 3.3.29 と集合の圏 **Set** が任意の有限極限を持つことから即座に従う．

(部分対象分類子の存在):

前層圏における部分対象分類子 Ω は，もし存在しているなら，定理 3.2.18(米田の補題) と定義 4.1.2(部分対象分類子の定義) から，各対象 A ごとに，

$$\Omega(A) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{\mathbf{op}}}}(\mathbf{y}(A), \Omega) \cong \mathrm{Sub}(\mathbf{y}(A))$$

が成立することがわかる．つまり，上記の観察から，もし前層圏における部分対象分類子が存在すれば，それは $\mathbf{y}(A)$ の部分関手の集まりで定義できるということが分かる．さらに，補題 4.2.6 より，任意の $\mathbf{y}(A)$ の部分関手は，ある $A \in \mathbf{C}$ 上の sieve と一対一に対応することがわかるので，前層圏における部分対象分類子 Ω は，もし存在しているなら，各対象 A について，以下のように定義することができるということが分かる：

$$\Omega(A) = A \text{ 上の sieve 全体の集合}$$

次に，関手 $\Omega : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ を任意の射 $f : B \to A$ と任意の sieve $S \in \Omega(A)$ に対して，以下のように定義する：

$$(\Omega f)S = \{g | cod(g) = B, f \circ g \in S\}$$

これが well-defined であることを確かめる．つまり，集合 $\{g|cod(g) = B, f \circ g \in S\}$ が B 上の sieve になっていることを確かめる．実際に，S が sieve であるので，任意の射 $h : dom(h) \to dom(g)$ に対して，$f \circ g \circ h \in S$ であり，$g \circ h \in \{g|cod(g) = B, f \circ g \circ h \in S\}$ である．よって，well-defined．また，このように定義された Ω が関手となっていることは簡単に確かめられる．実際に，任意の射 $f : B \to A$, $g : C \to B$ と任意の sieve $S \in \Omega(A)$ に対して，$\Omega(1_A)(S) = 1_{\Omega(A)}(S)$ であることと，$\Omega(f \circ g)S = (\Omega(g) \circ \Omega(f))S$ となることを確かめれば良い．$\Omega(1_A)(S) = 1_{\Omega(A)}(S)$ は明らかである．また，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\Omega(f \circ g)S &= \{h | cod(h) = C, (f \circ g) \circ h \in S\} \\
&= \{h | cod(h) = C, g \circ h \in \Omega(f)(S)\} \\
&= (\Omega(g) \circ \Omega(f))S
\end{aligned}$$

したがって，$\Omega : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ は関手となっているとわかる．次に，射 $\mathrm{true} : 1 \to \Omega$ を，各対象 A ごとに以下のように定義する．

$$\mathrm{true}_A(0) = \max_A$$

$\max_A$は A 上の極大 sieve であり，0 は一点集合 $1(A)$ の唯一の元である．これは明らかに well-defined である．

(Ω, true) が前層圏における部分対象分類子であることを示すために，前層圏におけるモノ射 $G \to F$ を取ってくる．この G は F の部分関手でもあることに注意する．ここで，部分関手 G の特性射 $\chi_G : F \to \Omega$ を任意の対象 A と任意の元 $x \in FA$ に対して，以下のように定義する．

$$(\chi_G)_A(x) = \{f : B \to A | (Ff)(x) \in GB\}$$

これが，well-defined であることを確かめる．つまり，集合 $(\chi_G)_A(x)$ が sieve となっていることと，定義された χ_G が自然変換となっていることを確かめる．まず，集合 $(\chi_G)_A(x)$ が sieve となることを確かめる．任意の射 $g : C \to B$ と，任意の元 $x \in FA$ に対して以下が成立する：

$$\begin{aligned} f \in (\chi_G)_A(x) &\iff F(f)(x) \in GB \\ &\Longrightarrow F(g)(F(f)(x)) \in (F(g))GB \\ &\Longrightarrow F(f \circ g)(x) \in GC \\ &\iff f \circ g \in (\chi_G)_A(x) \end{aligned}$$

上記の議論により，$(\chi_G)_A(x)$ は sieve となることが分かる．次に，χ_G が自然変換となることを示す．つまり，任意の射 $f : B \to A$ に対して，以下の図式が可換となることを示す：

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "(\chi_G)_A"'] & F(B) \arrow[d, "(\chi_G)_B"] \\ \Omega(A) \arrow[r, "\Omega(f)"'] & \Omega(B) \end{tikzcd}$$

実際に，任意の $x \in F(A)$ と $g : C \to B$ に対して，以下の等式が成りたつ：

$$\begin{aligned} (\Omega(f) \circ (\chi_G)_A)(x) &= \Omega(f)((\chi_G)_A(x)) \\ &= \{g | cod(g) = B, f \circ g \in (\chi_G)_A(x)\} \\ &= \{g | cod(g) = B, F(f \circ g)(x) \in GC\} \\ &= \{g | cod(g) = B, F(g)(F(f)(x)) \in GC\} \\ &= (\chi_G)_B)(F(f)(x)) \\ &= (\chi_G)_B \circ F(f))(x) \end{aligned}$$

よって，$\Omega(f) \circ (\chi_G)_A = (\chi_G)_B \circ F(f)$ となり，上図は可換である．従って，χ_G が自然変換であることが確かめられた．次に，以下の図式がプルバックになることを示す．

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\theta"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ F \arrow[r, "\chi_G"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

定理 3.3.29 より，任意の関手圏における極限は点ごとに計算されるので，上図がプルバックであるのは，任意の対象 A に対して，以下の図式がプルバックであることと同値である．ゆえ，以下の図式がプルバックとなることを示す：

$$\begin{tikzcd} GA \arrow[r, "!"] \arrow[d, "i"'] & 1(A) \arrow[d, "\mathrm{true}_A"] \\ FA \arrow[r, "(\chi_G)_A"'] & \Omega(A) \end{tikzcd}$$

ここで，いま G は F の部分関手であるので，集合の圏における射 i は包含写像になることに注意する．まず，図式の可換性を確かめる．任意の元 $x \in GA$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}((\chi_G)_A \circ i)(x) &= (\chi_G)_A(i(x)) \\ &= \{f : B \to A | (Ff)(x) \in GB\} \\ &= \max_A \\ &= \mathrm{true}_A(0) \\ &= \mathrm{true}_A(!(x)) \\ &= (\mathrm{true}_A \circ !)(x)\end{aligned}$$

３つ目の等号が成立するのは，任意の $x \in GA$ に対して，$(F(1_A))(x) = 1_{F(A)}(x) = x \in GA$ であるので，$1_A \in \{f : B \to A | (Ff)(x) \in GB\}$ となり，命題 4.2.4 より，$\{f : B \to A | (Ff)(x) \in GB\} = \max_A$ となるからである．また，以下が成り立つことがわかる．

$$GA = ((\chi_G)_A)^{-1}(\max_A)$$

実際に，

$$\begin{aligned}((\chi_G)_A)^{-1}(\max_A) &= \{x | ((\chi_G)_A)(x) \in \max_A\} \\ &= \{x | ((\chi_G)_A)(x) = \max_A\} \\ &= GA\end{aligned}$$

である．さらに，$1(A) = 0 \cong \mathrm{true}_A(0) = \max_A$ であるので，

$$GA = ((\chi_G)_A)^{-1}(\max_A) \cong ((\chi_G)_A)^{-1}(1(A))$$

となる．集合の圏において，逆像がプルバックになるという事実と，プルバックは同型を除いて一意であるということから，GA は上図を可換にするプルバック対象であるということが分かる．よって，上図はプルバックである．(なお，直接プルバックであることを示すこともできる ([23] を参照)．実際に，以下の可換図式

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\sigma"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ F \arrow[r, "\chi_G"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

に対して，射 $\tau : X \to G$ を考える．任意の対象 A に対して，可換性から，$(\chi_G)_A \circ \sigma_A = \mathrm{true}_A \circ !$ を得る．よって，任意の $x \in XA$ に対して，$(\chi_G)_A(\sigma_A(x)) = \max_A$ を得る．すなわち，任意の射 $f : B \to A$ に対して，$(Ff)(\sigma_A(x)) \in GB$ となる．とくに f として，1_A を取れば $\sigma_A(x) \in GA$ となることがわかる．すなわち，ある $\tau_A : XA \to GA$ が存在して，$\theta_A \circ \tau_A = \sigma_A$ となる．この τ_A は自然変換 $\tau : X \to G$ のコンポーネントとなることが示せる．また，$\theta_A \circ \tau'_A = \sigma_A$ を満たす自然変換 $\tau' : X \to G$ が他に存在していたとすると，$\theta_A \circ \tau_A = \theta_A \circ \tau'_A$ が成立する．モノ射のプルバックはモノ射であることから，θ_A はモノ射である．よって，$\tau_A = \tau'_A$ となり，$\tau = \tau'$ を得る．ゆえに，上の条件を満たす自然変換 $X \to G$ は一意的に定まる．したがって，プルバックであると結論づけることができる．）

最後に，射 χ_G が与えられた部分関手 G に対する特性射であることを示すために，射 χ_G が上図を可換にする唯一の射であることを確かめる．上図をプルバックにする射 $\theta_A : F(A) \to \Omega(A)$ がもう一つ存在すると

仮定する．これは自然変換のコンポーネントでもあることに注意する．ここで，以下のような可換図式を考える．

$$
\begin{tikzcd}
G(C) \arrow[r, "G(f)"] \arrow[d, "i'"'] & G(A) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "i"] & 1(A) \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[dr, "\theta_C"'] & F(A) \arrow[r, "\theta_A"] & \Omega(A) \\
& \Omega(C) \arrow[ur, "\Omega(f)"'] &
\end{tikzcd}
$$

左の四角形は，G が F の部分関手であるゆえに可換．右の四角形はプルバックである．一番下は，θ の自然性による．この図式の可換性より，任意の元 $x \in F(C)$ と任意の射 $f : A \to C$ に対して，右の四角形がプルバックであることにより，以下を得る．

$$(G(f))(x) \in G(A) \iff \theta_A((G(f))(x)) = \mathrm{true}_A(0)$$

また，任意の元 $x \in F(C)$ と任意の射 $f : A \to C$ に対して，一番下の図の可換性より，以下を得る．

$$
\begin{aligned}
(G(f))(x) \in G(A) &\iff (\Omega(f))(\theta_C(x)) = (\theta_A)(F(f)\restriction_{G(C)}(x)) \\
&\iff (\Omega(f))(\theta_C(x)) = (\theta_A)(G(f)(x))
\end{aligned}
$$

よって，$(G(f))(x) \in G(A) \iff (\Omega(f))(\theta_C(x)) = \mathrm{true}_A(0)$ となり，$\Omega(f)$ の定義と $\mathrm{true}_A(0) = \max_A$ であることから，$1_{\Omega(A)} \in (\Omega(f))(\theta_C(x)) \iff f \in \theta_C(x)$ となる．したがって，任意の元 $x \in P(C)$ と任意の射 $f : A \to C$ に対して，$(\chi_G)_C$ の定義から，以下を得る．

$$f \in \theta_C(x) \iff (G(f))(x) \in G(A) \iff f \in (\chi_G)_C(x)$$

ゆえに，$\chi_G = \theta$ となり，χ_G が上図をプルバックにする唯一の射であることが分かるので，χ_G が部分関手 G の特性射であると結論づけることができる．したがって，前層圏には部分対象分類子が存在する．

(パワー対象の存在):

もし，$F \in Sets^{C^{op}}$ に対するパワー対象 PF が存在するとしたら，定理 3.2.18(米田の補題) から，任意の対象 A について，以下が成立する：

$$(PF)A \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{y}A, PF) \cong \mathrm{Hom}(F \times \mathbf{y}(A), \Omega) \cong \mathrm{Sub}(F \times \mathbf{y}A)$$

これは，PF を任意の対象 A について，$(PF)A = F \times \mathbf{y}(A)$ の部分関手全体の集合 と定義すると上手くいくことを示唆している．PF が前層圏における対象であるためには，関手でなければならないので，射についても定義しなければならない．そこで，任意の射 $f : B \to A$ に対して，$(PF)f : (PF)A \to (PF)B$ を以下のように定義する：任意の $G \in (PF)A$ と任意の $C \in \mathbf{C}$ に対して，

$$((PF)f)(G)(C) = \{(x, g) \in FC \times y(C) | (x, f \circ g) \in GC\}$$

$(PF)f$ が well-defined であることを確かめなければならない．$(PF)f(G)(C)$ が $(PF)B$ の元，つまり，$F \times H_B$ の部分関手であることを示す必要がある．これを示すことは，任意の射 $h : C' \to C$ に対して，以下

の図式が可換になることを示すことと同値である．

$$\begin{tikzcd}
(PF)f(G)(C) \arrow[r, "(PF)f(G)(h)"] \arrow[d, "i"'] & (PF)f(G)(C') \arrow[d, "i'"] \\
FC \times H_B(C) \arrow[r, "Fh\times H_B(h)"'] & FC' \times H_B(C')
\end{tikzcd}$$

ここで，射 $(PF)f(G)(h)$ を $(Fh \times H_B(h)) \restriction (PF)f(G)(C)$（$(Fh \times H_B(h))$ の $(PF)f(G)(C)$ への制限写像）として定義すると，新たに定義したこの写像は well-difined である．つまり，$(Fh \times H_B(h)) \restriction (PF)f(G)(C)(x,g) \in (PF)f(G)(C')$ である．実際に，G が $F \times H_A$ の部分関手であることから，任意の $(x, fg) \in GC$ に対して，$(Fh \times H_A h)(x, f \circ g) \in GC' \iff ((Fh)x, f \circ g \circ h) \in GC'$ である．ゆえに，定義から $(Fh \times H_B(h)) \restriction (PF)f(G)(C)(x,g) \in (PF)f(G)(C')$ となる．このように射 $(PF)f(G)(h)$ を $(Fh \times H_B(h)) \restriction (PF)f(G)(C)$ と定義すれば，上の図式の可換性は明らか．よって，$(PF)f$ が well-defined である．このように定義された PF は実際に関手となる．$(PF)1_A(G)(C) = 1_{(PF)A}(G)(C)$ は，ほとんど自明に成り立つ．また，任意の射 $f : B \to A, g : D \to B$ に対して，$(PF)(f \circ g) = (PF)g \circ (PF)f$ も成立する．実際に以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
((PF)g \circ (PF)f)(G)(C) &= \{(x,h) | (x, g \circ h) \in (PF)f(G)(C)\} \\
&= \{(x,h) | (x, f \circ g \circ h) \in GC\} \\
&= (PF)(f \circ g)(G)(C)
\end{aligned}$$

よって，$PF : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Set}$ は関手である．

射 $\in_F : F \times PF \to \Omega$ を任意の対象 A と $x \in FA$ と $G \in (PF)A$ に対して，以下のように定義する:

$$(\in_F)_A(x, G) = \{f : B \to A | (F(f)x, f) \in GB\}$$

well-definedness を確かめる．つまり，$(\in_F)_A(x,G)$ が A 上の sieve であることと，$\in_F$ が自然変換であることを示す．まず，$(\in_F)_A(x,g)$ が A 上の sieve であることを示す．任意の射 $g : C \to B$ に対して，$f \circ g \in (\in_F)_A(x,G) \iff (F(f \circ g), f \circ g) \in GC$ となることを言えば良い．実際に，G が $F \times H_A$ の部分関手であるので，任意の g に対して，以下の図式は可換である．

$$\begin{tikzcd}
GB \arrow[r, "G(g)"] \arrow[d, "i"'] & GC \arrow[d, "i'"] \\
FB \times H_A(B) \arrow[r, "Fg\times H_A(g)"'] & FC \times H_A(C)
\end{tikzcd}$$

いま，$G(g) = (Fg \times H_A(g)) \restriction GB$ であるので，任意の $f \in (\in_F)_A(x,G) \iff (F(f)x, f) \in GB$ に対して，$G(g)((Ff)x, f) \in GC \iff ((Fg \times H_A(g)) \restriction GB)((Ff)x, f) \in GC \iff (F(f \circ g)x, f \circ g) \in GC$ となる．ゆえに，$(\in_F)_A(x,g)$ は A 上の sieve である．次に，$\in_F$ が自然変換であることを示す．つまり，任意の

射 $h : B \to A$ に対して，以下の図式が可換であることを示せばよい．

$$\begin{tikzcd}
(F \times PF)A \arrow[r, "(F\times PF)h"] \arrow[d, "(\in_F)_A"'] & (F \times PF)B \arrow[d, "(\in_F)_B"] \\
\Omega(A) \arrow[r, "\Omega(h)"'] & \Omega(B)
\end{tikzcd}$$

実際に，任意の元 $(x, G) \in (F \times PF)A$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
(\Omega(h) \circ (\in_F)_A)(x, G) &= \Omega(h)((\in_F)_A(x, G)) \\
&= \Omega(h)(\{f | dom(f) = C, cod(f) = A, ((Ff)x, f) \in GC\}) \\
&= \{g | cod(g) = B, h \circ g \in \{f | ((Ff)x, f) \in GC\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
((\in_F)_B \circ (F \times PF)h)(x, G) &= (\in_F)_B((Fh)x, (PF)f(G)) \\
&= \{g | cod(g) = B, ((Fg)((Fh)x), g) \in (PF)f(G)(C)\}
\end{aligned}$$

あとは上記二つの集合が同等であることを示せばよい．任意の $g \in \{g | cod(g) = B, ((Fg)((Fh)x), g) \in (PF)f(G)(C)\}$ に対して，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
g \in \{g | cod(g) = B, ((Fg)((Fh)x), g) \in (PF)f(G)(C)\} &\iff ((Fg)((Fh)x), g) \in (PF)f(G)(C) \\
&\iff ((F(h \circ g)x), g) \in (PF)f(G)(C) \\
&\iff (F(h \circ g), h \circ g) \in GC \\
&\iff h \circ g \in \{f | ((Ff)x, f) \in GC\} \\
&\iff g \in \{g | cod(g) = B, h \circ g \in \{f | ((Ff)x, f) \in GC\}\}
\end{aligned}$$

したがって，上記二つの集合が同等であるということが示せた．ゆえに，上図は可換であるので，$\in_F$ は自然変換である．よって，well-definedness は確かめられた．

次に，任意の自然変換 $\eta : F \times G \to \Omega$ に対して，P-transpose の $\hat{\eta}$ を任意の対象 A,B と任意の元 $y \in GA$ に対して，以下のように定義する：

$$\hat{\eta}_A(y)(B) = \{(z, f) \in FB \times H_A(B) | \eta_B(z, (Gf)y) = \max_B\}$$

well-definedness を確かめる．つまり，$\hat{\eta}_A(y)(B) \in (PF)B(\hat{\eta}_A(y)(B)$ が $F \times H_B$ の部分関手であることと，$\hat{\eta}$ が自然変換であること，さらに普遍性の条件を満たすことを示す．まず，$\hat{\eta}_A(y)(B)$ が $F \times H_B$ の部分関手であることを示す．つまり，任意の射 $g : C \to B$ に対して，以下の図式が可換となることを示す：

$$\begin{tikzcd}
\hat{\eta}_A(y)(B) \arrow[r, "\hat{\eta}_A(y)(g)"] \arrow[d, "i"'] & \hat{\eta}_A(y)(C) \arrow[d, "i'"] \\
FB \times H_A(B) \arrow[r, "Fg\times H_A(g)"'] & FC \times H_A(C)
\end{tikzcd}$$

ここで，射 $\hat{\eta}_A(y)(g)$ を $Fg \times H_A(g)$ の $\hat{\eta}_A(y)(B)$ への制限として定義する (つまり，$\hat{\eta}_A(y)(g) = Fg \times H_A(g) \restriction \hat{\eta}_A(y)(B)$ と定義する)．新しく定義された射 $\hat{\eta}_A(y)(g)$ の well-definedness を確かめる．そのためには，定義

から $\eta_C((Fg)z, G(f\circ g)y) = \max_C$ であることを確かめるだけで十分である．実際に，

$$\begin{aligned}\eta_C((Fg)z, G(f\circ g)y) &= (\eta_C \circ (Fg)\times G(g))(z, (Gf)y)\\ &= (\Omega(g)\circ \eta_B)(z, (Gf)y)\\ &= \Omega(g)(\max_B)\\ &= \max_C\end{aligned}$$

が成り立つので，射 $\hat{\eta}_A(y)(g)$ の定義は問題がない．そして，このように射 $\hat{\eta}_A(y)(g)$ を定義してあげれば，上記の可換性は明らかである．したがって，$\hat{\eta}_A(y)(B)$ が $F\times H_B$ の部分関手である．次に，射 $\hat{\eta}$ が自然変換であることを示す．つまり，以下の図式が可換であることを示す：

$$\begin{tikzcd}
\hat{\eta}_A(y)(B) \arrow[r, "\hat{\eta}_A(y)(g)"] \arrow[d, "i"'] & \hat{\eta}_A(y)(C) \arrow[d, "i'"] \\
FB\times H_A(B) \arrow[r, "Fg\times H_A(g)"'] & FC\times H_A(C)
\end{tikzcd}$$

任意の対象 C と任意の元 $y\in GA$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}((PF)f\circ\hat{\eta}_A)(y)(C) &= (PF)f(\hat{\eta}_A(y))(C)\\ &= \{(x,g)\in FC\times H_B(C)|(x, f\circ g)\in \hat{\eta}_A(y)(C)\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\hat{\eta}_B\circ Gf)(y)(C) &= \hat{\eta}_B((Gf)y)(C)\\ &= \{(x,g)\in FC\times H_B(C)|\eta_C(x, G(f\circ g)y) = \max_C\}\end{aligned}$$

あとは，上記二つの集合が同等であることを示せばよい．実際に，任意の $(x,g)\in\{(x,g)\in FC\times H_B(C)|(x, f\circ g)\in\hat{\eta}_A(y)(C)\}$ に対して以下が成立する：

$$\begin{aligned}&(x,g)\in\{(x,g)\in FC\times H_B(C)|(x,f\circ g)\in\hat{\eta}_A(y)(C)\}\\ &\qquad\iff (x, f\circ g)\in\hat{\eta}_A(y)(C)\\ &\qquad\iff \eta_C(x, G(f\circ g)y) = \max_C\\ &\qquad\iff (x,g)\in\{(x,g)\in FC\times H_B(C)|\eta_C(x, G(f\circ g)y) = \max_C\}\end{aligned}$$

したがって，上記二つの集合が同等であることが示された．ゆえ，上図が可換であることが分かったので，$\hat{\eta}$ が自然変換であると結論づけることができる．よって，well-definedness が示された．

次に，任意の自然変換 $\eta : F\times G\to\Omega$ に対して，上記のように定義した自然変換 $\hat{\eta}$ が以下の図式を可換にする唯一の射であることを示す．(P-transpose の普遍性の条件)

$$\begin{tikzcd}
F\times G \arrow[d, "1_F\times\hat{\eta}"'] \arrow[dr, "\eta"] & \\
F\times PF \arrow[r, "\in_F"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

まず，上図が可換であることを示す．上図が可換であることは，任意の対象 A に対して以下の図式が可換で

あることと同値である．

$$\begin{tikzcd}
(F \times G)_A \arrow[d, "1_{FA} \times \hat{\eta}_A"'] \arrow[dr, "\eta_A"] & \\
(F \times PF)_A \arrow[r, "(\in_F)_A"'] & \Omega(A)
\end{tikzcd}$$

任意の元 $x \in FA$ と任意の元 $y \in GA$ に対して以下が成立する：

$$\begin{aligned}(\in_F)_A \circ (1_{FA} \times \hat{\eta}_A))(x, y) &= (\in_F)_A(x, \hat{\eta}_A(y)) \\ &= \{f : B \to A | ((Ff)x, f) \in \hat{\eta}_A(y)\}\end{aligned}$$

$$\eta_A(x, y) = A \text{ 上の } sieve$$

あとは，上記二つの集合が同等であることを示せばよい．実際に，

$$\begin{aligned}f \in \{f : B \to A | ((Ff)x, f) \in \hat{\eta}_A(y)\} &\iff ((Ff)x, f) \in \hat{\eta}_A(y)(B) \\ &\iff \eta_B((Ff)x, (Gf)y) = \max{}_B \\ &\iff 1_B \in (\eta_B \circ (F \times G)f)(x, y) \\ &\iff 1_B \in (\Omega(f) \circ \eta_A)(x, y)(\eta \text{が自然変換であることによる}) \\ &\iff f \circ 1_B \in \eta_A(x, y) \\ &\iff f \in \eta_A(x, y)\end{aligned}$$

したがって，上記二つの集合が同等であることが示された．ゆえ，上図が可換であることが分かった．次に，普遍性の条件を満たすことを示す．つまり，任意の上図を可換にする自然変換 $\sigma : G \to PF$ に対して，以下を示せばよい：

$$\sigma = (\in_F \circ (1_F \times \sigma))^\wedge$$

実際に，任意の対象 A，B と任意の元 $y \in GA$，$z \in FB$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}(z, f) \in ((\in_F)_A \circ (1_F \times \sigma)A)^\wedge(y)(B) &\iff ((\in_F)_B \circ (1_F \times \sigma)B)(z, (Gf)y) = \max{}_B \\ &\iff (\in_F)_B(1_F(B)(z), \sigma_B((Gf)y)) = \max{}_B \\ &\iff (\in_F)_B(z, \sigma_B((Gf)y)) = \max{}_B \\ &\iff 1_B \in (\in_F)_B(z, \sigma_B((Gf)y)) \\ &\iff ((F1_B)z, 1_B) \in \sigma_B((Gf)y) \\ &\iff (z, 1_B) \in ((PF)f \circ \sigma_A)(y)(B)(\sigma \text{が自然変換であることによる}) \\ &\iff (z, f \circ 1_B) \in \sigma_A(y)(B) \\ &\iff (z, f) \in \sigma_A(y)(B)\end{aligned}$$

したがって，$\sigma = (\in_F \circ (1_F \times \sigma))^\wedge$ が成り立つことが確認できた．ゆえに，普遍性の条件を満たす．

以上より，射 $\in_F$ は対象 PF の評価射であると結論づけることができる．したがって，PF は F に対するパワー対象である．

(冪対象の存在):

冪対象の存在は，いくつかの方法を使って示すことができる．ここでは，2 通りの方法 ((1) 直接構成する方法，(2) 圏論で成り立つ事実を様々使って示す方法) を提示することにする．

(1 つ目の方法): もし冪対象 Q^P（P, Q は任意の前層）が存在したとすると，任意の前層 R に対して，同型対

応 $\mathrm{Hom}(R \times P, Q) \cong \mathrm{Hom}(R, Q^P)$ が成立する．R がとくに米田埋め込み関手の場合を考えてみると，上記の同型は，任意の対象 C に対して，米田の補題により以下のように書き直せる．

$$Q^P(C) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{y}C, Q^P) \cong \mathrm{Hom}(\mathbf{y}C \times P, Q)$$

この観察により，前層圏における冪対象 Q^P は，任意の対象 C に対して，以下のように定義すると良さそうであるということがわかる．

$$Q^P(C) = \mathrm{Hom}(\mathbf{y}C \times P, Q)$$

これは，明らかに関手 $Q^P : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{Sets}$ を定義するので，前層の対象としては well-defined である．以下，このように定義した関手 Q^P が実際に冪対象となることを示していく．まず，射 $e : Q^P \times P \to Q$ を以下のように点ごとに定義する：

$$e_C : (\theta, y) \mapsto \theta_C(1_{C,y})$$

この射が well-defined であることを確かめる．つまり，$\theta_C(1_{C,y}) \in Q(C)$ であり，e が自然変換となることを確かめる．実際に，$\theta \in Q^P(C)$，$y \in P(C)$ であり，$\theta : \mathrm{Hom}(-, C) \times P \to Q$ であるので，$1_C \in \mathrm{Hom}(C, C)$ をとれば明らかに，$\theta_C(1_C, y) \in Q(C)$ である．また，任意の射 $f : C' \to C$ に対して，以下の図式をを考える：

$$\begin{tikzcd}
(Q^P \times P)(C) \arrow[r, "(Q^P \times P)(f)"] \arrow[d, "e_C"'] & (Q^P \times P)(C') \arrow[d, "e_{C'}"] \\
Q(C) \arrow[r, "Q(f)"'] & Q(C')
\end{tikzcd}$$

e が自然変換であることを示すには，上の図式が可換であることを示せばよい．実際に，任意の元 $(\theta, y) \in Q^P(C) \times P(C) = (Q^P \times P)(C)$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
(e_{C'} \circ (Q^P \times P)f)(\theta, y) &= e_{C'}((Q^P f)\theta, (Pf)y) \\
&= (Q^P f)(\theta_{C'}(1_{C'}, (Pf)y)) \\
&= \mathrm{Hom}(yf \times 1_P, Q)(\theta_{C'}(1_{C'}, (Pf)y)) \\
&= (\theta_{C'} \circ (yf \times 1_P)_{C'})(1_{C'}, (Pf)y) \\
&= \theta_{C'}((yf(C'))(1_{C'}), 1_{PC'}((Pf)y)) \\
&= \theta_{C'}(f, (Pf)y) \\
&= (\theta_{C'} \circ (\mathrm{Hom}(f, C) \times Pf))(1_C, y) \\
&= (Qf \circ \theta_C)(1_C, y) \ (\theta\text{が自然変換による}) \\
&= Qf(\theta_C)(1_C, y)) \\
&= (Qf \circ (Q^P \times P)f)(\theta, y)
\end{aligned}$$

よって，上図は可換であるので，e は自然変換である．

次に，上で定義された射 e が Q^P に対する評価射であることを示す．つまり，任意の自然変換 $\phi : R \times P \to Q$

に対して，以下の図式を可換にする唯一の射 $\phi' : R \to Q^P$ が存在することを示す：

$$\begin{tikzcd}
R \times P \arrow[d, dashed, "\phi' \times 1"'] \arrow[dr, "\phi"] & \\
Q^P \times P \arrow[r, "e"'] & Q
\end{tikzcd} \tag{4.11}$$

そのために，まず，任意の対象 C と任意の元 $u \in RC$ に対して，元 $\phi'_C(u) \in Q^P(C)$ を定義しなければならない．なお，$\phi'_C(u) : \mathrm{Hom}(-, C) \times P \to Q$ は自然変換でなければならない．任意の射 $f : D \to C$ と任意の $x \in P(D)$ に対して，$\phi'_C(u)$ のコンポーネント $(\phi'_C(u))_D$ を以下のように定義する：

$$(\phi'_C(u))_D(f, x) = \phi_D((Rf)u, x)$$

このように定義された $\phi'_C(u)$ の well-definedness を確かめる．つまり，$\phi'_C(u)$ が自然変換であることを確かめる．任意の射 $g : D' \to D$ に対して，以下の図式が可換であることを示せばよい：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(D, C) \times P(D) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(g,C)\times P(g)"] \arrow[d, "(\phi'_C(u))_D"'] & \mathrm{Hom}(D', C) \times P(D') \arrow[d, "(\phi'_C(u))_{D'}"] \\
Q(D) \arrow[r, "Q(g)"'] & Q(D')
\end{tikzcd}$$

任意の元 $(f, x) \in \mathrm{Hom}(D, C) \times P(D)$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
((\phi'_C(u))_{D'} \circ \mathrm{Hom}(g, C) \times P(g))(f, x) &= (\phi'_C(u))_{D'}(f \circ g, (Pg)x) \\
&= \phi_{D'}((R(f \circ g))u, (Pg)x) \\
&= \phi_{D'}(R(f \circ g) \times Pg)(u, x) \\
&= \phi_{D'}((R(g) \circ R(f)) \times Pg)(u, x) \\
&= \phi_{D'}((R(g) \times Pg) \circ ((Rf) \times 1_{P(D)}))(u, x) \\
&= (\phi_{D'} \circ (R(g) \times Pg))((Rf)u, x) \\
&= (Q(g) \circ \phi_D)((Rf)u, x) \ (\phi\text{が自然変換であることによる}) \\
&= Q(g)(\phi_D((Rf)u, x)) \\
&= Q(g)((\phi'_C(u))_D(f, x)) \\
&= (Q(g) \circ (\phi'_C(u))_D)(f, x)
\end{aligned}$$

よって，上の図式は可換であるので，$\phi'_C(u)$ は自然変換である．次に，ϕ' が自然変換であることを示す．つまり，任意の射 $f : C' \to C$ に対して，以下の図式が可換になることを示せばよい：

$$\begin{tikzcd}
R(C) \arrow[r, "R(f)"] \arrow[d, "\phi_C"'] & R(C') \arrow[d, "\phi_{C'}"] \\
Q^P(C) \arrow[r, "Q^P(f)"'] & Q^P(C')
\end{tikzcd}$$

任意の元 $u \in R(C)$ と任意の元 $D \in \mathbf{C}$ と任意の元 $(g, x) \in \mathrm{Hom}(D, C') \times P(D)$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}((Q^P(f) \circ \phi'_C)(u))_D(g, x) &= (\mathrm{Hom}(yf \times 1_P, Q) \circ (\phi'_C)(u))_D(g, x) \\ &= ((\phi'_C)(u) \circ (yf \times 1_P))_D(g, x) \\ &= ((\phi'_C)(u))_D \circ (yf(D) \times 1_{PD}))(g, x) \\ &= (\phi'_C)(u))_D \circ (f \circ g, x) \\ &= \phi_D(R(f \circ g)u, x) \\ &= \phi_D((R(g)(R(f)u), x) \\ &= (\phi'_{C'}(R(f)u))_D(g, x) \\ &= ((\phi'_{C'} \circ R(f))(u))_D(g, x)\end{aligned}$$

したがって，上図は可換であるので，ϕ' は自然変換である．次に，自然変換 ϕ' が図式 (4.11) を可換にする唯一の射であることを示す．(4.11) を可換にする自然変換 θ が ϕ' の他に存在すると仮定する．このとき，$\phi' = \theta$ を示す．まず，図式の可換性より，$e(\phi' \times 1) = e(\theta \times 1)$ が成立する．この式に関して，任意の対象 C と任意の元 $u \in R(C)$ と任意の元 $x \in P(C)$ について，以下が成立する：

$$\begin{aligned}e_C(\phi' \times 1)_C(u, x) = e_C(\theta \times 1)_C(u, x) &\iff e_C(\phi'_C \times 1_C)(u, x) = e_C(\theta_C \times 1_C)(u, x) \\ &\iff e_C(\phi'_C(u), x) = e_C(\theta_C(u), x) \\ &\iff (\phi'_C(u))_C(1_C, x) = (\theta_C(u))_C(1_C, x)\end{aligned}$$

よって，$\phi' = \theta$ となることが分かる．最後に，(4.11) の可換性を確かめる．射 e の定義によって，任意の元 $u \in R(C)$ と任意の元 $y \in P(C)$ について，以下が成立する：

$$e_C(\phi'_C(u), y) = (\phi'_C(u))_C(1_C, y) = \phi_C(u, y) \ (f = 1_C \text{の場合を考える})$$

よって，図式 (4.11) は可換である．したがって，射 e は Q^P の評価射であると結論づけることができる．ゆえに，Q^P は前層圏における冪対象である．

(2 つ目の方法):(2) の証明を理解するためには，前節で述べられている諸定理が既知である必要があることに注意する．

まず，任意の前層 $P \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ に対して，関手 $(- \times P)$ が余極限を保存することを示す．関手圏における積と余極限は点ごとに計算されるので，任意の集合 $S \in \mathbf{S}$ について関手 $(- \times S) : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$ が余極限を保存することを言えば十分である．$\mathbf{Set}$ はカルテシアン閉圏であるので，関手 $(- \times S)$ は右随伴 $(-)^S$ を持つ．右随伴を持つならば余極限を保存するという事実から，関手 $(- \times S)$ は余極限を保存すると分かる．よって，関手 $(- \times P)$ は余極限を保存する．

次に，任意の前層 $Q \in \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ と任意の対象 $A \in \mathbf{C}$ について，前層 Q^P を以下のように点ごとに定義する：

$$Q^P(A) = \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(H_A \times P, Q)$$

この定義は，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(\mathbf{y} \times P, Q)$ が前層であるので，well-defined である．

次に，$(- \times P) \dashv (-)^P$ を示す．これを示すことが出来れば，上のように定義した前層 Q^P は冪対象であるということを示せたことになり，証明が完了する．実際に，任意の前層 X, Q を取り，射影関手を $R : \mathbf{E}(X) \to \mathbf{C}$

として $H_R = \mathbf{y} \circ R$ と書くとする．このとき以下の同型が，X と Q について自然に成り立つ：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(X, Q^P) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(\varinjlim_{\mathbf{E}(X)} H_R, Q^P) && (4.12)\\
&\cong \varprojlim_{\mathbf{E}(X)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(H_R, Q^P) && (4.13)\\
&\cong \varprojlim_{\mathbf{E}(X)} Q^P(R) && (4.14)\\
&\cong \varprojlim_{\mathbf{E}(X)} \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(H_R \times P, Q) && (4.15)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(\varinjlim_{\mathbf{E}(X)} (H_R \times P, Q) && (4.16)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}((\varinjlim_{\mathbf{E}(X)} H_R) \times P, Q) && (4.17)\\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}}(X \times P, Q) && (4.18)
\end{aligned}$$

(4.12)(4.18) は定理 3.3.31(稠密性定理)，(4.13)(4.16) は定理 3.3.26(表現関手が極限を保存すること)，(4.14) は 3.2.18(米田の補題)，(4.15) は Q^P の定義，(4.17) は関手 $(- \times P)$ が余極限を保存することからそれぞれ従う．よって，$(- \times P) \dashv (-)^P$ となる．(自然性が成り立つことの証明は省略した．) □

4.3 余極限の構成

トポスの具体例として，集合の圏，前層圏があることを見た．では，これらトポスには上で見てきた他にどのような性質が備わっているのだろうか？じつは，トポスは有限余完備であるということも言うことができる．このことを示すには少々準備が必要である．

命題 4.3.1

トポスにおける任意の対象 B に対して，シングルトン射 $\{\cdot\}_B$ はモノ射となる．

Proof. 任意の射 $b, b' : X \to B$ に対して，$\{\cdot\}_B b = \{\cdot\}_B b'$ が成り立つと仮定する．このとき $b = b'$ となることを示せばよい．まず，$\{\cdot\}_B$ の定義から $\delta_B(1 \times b) = \delta_B(1 \times b')$ を得る．ここで以下の可換図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\langle b,1\rangle"'] & B \arrow[r, "!_B"] \arrow[d, "\Delta_B"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
B \times X \arrow[r, "1\times b"'] & B \times B \arrow[r, "\delta_B"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

右側の四角形は定義からプルバックである．また，左側の四角形もプルバックとなる．実際に，プルバックとなることを示す．まず，四角形の可換性は明らかである．次に，$\Delta_B \circ f = (1 \times b) \circ \langle f, g\rangle$ となる射 $f : Y \to X$,$g : Y \to B \times X$ に対して，Y から X への射が唯一に存在することを示す．まず，$\Delta_B \circ f = (1 \times b) \circ \langle f, g\rangle \iff \langle f, f\rangle = (1 \times b)g$ より，$g = \langle i, j\rangle(i : Y \to B$ かつ $j : Y \to X)$ と書ける．よって，$\langle f, f\rangle = \langle i, bj\rangle$ より，$i = f, bj = f$ を得る．じつは，この $j : Y \to X$ が条件を満たす射である．実際に $bj = f$ であり，$\langle b, 1\rangle \circ j = \langle bj, j\rangle = \langle f, j\rangle = g$ となるからである．また，一意性は明らかである．よって，プルバックとなる．

したがって，補題 3.3.11(2-プルバック補題) により，全体の四角形もプルバックである．b を b' に変えたものについても同様に全体の四角形はプルバックとなる．よって，$\langle b,1\rangle$ と $\langle b',1\rangle$ はともに $B\times X$ の部分対象である．ゆえに，$\langle b,1\rangle=\langle b'1\rangle h$ となる同型射 $h:X\to X$ が存在する．よって，$\langle b,1\rangle=\langle b',1\rangle \iff b=b'h$ かつ $1=h$ を得る．したがって，$b=b'$ となる． $\square$

命題 4.3.2

圏 $\mathscr{E}$ をトポスとし，$\mathscr{E}$ における射 $f:A\to B$ をモノ射とする．このとき，f は特性射 χ_f と true_B のイコライザとなる．

Proof. 以下のプルバック図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "!_A"] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
B \arrow[r, "\chi_f"'] \arrow[ur, "!_B"] & \omega
\end{tikzcd}$$

いま，$!_A, !_B$ は 1 へ向かう一意的な射であるから，$!_A=!_B\circ f$ となる．よって，プルバックの可換性から $\chi_f\circ f=\mathrm{true}\circ !_A \iff \chi_f\circ f=\mathrm{true}\circ !_B\circ f$ を得る．さらに，プルバックの普遍性から $\chi_f\circ h=\mathrm{true}\circ !_C=\mathrm{true}\circ !_C\circ h$ となる任意の (C,h) に対して，$f\circ k=h$ となるような唯一の射 $k:C\to A$ が存在するとわかる．これは f が χ_f と true_B のイコライザであることに他ならない． $\square$

命題 4.3.3

任意のトポス $\mathscr{E}$ において，モノ射かつエピ射であるような射は同型射となる．

Proof. $f:A\to B$ をモノかつエピ射であるとする．f がモノ射であることにより，命題 4.3.2 から，f は特性射 χ_f と true_B のイコライザとなる．また，f はエピ射でもあるので，一般的に成り立つ事実「イコライザでかつエピ射なら同型射である」より f は同型射である．
(一般的に成り立つ事実の証明):f を g,h のイコライザであり，かつエピ射であるとする．f イコライザとエピ射であることから $g=h$ が成り立つ．よって，以下の可換図式を考えることができる：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \\
B \arrow[u, dashed, "u"] \arrow[ur, "1_B"'] & &
\end{tikzcd}$$

よって，$f\circ u=1_B$ となり，f はスプリット・エピである．また命題 3.3.8 より，任意のイコライザはモノ射でもあるので，命題 3.2.8 より f は同型射となる． $\square$

定義 4.3.4 順像 (direct image)

トポス $\mathscr{E}$ における任意のモノ射 $k:B'\to B$ において，k の下での順像 $\exists_k:PB'\to PB$ とは，以下の図式

における射 $e_k : B \times PB' \to \Omega$ の P-transpose として定義される射のことである：

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "!"] \arrow[d, "u_{B'}"'] & 1 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\mathrm{true}"] & 1 \arrow[dd, "\mathrm{true}"] \\
B' \times PB' \arrow[r, "\in_{B'}"'] \arrow[d, "k\times 1"'] & \Omega & \\
B \times PB' \arrow[rr, dashed, "e_k"'] & & \Omega
\end{tikzcd}$$

なお，$(U, u_{B'})$ は左上の四角形がプルバックになるような対象と射である．また，全体の四角形はプルバックであり，$e_k = \chi((k \times 1)u_{B'})$ となる．

定理 4.3.5 The Beck-Chevalley Condition($\exists$ の場合)

$\mathscr{E}$ をトポスとする．$\mathscr{E}$ において，m が任意の射 g を伴うモノ射 k のプルバックであるとすると，つまり以下の左の四角形がプルバックであるとすると，右の四角形は可換となる：

$$\begin{tikzcd}
C' \arrow[r, "g'"] \arrow[d, "m"'] & B' \arrow[d, "k"] \\
C \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
PB' \arrow[r, "Pg'"] \arrow[d, "\exists_k"'] & PC' \arrow[d, "\exists_m"] \\
PB \arrow[r, "Pg"'] & PC
\end{tikzcd}$$

Proof. $Pg \circ \exists_k = \exists_m \circ Pg'$ が成立することを示せばよいが，$Pg \circ \exists_k = \exists_m \circ Pg'$ が成立することは $e_k(g \times 1) = e_m(1 \times Pg')$ が成立すること同値であるので，$e_k(g \times 1) = e_m(1 \times Pg')$ が成立することを示すだけで十分である．このことは，$\exists_k, \exists_m$ は e_k, e_m の P-transpose として定義されていることと，P-transpose の普遍性による．また，以下の二つの図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
? \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & U_{B'} \arrow[r] \arrow[d, "u_{B'}"] & 1 \arrow[dd, "\mathrm{true}"] \\
C' \times PB' \arrow[r, "g'\times 1"'] \arrow[d, "m\times 1"'] & B' \times PB' \arrow[d, "k\times 1"] & \\
C \times PB' \arrow[r, "g\times 1"'] & B \times PB' \arrow[r, "e_k"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
? \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & U_{C'} \arrow[r] \arrow[d, "u_{C'}"] & 1 \arrow[dd, "\mathrm{true}"] \\
C' \times PB' \arrow[r, "1\times Pg'"'] \arrow[d, "m\times 1"'] & C' \times PC' \arrow[d, "m\times 1"] & \\
C \times PB' \arrow[r, "1\times Pg'"'] & B \times PB' \arrow[r, "e_m"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\tag{4.19}$$

まず，左の四角形の左下の四角形はプルバックであると仮定された四角形に $- \times PB'$ を適用させたものなので，プルバックである．また，右の四角形の左下の四角形もプルバックであると示すことができる．また，左右の四角形の右側の四角形は定義からプルバックである．よって，補題 3.3.12(3-プルバック補題) より，全体の四角形がプルバックなので，左右の左上の四角形もプルバックとなる．ゆえ，以下の二つの全体の四角形

もプルバックとなることがわかる:

$$
\begin{tikzcd}
? \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & U_{B'} \arrow[r] \arrow[d, "u_{B'}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C' \times PB' \arrow[r, "g' \times 1"'] & B' \times PB' \arrow[r, "\in_{B'}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
? \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & U_{C'} \arrow[r] \arrow[d, "u_{C'}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C' \times PB' \arrow[r, "1 \times Pg'"'] & C' \times PC' \arrow[r, "\in_{C'}"'] & \Omega
\end{tikzcd}
\tag{4.20}
$$

また，射 $\in_B$ は B について対角自然性を持つので[*3]，$\in_{B'} \circ (g' \times 1) = \in_{C'} \circ (1 \times Pg')$ が成立する．つまり，(4.19) のプルバック図式の下の射が同じである．ゆえに，部分対象分類子の普遍性により，$i = j$ を得る．ゆえに $(m \times 1) \circ i = (m \circ 1) \circ j$ となる．したがって (4.20) のプルバック図式の部分対象が同じであるということがわかる．再び部分対象分類子の普遍性 (特性射の一意性) から，$e_k(g \times 1) = e_m(1 \times Pg')$ を得る． □

定理 4.3.6

$\mathscr{E}$ をトポスとする．$\mathscr{E}$ における射 $k : B' \to B$ がモノ射であるならば，以下の図式における合成射 $P_k \circ \exists_k$ は恒等射となる．

$$PB' \xrightarrow{\exists_k} PB \xrightarrow{P_k} PB'$$

Proof. 任意のモノ射 k に対して，以下の図式はプルバックである：

$$
\begin{tikzcd}
B' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "1"'] & B' \arrow[d, "k"] \\
B' \arrow[r, "k"'] & B
\end{tikzcd}
$$

さらに，$\exists_1 = 1$,$P1 = 1$ であるので，The Beck-Chevally condition より，以下の可換図式が得られる：

$$
\begin{tikzcd}
PB' \arrow[r, "1"] \arrow[d, "\exists_k"'] & PB' \arrow[d, "1"] \\
PB \arrow[r, "Pk"'] & PB'
\end{tikzcd}
$$

よって，$Pk \circ \exists_k = 1$ を得る． □

命題 4.3.7

関手 $P : \mathscr{E}^{op} \to \mathscr{E}$ は関手 $P^{op} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}^{op}$ という左随伴を持つ．

Proof. まず，より一般的に任意の関手 $T : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$ に対して，関手 $T^{op} : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{D^{op}}$ という，対象と射について同じ関数となる関手が存在することが言える．よって，関手 $P : \mathscr{E}^{op} \to \mathscr{E}$ に対して，関手 $P^{op} : \mathscr{E} \to \mathscr{E}^{op}$ という関手は存在する．これは，関数としては同じ関手だがドメイン，コドメインの圏が異な

[*3] [15] [14] を参照していただきたい．

るということに注意する．この二つの関手の間に成り立つ随伴性は，任意の積 $A \times B$ に対して，標準的な同型射 $\gamma : A \times B \cong B \times A$ が存在するという事実から成り立つ．実際に，以下の同型対応が自然に成り立つ：

$$\mathscr{E}(A, PB) \cong \mathscr{E}(A \times B, \Omega) \cong \mathscr{E}(B \times A, \Omega) \cong \mathscr{E}(B, PA) \cong \mathscr{E}^{op}(P^{op}A, B)$$

よって，$P^{op} \dashv P$ が成立する． $\square$

定理 4.3.8 パワー関手はモナディック関手である

関手 $P : \mathscr{E}^{op} \to \mathscr{E}$ はモナディック関手である．

Proof. 定理 3.4.12(モナディック関手の特徴付け) より，P が左随伴を持つことと，同型射を反射することと，スプリット・コイコライザに関する条件を満たしていること示せばよい．左随伴を持つことは，命題 4.3.7 により既に示しているののので，残り二つを示すだけで十分である．まず，同型射を反射する，ということであるが，命題 4.3.3 により，トポスにおいてモノ射かつエピ射である射は同型射であるので，モノ射とエピ射を反射するということを示すだけで十分である．また，命題 3.2.12 より，P が忠実であることを示すだけで十分である．まず，トポス $\mathscr{E}$ における任意の射 $h : B \to A$ に対して，モノ射 $\langle 1, h\rangle : B \to B \times A$ を構成する．これがモノ射となることは容易に示すことができる．実際に，任意の射 $f, g : C \to B$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned} \langle 1, h\rangle \circ f = \langle 1, h\rangle \circ g &\Longleftrightarrow \langle f, hf\rangle = \langle g, hg\rangle \\ &\Longrightarrow f = g \end{aligned}$$

よって，$\langle 1, h\rangle$ はモノ射となる．次に，このモノ射の特性射 $\chi(\langle 1, h\rangle)$ とその特性射の P-transpose$\widehat{\chi(\langle 1, h\rangle)}$ を考える．つまり，左の図式がプルバックであり，左の図式が可換になるような唯一の射を考える：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "!_B"] \arrow[d, "\langle 1,h\rangle"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ B \times A \arrow[r, "\chi(\langle 1,h\rangle)"'] & \Omega \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[d, "1\times\widehat{\chi(\langle 1,h\rangle)}"'] \arrow[dr, "\chi(\langle 1,h\rangle)"] & \\ B \times A \arrow[r, "\in_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

このとき，以下の全体の四角形はプルバックとなる．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\langle 1,h\rangle"'] & A \arrow[r, "!_A"] \arrow[d, "\Delta_A"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ B \times A \arrow[r, "h\times 1"'] & A \times A \arrow[r, "\delta_A"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

実際に，左側の四角形はプルバックであることが容易に示せて，右側の四角形は定義からプルバックであるので補題 3.3.11(2-プルバック補題) から全体の四角形もプルバックである．よって，特性射の一意性と，パワー対象の普遍性から $\delta_A(h\times 1) = \chi(\langle 1, h\rangle) = \in_B (1\times\widehat{\chi(\langle 1, h\rangle)})$ という等式を得る．また，$\delta_A(h\times 1) = \in_B (1\times\widehat{\chi(\langle 1, h\rangle)})$ の両辺をそれぞれ P-transpose させると，$Ph \circ \{\cdot\}_A = \widehat{\chi(\langle 1, h\rangle)}$ という等式を得る．よって，任意の射

$h,k : B \to A$ に対して,$Ph = Pk$ であるとすると，$h = k$ となる．実際に，

$$
\begin{aligned}
Ph = Pk \Longrightarrow\ & Ph \circ \{\,\cdot\,\}_A = Pk \circ \{\,\cdot\,\}_A \\
\Longleftrightarrow\ & \overline{\chi(\langle 1,h\rangle)} = \overline{\chi(\langle 1,k\rangle)} \\
\Longrightarrow\ & \chi(\langle 1,h\rangle) = \chi(\langle 1,k\rangle) \\
\Longrightarrow\ & \langle 1,h\rangle = \langle 1,k\rangle \\
\Longleftrightarrow\ & h = k
\end{aligned}
$$

よって，関手 P は忠実である．ゆえに，P は同型射を反射する．

最後に，スプリット・コイコライザの条件を満たすことを示す．つまり，$\mathscr{E}^{op}$ において，二つの射 Ph, Pk がスプリット・コイコライザを持つような，$\mathscr{E}$ における，二つの射 $h,k : B \to A$ と，$dh = dk = 1_B$ となる，射 $d : A \to B$ が存在するとき，$\mathscr{E}^{op}$ において二つの射 h,k のコイコライザが存在し，それが P によって保たれることを示せば良い．(ここで，P が同型射を反射することを用いていることに注意する．) まず，トポスには任意のイコライザが存在するので，二つの射 h,k のイコライザ (C,g) が存在する．よって，双対性の原理より，$\mathscr{E}^{op}$ において h,k のコイコライザは存在する．次に，その $\mathscr{E}^{op}$ における h,k のコイコライザが P によって保存されることを示す．つまり，$\mathscr{E}$ の射 $Ph, Pk : PA \to PB$ に対して，(PC, Pg) が $\mathscr{E}$ におけるコイコライザとなることを示せば良い．いま，$\mathscr{E}$ における以下の可換図式はプルバックである：

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "g"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "h"] \\
B \arrow[r, "k"'] & A
\end{tikzcd}
$$

なぜなら，任意の $hf = kf'$ となる $f, f' : D \to B$ に対して，$dhf = dkf' \iff f = f'$ となり，g は h,k のイコライザなので，$f = gs = f'$ となる射 $s : D \to C$ が唯一に存在するからである．また，命題 3.3.8 より，イコライザがモノ射であることから，g はモノ射である．また，$dh = dk = 1_B$ であるので，h,k もモノ射である．よって，定理 4.3.6(The-Beck-Chevalley Condition) より，以下の 3 つの可換図式を得る：

$$
\begin{tikzcd}
PC \arrow[r, "\exists_g"] \arrow[dr, "1_{PC}"'] & PB \arrow[d, "Pg"] \\
 & PC
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
PA \arrow[r, "\exists_h"] \arrow[dr, "1_{PA}"'] & PB \arrow[d, "Ph"] \\
 & PA
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
PB \arrow[r, "Pg"] \arrow[d, "\exists_h"'] & PC \arrow[d, "\exists_g"] \\
PA \arrow[r, "Pk"'] & PB
\end{tikzcd}
$$

よって，任意の $t \circ Ph = t \circ Pk$ となる，射 $t : PB \to X$ に対して，$u \circ Pg = t$ となる射 $u : PC \to X$ が唯一に存在する，ということがわかる．実際に，$u = t \circ \exists_g$ とおくと以下の等式が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
u \circ Pg &= t \circ \exists_g \circ Pg \\
&= t \circ Pk \circ \exists_h (\text{右の四角形の可換性}) \\
&= t \circ Ph \circ \exists_h (\text{仮定}) \\
&= t \circ 1_{PA} (\text{真ん中の三角形の可換性}) \\
&= t
\end{aligned}
$$

よって，存在は示せた．次に一意性を示す．$u \circ Pg = t$，$u' \circ Pg = t$ となる射 $u, u' : PC \to X$ が存在したとする．以下が成立する：

$$\begin{aligned} u \circ Pg = u' \circ Pg &\Longrightarrow u \circ Pg \circ \exists_g = u' \circ Pg \circ \exists_g \\ &\Longleftrightarrow u \circ 1_{PC} = u' \circ 1_{PC} (\text{左の三角形の可換性}) \\ &\Longleftrightarrow u = u' \end{aligned}$$

よって，一意性も示せた．したがって，(PC, Pg) は Ph, Pk のコイコライザである．それゆえ，P はコイコライザを保存するので，定理 3.4.12(モナディック関手の特徴づけ) により，P はモナディック関手であるとわかる． □

定理 4.3.9 トポスは任意の有限余極限を持つ

$\mathscr{E}$ を任意のトポスとする．このとき，$\mathscr{E}$ は任意の有限余極限を持つ．

Proof. $\mathbf{T} = PP^{op}$ をパワー関手によって定義されたトポス $\mathscr{E}$ におけるモナドとし，$\mathscr{E}^{\mathbf{T}}$ をその $\mathbf{T}$ 代数とする．忘却関手 $\mathscr{E}^{po} \to \mathscr{E}$ は極限を創出する．また，$\mathbf{D}$ を任意の有限圏とすると，$\mathscr{E}$ は関手 $J : \mathbf{D^{op}} \to \mathscr{E}$ のすべての極限を持つ．それゆえ，$\mathscr{E}^{\mathbf{T}}$ は関手 J のすべての極限を持つとわかる．しかし，P は定理 4.3.8 よりモナディック関手であるので，$\mathscr{E}^{op}$ は $\mathscr{E}^{\mathbf{T}}$ と圏同値であり，この同値はすべての極限を保存する．それゆえに，$\mathscr{E}^{op}$ は関手 J のすべての極限を持つ．よって，双対性の原理から任意のトポス $\mathscr{E}$ は関手 J^{op} のすべての余極限を持つ． □

よって，トポスは有限余極限も持つことがわかった．

4.4 基本定理

続いて，「トポスの基本定理」という定理を証明する．

定義 4.4.1 射の像

モノ射 m が射 f の像であるとは，$f = hg$ となるような任意のモノ射 h に対して，$f = me$ となる射 e が存在し，かつ $hz = m$ となる射 $z : cod(e) \to cod(g)$ ことをいう．つまり，f の像 m は $dom(f)$ の最小の部分対象ということである．

$$\begin{tikzcd}
 & & \cdot \arrow[dll, "h"] \\
dom(f) \arrow[urr, "g"] \arrow[r, "e"] \arrow[d, "f"'] & \cdot \arrow[ur] \arrow[dl, "m"] & \\
cod(f) & &
\end{tikzcd}$$

定理 4.4.2 エピ − モノ分解定理$_1$

任意のトポス $\mathscr{E}$ における任意の射 f は，$f = me$ となる像 m を持ち，e はエピ射となる．つまり，任意の射 f はエピ射とモノ射に分解できる．

Proof. $\mathscr{E}$ における任意の射 $f : A \to B$ が与えられたとする．以下の図式を少しずつ構成していく：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "1_A"'] & M \arrow[r, dashed, "m"] & B \arrow[r, shift left, "x"] \arrow[r, shift right, "y"'] \arrow[d, "1_B"'] & \cdot \arrow[d, dashed, "u"] \\
A \arrow[r, "g"'] & N \arrow[r, "h"'] & B \arrow[r, dashed, shift left, "s"] \arrow[r, dashed, shift right, "t"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

まず，定理 4.3.9 より任意のトポスは任意の有限余極限を持つので，f に対する以下の図式で表現されるプッシュアウトを考えることができる：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "y"] \\
B \arrow[r, "x"'] & \cdot
\end{tikzcd}
$$

さらに，射と対象の組 $(M, m : M \to B)$ を上図における x, y のイコライザとする．すると m はモノ射であり，$xm = ym$ を満たす．よって，イコライザの定義から，$f = me$ を満たす射 $e : A \to M$ が一意的に存在するとわかる．いま，他の $f = hg$ となる h を取ってくると，命題 4.3.2 より，h はとある二つの射 $s, t : B \to \cdot$ のイコライザとなることがわかる．このとき，$sh = th$ が成り立つ．それゆえ，$sf = tf$ となる．ゆえ，プッシュアウトの定義から，$s = ux$ かつ $t = uy$ を満たす射 $u : \cdot \to \cdot$ が一意的に存在することがわかる．よって，$sm = uxm = uym = tm$ が成立する．したがって，h がイコライザであることから $hz = m$ となるような射 $z : M \to N$ が存在するとわかる．よって，m が f の像であることが示された．

次に，$e : A \to M$ がエピ射となることを示す．まず，f の像 m が同型射となるとき，f がエピ射となることを確認する．x, y のイコライザ m に対して，m が同型射ということはエピ射でもあるので，$x = y$ を得る．それゆえ，$xf = yf \implies x = y$ を満たすので，f はエピ射となることがわかる．いま，分解 $f = me$ に対して，e の像を $m' : M' \to M$ とする (m' はモノ射であることに注意する)．このとき，以下の可換図式を得る：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e'"] \arrow[rr, bend right, "e"'] \arrow[rrr, bend right=60, "f"'] & M' \arrow[r, "m'"] & M \arrow[r, "m"] & B
\end{tikzcd}
$$

モノ射とモノ射の合成もまたモノ射であるので，射 mm' はモノ射である．よって，f はモノ射 mm' に対して，$f = mm'e'$ と分解されることがわかる．いま，m が f の像であることから，定義 4.4.1(像の定義) より $m = mm'v$ となる射 $v : M \to M'$ が存在する．m がモノ射であることから，$1 = m'v$ を得る．それゆえ，m' はモノ射かつスプリット・エピであるので，命題 3.2.8 から m は同型射である．前述の議論から，f の像 m が同型射であれば f はエピ射となるのであった．いま，m' は同型射でかつ e の像なので，e はエピ射である．

□

定理 4.4.3 エピ − モノ分解定理$_2$

任意のトポスにおいて，m, m' をモノ射，e, e' をエピ射とし，$f = me$，$f' = m'e'$ が成り立つような任意の射 $f : A \to B, f' : A' \to B'$ が与えられたとする．このとき，射 $r : A \to A'$，$t : B \to B'$ に対して，$f' \circ r = t \circ f$ となるならば，以下の図式を可換にするような射 $s : C \to C'$ が一意的に存在する:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "e"] \arrow[rr, bend left, "f"] \arrow[d, "r"'] & C \arrow[r, "m"] \arrow[d, dashed, "s"'] & B \arrow[d, "t"] \\
A' \arrow[r, "e'"'] \arrow[rr, bend right, "f'"'] & C' \arrow[r, "m'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

さらに，射 f に対して，$f = me$，$f = m'e'$ と分解できるとき，一意的に定まる射 $s : C \to C'$ は同型射となる．(つまり，任意の射のエピ射とモノ射への分解の仕方は一意的である．)

Proof. まず，任意の射は定理 4.4.2 によって主張されるようにエピ射とモノ射に分解できる．よって，$f = me, f = m'e'$ における m, m' は f, f' の像であると考えることにする．t と m' のプルバックを P とすると，命題 3.3.13 からモノ射のプルバックはモノ射であるので，m' がモノ射であることから，射 $\theta : P \to B$ はモノ射である．よって，プルバックの定義から，以下の図が可換になるような射 $\epsilon : A \to P$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "e"] \arrow[drr, bend left, "f"] \arrow[dr, dashed, "\epsilon"] \arrow[ddr, bend right, "e'r"'] & & C \arrow[d, "m"] \\
& P \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "\xi"'] & B \arrow[d, "t"] \\
& C' \arrow[r, "m'"'] & B'
\end{tikzcd}$$

また，m が f の像であるので，定義 4.4.1(像の定義) から $m = \theta \circ \eta$ となる射 $\eta : C \to P$ が存在する．よって，プルバック図式の可換性から，$tm = t\theta\eta = m'\xi\eta$ を得る．$\xi\eta$ を s とすると，$tm = m's$ となる．m' がモノ射であることにより，条件の右側の四角形を可換にする唯一の射であるわかる．また，この s は左側も可換にする．実際に，$\theta \circ \epsilon = m \circ e$ と $m = \theta \circ \eta$ が成り立っているので，$\theta \circ \epsilon = \theta \circ \eta \circ e$ を得る．θ はモノ射であるので，$\epsilon = \eta \circ e$ を得る．したがって，$se = e'r$ となるからである．

次に，射 f に対して，$f = me$，$f = m'e'$ と分解できるとき，一意的に定まる射 $s : C \to C'$ は同型射となることを示す．いま，これまで議論において，$r = t = 1$ となっていることから，$m's = m$，$se = e'$ が成り立ち，m，m' がモノ射，e, e' がエピ射であることから，s は命題〜からモノ射かつエピ射であることがわかる．定理 4.3.3 からトポスにおいてモノ射かつエピ射は同型射なので，s は同型射となる． □

<u>定理 4.4.4 基本定理</u>

任意のトポス $\mathscr{E}$ と任意の対象 $B \in \mathscr{E}$ 対して，スライス圏 $\mathscr{E}/B$ はトポスである．

Proof. 圏 $\mathscr{E}/B$ がトポスであることを示すためには，$\mathscr{E}/B$ に任意の有限積，部分対象分類子，パワー対象が存在することを示せばよい．任意の有限積の存在から順番に示していくことにする．

(有限積の存在):

任意の有限積の存在を示すことは，二項積と終対象の存在を示すことと同値である．ゆえ，二項積と終対象の存在を示す．$\mathscr{E}/B$ における任意の対象 $f : X \to B$ と $g : Y \to B$ が与えられたとする．f, g の積はちょうど $\mathscr{E}$ における f, g のプルバックによって与えられる．実際に，$\mathscr{E}$ において以下のようなプルバック図式が与えられたとする:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[dr, dashed, "u"] \arrow[drr, bend left, "p'"] \arrow[ddr, bend right, "q'"'] & & \\
& X \times_B Y \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"] & Y \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "g"'] & B
\end{tikzcd}$$

このとき，$\mathscr{E}/B$ における f, g の積は $f \times g$ は $f \circ p$ もしくは，$g \circ q$ によって与えられる．というのも，$x = f \circ p' = g \circ q'$ とすれば，以下の図式を可換にするような射 $x \to f \times g$ が一意的に存在するということを，プルバックの普遍性から導くことができるからである．

$$\begin{tikzcd}
& x \arrow[dl, "p'"'] \arrow[d, dashed, "u"] \arrow[dr, "q'"] & \\
f & f \times g \arrow[l, "p"] \arrow[r, "q"'] & g
\end{tikzcd}$$

また，$\mathscr{E}/B$ における終対象は $\mathscr{E}$ における恒等射 $1_B : B \to B$ である．任意の $f : C \to B$ に対して,$1_B \circ f = f$ となることによる．よって，$\mathscr{E}/B$ は任意の有限積を持つ．(補足：なお，イコライザの存在も簡単に示すことができる．$\mathscr{E}/B$ における任意の対象 $f : X \to B$ と $g : Y \to B$ が与えられたとする．二つの射 $X \rightrightarrows Y$ に対する $\mathscr{E}/B$ におけるイコライザは $\mathscr{E}$ におけるイコライザに等しいことが簡単に確かめられ，$\mathscr{E}$ は任意のイコライザをもつからである．よって，有限極限を持つことも容易に示しうる．)

(部分対象分類子の存在:)

$\mathscr{E}$ における部分対象分類子を Ω とすると，$\mathscr{E}/B$ における部分対象分類子は射影射 $\pi_2 : \Omega \times B \to B$ となる．

実際に，A を C の部分対象として，以下の図式を考えてみる：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "f"] \arrow[dd, "h"'] & & B \arrow[dl, "1_B"'] \arrow[dd, "{\langle k, 1_B \rangle}"] \\
& B & \\
C \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "{\langle \chi_h, g \rangle}"'] & & \Omega \times B \arrow[ul, "\pi_2"]
\end{tikzcd}$$

部分対象の部分対象は部分対象であるので，f, g, h を $\mathscr{E}$ におけるモノ射とすると，$\mathscr{E}/B$ において h はモノ射なので，g は f の部分対象である．さらに，1_B は終対象である．この図式を可換にする射 $\langle \chi_h, g \rangle$ が一意的に与えられることは，特性射 χ_h の一意性による．よって，π_2 は $\mathscr{E}/B$ における部分対象分類子である．

(パワー対象の存在:)

$\mathscr{E}/B$ における任意の対象 $f : C \to B$ と $g : D \to B$ が与えられたとする．このとき，f のパワー対象 $P_B f$ が構成できれば良い．つまり，以下のような同型が $C, D \in \mathscr{E}$ について自然に成り立つことを示せばよい：

$$\mathrm{Hom}_B(C \times_B D, \Omega \times B) \cong \mathrm{Hom}_B(D, P_B f) \tag{4.21}$$

(なお，$\mathrm{Hom_B}$ とは，$\mathscr{E}/B$ における射の集合を表していること，また，$C \times_B D$ は $\mathscr{E}/B$ における f, g の積で，$\Omega \times B$ が $\mathscr{E}/B$ における部分対象分類子であることに注意する．) このことを示すために，まず，$\mathscr{E}$ において $C \times_B D$ が $C \times D$ の部分対象として見ることができることを示す．以下の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[dr, shift left, "e"] \arrow[dr, shift right, "e'"'] \arrow[drrr, bend left, "p'"] \arrow[dddr, bend right, "q'"'] & & & \\
& C \times_B D \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "{\langle p, q \rangle}"] \arrow[dd, "q"'] & & D \arrow[dd, "f"] \\
& & C \times D \arrow[ur, "\pi_2"'] \arrow[dl, "\pi_1"] & \\
& C \arrow[rr, "g"'] & & B
\end{tikzcd}$$

このとき，射 $\langle p, q \rangle$ がモノ射となることを示せば良い．つまり，$e, e' : E \to C \times_B D$ に対して，$\langle p, q \rangle \circ e = \langle p, q \rangle \circ e' \implies e = e'$ となることを示せばよい．実際に以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\langle p, q \rangle \circ e = \langle p, q \rangle \circ e' &\iff \langle p \circ e, q \circ e \rangle = \langle p \circ e', q \circ e' \rangle \\
&\iff pe = pe', qe = qe' \\
&\implies f \circ pe = f \circ pe', g \circ qe = g \circ qe' \\
&\implies u = e = e' \text{となる射 } u : E \to C \times_B D \text{ がただ一つ存在する (プルバックの性質)}
\end{aligned}$$

したがって，$\langle p, q \rangle$ はモノ射となることが確かめられた．

次に，$\mathscr{E}$ における以下の可換図式を考えることによって，$C \times D$ の部分対象 $C \times_B D$ の特性射 $\pi : C \times D \to \Omega$ を特定する：

$$\begin{tikzcd}
C \times_B D \arrow[rr] \arrow[d] & & B \arrow[rr] \arrow[d, "\Delta_B"] & & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C \times D \arrow[rr, "f \times g"'] \arrow[d, "1"'] & & B \times B \arrow[rr, "\delta_B"'] \arrow[d, "1"] & & \Omega \arrow[d, "1"] \\
C \times D \arrow[r, "1 \times g"] \arrow[dd, "1"'] & C \times D \arrow[r, "f \times 1"] & B \times B \arrow[r, "1 \times \{\ \cdot\ \}_B"] & B \times PB \arrow[r, "\in_B"] & \Omega \\
& C \times B \arrow[u, "1"'] \arrow[rr, "1 \times \{\ \cdot\ \}_B"'] & & C \times PB \arrow[u, "f \times 1"'] \arrow[r, "1 \times Pf"'] & C \times PC \arrow[u, "\in_C"'] \arrow[d, "1"] \\
C \times D \arrow[rrrr, "1 \times \omega"'] & & & & C \times PC
\end{tikzcd}$$

まず，一番左上の四角形は $f : C \to B, g : C \to B$ のプルバックの表現の定義である．一方，一番右上の四角形は，Δ_B, δ_B の定義からプルバックである．それゆえ，一番上の 2 つの四角形は合わせた大きな四角形はプルバックである．よって，特性射 π は $\pi = \delta_B(f \times g)$ で与えられる．図式の残りの部分の可換性は，$\omega = Pf \circ \{\ .\ \}_B \circ g : D \to PC$ となる ω に対して，

$$\in_C (1 \times \omega) : C \times D \to \Omega$$

という射に関する簡単な計算によって確かめることができる．実際に，真ん中上の右側の四角形は $\{\ \cdot\ \}_B$ の定義から可換であり，真ん中下の右側の四角形は，$\in$ が対角自然であるということから可換性が従う．また，一番下は ω の定義によって，$(1 \times Pf) \circ (1 \times \{\ \cdot\ \}_B) \circ (1 \times g) = 1 \times (Pf \circ \{\ \cdot\ \}_B \circ g) = 1 \times \omega$ が成り立つので，可換性となる．ここで，同型 (21) の左辺を以下のように変形する：

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_B(C \times_B D, \Omega \times B) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(C \times_B D, \Omega) \\
&\cong \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(C \times_B D) \\
&\cong \{S | S \in \mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(C \times D), S \subset C \times_B D\}
\end{aligned}$$

ここで，任意の $C \times D$ の部分対象 S は束 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(C \times D, \Omega)$ の中における (特性) 射 h として解釈することができるので，その束に関する intersection operator$\wedge$ を用いると，特性射 $\in_C (1 \times \omega)$ は以下のようなさらなる同型対応を与える[*4]：

$$\cong \{h | h : C \times D \to \Omega, h \wedge \in_C (1 \times \omega) = h\}$$

*4 部分対象の集まりが束になることや，intersection operator については，[15] の第 4 章を参照していただきたい．また，本論文，第 5 章 1 節も多少参考になると思う．

さらに，h に対する P-transpose の一意性より，以下の同型対応も得られる：

$$\cong \{k | k : D \to PC, k \wedge \omega = k\}$$

ここで，intersection operator を intersection 射 $\wedge : PC \times PC \to PC$ で表現できることと，ω の定義から，以下が成立する：

$$\begin{aligned} k \wedge \omega &= \wedge \circ \langle k, Pf \circ \{\ \cdot\ \}_B \circ g \rangle \\ &= \wedge \circ (1 \times (Pf \circ \{\ \cdot\ \}_B)) \circ \langle k, g \rangle \end{aligned}$$

ここで，$t = \wedge \circ (1 \times (Pf \circ \{\ \cdot\ \}_B))$ とおくと，射影射 $p : PC \times B \to PC$ に対して，$t\langle k, g \rangle = p\langle k, g \rangle$ が成立する (なお，ここにおける k は上の集合の要素であり，$t\langle k, g \rangle = k \wedge \omega = k = p\langle k, g \rangle$ となることによる)．ここで，二つの平行射 $p, t : PC \times B \to PC$ におけるイコライザを $(P_B f, e)$ とすると，以下の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "{\langle k,g \rangle}"] \arrow[d, dashed] & PC \times B \arrow[r, shift left, "p"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[d, "1 \times \{\ \cdot\ \}_B"] & PC \\
P_B f \arrow[ur, "e"'] & PC \times PB \arrow[r, "1 \times Pf"'] & PC \times PC \arrow[u, "\wedge"']
\end{tikzcd}$$

よって，射影射 $p' : PC \times B \to B$ に対して，$p'e : P_B f \to B$ という射を構成できるので，$P_B f$ は B 上の対象と見なせる．よって，求めていた同型 $\mathrm{Hom}_B(C \times_B D, \Omega \times B) \cong \mathrm{Hom}_B(D, P_B f)$ を得る．つまり，対象 $p'e : P_B f \to B$ が $\mathscr{E}/B$ における対象 $f : C \to B$ のパワー対象である．
(以下，実際にこの $P_B f$(正確には組 $(P_B f, p'e)$) が $\mathscr{E}/B$ におけるパワー対象となっていることを，より詳しく確認していくことにする．上の議論から同型 $\mathrm{Hom}_B(C \times_B D, \Omega \times B) \cong \mathrm{Hom}_B(D, P_B f)$ が得られることは分かった．よって，任意の射 $u : C \times_B \to \Omega \times_B D$ に対して，射 $u' : D \to P_B f$ が一意的に存在する．いま示すべきことは，$\mathscr{E}/B$ における積と部分対象が $\mathscr{E}$ におけるプルバックと $\Omega \times B$ によって与えられるという事実から，以下の図式を可換にするような射 $C \times_B D \to C \times_B P_B f$ が一意的に存在することに他ならない：

$$\begin{tikzcd}
C \times_B D \arrow[rr, "u"] \arrow[dr, "g \circ f^*"'] \arrow[ddr, dashed, bend right] & & \Omega \times B \arrow[dl, "\pi_2"] \\
& B & \\
& C \times_B P_B f \arrow[u, "p'e \circ f'"] \arrow[uur, bend right] &
\end{tikzcd}$$

π_2 は射影射，f^*, f' はそれぞれ f のプルバックである．また，$\pi_2 \circ u = g \circ f^*$ は仮定より成立している．ま

ず，上の図における射 $C \times_B P_B f \to \Omega \times B$ は以下の可換図式によって与えられる：

$$\begin{tikzcd}
C \times_B P_B f \arrow[rr] \arrow[d, "f'"'] & & C \arrow[d, "f"] & & \\
P_B f \arrow[rr, "p'e"'] \arrow[dr, "e"'] & & B & & \Omega \times B \cong B \times \Omega \arrow[ll, "\pi_2"] \\
& PC \times B \cong B \times PC \arrow[ur, "p'"] \arrow[r, "\Delta_B \times 1"] & B \times B \times PC \arrow[rr, "1 \times Pf"] & & B \times B \times PB \arrow[u, "1 \times \in_B"]
\end{tikzcd}$$

よって，上の三角形，右側の三角形は可換であることは既に言えている．ゆえに，左側の三角形が可換になるような射 $C \times_B D \to C \times_B P_B f$ が一意的に存在することを示すだけで十分である．このことを示すことも容易である．以下の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
C \times_B D \arrow[r, dashed] \arrow[d, "f^*"'] \arrow[rr, bend left, "g^*"] & C \times_B P_B f \arrow[r] \arrow[d, "f'"'] & C \arrow[d, "f"] \\
D \arrow[r, "u'"'] \arrow[rr, bend right, "g"'] & P_B f \arrow[r, "p'e"'] & B
\end{tikzcd}$$

いま，u' の定義から $p'eu' = g$ が成り立ち，外側の四角形がプルバックであることにより，$fg^* = gf^* = p'eu'f^*$ が成立する．よって，右側の四角形がプルバックであることにより，この図式を可換にするような，つまり $gf^* = p'ef'z$ となるような射 $z : C \times_B D \to C \times_B P_B f$ が一意的に存在するとわかる．明らかに，この一意的な射は右側の三角形を可換にする唯一の射でもある．ゆえに，$P_B f$ は $\mathscr{E}/B$ におけるパワー対象であると結論づけることができる．)

以上により，$\mathscr{E}/B$ は有限積，部分対象分類子，パワー対象を持つ．ゆえに，$\mathscr{E}/B$ はトポスである． $\square$

続いて，トポスと論理の関係を見ていくことにする．今回採用した論理体系は，Local Set Theory と呼ばれるものである．

第 5 章

Local Set Theory とトポス

この章では，Local Set Theory とトポスとの間に成り立つ関係を見る．Local Set Theory というのは，ベルが考案した論理体系で，高階直観主義論理の振る舞いを見せる．この Local Set Theory を元に，彼はトポスと論理の深い関係を明らかにした．主に [2] を参照した．

5.1 部分対象について成り立つ命題

この節では，Local Set Theory で成り立つ基本的な命題を確認していき，健全性定理を証明するための準備をする．

定義 5.1.1 モノ射における同値関係

圏 C において，ある 2 つのモノ射 $m : B \to A$，$n : C \to A$ が同等であるとは，$m \circ i = n$ となる，同型射 $i : B \to C$ が存在することをいい，$m \sim n$ と書く．明らかに関係 $\sim$ は同値関係である．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "m"'] & C \arrow[d, "n"] \\ & A \end{tikzcd}$$

また，モノ射 m と同値なモノ射のクラスを $[m]$ と書く．

注意 5.1.2 記法

対象 A の部分対象を，上のようなモノ射のことを指す場合と，そのモノ射のドメインのことを指す場合がある．また，対象 A の部分対象全体のクラスを $\mathrm{Sub}(A)$ と書く．

定義 5.1.3 モノ射における包含関係

圏 C において，ある 2 つのモノ射 $m : B \to A$，$n : C \to A$ に対して，m が n に含まれるとは，$m \circ i = n$ となる，射 $i : B \to C$ が存在することをいい，$m \subseteq n$ と書く．

また，$[m] \subseteq [n] \iff m \subseteq n$ とクラスにおける包含関係を定義する．

上記のように定義された包含関係 $\subseteq$ が $\mathrm{Sub}(A)$ における半順序となることは容易に確かめられる．

注意 5.1.4 記法

部分対象分類子を Ω とし，Ω へ向かう特性射 u に対するただ一つに定まる部分対象 (モノ射) のことを，$\bar{u}$ と

書くことにする．

$$\begin{tikzcd} dom(\bar{u}) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bar{u}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "u"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

補題 5.1.5

部分対象分類子を持つ任意の圏 C における，コドメインが A である 2 つのモノ射 m,n と，射 $u : A \to \Omega$ に対して，以下の 3 つが成り立つ：

(1) $u = \chi\ (\bar{u})$

(2)$[\overline{\chi\ (m)}] = [m]$

(3)$[m] = [n] \iff \chi(m) = \chi(n)$.

Proof. (1) は定義より明らか．

(2):(1) より,$\overline{\chi(m)} = m$ を得る．あとはモノ射のクラスの定義から明らか．

(3):

($\Longleftarrow$):(2) より以下が成り立つ．

$$\chi(m) = \chi(n) \Longrightarrow [\overline{\chi(m)}] = [\overline{\chi(n)}] \iff \overline{\chi(m)} = \overline{\chi(n)} \iff [m] = [n]$$

($\Longrightarrow$):$[m] = [n]$ とすると，定義から以下が可換になるような同型射 $f : dom(n) \to dom(m)$ を得る．

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "n"'] & dom(m) \arrow[dl, "m"'] \\ A & \end{tikzcd}$$

いま，圏 C は部分対象分類子を持つので，以下のようなプルバック図式が成立する．

$$\begin{tikzcd} dom(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

よって，上の 2 つの図式から以下のようなプルバック図式を得る．

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "n"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

よって，上の図式における特性射の普遍性から，$\chi(m) = \chi(n)$ を得る． □

定義 5.1.6 特性射間の半順序

任意の特性射 $u, v \in C(A, \Omega)$ に対して，半順序 $\leq$ を以下のように定める．

$$\begin{aligned} u \leq v &\iff [m] \subseteq [n] (\chi(m) = u, \chi(n) = v) \\ &\iff [\bar{u}] \subseteq [\bar{v}] \\ &\iff \bar{u} \subseteq \bar{v} \\ &\iff \text{任意の射 } f : dom(\bar{u}) \to dom(\bar{v}) \text{ に対して}, \bar{u} = \bar{v} \circ f \text{ が成立} \end{aligned}$$

実際に，先ほども述べたように，包含関係 $\subseteq$ は $\mathrm{Sub}(A)$ における半順序になっているので，関係 $\leq$ は $C(A, \Omega)$ における半順序になる．よって，特性射の普遍性から，$(\mathrm{Sub}(A), \subseteq) \cong (C(A, \Omega), \leq)$ となる．

定義 5.1.7 逆像

圏 C における，任意の射 $f : C \to A$ と，任意の A の部分対象 m に対して，$f^{-1}(m)$ を以下のように定義する．

$$f^{-1}(m) = \overline{\chi(m) \circ f}$$

つまり，$f^{-1}(m)$ の特性射は，まさしく $\chi(m) \circ f$ のことである．上の定義は補題 5.1.5 から以下のように，書き直すこともできる．

$$\chi(f^{-1}(m)) = \chi(m) \circ f$$

補題 5.1.8

以下の図式はプルバックである．

$$\begin{tikzcd} dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Proof. 図式

$$\begin{tikzcd} dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "f \circ f^{-1}(m)"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

が可換であるので，以下のようなプルバック図式を得る．

$$\begin{tikzcd} dom(f^{-1}(m)) \arrow[dr, dashed, "f*"'] \arrow[drr, bend left, "!"] \arrow[ddr, bend right, "f \circ f^{-1}(m)"'] & & \\ & dom(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

よって，上の図式を書き直すと以下のような図式を得る．

$$\begin{tikzcd} dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, dashed, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

いま，部分対象分類子の定義から，右の四角形と全体の四角形が共にプルバックであるので，補題 3.3.11 から，左の四角形もプルバックとなる． □

命題 5.1.9

任意のモノ射 n,m でコドメインを A,C に持つようなものを考える．このとき，任意の射 $f : C \to A$ に対して，以下の 3 つの主張は同値である．

(1) $n \sim f^{-1}(m)$

(2) $\chi(n) = \chi(m) \circ f$

(3) 以下の図式をプルバックにするような射 $g : dom(n) \to dom(m)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Proof. ((1) $\implies$ (2)) :

$$\begin{aligned} n \sim f^{-1}(m) &\iff \chi(n) = \chi(f^{-1}(m)) \\ &\iff \chi(n) = \chi(m) \circ f \end{aligned}$$

((2) $\implies$ (3)) :

$\chi(n) = \chi(m) \circ f$ より，

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "n"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ C \arrow[r, "\chi(m)\circ f"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

はプルバックであるため可換である．また，

$$\begin{tikzcd} dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

の全体の四角形はプルバックであるから，プルバックの条件を満たす射 $u : dom(n) \to dom(f^{-1}(m))$ がただ一つ存在するとわかる．よって，以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd} dom(n)) \arrow[r, "g\circ u"'] \arrow[d, "n"'] & dom(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

いま，上図の右側の四角形はプルバックであり，全体もプルバックである．よって，補題 3.3.11 より左側の四角形もプルバックであるとわかる．

$((3) \implies (1))$:

いま，以下の二つの図式はプルバックである．

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r] \arrow[d, "n"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} dom(f^{-1}(m)) \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

よって，プルバックの条件を満たす唯一の射 $u : dom(f^{-1}(m)) \to dom(n)$ と $u' : dom(n) \to dom(f^{-1}(m))$ が存在する．ゆえに，$n \sim f^{-1}(m)$ を得る．

□

命題 5.1.10

以下の 2 つの主張は同値である．

(1) $n \subseteq f^{-1}(m)$

(2) 以下の図式を可換にするような射 $g : dom(n) \to dom(m)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Proof. $((1) \implies (2))$:

$n \subseteq f^{-1}(m)$ であることと，補題 5.1.8 より，以下のような可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
dom(n)) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "n"'] & dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "1_C"'] & C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

$g = i \circ j$ とすると，求めていた射を得る．

$((2) \implies (1))$:

図式

$$\begin{tikzcd}
dom(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

が可換であり，補題 5.1.8 より，

$$\begin{tikzcd}
dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"'] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

がプルバックであることより，$f^{-1}(m) \circ u = n$ となるような唯一の射 $u : dom(n) \to dom(f^{-1}(m))$ が存在する．よって，$n \subseteq f^{-1}(m)$ となる． $\square$

命題 5.1.11

任意のコドメインが A である，モノ射 n,m と，任意の射 $f : C \to A$ に対して，以下が成立する：

$$m \subseteq n \Longrightarrow f^{-1}(m) \subseteq f^{-1}(n)$$

Proof. $m \subseteq n$ より，$m = n \circ g$ となる射 $g : dom(m) \to dom(n)$ が存在する．よって，以下のような可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd}
dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, "g"'] & \\
C \arrow[r, "f"'] & A & dom(n) \arrow[l, "n"']
\end{tikzcd}$$

また，上図の左側の四角形は補題 5.1.8 よりプルバックなので，$f^{-1}(n) \circ u = f^{-1}(m)$ となる唯一の射 $u : dom(f^{-1}(m)) \to dom(f^{-1}(n))$ が存在する．よって，$f^{-1}(m) \subseteq f^{-1}(n)$ を得る． $\square$

命題 5.1.12

以下の図式が与えられたとする．

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r, "n"] & C \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

このとき，n がモノ射であるならば，以下が成立する：

$$f \circ n = g \circ n \iff n \subseteq \langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A)$$

Proof. $f \circ n = g \circ n = h$ は，以下の図式が可換であることと同値である：

$$\begin{tikzcd} dom(n) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "n"'] & A \arrow[d, "\Delta_A"] \\ C \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & A \times A \end{tikzcd}$$

ここで，命題 5.1.10 より $n \subseteq \langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A)$ が成立することは，上の図式が可換であることと同値である． □

定義 5.1.13 モノ射における共通部分

コドメインが A である 2 つのモノ射 m,n が与えられたとする．このとき，以下のようなプルバック図式を考えることができる：

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, "m^{-1}(n)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ dom(n) \arrow[r, "n"'] & A \end{tikzcd}$$

このとき，上の図式における，$m \circ n^{-1}(m)$ のことを m と n の共通部分といい，$m \cap n$ と書く．プルバックであることから，$m \circ n^{-1}(m) = n \circ m^{-1}(n)$ となり，明らかに，$m \cap n = n \cap m$ となることがわかる．

補題 5.1.14

以下が成り立つ：

$$p \subseteq m \cap n \iff p \subseteq m \text{ かつ } p \subseteq n$$

Proof.

$$\begin{tikzcd} dom(m \cap n) \arrow[r, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, "m^{-1}(n)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ dom(n) \arrow[r, "n"'] & A \end{tikzcd}$$

はプルバックである．いま，以下の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} dom(p) \arrow[r, "n^{-1}(p)"] \arrow[d, "m^{-1}(p)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\ dom(n) \arrow[r, "n"'] & A \end{tikzcd}$$

上図が可換つまり，$p \subseteq m$ かつ $p \subseteq n$ ならば，プルバックの性質から，$p \subseteq m \cap n$ を得る．また，$p \subseteq m \cap n$ ならば，プルバックの性質から上図は可換となり，$p \subseteq m$ かつ $p \subseteq n$ を得る． □

この結果は，$[m \cap n]$ が部分対象の集合 $\{[m], [n]\}$ の下限であるということを含意している．よって，$(\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$ は下方な準束である．

命題 5.1.15

任意のコドメインが A であるモノ射 m,n と，任意の射 $f : C \to A$ に対して，以下が成立する：

$$f^{-1}(m \cap n) \sim f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)$$

Proof. $m \cap n \subseteq m$ と $m \cap n \subseteq n$ より，命題 5.1.11 から $f^{-1}(m \cap n) \subseteq f^{-1}(m)$ と $f^{-1}(m \cap n) \subseteq f^{-1}(n)$ が成立する．よって，補題 5.1.14 から，$f^{-1}(m \cap n) \subseteq f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)$ を得る．また，以下の図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
dom(f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[d, "f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)"] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right, "h'"'] & \cdot \arrow[r, "m^{-1}(n)"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"] \\
\cdot \arrow[r, "f^{-1}(n)"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "1_A"'] \\
dom(n) \arrow[r, "n"'] & A \arrow[r, "1_A"'] & A
\end{tikzcd}$$

この図式は定義から明らかに可換である．ゆえ，$m \circ h = n \circ h'$ となる．また，補題 5.1.8 より，

$$\begin{tikzcd}
dom(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & dom(m) \arrow[d, "m"'] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

はプルバック図式であるので，$h = m^{-1}(n) \circ g$ となる唯一の射 $g : dom(f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)) \to dom(m \cap n)$ が存在する．ゆえ，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
f \circ (f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)) &= m \circ h \\
&= m \circ m^{-1}(n) \circ g \\
&= (m \cap n) \circ g
\end{aligned}$$

ゆえ，$f \circ (f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)) \subseteq m \cap n$ を得る．ここで命題 5.1.11 より，

$$\begin{aligned}
f \circ (f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)) \subseteq m \cap n &\implies f^{-1}(f \circ (f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n))) \subseteq f^{-1}(m \cap n) \\
&\iff f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n) \subseteq f^{-1}(m \cap n)
\end{aligned}$$

を得る． □

命題 5.1.16

以下が成立する：

$$u \leq v \circ f \iff \bar{v} \circ g = f \circ \bar{u} \text{を満たす射 } g : dom(\bar{u}) \to dom(\bar{v}) \text{ が存在する}$$

Proof. 以下が成立することによる：

$$\begin{aligned} u \leq v \circ f &\iff \chi(\bar{u}) \leq \chi(\bar{v}) \circ f \\ &\iff \chi(\bar{u}) \leq \chi(f^{-1}(\bar{v})) \\ &\iff \bar{u} \subseteq f^{-1}(\bar{v}) \\ &\iff \text{以下の図式を可換にする射 } g \text{ が存在する.} \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} dom(\bar{u})) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\bar{u}"'] & dom(\bar{v}) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bar{v}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ C \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "u"'] & A \arrow[r, "v"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

□

命題 5.1.17

以下が成立する：

$$\chi(m) \leq \chi(n) \implies \chi(f^{-1}(m)) \leq \chi(f^{-1}(n))$$

また $u = \chi(m), v = \chi(n)$ とすると，以下も成立する：

$$u \leq v \implies u \circ f \leq v \circ f$$

Proof. まず，以下が成立する：

$$\begin{aligned} \chi(m) \leq \chi(n) &\iff m \subseteq n \\ &\implies f^{-1}(m) \subseteq f^{-1}(n) (\text{命題 } 5.1.11) \\ &\implies \chi(f^{-1}(m)) \leq \chi(f^{-1}(n)) \end{aligned}$$

よって，$\chi(m) \leq \chi(n) \implies \chi(f^{-1}(m)) \leq \chi(f^{-1}(n))$ を得る．
また，$u = \chi(m), v = \chi(n)$ とすると，以下が成立する：

$$\begin{aligned} u \leq v &\iff \chi(m) \leq \chi(n) \\ &\implies \chi(f^{-1}(m)) \leq \chi(f^{-1}(n)) \\ &\iff \chi(m) \circ f \leq \chi(n) \circ f \\ &\iff u \circ f \leq v \circ f \end{aligned}$$

したがって，$u \leq v \implies u \circ f \leq v \circ f$ が成立する． □

命題 5.1.18

以下が成立する：

$$f \circ \bar{u} = g \circ \bar{u} \iff u \leq \delta_A \circ \langle f, g \rangle$$

Proof. 以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned} f \circ \bar{u} = g \circ \bar{u} &\iff \bar{u} \subseteq \langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A) \\ &\iff u \leq \chi(\langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A)) \\ &\iff u \leq \delta_A \circ \langle f, g \rangle \end{aligned}$$

□

定義 5.1.19 交わり

二つの射 $u, v : A \to \Omega$ に対して，交わり $u \wedge v$ を以下のように定義する：

$$u \wedge v \iff \chi(\bar{u} \cap \bar{v})$$

補題 5.1.20

以下が成立する：

$$w \leq u \wedge v \iff w \leq u \text{ かつ } w \leq v$$

Proof. 以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned} w \leq u \cap v &\iff \chi(\bar{w}) \leq \chi(\bar{u} \cap \bar{v}) \\ &\iff \bar{w} \subseteq \bar{u} \cap \bar{v} \\ &\iff \bar{w} \subseteq \bar{u} \text{かつ} \bar{w} \subseteq \bar{v} (\text{補題 } 5.1.14) \\ &\iff \chi(\bar{w}) \leq \chi(\bar{u}) \text{ かつ} \chi(\bar{w}) \leq \chi(\bar{v}) \\ &\iff w \leq u \text{ かつ } w \leq v \end{aligned}$$

□

補題 5.1.21

以下が成立する：

$$v \leq w \implies u \wedge v \leq w$$

$$v \leq w \implies v \wedge u \leq w$$

Proof. まず，$v \leq w \implies u \wedge v \implies w$ が成り立つことを示す．$v \leq w$ と，$u \wedge v$ から以下のプルバック図式を得る：

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "\bar{u}^{-1}(\bar{v})"'] \arrow[d, "\bar{v}^{-1}(\bar{u})"'] \arrow[rr, bend left] & dom(\bar{v})) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{v}"'] & dom(\bar{w}) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bar{w}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ dom(\bar{u}) \arrow[r, "\bar{u}"'] & A \arrow[r, "1_A"'] \arrow[rr, bend right, "u"'] & A \arrow[r, "w"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

モノ射とモノ射の合成はモノ射であることから，上図における対象・も A の部分対象である．ゆえに，$\bar{v} \circ u^{-1}(\bar{v}) \subseteq \bar{w}$ が成立する．これは定義から以下のように変形することができる：

$$\begin{aligned} \bar{v} \circ u^{-1}(\bar{v}) \subseteq \bar{w} &\iff \chi(\bar{v} \circ \bar{u}^{-1}(\bar{v})) \leq \chi(\bar{w}) \\ &\iff \chi(\bar{u} \cap \bar{v}) \leq w \\ &\iff u \wedge v \leq w \end{aligned}$$

よって，$v \le w \implies u \wedge v \le w$ が成立する．

同様に，$v \le w$ と，$v \wedge u$ から $\bar{u} \circ \bar{v}^{-1}(\bar{u}) \subseteq \bar{w}$ が成立するので，以下のように変形できる：

$$\begin{aligned}\bar{u} \circ v^{-1}(\bar{u}) \subseteq \bar{w} &\iff \chi(\bar{u} \circ \bar{v}^{-1}(\bar{u})) \le \chi(\bar{w}) \\ &\iff \chi(\bar{v} \cap \bar{u}) \le w \\ &\iff v \wedge u \le w\end{aligned}$$

よって，$v \le w \implies v \wedge u \le w$ が成立する． □

命題 5.1.22

以下が成立する：

$$(u \wedge v) \circ f = (u \circ f) \wedge (v \circ f)$$

Proof. $m = \bar{u}, n = \bar{v}$ とする．
まず，命題 5.1.15 より $\chi(f^{-1}(m \cap n)) = \chi(f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n))$ を得る．あとは以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned}\chi(f^{-1}(m \cap n)) = \chi(f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)) &\iff \chi(f^{-1}(m \cap n)) = (\chi(\overline{\chi(m) \circ f}) \cap (\overline{\chi(n) \circ f})) \\ &\iff \chi(m \cap n) \circ f = (\chi(m) \circ f) \cap (\chi(n) \circ f) \\ &\iff \chi(\bar{u} \cap \bar{v}) \circ f = (\chi(\bar{u}) \circ f) \cap (\chi(\bar{v}) \circ f) \\ &\iff (u \wedge v) \circ f = (u \circ f) \wedge (v \circ f)\end{aligned}$$

□

命題 5.1.23

交換則と結合則が成立する：
すなわち，(1) : $u \wedge v = v \wedge u$ と (2) : $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$ が成立する．

Proof. (1) : 定義より明らか．
(2) : 以下が成立することによる：

$$\begin{aligned}(u \wedge v) \wedge w &= \chi(\overline{(u \wedge v)} \cap \bar{w}) \\ &= \chi(\overline{\chi(\bar{u} \cap \bar{v})} \cap \bar{w}) \\ &= \chi((\bar{u} \cap \bar{v}) \cap \bar{w}) \\ &= \chi(\bar{u} \cap (\bar{v} \cap \bar{w})) \\ &= \chi(\bar{u} \cap \overline{\chi(\bar{v} \cap \bar{w})}) \\ &= \chi(\bar{u} \cap \overline{(v \wedge w)}) \\ &= u \wedge (v \wedge w)\end{aligned}$$

□

命題 5.1.24

任意の $u, v : A \to \Omega$ と任意の $f, g : C \to A$ に対して，以下の 3 つが成立する：

(1) $\mathrm{true}_C = v \circ f \iff f = \bar{v} \circ g$ を満たす $g : C \to dom(\bar{v})$ が存在する

(2) $\mathrm{true} = v \circ \bar{v} \iff u \le v$

(3) $\mathrm{true}_C = \delta_A \circ \langle f, g \rangle \iff f = g$

Proof. (1) : 命題 5.1.9 からほぼ明らかに成り立つ．
(2) :(1) を使えばほぼ明らかに成り立つ．
(3) : 命題 5.1.18 により以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned}\mathrm{true}_C = \delta_A \circ \langle f, g\rangle &\iff f \circ \overline{\mathrm{true}_C} = g \circ \overline{\mathrm{true}_C}(\text{命題 5.1.18})\\ &\iff f = g(\overline{\mathrm{true}_C}\text{はエピ射})\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{true}_C}$ がエピ射であるのは，以下が成り立つことによる：
任意の射 $f, g : C \to A$ に対して，

$$\begin{aligned}f \circ \overline{\mathrm{true}_C} = g \circ \overline{\mathrm{true}_C} &\implies (f \circ \overline{\mathrm{true}_C}) \circ \mathrm{true}_C = (g \circ \overline{\mathrm{true}_C}) \circ \mathrm{true}_C\\ &\iff f \circ (\overline{\mathrm{true}_C} \circ \mathrm{true}_C) = g \circ (\overline{\mathrm{true}_C} \circ \mathrm{true}_C)\\ &\iff f \circ 1_C = g \circ 1_C(\text{図式を書けば明らか})\\ &\iff f = g\end{aligned}$$

□

5.2 Local Language と Local Set Theory

次に，Local Set Theory を定義するために必要な Local Language というものを定義する．

定義 5.2.1 Local Language

Local Language $\mathscr{L}$ は以下の，$(S1)$〜$(S3)$ のシンボルクラスと，$(TS1)$〜$(TS4)$ の型と，$(T1)$〜$(T8)$ の項によって定義される：
(シンボルクラス):
$(S1)$ **1** を unity 型シンボル，$\mathbf{\Omega}$ を truth value 型シンボルという．
$(S2)$ シンボル **A,B,C...** の集まりを grand 型シンボルという．
$(S3)$ シンボル **f,g,h...** の集まりを関数シンボルという．

(型): 型は，以下のように再帰的に定義される：
$(TS1)$ $\mathbf{1}$,$\mathbf{\Omega}$ は型である．
$(TS2)$ 任意の grand 型シンボルは型である．
$(TS3)$ $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_n}$ が型であるなら，$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ も型である．また，$n = 1$ のとき，$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ は A_1 であり，$n = 0$ のとき，$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ は $\mathbf{1}$ である．
$(TS4)$ **A** が型であるなら，**PA** も型である．
$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$，**PA** はそれぞれ，**A** の積，パワーと呼ばれる．**PA** の形をした型はパワー型と呼ばれる．
また，$\mathscr{L}$ は，型 **A** ごとに，変数 $x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, ...$ が存在する．また $\mathscr{L}$ は $*$ という記号も持つ．
関数シンボル **f** は $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ というようにアサインメイントを指定することよって決められる．（$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ はそれぞれ型とする．）

(項):項は，以下のように再帰的に定義される：
$(T1)$ $*$ は **1** の項である．

$(T2)$ 任意の型 $\mathbf{A}$ に対して，変数 $x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, ...$ は，型 $\mathbf{A}$ の項である．

$(T3)$ 任意の関数シンボル $\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ に対して，τ は $\mathbf{A}$ の項であり，$\mathbf{f}(\tau)$ は $\mathbf{B}$ の項である．

$(T4)$ 任意の型 $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_n}$ それぞれの項 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n$ に対して，$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n \rangle$ は型 $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ の項であり，$n = 1$ のときは，$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n \rangle$ は τ であり，$n = 0$ のときは，$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n \rangle$ は $*$ である．

$(T5)$ τ が型 $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_n}$ の項であるとき，$(\tau)_i$ は型 $\mathbf{A_i}$ の項である．$(1 \leq i \leq n)$

$(T6)$ α が型 Ω の項であり，変数 $x_{\mathbf{A}}$ が型 $\mathbf{A}$ の項であるなら，$\{x_{\mathbf{A}} : \alpha\}$ は型 $\mathbf{PA}$ の項である．

$(T7)$ σ と τ が同じ型の項であるなら，$\sigma = \tau$ は型 $\mathbf{\Omega}$ の項である．

$(T8)$ σ と τ がそれぞれ型 $\mathbf{A}$，$\mathbf{PA}$ の項であるなら，$\sigma \in \tau$ は型 $\mathbf{\Omega}$ の項である．

さらに，この後で必要な言葉を以下のように定義する：

$$\text{項}\tau\text{が式である} \iff \tau\text{は型}\mathbf{\Omega}\text{の項である}$$

$$\text{変数 } x \text{ の現れが束縛されている} \iff x \text{ が } \{x : \alpha\} \text{ の形に出現する}$$

$$\text{変数 } x \text{ の現れが自由である} \iff x \text{ が } \{x : \alpha\} \text{ の形に出現しない}$$

$$\tau\text{が閉項である} \iff \tau\text{に自由変数が存在しない}$$

$$\tau\text{が文である} \iff \tau\text{が閉項かつ式である}$$

$$\text{代入規則：任意の項}\tau, \sigma\text{と}\sigma\text{と同じ型の変数 } x \text{ に対して}, \tau(x/\sigma) \iff \tau\text{の自由変数 } x \text{ に}\sigma\text{を代入}$$

また，上記の σ の任意の変数 y に対して，y の $\tau(x/\sigma)$ における y の現れが自由であるなら，σ は τ において x に対して自由であるという．

定義 5.2.2 論理演算子

Local Language $\mathscr{L}$ における論理演算子を以下の $(L1) \sim (L9)$ で定める：
（ω は型 $\mathbf{\Omega}$ の変数である．）

$(L1)$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	for	$\alpha = \beta$
$(L2)$	true	for	$* = *$
$(L3)$	$\alpha \wedge \beta$	for	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \text{true}, \text{true} \rangle$
$(L4)$	$\alpha \Rightarrow \beta$	for	$(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha$
$(L5)$	$\forall x \alpha$	for	$\{x : \alpha\} = \{x : \text{true}\}$
$(L6)$	$flase$	for	$\forall \omega . \omega$
$(L7)$	$\neg \alpha$	for	$\alpha \Rightarrow false$
$(L8)$	$\alpha \vee \beta$	for	$\forall \omega [(\alpha \Rightarrow \omega \wedge \beta \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega]$
$(L9)$	$\exists \alpha$	for	$\forall \omega [\forall x (\alpha \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega]$

以下の公理と規則によって，上記の論理演算子は直観主義論理で成り立つ諸法則を満たすことを確認することができる．

定義 5.2.3 シーケント

Local Language $\mathscr{L}$ におけるシーケントは以下の以下のように書かれる:

$$\Gamma : \alpha$$

ここで α は式であり，Γ は式の有限集合である．

また，以下のように書くことにする:

$$
\begin{array}{lll}
\Gamma, \Delta : \alpha & \text{for} & \Gamma \cup \Delta : \alpha \\
\beta, \Gamma : \alpha & \text{for} & \Gamma \cup \{\beta\} : \alpha \\
\beta_1, ..., \beta_n : \alpha & \text{for} & \{\beta_1, ..., \beta_n\} : \alpha \\
: \alpha & \text{for} & \emptyset : \alpha
\end{array}
$$

定義 5.2.4 公理

Local Language $\mathscr{L}$ における公理を以下の 5 つで定める:

$$
\begin{array}{ll}
\text{Tautology} & \alpha : \alpha \\
\text{Unity} & : x_1 = * \\
\text{Equality} & x = y, \alpha(z/x) : \alpha(z/y)(x \text{ と } y \text{ は } z \text{ に対して}\alpha\text{の中で自由である場合}) \\
\text{Products} & : (\langle x_1, ..., x_n \rangle)_i = x_i \\
 & : x = \langle (x)_1, ..., (x)_n \rangle \\
\text{Comprehension} & : x \in \{x : \alpha\} \Leftrightarrow \alpha
\end{array}
$$

定義 5.2.5 規則

Local Language $\mathscr{L}$ における規則を以下の 5 つで定める:（ただし，Cut における α の任意の自由変数は Γ, β

$$
\begin{array}{ll}
\text{Thinning} & \dfrac{\Gamma : \alpha}{\beta, \Gamma : \alpha} \\[2ex]
\text{Cut} & \dfrac{\Gamma : \alpha \quad \alpha, \Gamma : \beta}{\Gamma : \beta} \\[2ex]
\text{Substitution} & \dfrac{\Gamma : \alpha}{\Gamma(x/\tau) : \alpha(x/\tau)} \\[2ex]
\text{Extensionality} & \dfrac{\Gamma : x \in \sigma \Leftrightarrow x \in \tau}{\Gamma : \sigma = \tau} \\[2ex]
\text{Equivalence} & \dfrac{\alpha, \Gamma : \beta \quad \beta, \Gamma : \alpha}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta}
\end{array}
$$

の中で自由である．$Subsutitution$ における τ は x に対して，Γ と α の中で自由である．$Extensionality$ における x は Γ, σ, τ において自由ではない．）

定義 5.2.6 導出可能性

S をシーケントの集合として，S からの証明図式を頂点を持った有限木として定義する．また，その木のノードは，以下の条件を満たすシーケントであるとする：

(1) : 任意のノードは上にあるノードからから規則を用いて導き出されたものである
(2) : 一番上のノードは公理か S の要素である
　この証明図式の頂点を S からの証明の結果と呼ぶ.
また，シーケント $\Gamma : \alpha$ が証明の結果であるとき，S から公理と規則を用いて導出可能 (証明可能) であるといい，以下のように書く :

$$\Gamma \vdash_S \alpha$$

また，$\Gamma \vdash_{\emptyset} \alpha$ のことを，$\Gamma \vdash \alpha$ と書き，妥当なシーケントとよぶ．$\emptyset \vdash_{\emptyset} \alpha$ を $\vdash_{\emptyset} \alpha$ と書き，α は S から導出可能 (証明可能) という.

　ようやく，Local Set Theory を定義することができるようになった.

定義 5.2.7 Local Set Theory

Local Language $\mathscr{L}$ における Local Set Theory S とは，導出可能性の下で閉じたシーケント集まりのことである．つまり，S を Local Set Theory とし，$\Gamma : \alpha$ を任意のシーケントとすると以下が成立する :

$$\Gamma \vdash_S \alpha \iff S \text{ において } (\Gamma : \alpha)$$

また，明らかに任意のシーケントの集まりは，以下で定義される Local Set Theory $\bar{S}$ を創出する :

$$\bar{S}\text{において } (\Gamma : \alpha) \iff \Gamma \vdash_S \alpha$$

もし，$\bar{S} = S'$ であるならば，S は Local Set Theory S' における公理の集合と言われる．また，公理の集合が空集合であるものから創出された Local Set Theory を純粋な (pure)Local Set Theory と言い，L と書く.

命題 5.2.8 Local Set Theory における 論理$_1$

Local Set Theory においては以下が成立する :
(1) $\vdash \mathrm{true}$
(2) $x = x' \vdash x' = x$(対称律)
(3) $\alpha \vdash \alpha = \mathrm{true}$
(4) $\alpha = \mathrm{true} \vdash \alpha$
(5) $\langle x, y\rangle = \langle x' = y'\rangle \vdash x = x'$
(6) $\langle x, y\rangle = \langle x' = y'\rangle \vdash y = y'$

Proof. (1):ほとんど明らか.
(2):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{r \text{ として } z = x \text{ をとる}}{x = x', r(z/x) : r(z/x')}\ (equality)}{x = x', x = x : x' = x} \qquad \dfrac{: x = x}{x = x' : x = x}\ (thinning)}{x = x' : x' = x}\ (cut)$$

(3):

$$\dfrac{\dfrac{\alpha : \alpha}{\mathrm{true}, \alpha : \alpha}\ (thinning) \qquad \dfrac{\mathrm{true}}{\alpha, \alpha : \mathrm{true}}\ (thinning)}{\alpha : \alpha \iff \mathrm{true}}\ (equivarence)$$

(4):

ω, ω' を式とする.

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\omega = \omega' : \omega' = \omega}\,(2)}{\omega = \omega' : \omega' = \omega}\,(\mathit{thinning}) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\omega' = \omega, \omega' : \omega}\,(\mathit{equality})}{\omega = \omega', \omega' = \omega, \omega' : \omega}\,(\mathit{thinning})}{\omega = \omega', \omega' : \alpha}\,(\mathit{cut})}{\alpha = \omega', \omega' : \alpha}\,(\mathit{substitution})}{\alpha = \mathrm{true}, \mathrm{true} : \alpha}\,(\mathit{substitution}) \qquad \dfrac{: \mathrm{true}}{\alpha = \mathrm{true} : \mathrm{true}}\,(\mathit{thinning})}{\alpha = \mathrm{true} : \alpha}\,(\mathit{cut})
$$

(5):

証明図がとても大きくなるので省略する.

(6):

証明図がとても大きくなるので省略する.

□

命題 5.2.9 Local Set Theory における 論理$_2$

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\Gamma : \alpha \quad \Gamma : \beta}{\Gamma : \alpha \wedge \beta}$

(2) $\dfrac{\alpha, \Gamma : \gamma}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \gamma}$

(3) $\dfrac{\beta, \Gamma : \gamma}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \gamma}$

Proof. 証明図が大きくなるので省略する．命題 5.2.8 で成り立つことを使う． □

命題 5.2.10 Local Set Theory における 論理$_3$(implication)

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\alpha, \Gamma : \beta}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}$

(2) $\dfrac{\Gamma : \alpha \quad \beta, \Gamma : \gamma}{\alpha \Leftrightarrow \beta, \Gamma : \gamma}$

(3) $\dfrac{\Gamma : \alpha \quad \beta, \Gamma : \gamma}{\beta \Leftrightarrow \alpha, \Gamma : \gamma}$

(4) $\dfrac{\Gamma : \alpha \quad \beta, \Gamma : \gamma}{\alpha \Rightarrow \beta, \Gamma : \gamma}$

(5) $\dfrac{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma, \alpha : \beta}$

Proof. (1):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha : \alpha}{\alpha, \Gamma : \alpha}\ (thinning)}{\alpha \wedge \beta, \Gamma : \alpha}\ (\text{命題 5.2.9(2)}) \qquad \dfrac{\alpha, \Gamma : \beta \quad \dfrac{\alpha : \alpha}{\alpha . \Gamma : \alpha}\ (thinning)}{\alpha, \Gamma : \alpha \wedge \beta}\ (\text{命題 5.2.9(1)})}{\dfrac{\Gamma : (\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha}{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}\ (L4)}\ (equivalence)$$

(2)(3)(4) は省略する．

(5):

$$\dfrac{\dfrac{\Gamma : \alpha \Rightarrow \beta}{\Gamma, \alpha : \alpha \Rightarrow \beta}\ (thinning) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha : \alpha}{\Gamma, \alpha : \alpha}\ (thinning) \quad \dfrac{\beta : \beta}{\Gamma, \alpha, \beta}\ (thinning \times 2)}{\alpha \Rightarrow \beta, \Gamma, \alpha : \beta}\ (\text{命題 5.2.10(4)})}{\Gamma, \alpha : \beta}\ (cut)$$

□

命題 5.2.11 Local Set Theory における 論理$_4$(conjunction)

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\alpha, \beta : \gamma}{\alpha \wedge \beta : \gamma}$

(2) $\dfrac{\alpha \wedge \beta : \gamma}{\alpha, \beta : \gamma}$

(3) $\dfrac{\Gamma : \alpha}{\wedge \Gamma : \alpha}$

(4) $\dfrac{\wedge \Gamma : \alpha}{\Gamma : \alpha}$

(なお，Γ は式の集合 $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ のことであり，$\wedge\Gamma$ は $\alpha_1 \wedge ... \wedge \alpha_n$ のことである．)

Proof. □

(1):二段階に分けて証明する：

(i):

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \mathrm{true}, \mathrm{true} \rangle : \beta = \mathrm{true}}\ (\text{命題 5.2.8(6)})}{\alpha \wedge \beta : \beta = \mathrm{true}}\ (L3) \qquad \dfrac{\dfrac{}{\beta = \mathrm{true} : \beta}\ (\text{命題 5.2.8(4)})}{\alpha \wedge \beta, \beta = \mathrm{true} : \beta}\ (thinning)}{\alpha \wedge \beta : \beta}\ (cut) \qquad \dfrac{\dfrac{\alpha, \beta : \gamma}{\beta : \alpha \Rightarrow \gamma}\ (\text{命題 5.2.10(1)})}{\alpha \wedge \beta, \beta : \alpha \Rightarrow \gamma}\ (thinning)$$

$$\dfrac{\alpha \wedge \beta : \beta \qquad \alpha \wedge \beta, \beta : \alpha \Rightarrow \gamma}{\alpha \wedge \beta : \alpha \Rightarrow \gamma}\ (cut)$$

(ii)

$$\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha}{\alpha\wedge\beta:\alpha}\,(\text{命題 5.2.9(2)}) \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\,(i) \quad \dfrac{\alpha:\alpha \quad \dfrac{\gamma:\gamma}{\gamma,\alpha:\gamma}\,(thining)}{\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\,(\text{命題 5.2.10(4)})}{\alpha\wedge\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}\,(cut)}{\alpha,\alpha\wedge\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}\,(thinning) \quad \dfrac{\overline{\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\,(i)}{\alpha\wedge\beta,\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\,(thining)}{\alpha,\alpha\wedge\beta:\gamma}\,(cut)}{\alpha\wedge\beta:\gamma}\,(cut)$$

(2)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha}{\alpha,\beta:\alpha}\,(thinning) \quad \dfrac{\beta:\beta}{\alpha,\beta:\beta}\,(thinning)}{\alpha,\beta:\alpha\wedge\beta}\,(\text{命題 5.2.9(1)}) \quad \dfrac{\alpha\wedge\beta:\gamma}{\alpha,\beta,\alpha\wedge\beta:\gamma}\,(thinning)}{\alpha,\beta:\gamma}\,(cut)$$

(3):Γ の要素数に関する帰納法で証明する：$n-1$ 個以下の式に関して (3) が成立するとする．このとき，$\Gamma'=\{\alpha_2,...,\alpha_n\}$ とおくと以下が成立する：

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha}{\alpha_1,\Gamma':\alpha}\,(def)}{\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\,(\text{命題 5.2.10(1)})}{\wedge\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\,(\text{帰納法の仮定})}{\wedge\Gamma',\alpha_1:\alpha}\,(\text{命題 5.2.10(5)})}{\alpha_1\wedge(\wedge\Gamma'):\alpha}\,(\text{命題 5.2.11(2)})}{\wedge\Gamma:\alpha}\,(def)$$

(4):(3) と同様に Γ の要素数に関する帰納法で証明する:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\wedge\Gamma:\alpha}{\alpha_1\wedge(\wedge\Gamma'):\alpha}\,(def)}{\wedge\Gamma',\alpha_1:\alpha}\,(\text{命題 5.2.11(2)})}{\wedge\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\,(\text{命題 5.2.10(1)})}{\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\,(\text{帰納法の仮定})}{\alpha_1,\Gamma':\alpha}\,(\text{命題 5.2.10(5)})}{\Gamma:\alpha}\,(def)$$

命題 5.2.12 Local Set Theory における 論理$_5$(universal quantification)

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\Gamma:\alpha\Leftrightarrow\beta}{\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}}$

(2) $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\Gamma:\forall x\alpha}$

(3) $\dfrac{\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}}{\Gamma:\alpha\Leftrightarrow\beta}$

(4) $\forall x\alpha \vdash \alpha$

Proof. 省略 $\square$

もちろん，この他にも直観主義論理で成り立つことは Local Set Theory の論理体系においても幾分証明は厄介であるが証明することができる．この意味で Local Set Theory は (高階) 直観主義論理と言える．

5.3 健全性定理

この節の最後では，健全性定理の証明を与える．そのためにまず，任意のトポスにおいて Local Set Theory をどのように解釈するかを見る．そして「式の妥当性」という概念を与える．

定義 5.3.1 トポス解釈

Local Language $\mathscr{L}$ と任意のトポス $\mathscr{E}$ が与えられたとする．$\mathscr{L}$ の $\mathscr{E}$ における解釈 $\mathbf{I}$ を以下のように定義する:

(i): $\mathscr{L}$ の型 $\mathbf{A}$ の $\mathbf{I}$ 解釈は $\mathscr{E}$ の対象 $\mathbf{A_I}$ とし，以下のように定める：

$(\mathbf{A_1} \times ... \times \mathbf{A_n})_\mathbf{I}$=$(\mathbf{A_1})_\mathbf{I}$×...×$(\mathbf{A_n})_\mathbf{I}$

$(\mathbf{PA})_\mathbf{I}$=$P(\mathbf{A})_\mathbf{I}$

$\mathbf{1_I}$=1（$\mathscr{E}$ における終対象）

$\mathbf{\Omega_I}$=$\Omega_\mathscr{E}$

(ii):$\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}$ であるような任意の関数シンボル $\mathbf{f}$ の $\mathbf{I}$ 解釈は,$\mathscr{E}$ の射 $\mathbf{f_I} : \mathbf{A_I} \rightarrow \mathbf{B_I}$ である．より一般的には，$\mathscr{L}$ の解釈とは，ペア $(\mathscr{E}, \mathbf{I})$ のことである．しばしば，$\mathscr{E}$ の対象 $\mathbf{A_I}$ を $\mathbf{A}_\mathscr{E}$ または，単に A と書く．

また，解釈 $(\mathscr{E}, \mathbf{I})$ を以下のように，$\mathscr{L}$ の項に対しても拡張することができる．型 $\mathbf{B}$ の項 τ とする．$x_1, ...x_n$ を型 $\mathbf{A_1}, ...\mathbf{A_n}$ の異なる変数で，τ の自由変数をすべて含むものとする．列 $(x_1, ...x_n)$ を $\mathbf{x}$ と書くことにする．

τ の $\mathbf{I}$ 解釈とは，$\mathscr{E}$ における射 $A_1 \times ... \times A_n \rightarrow B$ のことであり，$[\![\tau]\!]_{\mathbf{I},\mathbf{x}}$ または，$[\![\tau]\!]_\mathbf{x}$ と書かれ，以下のように再帰的に定義される：

$(\mathbf{I}1) : [\![*]\!]_\mathbf{x} = \mathscr{E}$ における唯一の射 : $A_1 \times ... \times A_n \rightarrow 1$

$(\mathbf{I}2) : [\![x_i]\!]_\mathbf{x} = \pi_i,$射影射 $A_1 \times ... \times A_n \rightarrow A_i (1 \leq i \leq n)$

$(\mathbf{I}3) : [\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_\mathbf{x} = \mathbf{f_I} \circ [\![\tau]\!]_\mathbf{x}$

$(\mathbf{I}4) : [\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_\mathbf{x} = \langle [\![\tau_1]\!]_\mathbf{x}, ..., [\![\tau_1]\!]_\mathbf{x} \rangle$

$(\mathbf{I}5) : [\![(\tau)_i]\!]_\mathbf{x} = \pi_i \circ [\![\tau]\!]_\mathbf{x}$

$(\mathbf{I}6) : [\![\{y : \alpha\}]\!]_\mathbf{x} = ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can})^\wedge$

(ここにおける u は $x_1, ...x_n$ の一つではないが，α の中において y に対して自由である．また y は型 $\mathbf{C}$ の項である．射 can は標準的な同型射 $C \times (A_1 \times ... \times A_n) \cong C \times A_1 \times ... \times A_n$ である．)

$(\mathbf{I}7) : [\![\sigma = \tau]\!]_\mathbf{x} = \delta_C \circ [\![\langle \sigma, \tau \rangle]\!]_\mathbf{x}$

(ここにおける σ, τ は型 $\mathbf{C}$ の項である．)

$(\mathbf{I}8) : [\![\sigma \in \tau]\!]_\mathbf{x} = \in_C \circ [\![\langle \sigma, \tau \rangle]\!]_\mathbf{x}$

(ここにおける σ は型 $\mathbf{C}$ の項である．)

補題 5.3.2

$[\![\mathrm{true}]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$ が成立する．(なお，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ で $\mathbf{A} = A_1 \times ... \times A_n$ であり，$x_i : A_i (1 \leq n)$ とする．)

Proof. まず，定義から以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\mathrm{true}]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![* = *]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \delta_{\mathbf{A}} \circ [\![\langle *, * \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle [\![*]\!]_{\mathbf{x}}, [\![*]\!]_{\mathbf{x}} \rangle
\end{aligned}$$

いま，以下の図式はプルバックである．

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "!"] \arrow[d, "{\langle [\![*]\!]_{\mathbf{x}}, [\![*]\!]_{\mathbf{x}} \rangle}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
\mathbf{A} \times \mathbf{A} \arrow[r, "\delta_{\mathbf{A}}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

よって，$[\![\mathrm{true}]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$ を得る． □

補題 5.3.3 テクニカル補題

C を有限積を持つ圏とし，$B, A_1, ..., A_n$ を圏 C における対象とする．射 $\mathrm{can}, \mathrm{can}^*$ を以下のような標準的な同型射

$$\begin{aligned}
\mathrm{can} : B \times (A_1 \times ... \times A_n) \cong B \times A_1 \times ... \times A_n \\
\mathrm{can}^* : B \times (B_1 \times ... \times B_m) \cong B \times B_1 \times ... \times B_m
\end{aligned}$$

とし，射 $proj$ を射の合成 $\pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}$ とする．

このとき，任意の射 $f_1 : A_1 \times ... \times A_n \to B_1$,...,$f_m : A_1 \times ... \times A_n \to B_m$ に対して，以下が成立する：

$$\langle \pi_1, f_1 \circ proj, ..., f_m \circ proj \rangle \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}^* \circ (1_B \times \langle f_1, ..., f_m \rangle)$$

Proof. これは，以下の図式を考えれば簡単に示すことができる：

$$\begin{tikzcd}
B \times A_1 \times ... \times A_n \arrow[d, "\pi_1"] & B \times (A_1 \times ... \times A_n) \arrow[l, "\mathrm{can}"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "1_B \times \langle f_1 \times ... \times f_m \rangle"] & A_1 \times ... \times A_n \arrow[d, "\langle f_1 \times ... \times f_m \rangle"] \arrow[dd, bend left=60, "f_i"] \\
B \arrow[d, "1_B"] & B \times (B_1 \times ... \times B_m) \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\mathrm{can}^*"] & B_1 \times ... \times B_m \arrow[d, "\pi'_i"] \\
B & B \times B_1 \times ... \times B_m \arrow[l, "p'_1"'] \arrow[r, "p'_{i+1}"] & B_i (1 \leq i \leq n)
\end{tikzcd}$$

(ここで，π, p, p' も π と同様に標準的な射影射であるとする．)

上図は，積の普遍性と，$\mathrm{can}, \mathrm{can}^*$ が標準的な同型射であることにより明らかに可換である．よって，真ん中の列における積の普遍性より，以下の等式を得る：

$$\begin{aligned}
\mathrm{can}^* \circ (1_B \times \langle f_1 \times ... \times f_m \rangle) &= \langle \pi_1 \circ \mathrm{can}, f_1 \circ \pi_2, ..., f_m \circ \pi_2 \rangle \\
&= \langle \pi_1 \circ \mathrm{can}, f_1 \circ proj \circ \mathrm{can}, ..., f_m \circ proj \circ \mathrm{can} \rangle \\
&= \langle \pi_1, f_1 \circ proj, ..., f_m \circ proj \rangle \circ \mathrm{can}
\end{aligned}$$

よって，$\langle \pi_1, f_1 \circ proj, ..., f_m \circ proj \rangle \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}^* \circ (1_B \times \langle f_1, ..., f_m \rangle)$ は成立する． □

補題 5.3.4 余剰変数における補題

τ を $x_1, ..., x_n$ の中で自由変数を持つ任意の項とし，$1 < p_1 < ... < p_m < n$ に対する $x_{p_1}, ..., x_{p_m}$ が τ におけるすべての自由変数を含むとする．

このとき，$(x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}$，$(x_{p_1}, ..., x_{p_n}) = \mathbf{x}'$ と書くとすると，任意のトポス $\mathscr{E}$ における任意の $\mathscr{L}$ 解釈に対して，以下が成立する：

$$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$$

Proof. τ の構成に関する帰納法で証明する：

まず，τ が原始式の場合を示す．つまり，τ が $*$ の場合と，x_i の場合に成立することを示す．

($*$の場合)：

$[\![*]\!]_{\mathbf{x}} = [\![*]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_2} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を示す．実際にこれは，$[\![*]\!]_{\mathbf{x}}$ と，$[\![*]\!]_{\mathbf{x}'}$ が終対象 1 へ向かう普遍射であり，明らかに型は整合的であることにより，自明に成り立つ．

($\tau_{\mathbf{i}}$の場合)：

$[\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_2} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を示せばよい．まず，$[\![x_i]\!]_{\mathbf{x}'}$ という射が存在するための条件から，$p_1 \leq i \leq p_m$ となることが分かる．よって，定義から以下を得る：

$$[\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_2} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \iff \pi_i = \pi_i \circ \langle \pi_{p_1}, ..., \pi_{p_m} \rangle$$

いま，π は標準的射影であり，$p_1 \leq i \leq p_m$ であるので，二段目の式は明らかに成り立つ．よって，この場合も成立する．

次に，帰納のフェーズに入る．$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ が成立していると仮定すると，以下のそれぞれの場合で成立することを示す：

($\mathbf{f}(\tau)$ の場合)：

定義より以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}} &= \mathbf{f_I} \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \mathbf{f_I} \circ ([\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}) (\text{帰納法の仮定}) \\
&= (\mathbf{f_I} \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'}) \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($\langle \tau_{\mathbf{1}}, ..., \tau_{\mathbf{n}} \rangle$ の場合)：

定義より以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \langle [\![\tau_1]\!]_{\mathbf{x}}, ..., [\![\tau_n]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \langle [\![\tau_1]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}, ..., [\![\tau_n]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \rangle (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \langle [\![\tau_1]\!]_{\mathbf{x}'}, ..., [\![\tau_n]\!]_{\mathbf{x}'} \rangle \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($(\tau)_{\mathbf{i}}$の場合)：

定義より以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![(\tau)_i\rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \pi_i \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \pi_i \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}} (\text{帰納法の仮定}) \\
&= [\![(\tau)_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![(\tau)_i\rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![(\tau)_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($\tau = \tau'$の場合)

定義より以下が成立する:

$$\begin{aligned}
[\![\tau = \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \delta_C \circ [\![\langle \tau, \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \delta_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}}\rangle \\
&= \delta_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}'}\rangle \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}} (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \delta_C \circ [\![\langle \tau, \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [\![\tau = \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\tau = \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau = \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($\tau \in \tau'$の場合)：

定義より以下が成立する:

$$\begin{aligned}
[\![\tau \in \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \in_C \circ [\![\langle \tau, \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \in_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}}\rangle \\
&= \in_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}'}\rangle \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}} (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \in_C \circ [\![\langle \tau, \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [\![\tau \in \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\tau \in \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau \in \tau'\rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($\{\mathbf{y} : \alpha\}$ の場合)：

このとき，y を型 $\mathbf{B}$ の項，$\{y : \alpha\}$ を型 $\mathbf{PB}$ の項とすると，定義と補題 5.3.3(テクニカル補題) からから以下が成立する:

$$\begin{aligned}
[\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}} &= ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can})^\wedge \\
&= ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ [\![\langle u, x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can})^\wedge (\text{帰納法の仮定}) \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \langle [\![u]\!]_{u\mathbf{x}}, [\![x_{p_1}]\!]_{u\mathbf{x}}, ..., [\![x_{p_m}]\!]_{u\mathbf{x}}\rangle \circ \mathrm{can}]^\wedge \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \langle \pi_1, [\![x_{p_1}]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj, ..., [\![x_{p_m}]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj\rangle \circ \mathrm{can}]^\wedge (proj = \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} \text{であることによる}) \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \mathrm{can}^* \circ (1_B \times [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m}\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^\wedge (\text{補題 5.3.3(テクニカル補題)}) \\
&= [\in_B \circ (1_B \times ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \mathrm{can}^*)^\wedge) \circ (1_B \times [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m}\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^\wedge (\in_B \text{ の定義}) \\
&= [\in_B \circ (1_B \times [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}'}) \circ (1_B \times [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m}\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^\wedge \\
&= [\in_B \circ (1_B \times ([\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}))]^\wedge \\
&= [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．したがって，$x_1, ..., x_n$ の中で自由変数を持つ任意の項 τ に対して，任意の解釈のもので，$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ... x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ が成立する． □

補題 5.3.5 代入補題

[*1] τ を $z_1, ..., z_m$ の中に自由変数を持つ任意の項とし，$\sigma_1, ..., \sigma_m$ を $1 \leq i \leq$ それぞれに対して，σ_i が τ の中で，z_i に対して自由あるものとする．このとき，任意のトポスにおける $\mathscr{L}$ の解釈に対して，以下が成立する：

$$[\![\tau(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle\sigma_{\mathbf{1}}, ..., \sigma_{\mathbf{m}}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$$

（ここで，$\mathbf{x}$ は $\sigma_1, ..., \sigma_m$ のすべての自由変数を含んでいるとする．）

Proof. τ の構成に関する帰納法で証明する．原始式の場合と，$\{y : \alpha\}$ 以外の場合は前補題と同様にほとんど定義をなぞるだけなので省略する．

($\{y : \alpha\}$ **の場合):**

このとき，y を型 $\mathbf{B}$ の項，$\{y : \alpha\}$ を型 $\mathbf{PB}$ の項とする．まず，以下の二つに場合分けをして考えることにする．

((i) y が $z_1, ..., z_m$ の中に存在しない場合):

このとき，以下が成立する:

$$\begin{aligned}
[\![\{y : \alpha\}(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![\{y : \alpha(\mathbf{z}/\sigma)\}]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [[\![\alpha(\mathbf{z}/\sigma)(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge} \\
&= [[\![\alpha(y/u)(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}
\end{aligned}$$

((ii) y が $z_1, ..., z_m$ の中に存在する場合):

このとき，$\mathbf{z} = y\mathbf{z}', \sigma = \rho\sigma'$ と書くことができ，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\{y : \alpha\}(y\mathbf{z}'/\rho\sigma')]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![\{\rho : \alpha(\mathbf{z}/\sigma)\}]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [[\![\alpha(\mathbf{z}/\sigma)(\rho/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge} \\
&= [[\![\alpha(y/u)(y\mathbf{z}'/\rho\sigma')]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}
\end{aligned}$$

よって，(i)(ii) より，y の自由変数の位置によらずに議論を進めていくことができるとわかる．ここで，帰納法の仮定と補題 5.3.3(テクニカル補題) を使うと以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\{y : \alpha\}(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} &= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ [\![\langle u, \sigma_1, ..., \sigma_m\rangle]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}(\text{帰納法の仮定}) \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \langle\pi_1, [\![\sigma_1]\!]_{\mathbf{x}} \circ [\![\langle x_1, ..., x_n\rangle]\!]_{u\mathbf{x}}, ..., [\![\sigma_m]\!]_{\mathbf{x}} \circ [\![\langle x_1, ..., x_n\rangle]\!]_{u\mathbf{x}}\rangle_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge} \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \langle\pi_1, [\![\sigma_1]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj, ..., [\![\sigma_m]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj\rangle_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}(proj = [\![\langle x_1, ..., x_n\rangle]\!]_{u\mathbf{x}}\text{による}) \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}^* \circ (1_B \times [\![\langle\sigma_1, ..., \sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^{\wedge}(5.3.3) \\
&= [\in_B \circ (1_B \times [\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{z}} \circ \mathrm{can}^*)^{\wedge} \circ (1_B \times [\![\langle\sigma_1, ..., \sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^{\wedge}(\in_B \text{ の定義}) \\
&= [\in_B \circ (1_B \times [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{z}}) \circ (1_B \times [\![\langle\sigma_1, ..., \sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^{\wedge} \\
&= [\in_B \circ (1_B \times [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{z}}) \circ [\![\langle\sigma_1, ..., \sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}}]^{\wedge} \\
&= [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle\sigma_1, ..., \sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

[*1] [2] に掲載されているこの補題の証明に一部間違いが見られた．本論文には，その間違いを訂正したものを掲載した．

よって，$[\![\{y:\alpha\}(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\{\mathbf{y}:\alpha\}]\!]_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle\sigma_{\mathbf{1}},...,\sigma_{\mathbf{m}}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

□

定義 5.3.6 妥当性

トポスにおける $\mathscr{L}$ の解釈 $\mathbf{I}$ が与えられたとする．このとき，任意の式の有限集合 $\Gamma=\{\alpha_1,...,\alpha_m\}$ に対する $\mathbf{I}$ 解釈を以下のように書くことにする：

$$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{I},\mathbf{x}} = \begin{cases} [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{I},\mathbf{x}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_m]\!]_{\mathbf{I},\mathbf{x}} & m>0 \text{ のとき} \\ \mathrm{true}_{\mathbf{A}} & m=0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(ただし，$\mathbf{A}$ は項 $\mathbf{x}$ の型とする．)

また，式 β が与えられたとし，$\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ を $\Gamma\cup\beta$ におけるすべての自由変数を含むとする．このとき，シーケント $\Gamma:\beta$ が解釈 I のもとで妥当であること $(\Gamma\models_{\mathbf{I}}\beta)$ を，以下のように定める：

$$\Gamma \models_{\mathbf{I}} \beta \iff [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{I},\mathbf{x}} \le [\![\beta]\!]_{\mathbf{I},\mathbf{x}}$$

(以下の図式を参照):

$$\begin{tikzcd}
dom(\overline{[\![\Gamma]\!]_{I,\mathbf{x}}}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{[\![\Gamma]\!]_{I,\mathbf{x}}}"'] & dom(\overline{[\![\beta]\!]_{I,\mathbf{x}}}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{[\![\beta]\!]_{I,\mathbf{x}}}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}_{\mathbf{A}}"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "1_{\mathbf{A}}"'] \arrow[rr, bend right, "[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "[\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

以下，このように定めた妥当性の元で成り立つことを確認していくことにする．

補題 5.3.7

以下が成立する．(なお，$\mathbf{x}=(x_1,...,x_n)$ で $\mathbf{A}=A_1\times...\times A_n$ であり，$x_i:A_i(1\le n)$ とする．)：

$$\models_{\mathbf{I}} \alpha \iff [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$$

Proof. $(\Leftarrow)$:明らか.
$(\Rightarrow)$:$\mathbf{x}$ の型を $\mathbf{A}$ であるので，以下の可換図式を考えれば明らかに成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "1_{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "\mathrm{true}_{\mathbf{A}}"] \\
\Omega \arrow[r, "1_{\Omega}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

□

注意 5.3.8

これにより，degenerate トポス (始対象と終対象が同型となるトポス) においては任意の式が妥当になることが分かる．

補題 5.3.9

以下が成立する．(なお，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ で $\mathbf{A} = A_1 \times ... \times A_n$ であり，$x_i : A_i (1 \leq n)$ とする．)：

$$\Gamma \models_{\mathbf{I}} \alpha \iff [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\Gamma \models_{\mathbf{I}} \alpha &\iff [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \\ &\iff \mathrm{true}_{\mathbf{A}} = [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} (\text{補題 } 5.1.24(2))\end{aligned}$$

□

補題 5.3.10

以下が成立する：

$$\Gamma \models_{\mathbf{I}} \sigma = \tau \iff [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\Gamma \models_{\mathbf{I}} \sigma &\iff [\![\sigma = \tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_A (\text{補題 } 5.3.9) \\ &\iff \delta_B \circ \langle [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}}, [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_A \\ &\iff \delta_B \circ \langle [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}, [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \rangle = \mathrm{true}_A \\ &\iff [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} (\text{補題 } 5.1.24(3))\end{aligned}$$

□

補題 5.3.11

以下が成立する．(なお，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ で $\mathbf{A} = A_1 \times ... \times A_n$ であり，$x_i : A_i (1 \leq n)$ とする．)：

$$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) \wedge \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$$

$$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})$$

Proof. $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}$ より，$\mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} -(1)$ を得る．一方で，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$ より，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) -(2)$ を得る．したがって，(1)(2) より，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})$ が成立する．

同様にして，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})$ も容易に示すことができる． □

補題 5.3.12

x を Γ または α で自由でない変数とする．このとき，以下が成立する：

$$[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} = [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}$$

Proof.「x を Γ または α で自由でない変数」という条件より，補題 5.3.4(余剰変数における補題) を使うことができる. よって，

$$\begin{aligned}[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} &= [\![\alpha_1]\!]_{x\mathbf{y}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_m]\!]_{x\mathbf{y}} \\ &= [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{y}} \circ [\![\langle y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{x\mathbf{y}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_m]\!]_{\mathbf{y}} \circ [\![\langle y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{x\mathbf{y}} (\text{補題 } 5.3.4) \\ &= ([\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{y}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_m]\!]_{\mathbf{y}}) \circ [\![\langle y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{x\mathbf{y}} (\text{命題 } 5.1.22) \\ &= [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}\end{aligned}$$

$\square$

補題 5.3.13

以下が成立する：

$$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{y}} \implies [\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{x\mathbf{y}}$$

Proof.

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{y}} &\implies [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} (\text{命題 5.1.17}) \\
&\iff [\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{x\mathbf{y}} (\text{補題 5.3.12})
\end{aligned}$$

$\square$

補題 5.3.14

以下が成立する：

$$\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}} \sim \mathrm{can} \circ (1 \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})$$

Proof. 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\pi_2'"] \arrow[d, "1\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}}"'] & \cdot \arrow[d, "\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}}"] \\
\cdot \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \cdot \arrow[d, "1"] \\
\cdot \arrow[r, "\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1}"'] & \cdot
\end{tikzcd}$$

上図における上と下の 2 つの四角形はプルバックである．よって，全体の四角形もまたプルバックとなる．実際に，簡単な場合として以下の図式を考える（一般の場合でも同様）：

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\pi_2'"] \arrow[d, "1_A\times f"'] & B \arrow[d, "f"] \\
A \times C \arrow[r, "\pi_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

これは明らかに可換である．また，

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "f"] \\
A \times C \arrow[r, "\pi_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

を可換にする任意の対象 S に対して，射 $u : S \to A \times B$ を $u = \langle \pi_1 g, h \rangle$ と定義すると，明らかにプルバックとなる．u の唯一性は積の普遍性により保証される．よって，上の四角形はプルバックである．

また，同様にして以下の図を考える：

$$
\begin{tikzcd}
A \times (B \times C) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & B \times C \arrow[d, "1"] \\
A \times B \times C \arrow[r, "\pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}"'] & B \times C
\end{tikzcd}
$$

これは明らかに可換である．また，

$$
\begin{tikzcd}
D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B \times C \arrow[d, "1"] \\
A \times B \times C \arrow[r, "\pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}"'] & B \times C
\end{tikzcd}
$$

を可換にする任意の対象 D に対して，射 $u : D \to A \times (B \times C)$ を $u = \langle \pi_1 \circ f, g \rangle$ と定義すると，明らかにプルバックとなる．u の唯一性は積の普遍性によって保証される．よって，下の四角形もプルバックである．あとは，補題 3.3.11(2-プルバック補題) により，全体の四角形もプルバックになることがわかる．
また，以下が成り立つ：

$$
\begin{aligned}
\chi(\mathrm{can} \circ (1 \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})) &= \chi(\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}}) \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} (\text{命題 } 5.1.9) \\
&= [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} \\
&= [\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} (\text{補題 } 5.3.12)
\end{aligned}
$$

よって，$\mathrm{can} \circ (1 \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})$ と $\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}}$ の間には，一対一の対応が存在する．ゆえ，$dom(\mathrm{can} \circ (1 \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})) \cong dom(\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}})$ となる．よって，$\mathrm{can} \circ (1 \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}}) \sim \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}}$ を得る． □

注意 5.3.15
以下のように書くことにする：

$$
\Gamma \models \alpha \iff \text{任意の解釈 } I \text{ に対して} \Gamma \models_I \alpha
$$

$$
\frac{\Gamma_1 \models_I \alpha_1, ..., \Gamma_n \models_I \alpha_n}{\Delta \models_I \beta} \iff \Gamma_1 \models_I \alpha_1, ..., \Gamma_n \models_I \alpha_n \implies \Delta \models_I \beta
$$

$$
\frac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta} \iff \text{任意の解釈 } I \text{ に対して} \frac{\Gamma_1 \models_I \alpha_1, ..., \Gamma_n \models_I \alpha_n}{\Delta \models_I \beta}
$$

また，任意の $\mathscr{L}$ における Local Set Theory S に対して，S のすべての公理が解釈 I の元で妥当であるなら，その解釈 I を S のモデルと言う．そして，S の任意のモデルに対して $\Gamma \models_I \alpha$ となるなら，$\Gamma \models_S \alpha$ と書く．

ここに来て，ようやく健全性定理の証明に取りかかることができる．

定理 5.3.16 健全性定理
以下が成立する：

(1) $\Gamma \vdash \alpha \implies \Gamma \models \alpha$

(2) $\dfrac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta} \implies \dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta}$

(3) $\Gamma \vdash_S \alpha \implies \Gamma \models_S \alpha$

Proof. (1) が成り立てば (2)，(3) も成り立つ．実際に，(2) は (1) と規則の適応から導きことができる．また，(3) に関しては，$\Gamma \vdash_S \alpha$ を導くのに必要な公理を $\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n$ とすると，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash_S \alpha &\implies \frac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Gamma : \alpha} \\
&\implies \frac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Gamma \models \alpha} \\
&\implies \Gamma \models_S \alpha
\end{aligned}$$

よって，(3) が成立する．したがって，(1) を示せば十分である．
以下，実際に (1) をすべての公理と規則に対して成り立つことを直接示すことによって証明する．

(**Tautology**) $\alpha \models_I \alpha$

Proof. $[\![\alpha]\!]_{I,\mathbf{x}} \leq [\![\alpha]\!]_{I,\mathbf{x}} \iff \alpha \models_I \alpha$

□

(**Unity**) $\models_I x_1 = *$

Proof. $\mathbf{x} : \mathbf{A}$ とすると，

$$\begin{aligned}
[\![x_1 = *]\!]_{\mathbf{x}} &= \delta_{\mathbf{A}} \circ [\![\langle x_1, * \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle [\![x_1]\!]_{\mathbf{x}}, [\![*]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle !_{\mathbf{A}}, !_{\mathbf{A}} \rangle \\
&= \mathrm{true}_A
\end{aligned}$$

□

(**Equality**)
(i) $\models_I x = x$
(ii) $x = y, \alpha(z/x) \models_I \alpha(z/y)$

Proof. (i) : $\mathbf{x} : \mathbf{A}$ とすると，

$$\begin{aligned}
[\![x = x]\!]_{\mathbf{x}} &= \delta_{\mathbf{A}} \circ [\![\langle x, x \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle [\![x]\!]_{\mathbf{x}}, [\![x]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle \pi_A, \pi_A \rangle \\
&= \mathrm{true}_A
\end{aligned}$$

(ii) :x, y, z を異なる変数とし，z を α の中で自由に現れるものとする．$z, v_1, ..., v_n$ を α の自由変数とし，以下の式を考える：

$$u \leq [\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \wedge [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}}$$

このとき，補題 5.1.20 より以下が成立する：

$$\begin{aligned} u \leq [\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \wedge [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}} &\iff u \leq [\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \text{かつ } u \leq [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}} (\text{補題 } 5.1.20) \\ &\iff u \leq \delta_{xy\mathbf{v}} \circ \langle [\![x]\!]_{xy\mathbf{v}}, [\![y]\!]_{xy\mathbf{v}} \rangle - (1) \text{ かつ } u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} - (2)(\text{補題 } 5.3.5) \end{aligned}$$

ここで，(1) と補題 5.1.18 より，$[\![x]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} = [\![y]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} - (3)$ を得る．また，(2) と補題 5.1.16 より，以下が成り立つ：

$$u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \text{を満たすような射 } h : dom(\bar{u}) \to dom(\overline{[\![\alpha]\!]_{x\mathbf{v}}}) \text{ が存在する}$$

いま，$u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}}$ は以下のように変形することができる：

$$\begin{aligned} u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \iff \overline{[\![\alpha]\!]_{x\mathbf{v}}} \circ h &= [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} \\ &= \langle [\![x]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, [\![v_1]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, ..., [\![v_n]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u} \rangle \\ &= \langle [\![y]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, [\![v_1]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, ..., [\![v_n]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u} \rangle ((3) \text{ による}) \\ &= [\![\langle y, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} \end{aligned}$$

それゆえ，補題 5.1.16 をもう一度適用させると，以下を得る：

$$u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle y, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} = [\![\alpha(z/y)]\!]_{xy\mathbf{v}} (\text{補題 } 5.3.5(\text{代入補題}))$$

よって，u は任意の変数なので以下の式を得る：

$$[\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \wedge [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}} \leq [\![\alpha(z/y)]\!]_{xy\mathbf{v}}$$

ゆえ，$x = y, \alpha(z/x) \models_I \alpha(z/y)$ となる． □

(**Products**)

$(i) \models_I (\langle x_1, ..., x_n \rangle)_i = x_i$

$(ii) \models_I x = \langle (x)_1, ..., (x)_n \rangle$

Proof. 補題 5.3.10 を使えば即座に成り立つ． □

(Comprehension) $\models_I x \in \{x : \alpha\} \iff \alpha$

Proof. まず，以下の補題を証明する．

<u>補題 **5.3.17**</u>

can′ を以下のような標準的な同型射であるとする：

$$\text{can}' : A \times (A \times A_1 \times .... \times A_n) \to A \times A \times A_1 \times ... \times A_n$$

η を以下のような射とする：

$$\eta = \langle \pi_2, ..., \pi_n \rangle \circ \mathrm{can}' : A \times (A \times A_1 \times .... \times A_n) \to A \times A_1 \times ... \times A_n$$

また，ε を以下のような射とする：

$$\varepsilon : \langle \pi_2, ..., \pi_n \rangle : A \times A_1 \times ... \times A_n \to A_1 \times ... \times A_n$$

このとき，任意の射 $g : A \times A_1 \times ... \times A_n \to \Omega$ に対して，以下が成立する：

$$(g \circ \eta)^\wedge = (g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon$$

Proof. (補題の証明) : 任意の射 $h : A_1 \times ... \times A_n \to X$ に対して，以下の等式が成り立つことが簡単に確認することができる：

$$(1_A \times h) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times (h \circ \varepsilon)$$

実際に，以下の可換図式を考えれば良い：

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \times A_1 \times ... \times A_n) \arrow[d, "\eta"] \arrow[dd, bend left=60, "1_A \times \varepsilon"] \\
A \times A_1 \times ... \times A_n \arrow[d, "\mathrm{can}^{-1}"] \\
A \times (A_1 \times ... \times A_n) \arrow[d, "1_A \times h"] \\
A \times X
\end{tikzcd}$$

上図の積の普遍性より，以下を得る：

$$\begin{aligned}
\mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times \varepsilon (\text{積の普遍性}) &\iff (1_A \times h) \circ (\mathrm{can}^{-1} \circ \eta) = (1_A \times h) \circ (1_A \times \varepsilon) \\
&\iff (1_A \times h) \circ (\mathrm{can}^{-1} \circ \eta) = 1_A \times (h \circ \varepsilon)
\end{aligned}$$

したがって，$(1_A \times h) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times (h \circ \varepsilon)$ が成立する．ここで，$h = (g \circ \mathrm{can})^\wedge$ とすると，$(1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times ((g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon)$ を得る．それゆえ，以下の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\in_A \circ (1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon) &= e_A \circ (1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta \\
&= g \circ \mathrm{can} \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta \\
&= g \circ \eta
\end{aligned}$$

なお，二つ目の等号は，以下の図式が可換であることによる：

$$\begin{tikzcd}
A \times (A_1 \times ... A_n) \arrow[d, swap, "1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge"] \arrow[dr, "g \circ \mathrm{can}"] & \\
A \times PA \arrow[r, swap, "\in_A"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

最後にパワー対象の普遍性から，$(g \circ \eta)^\wedge = (g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon$ が成立する． $\square$

ここから本題の証明に入る．x を型 $\mathbf{A}$ の変数で，$v_1,...,v_n$ を型 $\mathbf{A_1}\times...\times\mathbf{A_n}$ の変数だとする．このとき，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\llbracket x\in\{x:\alpha\}\rrbracket_{x\mathbf{v}} &= \in_A\circ\langle\llbracket x\rrbracket_{x\mathbf{v}},(\llbracket\alpha(x/u)\rrbracket_{ux\mathbf{v}}\circ\mathrm{can}')^\wedge\rangle \\
&= \in_A\circ\langle\pi_1,(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\llbracket\langle u,v_1,...,v_n\rangle\rrbracket_{ux\mathbf{v}}\circ\mathrm{can}')^\wedge\rangle(\text{補題 5.3.5(代入補題)}) \\
&= \in_A\circ\langle\pi_1,(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\eta)^\wedge\rangle \\
&= \in_A\circ\langle\pi_1,(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can})^\wedge\circ\varepsilon\rangle(\text{前補題}) \\
&= \in_A\circ(1_A\times(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can})^\wedge)\circ\mathrm{can}^{-1}(\text{可換性のチェックが必要}) \\
&= \llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can}\circ\mathrm{can}^{-1}(\in_A\text{ の定義}) \\
&= \llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}
\end{aligned}$$

よって，$\llbracket x\in\{x:\alpha\}\rrbracket_{x\mathbf{v}}=\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}$ を得る．ここで，補題 5.3.10 より，$\models_I x\in\{x:\alpha\}=\alpha$ を得る．5 つ目の等式が成り立つことを確認する．まず，以下の可換図式を考える：

$$\begin{tikzcd}
A & A\times A_1\times...A_n \arrow[l, "\pi_1"] \arrow[d, "\mathrm{can}^{-1}"'] & \\
 & A\times(A_1\times...A_n) \arrow[d, "1_A\times(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can})^\wedge"'] \arrow[dr, bend left, "\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can}"] & \\
 & A\times\Omega^A \arrow[r, "e_A"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

また，以下のような標準的な可換図式を考えることができる：

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "1_A"'] & A\times A_1\times...A_n \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\langle\pi_1,(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can})^\wedge\circ\varepsilon\rangle"'] & A_1\times...A_n \arrow[d, "(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can})^\wedge"] \\
A & A\times\Omega^A \arrow[l] \arrow[r] & \Omega^A
\end{tikzcd}$$

上二つの図式と，積の普遍性より，以下の等式を得る：

$$\langle\pi_1,(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can})^\wedge\circ\varepsilon\rangle=1_A\times(\llbracket\alpha\rrbracket_{x\mathbf{v}}\circ\mathrm{can})^\wedge\circ\mathrm{can}^{-1}$$

□

以上により，すべての公理が妥当であることが確認できた．次に，規則に関して公理と同様の議論を進めていくことにする．

(**Thining**[*2])

$$\frac{\Gamma\models_I\alpha}{\beta,\Gamma\models_I\alpha}$$

Proof. $\llbracket\Gamma\rrbracket_{\mathbf{x}}\le\llbracket\alpha\rrbracket_{\mathbf{x}}$ に対して，補題 5.3.13 より，$\llbracket\Gamma\rrbracket_{\mathbf{yx}}\le\llbracket\alpha\rrbracket_{\mathbf{yx}}$ を得る．ここで，$y_1,...,y_n=\mathbf{y}$ は β の addtional 自由変数であるとする．それゆえ，補題 5.1.21 より，$\llbracket\beta\rrbracket_{\mathbf{yx}}\wedge\llbracket\Gamma\rrbracket_{\mathbf{yx}}\le\llbracket\alpha\rrbracket_{\mathbf{yx}}$ を得る．したがって結果が従う． □

[*2] [2] に掲載されているこの部分の証明で補題 5.3.13 の使い方が適切ではなかった．本論文には，修正したものを掲載した．

(**Cut**[*3])

$$\frac{\Gamma \models_I \alpha \quad \alpha, \Gamma \models_I \beta}{\Gamma \models_I \beta}$$

α の任意の自由変数は，Γ, β において自由であるとする．

Proof. $[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}$ と $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\beta]\!]_{\mathbf{yx}}$ を考える．ここで，$y_1, ..., y_n = \mathbf{y}$ は β の additional 自由変数であるとする．まず, 補題 5.3.13 より, $[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}}$ を得る．また, 補題 5.1.21 より, $[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}}$ と $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}}$ が成り立つ．よって，$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} = [\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\beta]\!]_{\mathbf{yx}}$ を得る．したがって，求めていた式が成り立つ．

□

(**Substitution**)

$$\frac{\Gamma \models_I \alpha}{\Gamma(x/\tau) \models_I \alpha(x/\tau)}$$

Proof. x を Γ, α における自由変数であるとする．（そうでなければ，Substitution は自明に成り立つ．）このとき，$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}}$ を考える．補題 5.1.17 と補題 5.1.22 より以下の式を得る:

$$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}}$$

(ここで，$z_1, ..., z_n$ は τ の addtional 自由変数であるとする．) 実際に，

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} &\iff [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \\
&\iff [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \text{かつ} ... [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \\
&\implies [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \text{かつ} ... \text{かつ } [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{zy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} (\text{補題 } 5.1.17) \\
&\iff [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{xy}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \\
&\iff ([\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}}) \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} (\text{補題 } 5.1.22) \\
&\iff [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}}
\end{aligned}$$

ここで，両辺に補題 5.3.5(代入補題) を適用すると，求めていた式 $[\![\Gamma(x/\tau)]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha(x/\tau)]\!]_{\mathbf{xy}}$ を得る． □

(**Extensionally**[*4])

$$\frac{\Gamma \models_I x \in \sigma \iff x \in \sigma}{\Gamma \models_I \sigma = \tau}$$

ここで，変数 x は Γ, σ, τ において自由でない．

Proof. $\Gamma \models_I x \in \sigma \iff x \in \tau$ を考える．このとき，補題 5.3.10 より以下の式を得る：

$$[\![x \in \sigma]\!]_{x\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} = [\![x \in \tau]\!]_{x\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} - (1)$$

---

*3 [2] に掲載されているこの部分の証明で補題 5.3.13 の使い方が適切ではなかった．本論文には，修正したものを掲載した．

*4 [2] に掲載されているこの部分の証明に一部間違いが見られた．本論文には，その間違いを訂正したものを掲載した．

補題 5.3.14 から，以下の図式を可換にするような同型射 i が存在する：

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}}"'] & & \cdot \arrow[dl, "\mathrm{can}\circ(1_A\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}})"] \\ & \cdot & \end{tikzcd}$$

ここで x は型 A の変数とする．よって，以下の等式を得る：

$$\begin{aligned}
[\![x\in\sigma]\!]_{x\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} &= \in_A\circ[\![\langle x,\sigma\rangle]\!]_{x\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}}\\
&= \in_A\circ\langle[\![x]\!]_{x\mathbf{z}},[\![\sigma]\!]_{x\mathbf{z}}\rangle\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}}\\
&= \in_A\circ\langle\pi_1,[\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1}\rangle\circ\mathrm{can}\circ(1_A\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})\circ i(\text{補題 5.3.12と同型射 } i \text{ の存在})\\
&= \in_A\circ\langle\pi_1\circ\mathrm{can},[\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\pi_2\rangle\circ(1_A\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})\circ i\\
&= \in_A\circ(1_A\times[\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}})\circ(1_A\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})\circ i\\
&= \in_A\circ(1_A\times([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}))\circ i
\end{aligned}$$

それゆえ，(1) より，$\in_A\circ(1_A\times([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}))\circ i=\in_A\circ(1_A\times([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}))\circ i$ を得る．よって，i はエピ射でもあるので，$\in_A\circ(1_A\times([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}))=\in_A\circ(1_A\times([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}))$ を得る．また，

$$\begin{aligned}
\in_A\circ(1_A\times([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}))=\in_A\circ(1_A\times([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})) &\iff ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})^\wedge=([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})^\wedge\\
&\Longrightarrow ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})=([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})
\end{aligned}$$

となる．したがって，補題 5.3.10 より，$\Gamma\models_I\sigma=\tau$ を得る． □

(**Equivarence**)

$$\frac{\alpha,\Gamma\models_I\beta\quad\beta,\Gamma\models_I\alpha}{\Gamma\models_I\alpha\iff\beta}$$

Proof. $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}\wedge[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}\leq[\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}$ と $[\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}\wedge[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}\leq[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}$ を考える．このとき，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}\wedge[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}=[\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}\wedge[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}-(1)$ が成立する．

よって，以下の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} &= ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})\wedge\mathrm{true}_{\mathbf{A}}(\text{補題 5.3.11})\\
&= ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})\wedge([\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})\\
&= ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}\wedge[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}})\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}(\text{補題 5.1.22})\\
&= ([\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}\wedge[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}})\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}((1)\text{ より})\\
&= ([\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})\wedge([\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})(\text{補題 5.1.22})\\
&= ([\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})\wedge\mathrm{true}_{\mathbf{A}}\\
&= [\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}\circ\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}(\text{補題 5.3.11})
\end{aligned}$$

よって，補題 5.3.10 より，求めていた式 $\Gamma\models_I\alpha\iff\beta$ を得る． □

以上より，すべての規則も妥当になることが確認できた．よって，健全性定理のすべての証明が完了した． □

5.4 完全性定理と同値定理

Local Set Theory とトポスの間には，健全性定理のみならず完全性定理も成立する．完全性定理を証明するために，いましばらく準備を要する．以下で提示する命題はほとんど証明を省略してあることに注意していただきたい（証明を含めてしっかりと理解したい方は [2]3 章以降を参照していただきたい).

定義 5.4.1 Local language における集合論

Local language $\mathscr{L}$ の集合的項はパワー型の項であるとする．集合的閉項のことを $\mathscr{L}$ 集合，もしくは単に集合と呼ぶことにする．以下，$A, B, ..., Z$ を集合とし，以下のように集合論的な演算や関係を定義する：

(1)	$X \subseteq Y$	for	$\forall x(x \in X \implies x \in Y)$
(2)	$X \cap Y$	for	$\{x : x \in X \wedge x \in Y\}$
(3)	$X \cup Y$	for	$\{x : x \in X \vee x \in Y\}$
(4)	$U_{\mathbf{A}}$	for	$\{x_{\mathbf{A}} : \mathrm{true}\}$
(5)	$\emptyset_{\mathbf{A}}$	for	$\{x_{\mathbf{A}} : false\}$
(6)	$-X$	for	$\{x : \neg(x \in X)\}$
(7)	PX	for	$\{u : u \subseteq X\}$
(8)	$\cap U$	for	$\{x : \forall u(u \in U \implies x \in u)\}$
(9)	$\cup U$	for	$\{x : \exists u(u \in U \implies x \in u)\}$
(10)	$\cap_{i\in I} X_i$	for	$\{x : \forall i(i \in I \implies x \in X_i\}$
(11)	$\cup_{i\in I} X_i$	for	$\{x : \exists i(i \in I \implies x \in X_i\}$
(12)	$\{\tau\}$	for	$\{x : x = \tau\}$
(13)	$\{\sigma = \tau\}$	for	$\{x : x = \sigma \vee x = \tau\}$
(14)	$\{\tau : \alpha\}$	for	$\{z : \exists x_1, ..., \exists x_n(z = \tau \wedge \alpha)\}$
(15)	$X \times Y$	for	$\{\langle x, y\rangle : x \in X \wedge y \in Y\}$
(16)	$X + Y$	for	$\{\langle\{x\}, \emptyset\rangle : x \in X\} \cup \{\langle\emptyset, \{y\}\rangle : y \in Y\}$
(17)	X^Y	for	$\{u : u \subseteq Y \times X \wedge \forall y \exists! x(y \in Y \wedge x \in X \implies \langle y, x\rangle \in u)\}$
(18)	$\prod_{i\in I} X_i$	for	$\{u \in U^I_{\mathbf{A}} : \forall i(i \in I \implies \{x : \langle i, x\rangle \in u\} \subseteq X_i)\}$
(19)	$\coprod_{i\in I} X_i$	for	$\{\langle i, x\rangle : i \in I \wedge x \in X_i\}$

このように定義すると，古典的な集合論で成り立つ基本的な事実が，Local language の枠組みにおいても成り立つと示せる (例えば，$\vdash X \in PY \iff X \subseteq Y$ などが実際に証明できる).

定義 5.4.2 Local Set Theory S から生成される圏 (トポス)

Local Set Theory S から生成される圏 $\mathbf{C}(S)$ を以下のように定義する：

(対象):

$$X \sim_S Y \iff \vdash_S X = Y$$

で定義される同値関係 $\sim_S$ によって類別されるクラス $[X]_S$ を対象とする．このクラス $[X]_S$ を S 集合という．以下では，$[X]_S$ を単に X と書くことにする.

(射): S 射 $f : X \to Y$ は S 集合の 3 つ組 (f, X, Y) のことで，$\vdash_S f \in Y^X$ を満たす.

以下では，単に f と書くことにする．

以上のように定義された圏 $\mathbf{C}(S)$ は，圏の定義を満たすことを示せる．さらに，この圏はトポスであることも証明できる (このことを証明をするには多くの労力を要する)．

定理 5.4.3

圏 $\mathbf{C}(S)$ はトポスである．

Proof. 省略 □

この事実は，完全性定理のみならず，同値定理においても極めて重要である．圏 $\mathbf{C}(S)$ のことを linguistic トポスと言う．

定義 5.4.4 標準解釈

Local language $\mathscr{L}$ における Local Set Theory S に対して，$\mathbf{C}(S)$ の $\mathscr{L}$ における標準解釈 $C(S)$ を以下のように定義する：

任意の型 $\mathbf{A}$ に対して，$\mathbf{A}_{C(S)} = U_{\mathbf{A}}$

任意の $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ なる関数シンボル f に対して，$\mathbf{f}_{C(S)} = x \mapsto \mathbf{f}(x) : U_{\mathbf{A}} \to U_{\mathbf{B}}$

補題 5.4.5

以下が成立する：

$$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} \mapsto \tau)$$

Proof. 省略 □

命題 5.4.6

以下が成立する：

$$\Gamma \models_{C(S)} \alpha \iff \Gamma \vdash_S \alpha$$

Proof. 補題 5.4.5 を用いると以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\models_{C(S)} \alpha &\iff [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \\
&\iff (\mathbf{x} \mapsto \alpha) = (\mathbf{x} \mapsto \mathrm{true})(\text{補題 5.4.5}) \\
&\iff \vdash_S \alpha = \mathrm{true} \\
&\iff \vdash_S \alpha(\text{命題 5.2.8})
\end{aligned}$$

さらに，より一般的に以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash_S \alpha &\iff \wedge\Gamma \vdash_S \alpha(\text{命題 5.2.11}) \\
&\iff \vdash_S \wedge\Gamma \implies \alpha(\text{命題 5.2.10}) \\
&\iff \models_{C(S)} \wedge\Gamma \implies \alpha \\
&\iff \wedge\Gamma \models_{C(S)} \alpha(\text{定理 5.3.16}) \\
&\iff \Gamma \models_{C(S)} \alpha(\text{定理 5.3.16})
\end{aligned}$$

下二つの同値性は，健全性定理から得られる． □

これより完全性定理の証明に入る．

定理 5.4.7 完全性定理

以下が成立する：

(1) $\Gamma \models \alpha \implies \Gamma \vdash \alpha$

(2) $\dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta} \implies \dfrac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$

(3) $\Gamma \models_S \alpha \implies \Gamma \vdash_S \alpha$

Proof. (1) : $\Gamma \models \alpha$ が成り立つとすると，もちろん $\Gamma \models_{C(S)} \alpha$ が成り立つ．よって，命題 5.4.6 より $\Gamma \vdash \alpha$ が成立する．よって，$\Gamma \models \alpha \implies \Gamma \vdash \alpha$ となる．
(2) : S を $\{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n\}$ のシーケントの集合とする．このとき，明らかに以下の (5.1)(5.2) が成立する：

$$\Delta \vdash \beta \iff \frac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta} \tag{5.1}$$

$$\Gamma_1 \vdash_S \alpha_1, ..., \Gamma_n \vdash_S \alpha_n \tag{5.2}$$

ここで，仮定より以下の (5.3) を考える：

$$\frac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta} \tag{5.3}$$

(5.2) と命題 5.4.6 より，

$$\Gamma_1 \models_{C(S)} \alpha_1, ..., \Gamma_n \models_{C(S)} \alpha_n$$

を得る．それゆえに，(5.3) より $\Delta \models_{C(S)} \beta$ を得る．よって，再び命題 5.4.6 より，$\Delta \vdash_S \beta$ を得る．よって，(5.1) より，

$$\frac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$$

を得る．
(3) : 命題 5.4.6 より，C(S) は S のモデルである．それゆえ，再び命題 5.4.6 を適用すると以下を得る：

$$\Gamma \models_S \alpha \implies \Gamma \models_{C(S)} \alpha \iff \Gamma \vdash_S \alpha$$

□

定義 5.4.8 トポスによって定まる Local language(内部言語)

$\mathscr{E}$ をトポスとする．このとき，$\mathscr{E}$ によって定まる Local language $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ を，$\mathscr{E}$ の任意の対象 A に対して grand 型シンボル $\mathbf{A}$ と定める．また，型 $\mathbf{A}$ に対して，$\mathscr{E}$ の対象 $\mathbf{A}_{\mathscr{E}}$ を以下のように再帰的に対応づける：

そして，$\mathscr{L}$ の関数シンボルは $(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ の 3 つ組と定める．ここで，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は $\mathscr{L}$ における型であり，f は $\mathscr{E}$ における射 $\mathbf{A}_{\mathscr{E}} \to \mathbf{B}_{\mathscr{E}}$ である．混乱の恐れがない限り，$(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ を単に $\mathbf{f}$ と書く．

$\mathbf{A}_{\mathscr{E}} = \mathbf{A}$　　　　（任意の grand 型シンボル $\mathbf{A}$ に対して）
$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\mathscr{E}} = \mathbf{A}_{\mathscr{E}} \times \mathbf{B}_{\mathscr{E}}$
$(\mathbf{PA})_{\mathscr{E}} = P(\mathbf{A})_{\mathscr{E}}$

定義 5.4.9 トポスから生成される Local Set Theory
トポス $\mathscr{E}$ における $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ の自然な解釈 (natural interpretation) を以下のように定める:

$\mathbf{A}_{\mathscr{E}} = \mathbf{A}$　（任意の grand 型シンボル $\mathbf{A}$ に対して）
$\mathbf{f}_{\mathscr{E}} = f$　　（任意の関数シンボル $\mathbf{f}$ に対して）

トポス $\mathscr{E}$ から生成される Local Set Theory $th(\mathscr{E})$ を $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ の自然な解釈のもとですべての公理が妥当となるような仕方で定義する.

定理 5.4.10 同値定理
任意のトポス $\mathscr{E}$ に対して，以下が成立する：

$$\mathscr{E} \simeq \mathbf{C}(th(\mathscr{E}))$$

つまり，任意のトポスは linguistic トポスと同値である.

Proof. 省略 □

同値定理は直観主義論理とトポスが本質的に同値であることを主張している．トポスという圏論的な性質をほどよく兼ね備えた対象と同値な論理体系が古典論理ではなく，直観主義論理であるという結果は考察するに値する.

注意 5.4.11
同値定理を用いると，直接証明するには多大な労力を要する定理が論理演算のみで証明できてしまう.（例えば，トポスにおける余極限の構成など.）

Local Set Theory という高階直観主義論理の体系とトポスの間には健全性，完全性，さらに同値性が成り立つのである．このことは，前節の内容に加えて，いかにトポスという数学的対象が，性質の良い構造を絶妙に兼ね備えた対象であるかを物語っている.

第 6 章

トポスと数学の基礎

この章では，まず，ここまでの議論のまとめをし，トポスという数学的対象をどのように解釈することが可能であるかを見る．その後に，数学の基礎づけというトポスのもう一つの側面を見る．詳細な議論はすべて割愛したので，詳細な議論が乗っている文献を適時参照してほしい．

6.1　ここまでのまとめ

ここまでの議論から，トポスとは以下のような性質を持つ圏であることが分かった．

注意 6.1.1 トポスの持つ性質

トポスとは，以下の条件を満たす圏 $\mathbf{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathbf{E}$ は有限完備である．

(2) 圏 $\mathbf{E}$ は有限余完備である．

(3) 圏 $\mathbf{E}$ は部分対象分類子を持つ．

(4) 圏 $\mathbf{E}$ はパワー対象を持つ．

(5) 圏 $\mathbf{E}$ は冪対象を持つ．

(6) 圏 $\mathbf{E}$ は前層圏をモデルに持つ．

(7) 圏 $\mathbf{E}$ の任意のエピかつモノとなる射は同型射である．

(8) 圏 $\mathbf{E}$ ではエピ-モノ分解定理が成り立つ．

(9) 圏 $\mathbf{E}$ では基本定理が成り立つ．

(10) 圏 $\mathbf{E}$ と高階直観主義論理との間に健全性と完全性が成り立つ．

(1)〜(5) は，トポスが圏論の基本的な概念を (ほとんど) すべて含んでいるということを言っている．圏論の概念はそれ自体が抽象的で，様々な数学の分野に現れる性質を一般化したものであるので，第 1 章で述べたように，トポスは「数学を展開するのに都合の良い場所」になり得るということを示唆している．

(7)，(8) は，トポスにおける射の性質である．これらの性質は，しばしば「トポスは集合のように振る舞う」と言われる (もちろん他にも「トポスは集合のように振る舞う」という性質は存在する)．集合の圏はトポスであるので，「トポスは集合のように振る舞う」というのはとても当たり前のことを言っているように思えるかもしれない．しかし重要なのは，より一般的なトポスが，集合の圏に見られる特有かつ重要な性質を持ち合わせているということである (つまり，前層やグロタンディーク・トポスも集合のように振る舞うということである)．

さらに，(10) が成り立つことから，ベルや竹内外史氏は「トポスが集合の拡張である」という．つまり，「トポス理論」は，カントール以来続く「集合論」を一般化させた「新しい集合論」というのである．実際に，以下のように言う．

> 層とトポスは両者とも現代的な集合概念の拡張なのである．もっと正確にいえば，われわれの論理を古典論理から直観論理へと移行したときに，我々の集合概念が自然に受ける変化をうけて出てくるものが層であり，またトポスなのである．[31]

そして，(9)，(10) が成り立つこと，加えて，第 3 章 1 節にて示したようにトポスが「積，終対象，冪対象，部分対象分類子を持つ圏」として特徴付けられることから，清水義夫氏は「トポスが普遍論理の有力候補である」[30] という．

清水氏のいう普遍論理とは，われわれの科学での知的認識を支える二つの言語形式「狭義の数理 (数構造にもとづく座標空間を設定し，問題とする現象をその空間内の事柄として定式化していくタイプのもの)」と「狭義の論理 (何らかの順序構造にもとづく区間を設定し，問題とする現象をその区間内の事柄として定式化していくタイプのもの)」を深層で支える，基底的で普遍的な言語形式のことである．

この普遍論理の候補として，20 世紀前半には公理的集合論が挙げられていた．しかし，竹内氏が指摘したようにトポスは集合の拡張であり，集合論特有の概念 (要素の帰属関係など) を圏論的に特徴付けられることによって，柔軟な，変異する集合として見なすことができるために，トポス理論は公理的集合論よりも普遍論理としての適切な候補であるという．

また，清水氏の考える普遍論理の条件とは以下の 3 つである．「汎用性を持つこと」「汎通性 (または対称性) を持つこと」「自然性を持つこと」．そして，トポスがこれらの 3 つの条件を満たしているという．その根拠として，(9)，(10) が成り立つこと，トポスが「積，終対象，冪対象，部分対象分類子を持つ圏」として特徴付けられることを挙げている (詳細は [30] 結びを参照)．

これらの主張には，賛否両論ある．正直なところ，私もあまり納得がいっていない．しかし，「トポスをこのように見ることもできるのではないか？」というのは，トポスに対する理解を深める上でとても有意義なものであるのは疑い得ないように思える．

6.2 トポスと数学の基礎

トポス理論は，圏論的に集合論を再構成する試みの中から生じたということを第 2 章 2 節にて確認した．そして，前節で多少触れたが，トポス理論は「古典的集合論の一般化」であり，「普遍論理の候補」であるという言明が示唆するように，「数学の基礎づけ」という側面がある．この節では，少しだけ「数学の基礎づけ」の話題に踏み込んで，次章「結論」に繋げたいと思う．

現在，「数学の基礎」と言えばツェルメロ・フレンケルらによる集合論 (通称 ZF) に選択公理を付け加えた ZFC である．これは，当時の集合論 (素朴集合論) に「ラッセルのパラドックス」や「ブラリ=フォルティのパラドックス」といういくつかの矛盾が孕んでいることが明らかとなり，この矛盾を回避するために考案された公理的集合論の公理体系の一つである．ZFC は見事にこれらすべての矛盾を回避しながら，多くの数学的対象や定理をその体系の中で構成することに成功した．

もちろん，ZFC と相対無矛盾である公理体系は存在する (例えば，NBG(ノイマン=ベルナイス=ゲーデル集合論))．1966 年にコーエンが強制法という手法を用いて「連続体仮説」がこの ZFC から独立している (つまり，ZFC が無矛盾なら，ZFC の公理系に連続体仮説を加えたものも，連続体仮説の否定を加えたものもど

ちらも無矛盾である) ということが証明されたことをきっかけとして，ZFC は公理的集合論における標準的な公理体系と見なされるようになった．そして，「数学の基礎」といえば ZFC となった．

圏論による数学の基礎づけは，第 1 章でも述べたように，ローヴェアの 1964 年の論文「Elementary Theory of Category of Sets」を起源に持つ．この論文で明らかとなったのは，集合論を圏論の言葉 (対象と射) によって公理化することができるということであった (以下この公理のことを ETCS とする)．

ここで，一度 ETCS の公理を確認してみることにする．なお，以下の書き方はレンスターがローヴェアによる定式化を整理したものであり，非形式的な記述であることに注意する．

定義 6.2.1 ETCS

以下の 10 個の公理を満たす公理系を ETCS という：

1. 関数の合成は結合的で恒等射をもつ
2. 終対象が存在する
3. 元のない集合が存在する
4. 関数は元への効果で決定される
5. 集合 A と B について，積 $A \times B$ が構成できる
6. 集合 A と B について，A から B への関数の集合が構成できる
7. $f : A \to B$ と $b \in B$ について，逆像 $f^{-1}\{b\}$ を構成できる
8. A の部分集合は，A から $\{0, 1\}$ への関数と対応する
9. 自然数たちが集合をなす
10. すべての全射は切片をもつ

この ETCS の公理は，「元」や「逆像」といった言葉を使っているが，これらすべては圏論的に定式化できる．そして，この 10 個の公理を合わせたものは「自然数対象が存在し，選択公理が成り立つ well-pointed トポス[*1]」というトポスに他ならない (トポスの公理を満たしていることは簡単に確認することができる)．つまり，とある条件を満たすトポス上で集合論が展開できるということである．

「集合論を圏論 (もしくはトポス理論) によって公理化できる」という事実から自然と浮かび上がる問いは，「では，ETCS は ZFC に置き換えられるのだろうか？」という問いであろう．そうして，「ZFC に代わって ETCS が (つまり圏論的な公理系が) 数学の基礎となりうる」と主張する陣営と，「それは不可能だ」と主張する陣営に分かれて論争が巻き起こった．

論争の詳細は，それぞれの参考文献を参照していただきたい．論争の中で明らかになった重要なことをピックアップして，結論に移る．

- ETCS は ZFC と比べて無矛盾性の強さがいくらか弱いこと [18] [15].
- ETCS の公理系にとある一つの公理を追加すると ETCS で ZFC を解釈することも可能となること（ETCS の公理系にとある一つの公理を加えてできる公理系は ZFC と相互解釈可能ということ） [19] [12].
- 圏論は集合論から自律できていないためにという圏論による基礎づけは不可能というヘルマンの批判に対して，自律性を論理的 (logial)，概念的 (conceptual)，正当化的な (justificatory) 自律の 3 つに分け，

[*1] 自然数対象が存在し，選択公理が成り立つ well-pointed トポスを詳しく理解されたい方は， [15] や [8] に当たってみると良い．

そのいずれに対しても，(大部分の圏論的基礎づけはヘルマンの言う通りかもしれなが)ETCS はその批判を回避しうるということ [20].

- 「数学の実践」により近いのは，ZFC よりも ETCS であること [9].
- ボトムアップ的アプローチだけでなく，トップダウン的アプローチも数学の基礎を考える上では非常に重要であるということ [16] [29] [27].

第 7 章

結論

7.1 総括

本論文では，トポスの誕生と発展を通して，トポスをインフォーマルに理解したのちに，トポス理論で成り立つ初等的な定理をいくつか紹介し，私の力量の範囲内ではあるが，より厳密な証明を与えた．具体的には，以下の定理である．

- トポスの 3 通りの定義の同値性
- 前層はトポスであること
- トポスにおける余極限の構成
- エピ-モノ分解定理
- 基本定理
- Local Set Theory のトポスモデルにおける健全性定理

また，トポスと普遍論理や数学の基礎との関係を調べ，トポスに対する理解を深めた．トポスは普遍論理や数学の基礎とも密接に関係していることから，数学的，論理学的に興味深い対象であるだけでなく，哲学的にも興味深い対象であることがわかった．

7.2 展望

トポス理論における諸定理は，本論文で紹介した以外にも数多く存在する．トポスに対するフォーマルな理解を深めるためには，本論文では扱うことができなかった，トポス理論の標準的な教科書 [15] や [8] で紹介されている，より高等な（初等的ではない）諸定理を理解する必要があるだろう．

普遍論理に関しては，丸山氏の構想する「圏論的普遍論理」が重要な帰結を与えるように思える．これは，トポスをモナドに相対化させて，部分構造論理 (古典論理や直観主義論理，線形論理，多値論理などを体系的に扱える論理) と，部分構造論理では扱えなかった量子論理を体系的に扱える枠組みを圏論的に与えようというものある．トポス理論の射程を考えるのに，「論理とは何か？」を考えるのに，「圏論的普遍論理」を理解することは重要だろう [17]．

圏論やトポス理論の数学の基礎に関する論争は今も続いている．私が重要だと思うのは「数学の実践」という観点と，「トップダウン的」という観点である．マクラティーは ZFC に比べて ETCS の方が「数学の実践」に近いということを主張している [9]．「数学の実践」に近いということが数学の基礎を考える上でどのような

意味を持ちうるかを考えることは有意義なことのように思える．また，アウディーやローヴェアは数学の基礎を考える上で，今まで，基礎といえば公理があり，そこから「ボトムアップ的」に数学を展開できるかが重要視されてきた．しかし，それだけでなく，基礎を考える上では「トップダウン的」な観点も重要だという．「トップダウン的」な観点からみて，数学，もしくは数学の基礎はどのように見えるのかを考えることは重要に思える [29].

以上の点を踏まえて，今後は以下の 3 つを重点的に研究していこうと思う．

- トポス理論における高等な (初等的ではない) 定理の理解
- トポスと部分構造論理の関係
- 「数学の実践」と「トップダウン的」な観点から見た数学の基礎

謝辞

最後に，指導教員の谷村省吾教授には，ゼミでの指導，論文の書き方の指導のみならず，本論文を細部まで見てくださり，たくさんの助言をくださいました．とくに，論文の提出締め切りが近づき，少し妥協した内容に変更しようかと迷っていた際に，快く相談に乗ってくださいました．これが，とても大きな励みとなり，最後まで諦めずに執筆しようと決意できました．心から感謝申し上げます．

また，哲学に関することでアドバイスをくださった久木田水生准教授にも感謝申し上げます．「数学の哲学」に関する適切な文献を適時教えていただき，「数学の哲学」に関する知識を効率よく身につけられるようにと導いてくださいました．心から感謝申し上げます．

そして，古賀実さんには，夜遅くまでゼミに付き合っていたただき，数学の基本的なことから難しい定理の証明に至るまで丁寧に，そして誠意を持ってご指導いただきました．「前層圏はトポスであること」と「Local Set Theory のトポスモデルにおける健全性定理」の証明を短期間で理解することができたのは，古賀さんあってのことです．心から感謝申し上げます．

2019 年 2 月 1 日

自然情報学科 複雑システム系 川嶋康太

付録 A

グロタンディーク・トポス

> この「ダブル・ベッド」は（魔法の杖のひと振りによるかのように・・・）トポスという考えと共に現れました．この考えは，連続的な大きさの世界を体現している伝統的な（位相）空間をも，頑迷な抽象代数幾何学の（いわゆる）「空間」（あるいは「多様体」）をも，さらには，そのときまで，「不連続」あるいは「離散」な集まりからなる「数論的世界」にどうしょうもないほど固く結びついていると思われていた数知れない他のタイプの構造をも，共通の位相的直観の中に包括しています [7].

「グロタンディーク・トポス」を理解したい方のために，この付録を用意した．主に [15] を参照した．

A.1 グロタンディーク位相

定義 A.1.1 グロタンディーク位相

圏 $\mathbf{C}$ 上のグロタンディーク位相とは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 C に対して，以下のようにして C 上の sieve の集合を割り当てる関数 J のことである：
(i) 極大 sieve t_C は $J(C)$ にの要素である．
$(ii)(stability)$ もし，$S \in J(C)$ であるなら，そのとき，任意の射 $h : D \to C$ に対して，$h^*(S) \in J(D)$ となる．$(h^*(S) = \{g|cod(g) = Dhg \in S\})$
$(iii)(transitivity)$ もし，$S \in J(C)$ でかつ R が S における任意の射 $h : D \to C$ に対して，$h^*(R) \in J(D)$ となる任意の C 上の sieve であるなら，そのとき $R \in J(C)$ となる．

定義 A.1.2 被覆

S を C 上の sieve とする．
$S \in J(C)$ であるとき，S は C を被覆する，もしくは S は C 上の被覆 sieve であるという．
また，射 $f : D \to C$ に対して，$f^*(S) \in J(D)$ となるとき，S は f を被覆するという．

命題 A.1.3

J を圏 $\mathbf{C}$ 上のグロタンディーク位相とする．このとき以下が成立する：

$$S \text{ は } C \text{ を被覆する} \iff S \text{ は } 1_C \text{を被覆する}$$

Proof. $1_C^*(S) = \{g|cod(g) = C, 1_C \circ g \in S\} = \{g|cod(g) = C, g \in S\} = S$ であることと，stability による． □

定義 A.1.4 グロタンディーク位相 (arrow form)

圏 **C** 上のグロタンディーク位相とは，**C** の任意の対象 C に対して，以下のようにして C 上の sieve の集合を割り当てる関数 J のことである：

(ia) S が C 上の sieve で $f \in S$ であるならば，S は f を被覆する．

$(iia)(stability)$ S が射 $f : D \to C$ を被覆するとき，S は任意の射 $g : E \to D$ に対して，その射の合成 $f \circ g$ も被覆する．

$(iiia)(transitivity)$ S が射 $f : D \to C$ を被覆し，R が C 上の sieve であり，S のすべての射を被覆するならば，R は f を被覆する．

命題 A.1.5

上記二つのグロタンディーク位相の定義は同値である．

Proof. arrow form の定義からオリジナルの定義を導くのは，恒等射を考えれば容易である．

実際に，以下が成立する：

$$\begin{aligned}(ia) &\implies S \text{ が } C \text{ 上の } sieve \text{ であり，} 1_C \in S \text{ なら，} S \text{ は } 1_C \text{を被覆する} \\ &\iff S \text{ が } C \text{ 上の } sieve \text{ であり，} 1_C \in S \text{ なら,} S \text{ は極大 } sieve \text{ であり，} S \in J(C) \text{ となる} \\ &\iff (i)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(iia) &\implies S \text{ が } 1_C \text{を被覆し，任意の射 } g : D \to C \text{ に対して，その合成射 } 1_C \circ g \text{ も被覆する} \\ &\iff S \text{ が } C \text{ を被覆するなら，} S \text{ は } g \text{ も被覆する} \\ &\iff S \text{ が } C \text{ を被覆するなら，} g^*(S) \text{ は } D \text{ を被覆する} \\ &\iff (ii)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(iiia) &\implies S \text{ が } 1_C \text{を被覆し，} R \text{ が } C \text{ 上の } sieve \text{ であり，} S \text{ のすべての射を被覆するならば，} R \text{ は } 1_C \text{を被覆する} \\ &\iff S \in J(C) \text{ で，} R \text{ が } S \text{ の任意の射 } h; D \to C \text{ に対して，} \\ &\qquad h^*(R) \in J(D) \text{ を満たすような } C \text{ 上の } sieve \text{ であるとき，} R \in J(C) \\ &\iff (iii)\end{aligned}$$

次に，オリジナルの定義から arrow form の定義を導く．

(i) の場合

S を C 上の sieve，f∈ S を考える．このとき，S が f を被覆することを示す．実際に，

$$\begin{aligned}S \text{ が } C \text{ 上の } sieve \text{ でかつ } f \in S &\implies f^*(S) = \{g | cod(g) = D, fg \in S\} (g \text{ は任意の射}) \\ &\iff f^*(S) = t_D \in J(D) (1_D \in f^* \text{であることによる}) \\ &\iff S \text{ は } f \text{ を被覆する}\end{aligned}$$

(ii) の場合

S が $f : D \to C$ を被覆するとき，任意の射 $g : E \to D$ に対して，S が $f \circ g$ を被覆することを示す．実際に，

$$
\begin{aligned}
S \text{ が } f \text{ を被覆する} &\iff f^*(S) \in J(D) \\
&\implies g^*(f^*(S)) \in J(E)(g \text{ は任意の射，} stability) \\
&\iff (f \circ g)^*(S) \in J(E) \\
&\iff \text{任意の射 } g : E \to D \text{ に対して，} S \text{ は } f \circ g \text{ を被覆する}
\end{aligned}
$$

(iii) の場合

S が射 $f : D \to C$ を被覆し，R が C 上の sieve であり，S のすべての射を被覆するとする．このとき，R が f を被覆することを示す．実際に，

$$
\begin{aligned}
f^*(S) \in J(D) \text{ かつ任意の } h \in S \text{ に対して，} h^*(R) \in J(dom(h)) &\iff \text{任意の } g \in f^*(S) \text{ に対して，} \\
&\qquad f \circ g \in S \text{ であるので，} g^*(f^*)(R) \in J(E) \\
&\implies f^*(R) \in J(D)(transitivity) \\
&\iff R \text{ は } f \text{ を被覆する}
\end{aligned}
$$

□

定義 A.1.6 景 (site)

景 (site) とは，小圏 $\mathbf{C}$ とその上のグロタンディーク位相 J の組 $(\mathbf{C}, J)$ のことである．

定義 A.1.7 basis

プルバックを持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の basis とは，$\mathbf{C}$ の任意の対象 C に対して，以下のようにしてコドメインが C であるような射の集合 $K(C)$ を割り当てる関数 K のことである：

(i') $f : C' \to C$ が同型射なら，$\{f : C' \to C\} \in K(C)$ となる．

$(ii')(stabilityaxiom)$ $\{f_i : C_i \to C | i \in I\} \in K(C)$ であるなら，任意の射 $g : D \to C$ に対して，プルバックの集合族 $\{\pi_2 : C_i \times_C D \to D | i \in I\} \in K(D)$ となる．

$(iii')(transitivityaxiom)$ $\{f_i : C_i \to C | i \in I\} \in K(C)$ であり，任意の $i \in I$ に対して，集合族 $\{g_{ij} : D_{ij} \to C_i | j \in I_i\} \in K(C_i)$ であるなら，そのとき，射の合成により生じる集合族 $\{f_i \circ g_{ij} : D_{ij} \to C | i \in I, j \in I_i\} \in K(C)$ となる．

命題 A.1.8

J を 圏 $\mathbf{C}$ 上のグロタンディーク位相とする．このとき，以下が成立する：

任意の C 上の sieveR, S と任意の $f : D \to C$ に対して，

$$f^*(R) \cap f^*(S) = f^*(R \cap S)$$

Proof. 定義から明らか． □

命題 A.1.9

J を 圏 $\mathbf{C}$ 上のグロタンディーク位相とする．このとき，以下が成立する：

(iv) $R, S \in J(C) \implies R \cap S \in J(C)$

(iva) R, S が共に射 $g : D \to C$ を被覆する $\implies$ $R \cap S$ は g を被覆する

Proof. (iv)：まず，$R \cap S$ が sieve となることを示す．任意の $t \in R \cap S$ と $cod(g) = dom(t)$ なる任意の射 $g \in \mathbf{C}$ に対して，$t \circ g \in R \cap S$ となることを示せばよい．実際に，$t \in R \cap S \iff t \in R$ かつ $t \in S$ であり，R, S はそれぞれ sieve であるので，$t \circ g \in R$ かつ $t \circ g \in S$ となる．よって，$t \circ g \in R \cap S$ を得る．

次に，実際に $R \cap S \in J(C)$ となることを示す．任意の $f : D \to C \in R$ に対して，$f^*(R \cap S) = \{t | cod(t) = D, ft \in R \cap S\}$ と，$f^*(S) = \{t | cod(t) = D, ft \in S\}$ を得る．いま，R が sieve であることから，$ft \in R$ が成り立っているので，$ft \in R \cap S \iff ft \in S$ となる．したがって，$f^*(R \cap S) = f^*(S)$ となる．stability より，$f^*(S) \in J(D)$ であるので，$f^*(R \cap S) \in J(D)$ である．ゆえ，transitivity より，$R \cap S \in J(C)$ を得る．
(iva) : 被覆の定義から $g^*(R) \in J(D), g^*(S) \in J(D) \implies g^*(R \cap S) \in J(D)$ を満たすことを示せばよい．stability から任意の $h : E \to D$ に対して，$(gh)^*(R) \in J(E)$ と $(gh)^*(S) \in J(E)$ を得る．よって，(iv) より $(gh)^*(R) \cap (gh)^*(S) \in J(E)$ を得る．命題 A.1.8 より，$(gh)^*(R) \cap (gh)^*(S) = (gh)^*(R \cap S)$ であるので，$(gh)^*(R \cap S) \in J(E)$ となる．また，明らかに $g^*(R \cap S)$ は sieve である．したがって transitivity より $g^*(R \cap S) \in J(D)$ を得る． □

定義 A.1.10 basis から生成されるグロタンディーク位相

basis$K$ はグロタンディーク位相 J を以下のように生成する：

$$S \in J(C) \iff \exists R \in K(C), R \subseteq S$$

(well-definedness のチェック):
上のように定義された J がグロタンディーク位相の定義 (i)〜(iii) を満たすことを確かめる．
((i) のチェック) :
R を C 上の sieve であり，$R \in K(C)$ であるとする．このとき，明らかに $R \subseteq \max_C$ である．よって，$\max_C \in J(C)$ である．
((ii)stability のチェック) :
$S \in J(C)$，$g : D \to C$ を任意の射とし，$R \in K(C)$ となる $R \subseteq S$ を選択する．このとき，$g^*(S) \in J(D)$ となることを示す．$T \in K(D)$ を g に伴って R を $(ii)'$ によりプルバックさせて得られる $K-$ 被覆 とする．T は任意の $f \in R$ に対して，以下のプルバック図式を成立させるようなすべての射 $h : D \times_C C'$ で構成されている:

$$\begin{array}{ccc} D \times_C C' & \longrightarrow & C' \\ {\scriptstyle h}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ D & \xrightarrow[g]{} & C \end{array}$$

つまり，$T = \{h | h$ は f のプルバック$, f \in R\}$ となっている．このとき，$g^*(S) = \{r | cod(r) = D, gr \in S\}$ なので，$T \subseteq g^*(S)$ となっていることが分かる．よって，生成の定義から $g^*(S) \in J(D)$ を得る．
((iii)transitivity のチェック) :
$S \in J(C)$ とし，R を S における任意の射 $h : D \to C \in S$ に対して $h^*(R) \in J(D)$ を満たす C 上の sieve とする．このとき，$R \in J(C)$ となることを示す．いま，生成の定義より，$M \in S$，$N \in h^*(R)$ となる二つの $K-$ 被覆 $M \in K(C), N \in K(D)$ を得る．よって $(iii)'$ より，任意の $m \in M$,$n \in N$ に対して，以下の $K-$ 被覆 L を得る：

$$L = \{m \circ n : dom(n) \to C | m \in M, n \in N\}$$

いま，$h^*(R) = \{r' | cod(r') = D, h \circ r' \in R\}$ であり，M, N の定義から $m \in M \subseteq h \in S$ かつ $n \in N \subseteq r' \in h^*(R)$ を得る．したがって，任意の $m \circ n \in L$ に対して，$m \circ n \in R$ となり，$L \subseteq R$ を得る．再び生成の定

義から $R \in J(C)$ となる．

よって well-defined であることが確かめられた．

また，K を極大 basis とすると，$R \in K(C) \iff (R) \in J(C)$ としてグロタンディーク位相を生成することができる．なお，$(R) = \{f \circ g | f \in R, dom(f) = cod(g)\}$ であり，R の族によって生成される sieve である．

命題 A.1.11

以下の 2 つが成立する：

(1):(iv)$'$ 任意の被覆 $R, P \in K(C)$ に対して，K(C) 内に共通の refinement が存在する．

(2):(iv) $\iff$ (iv)$'$

Proof. **(1):** 示すべきことは，$\{f_i | i \in I\} \in K(C)$，$\{g_j | j \in I'\} \in K(C)$ が与えられたとき，以下の図式が可換になるような組 (E_k, h_k) が存在し，$\{h_k | k \in I''\} \in K(C)$ となることである．

$$\begin{tikzcd} C_i \arrow[r, "f_i"] & C & D_j \arrow[l, "g_j"'] \\ & E_k \arrow[ul] \arrow[u, "h_k"] \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

まず，(ii)' より，以下のようなプルバック図式を得る:

$$\begin{tikzcd} C_i \times_C D_j \arrow[r, "f_i^*"] \arrow[d, "g_j^*"'] & D_j \arrow[d, "g_j"] \\ C_i \arrow[r, "f_i"'] & C \end{tikzcd}$$

ここで，$E_k = C_i \times_C D_j$, $h_k = f_i \circ g_j^* = g_j \circ f_i^*$ とおくと，この (E_k, h_k) は条件を満たす．また，再び (ii)' より，$\{f_i^* | i \in I\} \in K(D_j)$ であり，$\{g_j | j \in I'\} \in K(C)$ であることと，(iii)' により，$\{g_j \circ f_i^* | i \in I, j \in I'\} \in K(C)$ を得る．つまり，$\{h_k | k \in I''\} \in K(C)$ を得る．

(2):

省略． □

グロタンディーク位相の具体例はいくつか存在する．「(位相空間論における) 開被覆」と「完備ハイティング代数」は，ともにグロタンディーク位相の具体例である．

定理 A.1.12

開被覆はグロタンディーク位相である．

Proof. 省略． □

定理 A.1.13

完備ハイティング代数はグロタンディーク位相である．

Proof. 省略． □

A.2 グロタンディーク・トポス

定義 A.2.1 層 (sheaf)

F が位相空間 X 上の層 (sheaf) であるとは，関手 $F; \mathscr{O}^{op} \to \mathbf{Set}$ であり以下の条件を満たすものである:
任意の X の開集合 U の開被覆 $U = \cup_i U, i \in I$ に対して，以下のようなイコライザ図式が成り立つ．

$$F \overset{e}{\dashrightarrow} \prod_i FU_i \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j} F(U_i \cap U_j)$$

さらに，$t \in FU, e(t) = \{t \restriction_{U_i} | i \in I\}, t_i \in FU_i$ に対して，以下が成立する．

$$p(\{t_i\} = \{t_i \restriction_{U_i \cap U_j}\}), q(\{t_i\} = \{t_j \restriction_{U_i \cap U_j}\})$$

定義 A.2.2 部分層

F を層とする．G が層 F の部分層であるとは，G が F の部分関手であり，G それ自身が層であるということである．

この層の概念は site 上へ拡張することができる．詳しくは [15] を参照して吟味してほしい．

注意 A.2.3

以下，任意の前層 $P : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{Set}$ と $f : C' \to C$ と $x \in P(C)$ に対して，$(Pf)(x)$ のことを $x \cdot f$ と書くことにする．

定義 A.2.4 matching family

景 $(\mathbf{C}, J)$ と前層 $P : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{Set}$ と $C \in \mathbf{C}$ 上の被覆 sieve$S \in J(C)$ 与えられたとする．前層 P の元の S に対する matchiing family とは，任意の $f : D \to C \in S$ を $x_f \in P(D)$ に割り当てる関数のことであり，以下の条件を満たす：

任意の $g : E \to D \in \mathbf{C}$ に対して，$x_f \cdot g = x_{fg}$となる．

定義 A.2.5 amalgamation

$C \in \mathbf{C}$ 上の被覆 sieve S に対する matching family $(x_f)_{f \in S}$ の amalgamation とは，任意の $f \in S$ に対して，$x \cdot f = x_f$ となる元 $x \in P(C)$ のことである．

定義 A.2.6 景 ($site$) 上の層$_1$

景 $(\mathbf{C}, J)$ 上の層とは，前層 $P : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{Set}$ でかつ，以下の条件を満たすものである：

任意の $C \in \mathbf{C}$ と $S \in J(C)$ に対して全単射 $i : \mathrm{Hom}(\mathbf{y}(C), P) \to \mathrm{Hom}(S, P)$ が存在する．

また，景 $(\mathbf{C}, J)$ 上の層の成す圏を $Sh(\mathbf{C}, J)$ と書く．

定義 A.2.7 景 ($site$) 上の層$_2$

景 $(\mathbf{C}, J)$ 上の層とは，前層 $P : \mathbf{C^{op}} \to \mathbf{Set}$ でかつ，以下の条件を満たすものである：
任意の $C \in \mathbf{C}$，任意の $S \in J(C)$ に対する，

任意の matchingfamily$(x_f)_{f \in S}$に対して，ただ一つの amalgamation が存在する．

命題 A.2.8

定義 $A.2.6$ と定義 $A.2.7$ は同値である．

Proof. 省略． $\square$

定義 A.2.9 basis に関する mathching family と amalgamation

K をプルバックを持つ圏 $\mathbf{C}$ 上の位相に関する basis であるとし，J を K から生成される位相とする．また，$R = \{f_i : C_i \to C | i \in I\}$ が C 上の K 被覆であるとする．このとき，元の族 $x_i \in P(C_i)(i \in I)$ が matching family であるとは，任意の $i, j \in I$ に対して，以下が成立することをいう：

$$x_i \cdot \pi^1_{ij} = x_j \cdot \pi^2_{ij}$$

ここで，π^1, π^2 は以下のプルバックにおける射影射のことである：

$$\begin{tikzcd}
C_i \times_C C_j \arrow[r, "\pi^2_{ij}"] \arrow[d, "\pi^1_{ij}"'] & C_j \arrow[d, "f_j"] \\
C_i \arrow[r, "f_i"'] & C
\end{tikzcd}$$

また，上のような matching family$(x_i)_{i \in I}$ に対する amalgamtion とは，任意の $i \in I$ に対して $x \cdot f_i = x_i$ となる元 $x \in P(C)$ のことである．

定理 A.2.10 basis による層の特徴づけ

P を $\mathbf{C}$ 上の前層とする．このとき，P がグロタンディーク位相 J に対する層であることと，basis K における任意の被覆 $\{f_i : C_i \to C | i \in I\}$ に対する任意の matching family$(x_i)_{i \in I}$ がただ一つの amalgamation を持つことは同値である．

Proof. 省略 $\square$

定義 A.2.11 グロタンディーク・トポス

グロタンディーク・トポスとは，景 $(\mathbf{C}, J)$ 上の層の成す圏 $Sh(\mathbf{C}, J)$ と圏同値な圏 $\mathscr{E}$ のことである．つまり，$\mathscr{E} \simeq Sh(\mathbf{C}, J)$ となる圏 $\mathscr{E}$ のことである．

じつは，このグロタンディーク・トポス (もしくは，景上の層の成す圏) は (初等) トポスなのである．このことを厳密に証明するには，多くのとき間と労力を要する．今回は，証明は流れだけ見ることにする．さて，グロタンディーク・トポスがトポスであること証明するために必要な定義や定理を見ていくことにする．

定義 A.2.12 separated 前層

前層 P が separated 前層であるとは，任意の元 $x, y \in P(C)$ と任意の被覆 $S \in J(C)$ と任意の $f \in S$ に対して，$x \cdot f = y \cdot f \implies x = y$ が成立することをいう．つまり，任意の matching family が高々一つの amalgamation を持つとき，前層 P を separated 前層であるという．

定理 A.2.13 associated sheaf functor 定理

景 $(\mathbf{C},J)$ 上の層 $Sh(\mathbf{C}, J)$ に対する，関手 $i : Sh(\mathbf{C}, J) \to \mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ は左随伴 $\mathbf{a} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \to Sh(\mathbf{C}, J)$ を持つ．さらに，この $\mathbf{a}$ は極限を保存する．

Proof. (スケッチ)
まず，separated 前層が前層と層の中間概念であるということに気づく必要がある．前層が層となる条件は命題〜より，amalgamation が一意的に存在するということであったが，separated 前層は一意性のみを保証し，存在は保証していないからである．

ここで，前層から separated 前層を (そして層を) 構成するうまい方法がないか考えてみる．じつはそのうまい方法は存在する．それがプラス・コンストラクションと呼ばれる構成方法である．そして，このプラス・コンストラクションを二回適応させると層を得ることができる．

まず，P を前層とし，任意の $C \in \mathbf{C}$ に対して以下のように定義してあげる：

$$P^{+}(C) = \varinjlim_{R \in J(C)} Match(R, P)$$

ここで，$Match(R, P)$ は C 上の被覆 sieve$R$ に対する matching family の集合を意味する．この $P^{+}(C)$ の元は matching family の同値類で与えられる．また，任意の射 $h : C' \to C$ について，$P^{+}(C) \to P^{+}(C')$ は以下のように定義する：

$$\{x_f | f \in R\} \cdot h = \{x_{hf'} | f' \in h^{*}(R)\}$$

このように対象と射についての対応関係が定められた P^{+} は関手で，その上しっかりと前層になっていることが確かめられる（これがプラス・コンストラクションである）．さらに，前層 P, P^{+} の間に標準的な自然変換 $\eta : P \to P^{+}$ が以下のように matching family の同値類として定義される：

$$\eta(C)(x) = \{x \cdot f | f \in \max_C\}$$

このように定義された標準的な自然変換 η に関する性質を調べていく (詳しくは省略する) と，P^{+} が separated 前層であるということを示すことができる．そして，この事実を用いると，さらに P が separated 前層であるなら P^{+} は層となっていることを示すことができる．つまり，前層 P から初めて，separated 前層 P^{+} が構成でき，さらにその P^{+} から sepatated 前層 $(P^{+})^{+}$ を構成するとその $(P^{+})^{+}$ が層となっているというわけである．

ここで，標準的な自然変換 $\eta_P : P \to P^{+}, \eta_{P^{+}} : P^{+} \to (P^{+})^{+}$ に対して，$\mathbf{a}(P) = \eta_{P^{+}} \circ \eta_P$ と $\mathbf{a}$ を定義してあげるとこの $\mathbf{a}$ が求めていた関手 $\mathbf{a} : \mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}} \to Sh(\mathbf{C}, J)$ となる．つまり，$\mathbf{a} \dashv i$ を示すことができる．

極限の保存を示すには，いくつかトポス理論の基礎となっている圏論の追加知識 (「フィルター余極限は極限と交換する」など) が必要となるので，省略する． □

定義 A.2.14 closed sieve

景 $(\mathbf{C}, J)$ が与えられたとする．$C \in \mathbf{C}$ 上の sieve$M$ が，任意の射 $f : D \to C \in \mathbf{C}$ に対して，「M が f を被覆する $\implies$ $f \in M$」を満たすとき，M を C 上の closed sieve であるという．

定理 A.2.15 グロタンディーク・トポスはトポスである

$\mathscr{E}$ を任意のグロタンディーク・トポスとする．このとき，$\mathscr{E}$ は有限完備かつ，任意の冪対象を持ち，部分対象分類子を持つ．つまり，$\mathscr{E}$ は (初等) トポスである．

Proof. (スケッチ)
グロタンディーク・トポス $\mathscr{E}$ がトポスであることを示すのは，定義より，任意の景 $(\mathbf{C}, J)$ 上の層の成す圏 $Sh(\mathbf{C}, J)$ が有限完備かつ，任意の冪対象を持ち，部分対象分類子を持つことを示すことと同値である．

$Sh(\mathbf{C},J)$ が有限完備であることは，前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ がトポスであることと，関手 $\mathbf{a}:\mathbf{Set}^{\mathbf{C}^{op}}\to Sh(\mathbf{C},J)$ が極限を保存することから即座に従う．

また，冪対象を持つことを証明する方法は，前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ がトポスであることを証明したときの方法と本質的には同じである．また以下の観察から，冪の肩の対象は必ずしも層でなくても良いとわかる．任意の $F,P\in Sh(\mathbf{C},J)$ に対し，冪対象 $F^P\in Sh(\mathbf{C},J)$ が存在したとすると，関手 $i:Sh(\mathbf{C},J)\to\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ に対して，同型 $i(F^P)\cong i(F)^{i(P)}$ が成立する．というのも，前定理の結果から任意の $C\in\mathbf{C}$ に対して，以下の同型が自然に成立するからである：

$$\begin{aligned}
i(F^P)(C) &\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{y}C, i(F^P))(\text{米田の補題})\\
&\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{a}(\mathbf{y}C), F^P)\\
&\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{a}(\mathbf{y}C)\times P, F)\\
&\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{a}(\mathbf{y}C)\times \mathbf{a}i(P), F)\\
&\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{a}(\mathbf{y}C\times i(P)), F)\\
&\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{y}C\times i(P), i(F))\\
&\cong \mathrm{Hom}(\mathbf{y}C, i(F)^{i(P)})\\
&\cong i(G)^{i(F)}(C)(\text{米田の補題})
\end{aligned}$$

しかし，$Sh(\mathbf{C},J)$ は $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ よりも構造が豊かで対象や射を構成する際に満たさなければならない条件が多いので，幾らかの注意と工夫が必要となる．その注意と工夫とは，前定理のときと同様に separated 前層という中間概念を用いて，少しずつ層となるタイミングを伺っていくことである．具体的には，F が separated 前層のとき，F^P も separated 前層となることを確認すること，その上で，F が層のとき，F^P が層となることを確かめることである．このようにして $Sh(\mathbf{C},J)$ も冪対象を持つことが示される．

部分対象分類子を持つことを証明は，大きく二段階に分かれている．一つ目は，任意の $C\in\mathbf{C}$ に対して，$\Omega(C)=C$ 上の closed sieve の集合と定義される Ω が層となっていることを証明することである．この証明も今までと同様に，まず Ω が separated 前層であることを示す．その後，その事実を用いて，Ω が層であることを示すという流れである．closed sieve の扱いに慣れていればそこまで難しくない．二つ目は，この層 Ω が部分対象分類子の普遍性を満たすことを証明することである．これも本質的には前層圏 $\mathbf{Set}^{\mathbf{C^{op}}}$ がトポスであることを証明したときと同様に証明することができる．まず，F を層とし，部分層 $A\subset F$ に対する特性射 $\chi_A:F\to\Omega$ を任意の $C\in\mathbf{C}$ と $x\in F(C)$ に対して以下のように定義する：

$$(\chi_A)_C(x)=\{f:D\to C|x\cdot f\in A(D)\}$$

すると，この $(\chi_A)_C(x)$ は closed sieve となることが簡単に確認できる．さらに，χ_A が自然変換となることも確認することができる．そして，$\mathrm{true}_C=\mathrm{max}_C$ とする．max_C は明らかに closed sieve である．いま，$Sh(\mathbf{C},J)$ における極限が点ごとに計算されるという事実から，以下の図式がプルバックであるなら，以下の図式における C を取り除いた $Sh(\mathbf{C},J)$ における図式がプルバックになる．よって以下の図式を考えるだけで十分である：

$$\begin{tikzcd}
A(C) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "i"'] & 1(C) \arrow[d, "\mathrm{true}_C"] \\
F(C) \arrow[r, "(\chi_A)_C"'] & \Omega(C)
\end{tikzcd}$$

これがプルバックになるのは，$((\chi_A)_C \circ i)(x) = (\mathrm{true}_C \circ !)(x) \iff (\chi_A)_C(x) = \max_C$ のときである．よって，上図をプルバックにする χ が一意的であるとわかる（仮に，χ_A なる他の射が存在していたとしても，$(\chi_A)_C(x) = (\chi'_A)_C(x) = \max_C$ となるからである）．このように，$Sh(\mathbf{C}, J)$ は部分対象分類子を持つことが示される．

$\square$

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category theory*, Vol. 49 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2006. (前原和寿 訳. 圏論. 共立出版.2015).

[2] John L Bell. *Toposes and local set theories: an introduction*. Courier Corporation, 2008.

[3] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra. 1*, Vol. 50 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 1994. Basic category theory.

[4] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 2 – Categories and Structures*. Cambridge Univ. Press, 1994.

[5] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 3 – Categories of Sheaves*. Cambridge Univ. Press, 1994.

[6] Olivia Caramello. The unification of mathematics via topos theory. *arXiv preprint arXiv:1006.3930*, 2010.

[7] A. Grothendieck. *RECOLTES ET SEMAILLES*. 1984. (辻雄一 訳. 収穫と蒔いた種と (数学者の孤独な冒険). 現代数学社.1989).

[8] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Vol. 43,44 of *Oxford Logic Guides*. Clarendon Press, 2002.

[9] E.Landry 編. *CATEGORIES for the WORKING PHILOSOPHER*. OXFORD UNIVERSITY PRESS, 2017.

[10] Francis William Lawvere. An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary. *Reprints in Theory and Applications of Categories*, Vol. 11, pp. 1–35, 2005.

[11] Tom Leinster. *Basic Category Theory*. Cambridge University Press, 2014. (斎藤恭司 土岡俊介 訳. ベーシック圏論. 丸善出版.2017).

[12] Tom Leinster. Rethinking set theory. *The American Mathematical Monthly*, Vol. 121, No. 5, pp. 403–415, 2014.

[13] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*, Vol. 170 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, January 2009.

[14] Saunders MacLane. *Categories for the Working Mathematician*. Springer, Berlin, 2. auflage edition, 10 1998. (三好博之 高木理 訳. 圏論の基礎. シュプリンガー.2005).

[15] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to Topos Theory*. Springer, Berlin, corrected edition, May 1992.

[16] Jean-Pierre Marquis and Elaine Landry. Categories in context: Historical, foundational, and philosophical. *Philosophia Mathematica*, Vol. 13, No. 1, pp. 1–43, 2005.

[17] Yoshihiro Maruyama. Duality theory and categorical universal logic: With emphasis on quantum structures. In Bob Coecke and Matty J. Hoban, editors, *QPL*, Vol. 171 of *EPTCS*, pp. 100–112, 2013.

[18] Adrian RD Mathias. The strength of mac lane set theory. *Annals of Pure and Applied Logic*, Vol. 110, No. 1-3, pp. 107–234, 2001.

[19] Colin McLarty. Exploring categorical structuralism. *Philosophia Mathematica*, Vol. 12, No. 1, pp. 37–53, 2004.

[20] Linnebo Oystein and Pettigrew Richard. Category theory as an autonomous foundation. *Philosophia Mathematica*, Vol. 3, No. 19, pp. 227–254, 2011.

[21] Nima Rasekh. *A Theory of Elementary Higher Toposes*. Cornell University, 2018.

[22] wikipedia. https://ja.wikipedia.org/wiki/ウィリアム・ローヴェア. (2019 年 1 月閲覧).

[23] 壱大整域. トポス. 2018.

[24] 丸山善宏. 圏論的双対性の理論入門. 2012.

[25] 丸山善宏. 圏論的統一科学. 2015.

[26] 丸山不二夫. カテゴリー論と認識の理論: F. w. ローヴェールの数学思想. 一橋論叢, Vol. 91, No. 2, pp. 259–277, 1984.

[27] 久木田水生. 構造主義と圏論.

[28] 圏論の歩き方委員会. 圏論の歩き方. 日本評論社, 2015.

[29] 深山洋平. 圏論と構造主義, 第 12 巻. 北海道大学大学院文学研究科, 2012.

[30] 清水義夫. 圏論による論理学. 東京大学出版会, 2007.

[31] 竹内外史. 層・圏・トポス. 日本評論社, 1978.