修士論文

ハイパードクトリンによる述語論理と
双対性の哲学の批判的検討

25190314　川嶋康太

名古屋大学大学院情報学研究科

社会情報学専攻

2021年1月

概要

本論文は圏論による諸学問の統一という問題関心の元での論理学と哲学の両分野における研究のまとめである．論理学については，ハイパードクトリンという圏構造についての研究のまとめを行い，哲学については，丸山善宏によって書かれた「The Dynamics of Duality」という文献の批判的検討を行う．

圏論的論理学では命題論理の体系を命題を対象，演繹関係を射として一つの圏で解釈する．このような素朴な解釈の元で直観主義命題論理の体系はカルテシアン閉圏に，直観主義線形命題論理の体系は対称モノイダル閉圏に対応することが知られている．しかし，述語論理の体系は量化子が存在するため素朴には解釈できない．圏論的論理学において量化子は随伴として表現される．この「随伴としての量化子」を発見したローヴェアは述語論理の体系を解釈する圏構造も与えた．この述語論理の体系に対応する圏構造が「ハイパードクトリン」である．本論文ではハイパードクトリンによる標準的な述語論理の体系である LJ と NJ の健全性定理・完全性定理を示し，これらの体系間の等価性をハイパードクトリンの視点から示す．また，その他の述語論理における定理のいくつか（ゲーデル変換など）に関しても，先行研究による定式化を参照しながらハイパードクトリンによる証明を試みる．さらに，諸論理体系をハイパードクトリンの視点から統一するという「圏論的普遍論理」について簡潔に解説する．

ストーン双対性とはブール代数という代数構造（論理の構造）とストーン空間という幾何構造（モデルの構造）の等価性を示す定理である．数学にはストーン双対性の他にも様々な双対性定理が存在し，これらは一見すると異なるように見える代数と幾何の構造的等価性を示してきた．「The Dynamics of Duality」では双対性を概念的に理解し，双対性概念が哲学における思想的対立（例えば，実在論と反実在論の対立）を解消させる可能性を持つという示唆を与えてくれる．しかし，双対性概念をはじめとして「The Dynamics of Duality」における概念や議論は明瞭性に欠ける点がある．そこで，本論文では他の文献を参照しながら「The Dynamics of Duality」の内容解説を行い，双対性と多元的統一の繋がりなどの明瞭性に欠ける点についての議論を行う．また，フェファーマンなどによる「圏論が集合論に依存している」という圏論批判に応答しながら「圏論的統一科学」の解釈を試みる．

目次

第 1 章

序論

圏論は 1945 年にマクレーンによって創始されて以来，あらゆる数学理論へ応用されてきた．2020 年 4 月には ABC 予想を解決したとされる望月新一の IUT 理論に関する論文が専門誌に受理されたことで世界中を賑わせたが，IUC 理論においても圏論は重要な役割を果たしている．近年では，数学理論への応用に留まらず，物理学や計算機科学をはじめとする科学分野への応用が目覚しく，幅広い学問分野における研究者から関心の的となっている．また，圏論を用いた科学を統一するプロジェクト「圏論的統一科学」というものもある．圏論は諸学問へ応用されると共にそれらを統合する機能を持っているようである．実際，2015 年には DeepMind 社が開発した Alpha Go がプロ囲碁棋士に勝利して以来，人工知能（AI）が学術界・産業界のトレンドとなっているが，圏論を用いた記号的 AI と統計的 AI という AI の二つの側面を統合する試みも成されている [26].

1.1　動機と概要

私はこのような圏論の諸学問への応用とそれによる諸学問の統一について関心を持ち研究を開始した．しかし，一度に全ての学問について検討することは不可能である．そこで，元々興味関心のあった論理学と哲学への応用に絞って研究を進めることにした．

圏論の論理学への応用に関する分野のことを「圏論的論理学」という．これは，圏論により定義可能な圏構造により論理学における概念群を解釈することで圏論と論理学の相互関係を明らかにする学問分野である．

圏論的論理学は既に諸論理体系に対応する圏構造が何であるか数多く明らかにしてきた．直観主義命題論理の体系はカルテシアン閉圏に対応し，直観主義線形命題論理の体系は対称モノイダル閉圏に対応するようにである．命題論理の体系であれば圏論を用いるまでもなく，ブール代数やハイティング代数といった束論における代数構造で十分解釈できる．しかし，素朴な代数構造では解釈が困難な論理体系がある．それが述語論理である．

述語論理の圏論的な解釈を与えた最初の人はローヴェアである．1960 年代ローヴェアは圏論を代数理論と呼ばれる論理学の手法に基づいた代数学への応用に関する研究を進める中で，圏論の随伴という概念を用いることで量化子を代数的に自然な形で解釈することを発見した [19]．これは圏論的論理学の主要な発見の一つとされており，圏論的論理学が大きく発展するきっかけとなった発見である．そして，ローヴェアはある圏構造を用いて述語論理の圏論的な解釈を成功させ，述語論理に対応する圏構造を明らかにした．

この述語論理に対応する圏構造こそタイトルにある「ハイパードクトリン」である．このハイパードクトリンは諸論理体系の圏論的統一の実現を目論む丸山善宏による「圏論的普遍論理」の中心的な圏構造でもあっ

た．諸論理体系の統一というのは私の当初の問題関心と一致していたということもあり，圏論的論理学の中でも特にハイパードクトリンについての理解を深めることを決めた．

ただ，ハイパードクトリンに関する日本語の文献はほとんど存在していない．そこでハイパードクトリンに関する研究結果を日本語でまとめることは論文として有益であると考えるに至った．そこで，本論文の前半では，ハイパードクトリンについての研究結果のまとめをする．まず，標準的な述語論理の体系である LJ と NJ のハイパードクトリンによる健全性定理・完全性定理を示し，結果としてこれらの体系間の等価性をハイパードクトリンの視点から示す．なお，LJ と NJ は照井 [55] によるものを採用する．続いて，ハイパードクトリンによる述語計算やゲーデル変換の証明を試みる．ハイパードクトリンによるゲーデル変換は丸山 [23] による定式化を採用する．最後に，ハイパードクトリンに興味を持つきっかけとなった圏論的普遍論理についても解説する．

圏論の哲学への応用には様々な仕方がある中で，私は丸山による「圏論的双対性」を哲学に応用する研究に興味を持った．これは「双対性」という概念を用いて哲学における思想的対立（例えば，実在論と反実在論の対立）をある意味で解消させることを目的にしており，これも私の当初の問題関心に近いと感じたからである．この丸山の「双対性の哲学」ないし思想は「The Dynamics of Duality」という 2017 年の京都大学数理解析研究所講究録にて出版された文献が最も色濃く現れている．そこで，「The Dynamics of Duality」の読解を試みた．「The Dynamics of Duality」は幅広いトピックを扱いながら議論が展開されている一方で，その中に現れる基本概念や議論が明瞭性に欠ける点（例えば，数学における双対性も思想における双対性もどちらも「双対性」と一括りにしている点や，思想における双対性が「多元的統一」を実現するというがその意味が曖昧であるという点など）が多い．そこで，本論文の後半では「The Dynamics of Duality」の内容解説を行うと共に，明瞭性に欠ける点を指摘する．

指摘した点のいくつかに関しては明瞭化の議論を行う．その中で，「The Dynamics of Duality」で扱われなかったことに関しても言及する．「圏論が集合論に依存している」という集合論者からの圏論批判と「圏論的統一科学」についてである．「圏論が集合論に依存している」という集合論者からの圏論批判については筆者なりの応答を試みる．圏論的統一科学についてはその解釈を試みて理解を深めると共に，その限界を指摘する．

1.2 論文の構成

本論文は 2 章と 3 章の二部構成となっている．2 章「ハイパードクトリン」の内容はハイパードクトリンという圏構造についての研究結果のまとめである．2.1 節では，実際にハイパードクトリンを定義し，ハイパードクトリンの重要な具体例である構文的ハイパードクトリンががハイパードクトリンとなることを確認する．2.2 節では，実際にハイパードクトリンを用いて述語論理を解釈し，標準的な述語論理の体系である LJ と NJ の健全性定理・完全性定理を示すと共に体系間の等価性をハイパードクトリンの視点から示す．2.3 節では，ハイパードクトリンの視点から述語論理に関するいくつかの定理が成立することを確認する．ハイパードクトリンによる述語計算やゲーデル変換などである．2.4 節では，等式付きの述語論理の体系についてのハイパードクトリン的な健全性定理と完全性定理が成り立つことを確認する．最後の 2.5 節では，丸山善宏による「圏論的普遍論理」について解説する．

3 章「The Dynamics of Duality の批判的検討」の内容は丸山による「The Dynamics of Duality」という文献の内容解説と批判的検討である．3.1 節では，「The Dynamics of Duality」の内容を丸山による他の文献を参照したり，私的な解釈を交えながら解説していく．続く 3.2 節では，「The Dynamics of Duality」におけ

る概念や議論の明瞭性に欠ける点を指摘し，そのいくつかに関しては明瞭化の議論を行う．その議論の中で，「圏論が集合論に依存している」という集合論者からの圏論批判や「圏論的統一科学」についても言及し，批判的考察を行う．

第 2 章

ハイパードクトリン

圏論的論理学という分野がある．これは圏論により定義可能な圏構造により論理学における概念群を解釈することで圏論と論理学の相互関係を明らかにする学問分野である．

圏論的論理学は既に諸論理体系に対応する圏構造が何であるか数多く明らかにしてきた．直観主義命題論理の体系はカルテシアン閉圏に対応 (さらに型付きラムダ計算の体系もこれらと対応関係にあり，カリー・ハワード・ランベック対応としてよく知られている) し，直観主義線形命題論理の体系は対称モノイダル閉圏に対応するようにである．命題論理の体系であれば圏論を用いるまでもなく，ブール代数やハイティング代数といった束論における代数構造で十分解釈できる．しかし，素朴な代数構造では解釈が困難な論理体系がある．それが述語論理である．

述語論理の圏論的な解釈を与えた最初の人はローヴェアである．1960 年代ローヴェアは圏論を代数理論と呼ばれる論理学の手法に基づいた代数学への応用に関する研究を進める中で，圏論の随伴という概念を用いることで量化子を代数的に自然な形で解釈することを発見した [19]．これは圏論的論理学の主要な発見の一つとされており，圏論的論理学が大きく発展するきっかけとなった発見である．そして，ローヴェアはある圏構造を用いて述語論理の圏論的な解釈を成功させ，述語論理に対応する圏構造を明らかにした．この述語論理に対応する圏構造こそ本章の主人公「ハイパードクトリン（hyperdoctrine)」である．

このハイパードクトリンはとある特別な条件を満たす関手として定義される．この関手のコドメインに相当する圏をその都度変更することによって一階述語論理に関する広範な論理体系の解釈を可能にする．古典述語論理や直観主義述語論理はもちろんのこと部分構造述語論理をも解釈できるのである．さらに条件を付け加えることによって高階論理を解釈することも可能になる．この高階論理に対応するハイパードクトリンのことをトライポスという．トライポスは論理学と幾何学を統合するトポスの論理学的な実質として理解することも可能であり，ハイパードクトリンはトポスとも関係の深い概念である．

本章の内容は「ハイパードクトリン」について調べたことのまとめである．ハイパードクトリンによる一階述語論理の健全性定理と完全性定理を示すことが本章の主眼である．証明は [30][23] を参考にした．以下，各節で取り扱う内容を簡潔に説明する．

2.1 節では，ハイパードクトリンの定義を確認したのち，完全性定理の証明に本質的な役割を果たす構文的ハイパードクトリンを定義する．その後，構文的ハイパードクトリンがハイパードクトリンの定義を満たすことを確認する．最後に，ハイパードクトリンの具体例をいくつか紹介し，ハイパードクトリンが一階述語論理のみならず，高階論理とも関係が深いということを確認する．

2.2 節が本章のメインであり，実際にハイパードクトリンを用いて一階述語論理を解釈し，その解釈の元で述語論理の標準的な体系である LK と NJ の健全性定理と完全性定理を証明する．また，ハイパードクトリン

を介して LJ と NJ の体系間の等価性を示す．

2.3 節は，ハイパードクトリンを用いた述語論理に関するいくつかの定理を証明してみる．まず，直観主義述語論理で成り立つ通常の定理がハイパードクトリンでどのように証明されるかを確認する．次に，直観主義述語論理では成立しない定理の存在を示す．最後に，ゲーデル否定変換のハイパードクトリン的に定式化を紹介し，実際に証明を試みる．

2.4 節は，直観主義述語論理に等式を加えてできる体系をハイパードクトリンを用いて解釈する．また 2.3 節と同様の方法で，等式付き直観主義述語論理の体系の健全性定理と完全性定理が成り立つことを確認する．ここで肝になる概念が $\mathscr{H}$ 集合という概念である．

最後に，2.5 節では現在のハイパードクトリン研究の動向について紹介する．近年の研究で最も重要だと思われる結果は，丸山善宏による「圏論的普遍論理」であると考え，その基本となる概念 T-ハイパードクトリンを定義する．圏論的普遍論理は論理的多元主義が叫ばれる現在において，特定の論理体系の構文論，意味論に依存しない，論理体系の持つの普遍的構造を明らかにするのに重要な貢献を果たすと考える．

2.1　ハイパードクトリン

本節ではハイパードクトリンを実際に定義し，その具体例をいくつか確認する．特に次節で行う，完全性定理の証明において要となる「文脈の圏」と「構文的ハイパードクトリン」を定義し，その圏論的性質のいくつかを示す．なお，定義や証明は主に [30] を参考にした．

ハイパードクトリンが初めて導入されたローヴェアの記念碑的論文は「Adjointness in Foundation」[15] という論文である．そのオリジナルな定義は以下の通りである．なお，一階述語論理の解釈に用いるということを強調して，特に「一階ハイパードクトリン」という．（一階述語論理以外の論理体系もハイパードクトリン的に解釈できる．）

定義 2.1.1　一階ハイパードクトリン (オリジナル)

一階ハイパードクトリンとは，以下の 4 つの条件を満たすものである：

1. カルテシアン閉圏 T が存在する．T の対象を型，射を項と呼び，特に終対象 1 から対象 C への射を型 C の定項と呼ぶ．
2. 各型 C に対して，属性の圏と呼ばれるカルテシアン閉圏 $P(C)$ が存在する．$P(C)$ の射を C 上の推論と呼び，終対象，積，対象 ϕ_C についての冪をそれぞれ，1_C，$\&_C$，$\phi_C \to ()$ と書く．
3. 各項 $f : X \to Y$ に対し，以下のような代入関手 $[f/-]$ が存在する:
$$[f/-] : P(Y) \to P(X), \phi \mapsto [f/\phi]$$
4. 各項 $f : X \to Y$ に対し，以下のような 2 つの関手 $\sum f(-), \prod f(-)$ が存在し，
$$\sum f(-) : P(Y) \to P(X), \prod f(-) : P(Y) \to P(X)$$
随伴関係 $\sum f(-) \dashv [f/-] \dashv \prod f(-)$ が成立する．

特徴的なのは，カルテシアン閉圏を前提にした定義になっているところである．実際は，各ファイバー圏（以下で定義を述べる）がカルテシアンの性質を満たしていれば十分ある．つまり，一階述語論理を解釈するだけであれば，T は有限積を持つ圏とするだけで十分である．

また，最近は一般的なファイバー圏がカルテシアン閉圏であるという形で定義はせず，ファイバー圏を直観主義論理や古典論理の代数的実質であるハイティング代数やブール代数として定義するのが主流である [33]．ハイパードクトリンで直観主義述語論理を解釈したい場合は，ファイバー圏をハイティング代数とし，古典述語論理の場合はブール代数というようにである．（ハイティング代数やブール代数は対象間の射が高々 1 つである圏とみなすことができ，さらに，それらはカルテシアン閉圏となるということに注意して欲しい．）

つまり，現代的には，ハイパードクトリンは有限積を持つ圏 $\mathbf{C}$ からある論理的代数の成す圏 $\mathbf{L}$（この圏は 2 圏的性質を持つ）への関手

$$\mathscr{D} : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{L}$$

で，量化子が満たすべき追加の条件（Beck-Chevalley 条件と Frobenius-Reciprocity）を満たすもの，という形で定義される．この $\mathbf{L}$ を多々ある具体的な代数構造に置き換えることによって，様々なハイパードクトリンを得られる．つまり，$\mathbf{L}$ をブール代数の圏としたり，FL 代数の圏としたりすることでそれに応じたハイパードクトリンが得られるということである．

本論文では，実際に扱うハイパードクトリンは（ほとんどが）以下で定義する $\mathbf{L}$ が $\mathbf{Ha}$（ハイティング代数の成す圏）の場合に限られる．以下に続く議論は $\mathbf{L}$ を他の代数的な圏に取り替えたとしても，その本質は何ら変わらない．

定義 2.1.2 IL ハイパードクトリン

直観主義述語論理 IL に対する一階ハイパードクトリン（IL ハイパードクトリン）とは，以下の条件を満たす，反変関手 $\mathscr{D} : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ha}$ のことである：

1. 圏 $\mathbf{C}$ は任意の有限積を持つ．この関手 $\mathscr{D}$ のドメインの圏のことをハイパードクトリンのベース，各 $X \in \mathbf{C}$ に対し，$\mathscr{D}(X)$ を X 上のファイバー，ベース圏の対象を型，射を項と呼ぶ．
2. 各射影 $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$ に対して，関手 $\mathscr{D}(\pi_i) : \mathscr{D}(X_i) \to \mathscr{D}(X_1 \times X_2)$ が左随伴 $\exists_{\pi_i} : \mathscr{D}(X_1 \times X_2) \to \mathscr{D}(X_i)$ を持ち，$\exists$ に関する Beck-Chevalley 条件と Frobenius reciprocity を満たす．
3. 各射影 $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$ に対して，関手 $\mathscr{D}(\pi_i) : \mathscr{D}(X_i) \to \mathscr{D}(X_1 \times X_2)$ が右随伴 $\forall_{\pi_i} : \mathscr{D}(X_1 \times X_2) \to \mathscr{D}(X_i)$ を持ち，$\forall$ に関する Beck-Chevalley 条件を満たす．

ここで，$\exists$ に関する Beck-Chevalley 条件とは，任意の射 $f : Z \to Y$ in $\mathbf{C}$ に対して，以下の図式が可換になることをいう：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}(X \times Y) & \xrightarrow{\exists_\pi} & \mathscr{D}(Y) \\ {\scriptstyle \mathscr{D}(X \times f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{D}(f)} \\ \mathscr{D}(X \times Z) & \xrightarrow{\exists_{\pi'}} & \mathscr{D}(Z) \end{array}$$

つまり，各対象 $\beta \in \mathscr{D}(X \times Y)$ に対して，以下が成立することである：

$$\exists_{\pi'} \mathscr{D}(X \times f)(\beta) = \mathscr{D}(f) \exists_\pi(\beta)$$

同様に，$\forall$ に関する Beck-Chevalley 条件とは，任意の射 $f : Z \to Y$ in $\mathbf{C}$ に対して，以下の図式が可換になることをいう：

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{D}(X \times Y) & \xrightarrow{\forall_\pi} & \mathscr{D}(Y) \\ {\scriptstyle \mathscr{D}(X \times f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathscr{D}(f)} \\ \mathscr{D}(X \times Z) & \xrightarrow{\forall_{\pi'}} & \mathscr{D}(Z) \end{array}$$

つまり，各対象 $\beta \in \mathscr{D}(X \times Y)$ に対して，以下が成立することである：

$$\mathscr{D}(f)\forall_{\pi}\beta = \forall_{\pi'}\mathscr{D}(X \times f)(\beta)$$

また，Frobenius reciprocity とは，各射影 $\pi : X \times Y \to Y$ と，任意の $\alpha \in \mathscr{D}(Y), \beta \in \mathscr{D}(X \times Y)$ に対して，以下が成立することである：

$$\exists_{\pi}(\mathscr{D}(\pi)(\alpha) \wedge \beta) = \alpha \wedge \exists_{\pi}(\beta)$$

定義 2.1.3 CL ハイパードクトリン

古典述語論理 CL に対する一階ハイパードクトリン（CL ハイパードクトリン）とは, 反変関手 $\mathscr{D} : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ba}$ で IL ハイパードクトリンであるものである.

注意 2.1.4

射影射 π に対する関手 $\mathscr{D}(\pi)$ は，論理学の文脈においては代入操作に対応しているので，しばしば代入関手と呼ばれる．全称量化子は代入関手の右随伴として，存在量化子は代入関手の左随伴として得られる．Beck-Chevalley 条件はちょうど量化操作が代入操作について閉じているということに対応しており，Frobenius Reciprocity は存在量化子特有の性質を表現している．また，ハイパードクトリンのドメインの圏は型の体系，コドメインの圏は述語論理の体系に対応している．

次に，ハイパードクトリンの重要な具体例である”構文的ハイパードクトリン（syntactic hyperdoctrine）”を紹介する．これは，ハイパードクトリン的に一階述語論理の完全性定理を証明する際に本質的な役割を果たす．以下では，この構文的ハイパードクトリンを定義するために”文脈の圏 (category of context)”を定義する．

定義 2.1.5 文脈の圏

言語 $\mathscr{L}$ における文脈の圏 **Cont** とは，以下のように定義される圏である：

- (対象)：$(x_{j_1}, ..., x_{j_n})$（$\mathscr{L}$ の異なる変数のリスト）
- (射)：$\vec{t} = [t_1/x_{k_1}, ..., t_m/x_{k_m}] : (x_{j_1}, ..., x_{j_n}) \to (x_{k_1}, ..., x_{k_m})$($\mathscr{L}$ における項代入のリスト)
  （ここで項 t_i は $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$ の内に自由変数を持つとする）

また，圏 **Cont** における合成と等号は以下のように定義される：

- (合成)：$\vec{t} = [t_i/x_{k_i}]_{i=1,...,m} : (x_{j_1}, ..., x_{j_n}) \to (x_{k_1}, ..., x_{k_m})$ と $\vec{s} = [s_i/x_{h_i}]_{i=1,...,l} : (x_{k_1}, ..., x_{k_n}) \to (x_{h_1}, ..., x_{h_m})$ という 2 つの射（項代入）が与えられたとする．このとき，合成射 $\vec{s} \circ \vec{t} : (x_{j_1}, ..., x_{j_n}) \to (x_{h_1}, ..., x_{h_m})$ を以下のように定義する：

  $$\vec{s} \circ \vec{t} \stackrel{\mathrm{def}}{=} [s_i(t_1/x_{k_1}, ..., t_m/x_{k_m})/x_{h_i}]_{i=1,...,l}$$

  任意の i に対して，$s_i(\vec{t}/\vec{x_k})/x_{h_i}$ は $x_{j_1}, ..., x_{j_n}$ の内に自由変数を持つ項であるので，圏 **Cont** における射として well-defined であると容易に確認できる．
- (等号)：圏 **Cont** における 2 つの射 $\vec{t}$と$\vec{s}$ が等しいのは，任意の $i \in \{1, ..., m\}$ に対して，$t_i = s_i$ が成り立つとき，かつそのときに限る．

このように圏 **Cont** を定義すると圏の定義を満たすことは容易に確かめられる．なお，$(x_{j_1}, ..., x_{j_n})$ 上の恒等射は $\vec{x_j} = [x_{j_i}/x_{j_i}]_{i=1,...,n}$ で与えられる（すなわち，なにもしない項代入である).

注意 2.1.6

ハイパードクトリンにおけるドメインの圏は型の体系に対応していると言ったが，文脈の圏はちょうど各述語が取りうる変数を指定していることに対応している．

この文脈の圏をドメインに取るハイパードクトリンのことを構文的ハイパードクトリンというのだが，ハイパードクトリンであるためにはドメインのベース圏は有限積を持たなければならない．そこで，以下でこの文脈の圏に有限積が存在することを確かめる．

補題 2.1.7

文脈の圏 **Cont** は任意の有限積を持つ．

Proof. 任意の有限積を持つことを示すには，終対象と任意の二項積を持つことを示すだけで十分である．

まず，**Cont** において空リスト $\varnothing$ が終対象であることを示す．任意の変数リスト $(x_{k_1}, ..., x_{k_n})$ に対して，以下のようなリストの各変数を消去するという空リストへの射を定めることができる：

$$\vec{\varnothing} = [x_{k_i}/\varnothing]_{i=1,\dots,n} : (x_{k_1}, ..., x_{k_n}) \to \varnothing$$

変数の消去の仕方は一意的に定まる．よって，空リスト $\varnothing$ は **Cont** における終対象である．

次に，任意の二項積を持つことを示す．**Cont** における任意の 2 つのリスト $(x_{j_1}, ..., x_{j_n}), (x_{k_1}, ..., x_{k_m})$ に対して，二項積を以下のような変数リストとして定義する：

$$(x_{j_1}, ..., x_{j_n}, x_{J+k_1}, ..., x_{J+k_m})(\text{ただし，}J = max\{j_1, ..., j_n\})$$

また，射影を以下のように定義する：

$$\vec{x_j} = [\vec{x_j}/\vec{x_j}, \vec{x_k}/\varnothing] : (x_{j_1}, ..., x_{j_n}, x_{J+k_1}, ..., x_{J+k_m}) \to (x_{j_1}, ..., x_{j_n})$$
$$\vec{x_k} = [\vec{x_j}/\varnothing, \vec{x_k}/\vec{x_k}] : (x_{j_1}, ..., x_{j_n}, x_{J+k_1}, ..., x_{J+k_m}) \to (x_{k_1}, ..., x_{k_m})$$

このように定義した 3 つ組 $((x_{j_1}, ..., x_{j_n}, x_{J+k_1}, ..., x_{J+k_m}), \vec{x_j}, \vec{x_k})$ が二項積になることを示す．任意の対象 $(x_{h_1}, ..., x_{h_l})$ と 2 つの射 $\vec{t} : (x_{h_1}, ..., x_{h_l}) \to (x_{j_1}, ..., x_{j_n})$ と $\vec{s} : (x_{h_1}, ..., x_{h_l}) \to (x_{k_1}, ..., x_{k_m})$ を取る．このとき，次のような射 $\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle$ が存在する：

$$\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = [\vec{t}/\vec{x_n}, \vec{s}/\vec{x_k}] : (x_{h_1}, ..., x_{h_l}) \to (x_{j_1}, ..., x_{j_n}, x_{J+k_1}, ..., x_{J+k_m})$$

この射 $\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle$ は以下の等式を満たす：

$$\begin{aligned} \vec{x_j} \circ \langle \vec{t}, \vec{s} \rangle &= [\vec{x_j}/\vec{x_j}, \vec{x_k}/\varnothing] \circ [\vec{t}/\vec{x_n}, \vec{s}/\vec{x_k}] \\ &= [[\vec{x_j}(\vec{t}/\vec{x_n})/\vec{x_j}, \vec{x_k}(\vec{s}/\vec{x_k})/\varnothing] \\ &= [\vec{t}, \varnothing] \\ &= \vec{t} \end{aligned}$$

また，同様の計算により，$\vec{x_k} \circ \langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = \vec{s}$ を得る．最後に，射 $\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle$ を示す．$\vec{x_j} \circ \langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = \vec{t}$ と $\vec{x_k} \circ \langle \vec{t}, \vec{s} \rangle = \vec{s}$ を満たす射 $\vec{u} : (x_{h_1}, ..., x_{h_l}) \to (x_{j_1}, ..., x_{j_n}, x_{J+k_1}, ..., x_{J+k_m})$ が存在したとする．このとき，以下が成立する：

$$\begin{aligned} \vec{x_j} \circ \vec{u} = \vec{t} &\iff [\vec{x_j}/\vec{x_j}, \vec{x_k}/\varnothing] \circ [\vec{u}/\vec{x_j}, \vec{u}/\vec{x_k}] = [\vec{t}/\vec{x_j}] \\ &\iff [\vec{x_j}(\vec{u}/\vec{x_j})/\vec{x_j}] = [\vec{t}/\vec{x_j}] \\ &\iff [\vec{u}/\vec{x_j}] = [\vec{t}/\vec{x_j}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{x_k} \circ \vec{u} = \vec{s} &\iff [\vec{x_j}/\varnothing, \vec{x_k}/\vec{x_k}] \circ [\vec{u}/\vec{x_j}, \vec{u}/\vec{x_k}] = [\vec{s}/\vec{x_k}] \\
&\iff [\vec{x_k}(\vec{u}/\vec{x_k})/\vec{x_k}] = [\vec{s}/\vec{x_k}] \\
&\iff [\vec{u}/\vec{x_k}] = [\vec{s}/\vec{x_k}]
\end{aligned}
$$

したがって，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle &= [\vec{t}/\vec{x_n}, \vec{s}/\vec{x_k}] \\
&= [\vec{u}/\vec{x_j}/\vec{u}/\vec{x_k}] \\
&= [\vec{u}/(\vec{x_j}, \vec{x_k})] \\
&= \vec{u}
\end{aligned}
$$

ゆえ，$\langle \vec{t}, \vec{s} \rangle$ の一意性が確かめられた．よって，$((x_{j_1}, ..., x_{j_n}, x_{J+k_1}, ..., x_{J+k_m}), \vec{x_j}, \vec{x_k})$ は **Cont** の二項積である．

以上により，**Cont** は任意の有限積を持つと結論付けられれる． □

よって，構文的ハイパードクトリンを定義することができる．なお，以下で言語 $\mathscr{L}$ は一階の言語とし，対象とする論理体系を直観主義述語論理のシーケント計算の体系 LJ とする．なお，LJ のシンタックスは [55] を参照している．

定義 2.1.8 LJ に対する構文的ハイパードクトリン

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とする．このとき，直観主義述語論理のシーケント計算の体系 LJ に対する構文的ハイパードクトリンとは以下のように定義される関手 $H_{\mathscr{L}} : \mathbf{Cont}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ha}$ のことである：

- 各対象 $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbf{Cont}$ に対して，

  $$H_{\mathscr{L}}(\vec{x}) = \mathscr{U}(\mathscr{L})(\vec{x}) = \{[\varphi(x_1, ..., x_n)] : \varphi \in Form_{\mathscr{L}}\}$$

  と定義する．これは，自由変数に $\vec{x}$ を持つ式の成す直観主義述語論理の体系 LJ のリンデンバウム-タルスキ代数である．
- 各 **Cont** における射 $\vec{t} = [t_1/y_1, ..., t_m/y_m] : (x_1, ..., x_n) \to (y_1, ..., y_m)$ に対して，$H_{\mathscr{L}}(\vec{t}) : \mathscr{U}(\mathscr{L})(y_1, ..., y_m) \to \mathscr{U}(\mathscr{L})(x_1, ..., x_n)$ なるハイティング準同型を，各式 $\varphi(y_1, ..., y_m) \in \mathscr{U}(\mathscr{L})(y_1, ..., y_m)$ に対して，以下のように定義する：

  $$H_{\mathscr{L}}(\vec{t})([\varphi(y_1, ..., y_m]) = \varphi(y_1, ..., y_m)[t_1/y_1, ..., t_m/y_m]$$

  つまり，**Cont** における代入はリンデンバウム-タルスキ代数における代入と対応する．

注意 2.1.9

構文的ハイパードクトリンは，変数の指定を文脈の圏で行い，その上の述語（リンデンバウム-タルスキ代数）をファイバー圏として定義している．変数の指定をドメイン側に述語計算をコドメイン側にそれぞれ分けて行う，ハイパードクトリン特有の観点を活用して定義されている述語論理的リンデンバウム-タルスキ代数と言える．

続いて，この構文的ハイパードクトリンが実際に IL ハイパードクトリンとなることを示す．

命題 2.1.10

LJ に対する構文的ハイパードクトリン $H_{\mathscr{L}} : \mathbf{Cont}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ha}$ は IL ハイパードクトリンである．

Proof. まず，2 つの **Cont** の対象 $\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ と $(\vec{x}, y) = (x_1, ..., x_n, y)$ とその間の射影 $[\vec{x}, \vec{x}] : (x_1, ..., x_n, y) \to (x_1, ..., x_n)$ を考える．このとき，以下のような代入関手を以下のように定義する：

$$H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}]) : \mathscr{U}(\mathscr{L})(\vec{x}) \to \mathscr{U}(\mathscr{L})(\vec{x},y), H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])([\varphi(\vec{x})]) = [\varphi(\vec{x},y)]$$

射についての対応は明らかである．このとき，関手 $H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])$ が左随伴，右随伴を持ち，Beck-Chavelley 条件と Frobenius-Reciprocity を満たすことを示す.

左随伴 $\exists_y$，右随伴 $\forall_y$ をそれぞれ以下のように定義する：

$$\exists_y : \mathscr{U}(\mathscr{L})(\vec{x},y) \to \mathscr{U}(\mathscr{L})(\vec{x}), \exists_y([\varphi(\vec{x},y)]) = [\exists y.\varphi(\vec{x},y)]$$
$$\forall_y : \mathscr{U}(\mathscr{L})(\vec{x},y) \to \mathscr{U}(\mathscr{L})(\vec{x}), \forall_y([\varphi(\vec{x},y)]) = [\forall y.\varphi(\vec{x},y)]$$

射についての対応は明らかである．また，関手として well-defined であることも明らかである．まず，$\exists_y \dashv H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])$ であることを示す．示すべきことは以下のことである（ただし，ψ は変数 y に依存しない式である）：

$$\exists_y([\varphi(\vec{x},y)]) \leq [\psi(\vec{x})] \iff [\varphi(\vec{x},y)] \leq H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])([\psi(\vec{x})])$$

$\exists_y([\varphi(\vec{x},y)]) \leq [\psi(\vec{x})]$，つまり，$[\exists y.\varphi(\vec{x},y)] \leq [\psi(\vec{x})]$ を仮定する．このとき，LJ におけるシーケント $\exists y.\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x})$ が成立する．今，ψ が y に依存しない式であることにより，$\psi(\vec{x}) \dashv\vdash \psi(\vec{x},y)$ となる．また，以下の証明図が導出できる：

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(\vec{x},y) \vdash \varphi(\vec{x},y)}{\varphi(\vec{x},y) \vdash \exists y.\varphi(\vec{x},y)}\ (\exists r) \qquad \dfrac{\exists y.\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x})}{\exists y.\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y)}\ (\psi\text{が } y \text{ に依存しない})}{\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y)}\ (cut)$$

したがって，$[\varphi(\vec{x},y)] \leq H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])([\psi(\vec{x})])$ を得る．逆に，$[\varphi(\vec{x},y)] \leq H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])([\psi(\vec{x})])$ を仮定する．このとき，LJ におけるシーケント $\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y))$ が成立する．よって，以下の証明図が導出できる：

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y)}{\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x})}\ (\psi\text{が } y \text{ に依存しない})}{\exists y.\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x})}\ (\exists L(y \notin FV(\exists y.\varphi(\vec{x},y), \psi(\vec{x}))))$$

したがって，$\exists_y([\varphi(\vec{x},y)]) \leq [\psi(\vec{x})]$ を得る．以上より，$\exists_y \dashv H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])$ が成立する.

次に，$H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}]) \dashv \forall_y$ であることを示す．示すべきことは以下のことである（ただし，φ は変数 y に依存しない式である）：

$$H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])([\varphi(\vec{x})]) \leq [\psi(\vec{x},y)] \iff [\varphi(\vec{x})] \leq \forall_y([\psi(\vec{x},y)])$$

$H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])([\varphi(\vec{x})]) \leq [\psi(\vec{x},y)]$ を仮定する．このとき，LJ におけるシーケント $\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y))$ が成立する．よって，以下の証明図が導出できる：

$$\dfrac{\dfrac{\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y)}{\varphi(\vec{x}) \vdash \psi(\vec{x},y)}\ (\psi\text{が } y \text{ に依存しない})}{\varphi(\vec{x}) \vdash \forall y.\psi(\vec{x},y)}\ (\forall R(y \notin FV(\varphi(\vec{x}), \forall y.\psi(\vec{x},y))))$$

したがって，$[\varphi(\vec{x})] \leq \forall_y([\psi(\vec{x},y)])$ を得る．逆に，$[\varphi(\vec{x})] \leq \forall_y([\psi(\vec{x},y)])$ を仮定する．このとき，LJ におけるシーケント $\varphi(\vec{x}) \vdash \forall y.\psi(\vec{x},y)$ が成立する．よって，以下の証明図が導出できる：

$$\dfrac{\dfrac{\psi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y)}{\forall y.\psi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y)}\ (\forall L) \qquad \dfrac{\varphi(\vec{x}) \vdash \forall y.\psi(\vec{x},y)}{\varphi(\vec{x},y) \vdash \forall y.\psi(\vec{x},y)}\ (\varphi\text{ が } y \text{ に依存しない})}{\varphi(\vec{x},y) \vdash \psi(\vec{x},y))}\ (cut)$$

したがって，$H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}])([\varphi(\vec{x})]) \leq [\psi(\vec{x},y)]$ を得る．以上より，$H_{\mathscr{L}}([\vec{x},\vec{x}]) \dashv \forall_y$ が成立する．

次に，$\exists$ に関する Beck-Chevalley 条件が成り立つことを示す．任意の **Cont** における射 $\vec{t} = [t_1/y_1, ..., t_m/y_m] : \vec{z} \to \vec{y}$ に対して，以下の図式が可換になることを示せばよい：

$$\begin{tikzcd}
H_{\mathscr{L}}(\vec{x},\vec{y}) \arrow[r, "\exists_\pi"] \arrow[d, "H_{\mathscr{L}}(\vec{x},\vec{t})"'] & H_{\mathscr{L}}(\vec{y}) \arrow[d, "H_{\mathscr{L}}(\vec{t})"] \\
H_{\mathscr{L}}(\vec{x},\vec{z}) \arrow[r, "\exists_{\pi'}"'] & H_{\mathscr{L}}(\vec{z})
\end{tikzcd}$$

実際に，各 $[\varphi(\vec{x},\vec{y})] \in H_{\mathscr{L}}(\vec{x},\vec{y})$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
H_{\mathscr{L}}(\vec{t})\exists_\pi([\varphi(\vec{x},\vec{y})]) &= H_{\mathscr{L}}(\vec{t})([\exists\vec{x}.\varphi(\vec{x},\vec{y})]) \\
&= [\exists\vec{x}.\varphi(\vec{x})[\vec{t}/\vec{y}]] \\
&= \exists_{\pi'}[\varphi(\vec{x})[\vec{t}/\vec{y}]] \\
&= \exists_{\pi'} H_{\mathscr{L}}(\vec{x},\vec{t})([\exists\vec{x}.\varphi(\vec{x},\vec{y})])
\end{aligned}$$

同様にして，$\forall$ に関する Beck-Chevalley 条件が成り立つことも示せる．

最後に Frobenius-Reciprocity を満たすことを示す．２つの式 φ, ψ を考える（ただし，ψ は y に依存しない式とする）．このとき，$[\exists y.(\varphi(\vec{x},y) \wedge \psi(\vec{x},y))] = [\exists y.\varphi(\vec{x},y) \wedge \psi(\vec{x},y)] = [\exists y.\varphi(\vec{x},y) \wedge \psi(\vec{x})]$ が成立する．よって，射影 $[\vec{x}/\vec{x}] : (\vec{x},y) \to \vec{x}$ に対して，$\exists_y H_{\mathscr{L}}([\vec{x}/\vec{x}])(\varphi(\vec{x}) \wedge \psi(\vec{x})) = \exists_y H_{\mathscr{L}}([\vec{x}/\vec{x}])(\varphi(\vec{x})) \wedge \psi(\vec{x})$ が成立する．したがって，Frobenius-Reciprocity を満たす． □

注意 2.1.11

今回は構文的ハイパードクトリンを LJ に対して定義し，それが実際に IL ハイパードクトリンとなることを証明したが，同様にして他の論理体系（NJ や HJ など）に対する構文的ハイパードクトリンを定義することができる．それらも IL ハイパードクトリンとなることが同様に示すことができる．

以上により，構文的ハイパードクトリンというハイパードクトリンの重要な具体例を例示できた．では，構文的ハイパードクトリンの他にどのような具体例が存在するのだろうか？以下でハイパードクトリンの具体例をいくつか紹介する．

まず，最も代表的な具体例はレギュラーハイパードクトリンである．定義は以下の通りである．

定義 2.1.12 レギュラーハイパードクトリン

Pos を半順序集合の成す圏とする．このとき，レギュラーハイパードクトリンとは以下の条件を満たす，反変関手 $\mathscr{D} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Pos}$ のことである：

1. ベース圏 $\mathbf{C}$ は任意の有限積を持つ．
2. 各射影 $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$ に対して，関手 $\mathscr{D}(\pi_i) : \mathscr{D}(X_i) \to \mathscr{D}(X_1 \times X_2)$ が左随伴 $\exists_{\pi_i} : \mathscr{D}(X_1 \times X_2) \to \mathscr{D}(X_i)$ を持ち，$\exists$ に関する Beck-Chevalley 条件と Frobenius reciprocity を満たす．

注意 2.1.13

定義から見て明らかなようにレギュラーハイパードクトリンは一般には一階ハイパードクトリンとはならず，逆に一階ハイパードクトリンはレギュラーハイパードクトリンとなる．なお，一階ハイパーパードクトリンが一階述語論理に対応しているのに対して，レギュラーハイパードクトリンはレギュラー論理に対応している．

また，コヒーレントハイパードクトリンもコヒーレント論理に対応するものとして定義することができる．

一階ハイパードクトリンは一階述語論理の構造的実質であると言った．しかし，さらなる構造を付加することで，ハイパードクトリンは一階の理論だけでなく，高階の理論をも解釈できる構造を持ちうる（そしてこの事実は，一階理論や高階理論の構造的な連関がどこにあるのかを理解する上でもこのハイパードクトリン的な論理解釈は有用であるということを示唆している）．このような高階の論理に対応するハイパードクトリンを高階ハイパードクトリン，またはトライポスといい，以下のように定義される．なお，今回も直観主義高階論理の場合で定義し，[23] の定義を参照している．

定義 2.1.14 高階ハイパードクトリン (トライポス)

直観主義高階論 HoIL に対する高階ハイパードクトリン（トライポス）とは，以下の条件を満たす一階ハイパードクトリン $\mathscr{D} : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ha}$ のことである：

1. ベース圏 $\mathbf{C}$ はカルテシアン閉圏である．
2. $\mathscr{D} \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-, \Omega)$ となる対象 $\Omega \in \mathbf{C}$ が存在する（この Ω のことを真理値対象という）．

注意 2.1.15

高階ハイパードクトリン（トライポス）は，ピッツにより初めて定式化された概念である．元々は，「ハイティング値集合（H-valued set）による層トポスの表現法とエフェクティブトポスの共通の一般化の方法があるか？」という疑問に答えるのに，ピッツがハイパードクトリンの方法が有効であると気づいたことにより定式化された．トライポスという名前は，当時，ピッツの指導教員であったトポス理論の研究者のジョンストンが，インデックス付き半順序集合を表現するトポス（Topos Representing Indexed Partially Ordered Set）と見なすことができるため，その頭文字を取って「トライポス（Tripos)」と命名したことに由来する．また，当初のオリジナルの定義は上記の真理値対象を用いた定義ではなく，ハイパードクトリンの内部言語（Internal Lnaguage）から構成される P-述語を用いた定義であった．そして，この P-述語がある条件を満たすとき，トライポスはトポスとなることが示された．現在では，このトライポスからトポスを構成する方法は一般化され，「トライポス to トポス構成」と呼ばれている [34].

また，トポスは $\mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(-) : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ha}$ という圏 $\mathscr{E}$ の部分対象を取るという反変関手がトライポスとなるときの（このような形式のトライポスのことを部分対象トライポスという）圏 $\mathscr{E}$ として，トライポスの視点から定義することも可能である．実際，このトライポス視点からのトポスの定義と従来の定義は同値になることが示される [11].

なお，トライポスの定義に現れる真理値対象 Ω は，トポス $\mathscr{E}$ における部分対象分類子，すなわち

$$\mathrm{Sub}_{\mathscr{E}}(-) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{E}}(-, \Omega)$$

を満たす対象 Ω にちょうど対応している概念である．これらは，一般的には型理論における Prop 型に対応しており，命題の命題を許す構造，すなわち高階の構造可能にする本質である．この意味で，トライポスやトポスは高階の構造を持っていると言え，実際に高階論理を解釈することを可能にする [23].

2.2 一階述語論理の完全性定理

代数的論理において，命題論理は，対応する代数構造を考え（古典論理の場合はブール代数，直観主義論理の場合はハイティング代数），その代数構造による解釈により，自然な意味論（完全性）を与えることができ

る．しかしながら，述語論理に論理体系が拡張されると，量化子の解釈が困難であるゆえに，代数による論理解釈がうまく機能しなくなる．このような問題を，ローヴェアはハイパードクトリンを用いて鮮やかに解決する方法を示した．

本節では，ローヴェアによるハイパードクトリン的な一階述語論理の自然な解釈と健全性定理・完全性定理を紹介する．定義や証明は主に [30] を参考にした．本論文では照井 [55] による直観主義述語論理の体系 LJ と NJ の健全性定理・完全性定理を証明する．また，以下のような表記法を用いる：

$$t(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \text{の内に自由変数を持つ項 t}$$
$$\varphi(x_1, ..., x_n) : x_1, ..., x_n \text{の内に自由変数を持つ式} \varphi$$

さっそく，ハイパードクトリンを用いた一階述語論理の解釈を与える．本節でも扱う述語論理の体系は直観主義述語論理 IL を基本とする．なお，他の論理の体系に置き換えた場合でも本質的には同様の仕方で定義可能である．（古典述語論理には自然に一般化することができる．）

定義 2.2.1 IL ハイパードクトリンによる解釈

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，c_i を定項，f_i を関数記号，P_j を述語記号とする．また，$\mathscr{D} : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ha}$ を IL ハイパードクトリンとする．このとき，与えられた $C \in \mathbf{C}$ に対して，ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ による解釈を以下のように定義する：

- （定項）：$[\![c_i]\!] : 1 \to C$（終対象からの射）
- （関数記号）：$[\![f_i]\!] : C^{n_i} \to C$（$n_i$は f_i のアリティ）
- （述語記号）：$[\![P_j]\!] \in \mathscr{D}(C^{n_j})$（$n_j$は P_j のアリティ）

また，項と式の解釈を項と式の構成により帰納的に定義する：

- （項）：項 $t(x_1, ..., x_n)$ は射 $[\![t]\!] : C^n \to C$ であり，以下のように定義される：
  - $[\![x_i(x_1, ..., x_n)]\!] = \pi_i : C^n \to C$（つまり，対象 C^n は変数リストを表していると見なせる）
  - $[\![f_i(t_1, ..., t_m)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![f_i]\!]([\![t_1]\!], ..., [\![t_m]\!])$
- （式）：式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ は対象 $[\![\varphi(x_1, ..., x_n)]\!] \in \mathscr{D}(C^n)$ であり，以下のように定義される：
  - $[\![P_j(t_1, ..., t_m)(x_1, ..., x_n)]\!] = \mathscr{D}([\![t_1]\!], ..., [\![t_m]\!])([\![P_j]\!])$
  - $[\![\neg\psi(x_1, ..., x_n)]\!] = \neg[\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \wedge \chi)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!] \wedge [\![\chi(x_1, ..., x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \vee \chi)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!] \vee [\![\chi(x_1, ..., x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \to \chi)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!] \to [\![\chi(x_1, ..., x_n)]\!]$
  - $[\![\forall x_n.\psi(x_1, ..., x_n)]\!] = \forall_{(\pi_1, ..., \pi_{n-1})}[\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!]$(以下 $\forall_{(\pi_1, ..., \pi_{n-1})}$ を $\forall x_n$ と書くことにする)
  - $[\![\exists x_n.\psi(x_1, ..., x_n)]\!] = \exists_{(\pi_1, ..., \pi_{n-1})}[\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!]$(以下 $\exists_{(\pi_1, ..., \pi_{n-1})}$ を $\exists x_n$ と書くことにする)

また，シーケント $\varphi_1(x_1, ..., x_n), ..., \varphi_n(x_1, ..., x_n) \vdash \psi(x_1, ..., x_n)$ は以下のように定義される：

$$[\![\varphi_1(x_1, ..., x_n)]\!] \wedge ... \wedge [\![\varphi_n(x_1, ..., x_n)]\!] \leq [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!]$$

また，シーケントの右側が空である場合は $[\![\varphi_1(x_1, ..., x_n)]\!] \wedge, ..., \wedge [\![\varphi_n(x_1, ..., x_n)]\!] \leq \bot$ とし，左側が空である場合は $\top \leq [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!]$ とする．

このハイパードクトリンによる述語論理解釈によって，述語論理の健全性定理，完全性定理を示すことができる．定理を示す前に，まず，3つの補題を証明する．なお，以下では上記の定義を前提にして議論を進める．

補題 2.2.2　弱化補題

項 $t(x_1,...,x_n)$ と式 $\varphi(x_1,...,x_n)$ と $x_i(i=1,...,n)$ とは異なる変数 y に対して，以下が成立する：

$$(1)[\![t(-,y,-)]\!] = [\![t(\vec{x})]\!] \circ (\vec{\pi})$$
$$(2)[\![\varphi(-,y,-)]\!] = \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\varphi(\vec{x})]\!])$$

ただし，$(\vec{x}) = (x_1,...,x_j,x_{j+1},...,x_n)$，$(-,y,-) = (x_1,...,x_j,y,x_{j+1},...,x_n)$，$(\vec{\pi}) = (\pi_1,...,\pi_n)$ であるとする．

Proof. (1):項 t の構成に関する帰納法で示す：

- $t = x_i$ のとき：
  $[\![t(-,y,-)]\!] = [\![x_i(-,y,-)]\!] = \pi_i^{n+1} : C^{n+1} \to C$ で $[\![t(\vec{x})]\!] = [\![x_i(\vec{x})]\!] = \pi_i^n : C^n \to C$ なので，以下が成立する：
  $$[\![x_i(-,y,-)]\!] = \pi_i^{n+1} = \pi_i^n \circ (\vec{\pi}) = [\![x_i(\vec{x})]\!] \circ (\vec{\pi})$$

- $t = [\![f_i(t_1,...,t_m)(\vec{x})]\!]$ のとき：

$$\begin{aligned}[\![f_i(t_1,...,t_m)(-,y,-)]\!] &= [\![f_i]\!]([\![t_1(-,y,-)]\!],...,[\![t_m(-,y,-)]\!]) \\ &= [\![f_i]\!]([\![t_1(\vec{x})]\!] \circ (\vec{\pi}),...,[\![t_m(\vec{x})]\!] \circ (\vec{\pi}))(\text{帰納法の仮定}) \\ &= [\![f_i]\!]([\![t_1(\vec{x})]\!],...,[\![t_m(\vec{x})]\!]) \circ (\vec{\pi}) \\ &= [\![f_i(t_1,...,t_m)(\vec{x})]\!] \circ (\vec{\pi})\end{aligned}$$

よって，(1) の場合は示された．
(2):式 φ の構成に関する帰納法で示す：

- $\varphi = P_j(t_1,...,t_m)$ のとき：

$$\begin{aligned}[\![P_j(t_1,...,t_m)(-,y,-)]\!] &= \mathscr{D}([\![t_1(-,y,-)]\!],...,[\![t_m(-,y,-)]\!])([\![P_j]\!]) \\ &= \mathscr{D}([\![t_1(\vec{x})]\!] \circ (\vec{\pi}),...,[\![t_m(\vec{x})]\!] \circ (\vec{\pi}))([\![P_j]\!])((1)\text{ が成り立つことによる}) \\ &= \mathscr{D}(([\![t_1(\vec{x})]\!],...,[\![t_m(\vec{x})]\!]) \circ (\vec{\pi}))([\![P_j]\!]) \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi}) \circ \mathscr{D}([\![t_1(\vec{x})]\!],...,[\![t_m(\vec{x})]\!])([\![P_j]\!]) \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![P_j(t_1,...,t_m)(\vec{x})]\!])\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \wedge \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}[\![\psi \wedge \chi(-,y,-)]\!] &= [\![\psi(-,y,-)]\!] \wedge [\![\chi(-,y,-)]\!] \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi(\vec{x})]\!]) \wedge \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\chi(\vec{x})]\!]) \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi(\vec{x})]\!] \wedge [\![\chi(\vec{x})]\!])(\mathscr{D}(\vec{\pi})\text{ はハイティング順同型 } or \text{ 右随伴であることによる}) \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi \wedge \chi(\vec{x})]\!])\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \vee \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}[\![\psi \vee \chi(-,y,-)]\!] &= [\![\psi(-,y,-)]\!] \vee [\![\chi(-,y,-)]\!] \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi(\vec{x})]\!]) \vee \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\chi(\vec{x})]\!]) \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi(\vec{x})]\!] \vee [\![\chi(\vec{x})]\!])(\mathscr{D}(\vec{\pi})\text{ はハイティング順同型}) \\ &= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi \vee \chi(\vec{x})]\!])\end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\neg\psi)(-, y, -)]\!] &= \neg[\![\psi(-, y, -)]\!] \\
&= \neg\mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})(\neg[\![\psi(\vec{x})]\!])(\mathscr{D}(\vec{\pi}) \text{ はハイティング順同型}) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![(\neg\psi)(\vec{x})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \to \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \to \chi)(-, y, -)]\!] &= [\![\psi(-, y, -)]\!] \to [\![\chi(-, y, -)]\!] \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi(\vec{x})]\!]) \to \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\chi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\psi(\vec{x})]\!] \to [\![\chi(\vec{x})]\!])(\mathscr{D}(\vec{\pi}) \text{ はハイティング順同型}) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})(([\![\psi \to \chi)(\vec{x})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![\forall x_{n+1}.\psi(-, y, -, x_{n+1})]\!] &= \forall_{\pi_{n+1}}[\![\psi(-, y, -, x_{n+1})]\!] \\
&= \forall_{\pi_{n+1}}(\mathscr{D}(\vec{\pi}, \pi_{n+1})([\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!])) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})(\forall_{\pi_{n+1}}([\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!]))(\mathrm{Beck}-\mathrm{Chevalley}\text{条件}) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\forall x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \exists x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![\exists x_{n+1}.\psi(-, y, -, x_{n+1})]\!] &= \exists_{\pi_{n+1}}[\![\psi(-, y, -, x_{n+1})]\!] \\
&= \exists_{\pi_{n+1}}(\mathscr{D}(\vec{\pi}, \pi_{n+1})([\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!])) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})(\exists_{\pi_{n+1}}([\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!]))\ (\mathrm{Beck}-\mathrm{Chevalley}\text{条件}) \\
&= \mathscr{D}(\vec{\pi})([\![\exists x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!])
\end{aligned}$$

よって，(2) の場合も示された． □

補題 2.2.3 代入補題

項 $t(x_1, ..., x_n)$ と式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ と $x_i (i = 1, ..., n)$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{gathered}
(1)[\![t(\vec{x})[s/x_i]]\!] = [\![t(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle \\
(2)[\![\varphi(\vec{x})[s/x_i]]\!] = \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\varphi(\vec{x})]\!])
\end{gathered}$$

ただし，$(\vec{x}) = (x_1, ..., x_j, x_{j+1}, ..., x_n)$，$(-, s/x_i, -) = (x_1/x_1, ..., s/x_i, ..., x_n/x_n)$ であるとする．

Proof. (1):項 t の構成に関する帰納法で示す：

- $t = x_i$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![x_i(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle &= \pi_i \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle \\
&= [\![s]\!] \\
&= [\![x_i(\vec{x})[s/x_i]]\!]
\end{aligned}$$

- $t = x_j (i \neq j)$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![x_j(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle &= \pi_j \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle \\
&= \pi_j \\
&= [\![x_j(\vec{x})[s/x_i]]\!]
\end{aligned}$$

- $t = f_j(t_1, ..., t_m)$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![f_j(t_1, ..., t_m)(\vec{x})[s/x_i]]\!] &= [\![f_j]\!] \circ \langle [\![t_1(\vec{x})[s/x_i]]\!], ..., [\![t_m(\vec{x})[s/x_i]]\!] \rangle \\
&= [\![f_j]\!] \circ \langle [\![t_1(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle, ..., [\![t_m(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle \rangle \\
&= [\![f_j]\!] \circ \langle [\![t_1(\vec{x})]\!], ..., [\![t_m(\vec{x})]\!] \rangle \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle \\
&= [\![f_j(t_1, ..., t_m)(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle
\end{aligned}$$

よって，(1) の場合は示された.

(2):式 φ の構成に関する帰納法で示す：

- $\varphi = P_j(t_1, ..., t_m)$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![P_j(t_1, .., t_m)(\vec{x})[s/x_i]]\!] &= \mathscr{D}([\![t_1(\vec{x})[s/x_i]]\!], ..., [\![t_m(\vec{x})[s/x_i]]\!])([\![P_j]\!]) \\
&= \mathscr{D}([\![t_1(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle, .., [\![t_m(\vec{x})]\!] \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle)([\![P_j]\!]) \\
&= \mathscr{D}(([\![t_1(\vec{x})]\!], .., [\![t_m(\vec{x})]\!]) \circ \langle \pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n \rangle)([\![P_j]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n) \circ \mathscr{D}([\![t_1(\vec{x})]\!], .., [\![t_m(\vec{x})([\![P_j]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![P_j(t_1, ..., t_m)(\vec{x})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \wedge \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \wedge \chi)(\vec{x})[s/x_i]]\!] &= [\![\psi(\vec{x})[s/x_i]]\!] \wedge [\![\chi(\vec{x})[s/x_i]]\!] \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\psi(\vec{x})]\!]) \wedge \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\chi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\psi(\vec{x})]\!] \wedge [\![\chi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![(\psi \wedge \chi)(\vec{x})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \vee \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \vee \chi)(\vec{x})[s/x_i]]\!] &= [\![\psi(\vec{x})[s/x_i]]\!] \vee [\![\chi(\vec{x})[s/x_i]]\!] \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\psi(\vec{x})]\!]) \vee \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\chi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\psi(\vec{x})]\!] \vee [\![\chi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![(\psi \vee \chi)(\vec{x})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\neg\psi)(\vec{x})[s/x_i]]\!] &= \neg[\![\psi(\vec{x})[s/x_i]]\!] \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)(\neg[\![\psi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\neg\psi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![(\psi \vee \chi)(\vec{x})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \to \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \to \chi)(\vec{x})[s/x_i]]\!] &= [\![\psi(\vec{x})[s/x_i]]\!] \to [\![\chi(\vec{x})[s/x_i]]\!] \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\psi(\vec{x})]\!]) \to \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\chi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![\psi(\vec{x})]\!] \to [\![\chi(\vec{x})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n)([\![(\psi \to \chi)(\vec{x})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![\forall x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})[s/x_i]]\!] &= \forall\pi_{n+1}[\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})[s/x_i]]\!] \\
&= \forall\pi_{n+1}(\mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n, \pi_{n+1})([\![(\psi(\vec{x}, x_{n+1}))]\!])) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n, \pi_{n+1})(\forall\pi_{n+1}[\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n, \pi_{n+1})([\![\forall x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!])
\end{aligned}$$

- $\varphi = \exists x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![\exists x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})[s/x_i]]\!] &= \exists\pi_{n+1}[\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})[s/x_i]]\!] \\
&= \exists\pi_{n+1}(\mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n, \pi_{n+1})([\![(\psi(\vec{x}, x_{n+1}))]\!])) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n, \pi_{n+1})(\exists\pi_{n+1}[\![\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!]) \\
&= \mathscr{D}(\pi_1, ..., [\![s]\!], ..., \pi_n, \pi_{n+1})([\![\exists x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})]\!])
\end{aligned}$$

□

補題 2.2.4 LJ に対するカノニカルな解釈

解釈 $[\![-]\!]$ を $[\![c_i]\!] = c_i$, $[\![f_i]\!] = f_i$, $[\![P_i(t_1, ..., t_m)]\!] = [P_i(t_1, ..., t_m)]$ と定義する．このとき, 各式 $\varphi(x_1, .., x_n) \in \mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ に対して，$[\![\varphi(x_1, ..., x_n)]\!] = [\varphi(x_1, ..., x_n)]$ が成立する．なお，$[\varphi(x_1, ..., x_n)]$ は φ は直観主義述語論理の体系 LJ のリンデンバウム-タルスキ代数の対象である．

Proof. 式 φ の構成に関する帰納法で示す（以下，$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ とする）：

- $\varphi = P_j(t_1, ..., t_m)$ のとき：
  仮定より明らかである．
- $\varphi = \psi \wedge \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \wedge \chi)(\vec{x})]\!] &= [\![(\psi)(\vec{x})]\!] \wedge [\![(\chi)(\vec{x})]\!] \\
&= [\psi(\vec{x})] \wedge [\chi(\vec{x})] \\
&= [(\psi \wedge \chi)(\vec{x})]
\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \vee \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \vee \chi)(\vec{x})]\!] &= [\![(\psi)(\vec{x})]\!] \vee [\![(\chi)(\vec{x})]\!] \\
&= [\psi(\vec{x})] \vee [\chi(\vec{x})] \\
&= [(\psi \vee \chi)(\vec{x})]
\end{aligned}$$

- $\varphi = \neg\psi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\neg\psi)(\vec{x})]\!] &= \neg[\![(\psi)(\vec{x})]\!] \\
&= \neg[\psi(\vec{x})] \\
&= [(\neg\psi)(\vec{x})]
\end{aligned}$$

- $\varphi = \psi \to \chi$ のとき：

$$\begin{aligned}
[\![(\psi \to \chi)(\vec{x})]\!] &= [\![(\psi)(\vec{x})]\!] \to [\![(\chi)(\vec{x})]\!] \\
&= [\psi(\vec{x})] \to [\chi(\vec{x})] \\
&= [(\psi \to \chi)(\vec{x})]
\end{aligned}$$

- $\varphi = \forall x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})$ のとき：

$$\begin{aligned}\llbracket \forall x_{n+1}.\psi(x_{n+1})(\vec{x}) \rrbracket &= \forall_{\pi_{n+1}} \llbracket \psi(x_{n+1})(\vec{x}) \rrbracket \\ &= \forall_{\pi_{n+1}} [\psi(x_{n+1})(\vec{x})] \\ &= [\forall x_{n+1}.\psi(x_{n+1})(\vec{x})]\end{aligned}$$

- $\varphi = \exists x_{n+1}.\psi(\vec{x}, x_{n+1})$ のとき：

$$\begin{aligned}\llbracket \exists x_{n+1}.\psi(x_{n+1})(\vec{x}) \rrbracket &= \exists_{\pi_{n+1}} \llbracket \psi(x_{n+1})(\vec{x}) \rrbracket \\ &= \exists_{\pi_{n+1}} [\psi(x_{n+1})(\vec{x})] \\ &= [\exists x_{n+1}.\psi(x_{n+1})(\vec{x})]\end{aligned}$$

□

注意 2.2.5

今回は LJ に対する構文的ハイパードクトリンを定義したので，LJ に対するカノニカルな解釈が存在することしか示していない．ただ，注意 2.1.9 で言及したことを踏まえると，LJ と同様にその他の体系（NJ や HJ など）に対するカノニカルな解釈が存在することも容易に示すことができる．

続いて，ハイパードクトリン解釈による健全性定理を証明を行うが，健全性定理の証明はどのような証明体系を採用しているかに依存する．そこで今回はシーケント計算の体系 LJ，自然演繹の体系 NJ という二つの標準的な直観主義述語論理の体系の健全性定理の証明を行う．なお，LJ と NJ は [55] による体系を採用した．また，NJ の自然な拡張として得られる古典述語論理の体系 NK に対しても IL ハイパードクトリンを自然に CL ハイパードクトリンに拡張することで NK の健全性定理が得られるということも手短に確認する．また，証明を分かりやすくするために，変数の解釈 $\llbracket x_i(x_1, ..., x_n) \rrbracket = \pi_i : C^n \to C$ を $\pi_i : (x_1, ..., x_i, ..., x_n) \to x_i$ と表記する．

定理 2.2.6 LJ の健全性定理

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，$\mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ を式の集合とする．このとき，$\Gamma(\vec{x}), \Delta(\vec{x}) \subset \mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ に対して，シーケント計算の体系 NJ で $\Gamma(\vec{x}) \vdash \Delta(\vec{x})$ であるなら，各 IL ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ と解釈 $\llbracket - \rrbracket$ に対して，$\llbracket \Gamma(\vec{x}) \rrbracket \leq \llbracket \Delta(\vec{x}) \rrbracket$ が成立する．（ただし，Δ は論理式を高々一つしか含まない集合であり，$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ である.）

Proof. 簡略化のため自由変数の表示は省略する．π をシーケント $\Gamma \vdash \Delta$ に対する証明図であるとし，π の複雑さに関する帰納法で示す：

- $\Gamma \vdash \Delta$ が $(init)$ または $(\bot L)$ の場合は自明に成り立つ．
- π の最後のステップが (cut) のとき：
  このとき，$\Gamma = \Gamma', \Gamma$ であり，帰納法の仮定より，$\llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \varphi \rrbracket$ と $\llbracket \varphi \rrbracket \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \Delta \rrbracket$ が成立する．よって，$\llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \varphi \rrbracket \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \Delta \rrbracket$ が成立する．
- π の最後のステップが (w) のとき：
  このとき，$\Gamma = \Gamma', \Gamma$ であり，帰納法の仮定より，$\llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \Delta \rrbracket$ を得る．よって，$\llbracket \Gamma' \rrbracket \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \Delta \rrbracket$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\wedge L)$ のとき：
  このとき，$\Gamma = \varphi_1 \wedge \varphi_2, \Gamma$ であり，帰納法の仮定より，$\llbracket \varphi_1 \rrbracket \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \Delta \rrbracket$ と $\llbracket \varphi_2 \rrbracket \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket \leq \llbracket \Delta \rrbracket$ が成立

する．よって，$[\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立する．

- π の最後のステップが $(\wedge R)$ のとき：
  このとき，$\Delta = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!]$ と $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_2]\!]$ が成立する．よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!] \wedge [\![\varphi_2]\!] = [\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\vee L)$ のとき：
  このとき，$\Gamma = \varphi_1 \vee \varphi_2, \Gamma$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\varphi_1]\!] \vee [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ と $[\![\varphi_2]\!] \vee [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立する．よって，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] &= [\![\varphi_1]\!] \vee [\![\varphi_2]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \\
&= ([\![\varphi_1]\!] \vee [\![\Gamma]\!]) \vee ([\![\varphi_2]\!] \vee [\![\Gamma]\!]) \\
&\leq [\![\Delta]\!] \vee [\![\Delta]\!] \\
&\leq [\![\Delta]\!]
\end{aligned}
$$

- π の最後のステップが $(\vee R)$ のとき：
  このとき，$\Delta = \varphi_1 \vee \varphi_2$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!]$ と $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_2]\!]$ が成立する，よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!] \vee [\![\varphi_2]\!] = [\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\to E)$ のとき：
  このとき，$\Gamma = \varphi \to \psi, \Gamma$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!]$ と $[\![\psi]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立する．二つ目の不等式は $[\![\psi]\!] \leq [\![\Gamma]\!] \to [\![\Delta]\!]$ と変形できる．よって，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi \to \psi]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] &\leq [\![\varphi \to \psi]\!] \wedge [\![\varphi]\!] \\
&\leq [\![\psi]\!] \\
&\leq [\![\Gamma]\!] \to [\![\Delta]\!]
\end{aligned}
$$

  よって，$\varphi \to \psi]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq ([\![\Gamma]\!] \to [\![\Delta]\!])[\![\Gamma]\!]$ を得る．したがって， $\varphi \to \psi]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\to R)$ のとき：
  このとき，$\Delta = \varphi \to \psi$ であり，　帰納法の仮定より，$[\![\varphi]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立する．よって，ハイティング代数の性質より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] = [\![\varphi \to \psi]\!]$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\forall L)$ のとき：
  このとき，$\Gamma = \forall y.\varphi(\vec{x}, y), \Gamma$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\varphi[t/y]]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立する．　射影射 $\pi : (\vec{x}, y) \to \vec{x}$ に対する随伴 $\mathscr{D}(\pi) \dashv \forall_\pi$ により以下が成立する：

$$
\mathscr{D}(\pi)\forall_\pi([\![\varphi(\vec{x}, y)]\!]) \leq [\![\varphi(\vec{x}, y)]\!]
$$

  したがって，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}(\pi', [\![t]\!])\mathscr{D}(\pi)\forall_\pi([\![\varphi(\vec{x}, y)]\!]) \leq \mathscr{D}(\pi', [\![t]\!])[\![\varphi(\vec{x}, y)]\!] \quad &\iff \mathscr{D}(\pi \circ (\pi', [\![t]\!]))\forall_\pi([\![\varphi(\vec{x}, y)]\!]) \leq [\![\varphi[t/y]]\!] (\text{代入補題}) \\
&\iff \mathscr{D}(\pi')([\![\forall y.\varphi(\vec{x}, y)]\!]) \leq [\![\varphi[t/y]]\!] \\
&\iff [\![\forall y.\varphi(\vec{x}, y)]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!] (\text{弱化補題})
\end{aligned}
$$

  ゆえ，$[\![\forall y.\varphi(\vec{x}, y)]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\forall R)$ のとき：
  このとき，$\Delta = \forall y.\varphi(\vec{x}, y)$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[s/y]]\!]$（$s \notin FV(\Gamma, \forall y.\varphi(\vec{x}, y))$）が

成立する．今，射影射 $\pi : (\vec{x}, s) \to \vec{x}$ に対して，随伴 $\mathscr{D}(\pi) \dashv \forall_\pi$ が存在する．また，$s \notin FV(\Gamma)$ であるので弱化補題より $\mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma(\vec{x})]\!]) = [\![\Gamma(\vec{x})]\!]$ を得る．したがって，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[s/y]]\!] \quad & \iff \mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma]\!]) \leq [\![\varphi[s/y]]\!] \\
& \iff [\![\Gamma]\!] \leq \forall_\pi([\![\varphi[s/y]]\!]) \\
& \iff [\![\Gamma]\!] \leq [\![\forall s.\varphi[s/y]]\!]) \\
& \iff [\![\Gamma]\!] \leq [\![\forall y.\varphi(\vec{x}, y)]\!])
\end{aligned}
$$

- π の最後のステップが $(\exists L)$ のとき：

　このとき，$\Gamma = \exists y.\varphi(\vec{x}, y), \Gamma$ であり，　帰納法の仮定より，$[\![\varphi[s/y]]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq \Delta$（$s \notin FV(\exists y.\varphi(\vec{x}, y), \Gamma, \Delta)$）が成立する．　今，射影射 $\pi : (\vec{x}, s) \to \vec{x}$ に対して，随伴 $\exists_\pi \dashv \mathscr{D}(\pi)$ が存在する．また，$s \notin FV(\Gamma, \Delta)$ であるので弱化補題より $\mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma(\vec{x}) \to \Delta(\vec{x})]\!]) = [\![\Gamma(\vec{x}) \to \Delta(\vec{x})]\!]$ を得る．したがって，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
[\![\varphi[s/y]]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq \Delta \quad & \iff [\![\varphi[s/y]]\!] \leq [\![\Gamma \to \Delta]\!] \\
& \iff [\![\varphi[s/y]]\!] \leq \mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma \to \Delta]\!]) \\
& \iff \exists_\pi([\![\varphi[s/y]]\!]) \leq [\![\Gamma \to \Delta]\!] \\
& \iff [\![\exists s.\varphi[s/y]]\!] \leq [\![\Gamma]\!] \to [\![\Delta]\!] \\
& \iff [\![\exists y.\varphi(\vec{x}, y)]\!] \wedge [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]
\end{aligned}
$$

- π の最後のステップが $(\exists R)$ のとき：

　このとき，$\Delta = \exists y.\varphi(\vec{x}, y)$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!]$ が成立する．射影射 $\pi : (\vec{x}, y) \to \vec{x}$ に対する随伴 $\exists_\pi \dashv \mathscr{D}(\pi)$ により以下が成立する：

$$[\![\varphi(y, \vec{x})]\!] \leq \mathscr{D}(\pi)\exists_\pi([\![\varphi(y, \vec{x})]\!])$$

　したがって，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}(\pi', [\![t]\!])([\![\varphi(y, \vec{x})]\!]) \leq \mathscr{D}(\pi', [\![t]\!])\mathscr{D}(\pi)\exists_\pi([\![\varphi(y, \vec{x})]\!]) \quad & \iff [\![\varphi[t/y]]\!] \leq \mathscr{D}(\pi \circ (\pi', [\![t]\!]))(\exists_\pi([\![\varphi(y, \vec{x})]\!]))(\text{代入補題}) \\
& \iff [\![\varphi[t/y]]\!] \leq \mathscr{D}(\pi')([\![\exists_y.\varphi(\vec{x}, y)]\!]) \\
& \iff [\![\varphi[t/y]]\!] \leq [\![\exists_y.\varphi(\vec{x}, y)]\!](\text{弱化補題})
\end{aligned}
$$

　ゆえ，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!] \leq [\![\exists_y.\varphi(\vec{x}, y)]\!]$ が成立する．

よって健全性は成立する．□

定理 2.2.7 NJ の健全性定理

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，$\mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ を式の集合とする．このとき，$\Gamma(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ に対して，自然演繹の体系 NJ で $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ であるなら，各ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\varphi(\vec{x})]\!]$ が成立する．（ただし，$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ である．）

Proof. 簡略化のため自由変数の表示は省略する．π をシーケント $\Gamma \vdash \varphi$ に対する証明図であるとし，π の複雑さに関する帰納法で示す：

- $\Gamma \vdash \varphi$ が $(init)$ である場合は自明に成り立つ．

- π の最後のステップが $(\perp)$ のとき：
  このとき，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\perp]\!] \leq [\![\varphi]\!]$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\wedge I)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \varphi_1 \wedge \varphi_2$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!]$ と $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_2]\!]$ が成立する．よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!] \wedge [\![\varphi_2]\!] = [\![\varphi_1 \wedge \varphi_2]\!]$ となる．
- π の最後のステップが $(\wedge E)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \varphi_i (i = 1, 2)$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!] \wedge [\![\varphi_2]\!]$ が成立する．よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!] \wedge [\![\varphi_2]\!] \leq [\![\varphi_i]\!]$ となる．
- π の最後のステップが $(\vee I)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!]$ と $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_2]\!]$ が成立する．よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!] \vee [\![\varphi_2]\!] =]\!] \leq [\![\varphi_1 \vee \varphi_2]\!]$ となる．
- π の最後のステップが $(\vee E)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \psi$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi_1]\!] \vee [\![\varphi_2]\!]$ と $[\![\Gamma]\!][\![\varphi_1]\!] \leq [\![\psi]\!]$ と $[\![\Gamma]\!][\![\varphi_2]\!] \leq [\![\psi]\!]$ が成立する．よって，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!] &\leq [\![\Gamma]\!] \wedge ([\![\varphi_1]\!] \vee [\![\varphi_2]\!]) \\
&= ([\![\Gamma]\!] \wedge [\![\varphi_1]\!]) \vee ([\![\Gamma]\!] \wedge [\![\varphi_2]\!]) \\
&\leq [\![\psi]\!] \vee [\![\psi]\!] \\
&= [\![\psi]\!]
\end{aligned}$$

- π の最後のステップが $(\to I)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \varphi \to \psi$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \wedge [\![\varphi]\!] \leq [\![\psi]\!]$ が成立する．よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!] = [\![\varphi \to \psi]\!]$ となる．
- π の最後のステップが $(\to E)$ のとき：
  $\varphi = \psi$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!]$ と $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!]$ が成立する．よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!] \wedge ([\![\varphi]\!] \to [\![\psi]\!])$ が成立する．
- π の最後のステップが $(\forall I)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \forall y.\varphi(\vec{x}, y)$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[s/y]]\!]$（$s \notin FV(\Gamma, \forall y.\varphi(\vec{x}, y))$）が成立する．今，射影射 $\pi : (\vec{x}, s) \to \vec{x}$ に対して，随伴 $\mathscr{D}(\pi) \dashv \forall_\pi$ が存在する．また，$s \notin FV(\Gamma)$ であるので弱化補題より $\mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma(\vec{x})]\!]) = [\![\Gamma(\vec{x})]\!]$ を得る．したがって，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[s/y]]\!] &\iff \mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma]\!]) \leq [\![\varphi[s/y]]\!] \\
&\iff [\![\Gamma]\!] \leq \forall_\pi([\![\varphi[s/y]]\!]) \\
&\iff [\![\Gamma]\!] \leq [\![\forall s.\varphi[s/y]]\!]) \\
&\iff [\![\Gamma]\!] \leq [\![\forall y.\varphi(\vec{x}, y)]\!])
\end{aligned}$$

- π の最後のステップが $(\forall E)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \varphi[t/y]$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\forall y.\varphi(\vec{x}, y)]\!]$ が成立する．今，射影射 $\pi : (\vec{x}, y) \to \vec{x}$ に対する随伴 $\mathscr{D}(\pi) \dashv \forall_\pi$ により以下が成立する：

$$\mathscr{D}(\pi)\forall_\pi([\![\varphi(\vec{x}, y)]\!]) \leq [\![\varphi(\vec{x}, y)]\!]$$

したがって，以下が成立する：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(\pi',[\![t]\!])\mathscr{D}(\pi)\forall_\pi([\![\varphi(\vec{x},y)]\!]) \leq \mathscr{D}(\pi',[\![t]\!])[\![\varphi(\vec{x},y)]\!] &\iff \mathscr{D}(\pi\circ(\pi',[\![t]\!]))\forall_\pi([\![\varphi(\vec{x},y)]\!]) \leq [\![\varphi[t/y]]\!](\text{代入補題})\\ &\iff \mathscr{D}(\pi')([\![\forall y.\varphi(\vec{x},y)]\!]) \leq [\![\varphi[t/y]]\!]\\ &\iff [\![\forall y.\varphi(\vec{x},y)]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!](\text{弱化補題})\end{aligned}$$

ゆえ，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\forall y.\varphi(\vec{x},y)]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!]$ が成立する．

- π の最後のステップが $(\exists I)$ のとき：
  このとき, $\varphi = \exists y.\varphi(\vec{x},y)$ であり, 帰納法の仮定より, $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!]$ が成立する．射影射 $\pi : (\vec{x},y) \to \vec{x}$ に対する随伴 $\exists_\pi \dashv \mathscr{D}(\pi)$ により以下が成立する：

$$[\![\varphi(y,\vec{x})]\!] \leq \mathscr{D}(\pi)\exists_\pi([\![\varphi(y,\vec{x})]\!])$$

  したがって，以下が成立する：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}(\pi',[\![t]\!])([\![\varphi(y,\vec{x})]\!]) \leq \mathscr{D}(\pi',[\![t]\!])\mathscr{D}(\pi)\exists_\pi([\![\varphi(y,\vec{x})]\!]) &\iff [\![\varphi[t/y]]\!] \leq \mathscr{D}(\pi\circ(\pi',[\![t]\!]))(\exists_\pi([\![\varphi(y,\vec{x})]\!]))(\text{代入補題})\\ &\iff [\![\varphi[t/y]]\!] \leq \mathscr{D}(\pi')([\![\exists_y.\varphi(\vec{x},y)]\!])\\ &\iff [\![\varphi[t/y]]\!] \leq [\![\exists_y.\varphi(\vec{x},y)]\!](\text{弱化補題})\end{aligned}$$

  ゆえ，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi[t/y]]\!] \leq [\![\exists_y.\varphi(\vec{x},y)]\!]$ が成立する．

- π の最後のステップが $(\exists E)$ のとき：
  このとき，$\varphi = \psi$ であり，帰納法の仮定より，$[\![\Gamma]\!][\![\exists y.\varphi(\vec{x},y)]\!]$ と $[\![\Gamma]\!] \wedge [\![\varphi[s/y]]\!] \leq [\![\psi]\!]$（$s \notin FV(\Gamma, \exists y.\varphi(\vec{x},y),\psi)$）が成立する．今，射影射 $\pi : (\vec{x},s) \to \vec{x}$ に対して，随伴 $\exists_\pi \dashv \mathscr{D}(\pi)$ が存在する．また，$[\![\Gamma[\![\leq [\![\exists y.\varphi(\vec{x},y)]\!] = [\![\exists s.\varphi[s/y]]\!] = \exists_\pi[\![\varphi[s/y]]\!]$ が成立する．したがって，随伴性より $\mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma]\!]) \leq [\![\varphi[s/y]]\!]$ を得る．また，$s \notin FV(\Gamma)$ なので，弱化補題より $\mathscr{D}(\pi)([\![\Gamma(\vec{x})]\!]) = [\![\Gamma(\vec{x})]\!]$ となるので，$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\varphi[s/y]]\!]$ を得る．よって，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\Gamma]\!] \wedge [\![\varphi[s/y]]\!] \leq [\![\psi]\!]$ が成立する．

よって，健全性は成立する．□

定理 2.2.8 NK の健全性定理

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，$\mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ を式の集合とする．このとき，$\Gamma(\vec{x}),\varphi(\vec{x}) \in \mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ に対して，シーケント計算の体系 NK で $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ であるなら，各 CL ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\varphi(\vec{x})]\!]$ が成立する．（ただし，$\vec{x} = (x_1,...,x_n)$ である．）

Proof. 簡略化のため自由変数の表示は省略する．π をシーケント $\Gamma \vdash \varphi$ に対する証明図であるとし，π の複雑さに関する帰納法で示す．なお，定理 2.2.7 より，二重否定除去則（DNE）についてのみ証明すれば良い：

- π の最後のステップが (DNE) のとき：
  このとき，帰納法の仮定より $[\![\Gamma]\!] \wedge [\![\neg\varphi]\!] \leq [\![\bot]\!]$ を得る．ブール代数の性質より $[\![\Gamma]\!] \leq [\![\neg\varphi]\!] \to [\![\bot]\!]$ を得る．よって，以下が成立する：

$$\begin{aligned}[\![\Gamma]\!] &\leq [\![\neg\varphi]\!] \to [\![\bot]\!]\\ &= [\![\neg\varphi \to \bot]\!]\\ &= [\![\neg\neg\varphi]\!]\\ &= \neg\neg[\![\varphi]\!]\\ &= [\![\varphi]\!](\text{ブール代数の性質})\end{aligned}$$

$\square$

続いて完全性定理の証明に移る．この定理の実質は，構文的ハイパードクトリンがハイパードクトリンであるということ（もう少し詳しく言うと構文的ハイパードクトリンによる解釈がカノニカルな解釈になるということ）に依拠している．また，健全性定理と同様に直観主義論理の場合のみを考えて行うが，古典論理の場合でも（さらに，部分構造論理の場合でも）同様に証明することができる．

定理 2.2.9 LJ の完全性定理

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，$\mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ を式の集合とする．このとき，$\Gamma(\vec{x}), \Delta(\vec{x}) \in \mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ に対して，各 IL ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\Delta(\vec{x})]\!]$ であるなら，LJ において $\Gamma(\vec{x}) \vdash \Delta(\vec{x})$ が成立する．（ただし，Δ は論理式を高々一つしか含まない集合であり，$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ である．）

Proof. 簡略化のため自由変数の表示は省略する．各 IL ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!]$ が成立すると仮定する．このとき，カノニカルな解釈 $[-]$ についても上の主張は成立するので以下が成立する：

$$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!] \implies [\Gamma] \leq [\Delta] \iff \Gamma \vdash \Delta$$

よって，完全性は成立する． $\square$

定理 2.2.10 NJ の完全性定理

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，$\mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ を式の集合とする．このとき，$\Gamma(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ に対して，各 IL ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\varphi(\vec{x})]\!]$ であるなら，NJ において $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ が成立する．（ただし，$\vec{x} = (x_1, ..., x_n)$ である．）

Proof. 定義 2.1.8 における LJ のところを NJ にすることで NJ に対する構文的ハイパードクトリンを得る．また，命題 2.1.10 における LJ における証明図を NJ における証明図に書き換えることで NJ に対する構文的ハイパードクトリンが IL ハイパードクトリンであることを容易に確認できる．また，補題 2.2.5 についても LJ のところを NJ にすることでカノニカルな解釈の存在を示せる．また，「$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\varphi(\vec{x})]\!] \Rightarrow \Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$」も定理 2.2.9 と全く同様に示すことができる． $\square$

定理 2.2.11 LJ と NJ の等価性

LJ において $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$ が成り立つことと NJ において $\Gamma \vdash_{\mathrm{NJ}} \varphi$ が成り立つことは同値である．

Proof. 定理 2.2.6，2.2.7，2.2.9，2.2.10 より以下の二つが成立することによる：

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi \Rightarrow [\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!] \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathrm{NJ}} \varphi$$

$$\Gamma \vdash_{\mathrm{NJ}} \varphi \Rightarrow [\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!] \Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \varphi$$

なお，$[\![-]\!]$ は任意の IL ハイパードクトリンによる解釈である． $\square$

注意 2.2.12

IL ハイパードクトリンを介して LJ と NJ の等価性を示せた．

$$\mathrm{LJ} \iff \text{IL ハイパードクトリン} \iff \mathrm{NJ}$$

完全性定理も健全性定理と同様に IL ハイパードクトリンを CL ハイパードクトリンへ自然に拡張することによって LK，NK のそれぞれの完全性定理が得られる．つまり，以下を示すことは容易である．

$$\text{LK} \iff \text{CL ハイパードクトリン} \iff \text{NK}$$

これは，ハイパードクトリンをはじめとする圏論的論理学に登場する圏構造が証明体系の細かなシンタックスの違いを無視できるという特徴を示唆している．この特徴を構文論的自由（シンタックス・フリー）というが，まさにハイパードクトリンは述語論理に対するシンタックス・フリーな構造を提供している．

2.3　ハイパードクトリンを用いたいくつかの定理の証明

ここまでの議論により，ハイパードクトリンを用いて圏論的な述語論理の健全性定理，完全性定理を証明することができた．つまり，ハイパードクトリンの枠組みを用いて，述語計算をすることが可能であるということである．

以下では，直観主義述語論理 IL（LJ または NJ）における量化子を含む定理を IL ハイパードクトリンを用いていくつか証明してみる．なお，証明の途中で直観主義命題論理の定理（例えば $\vdash ((\varphi \to \psi) \wedge \varphi) \to \varphi$ など）は特に断りなく用いる．（命題論理の場合はハイティング代数をモデルに取ることにより，容易に代数論理的な観点から示すことができる．）また，証明はトポスの文脈で実行された [5] を参考にしたが，ハイパードクトリンの文脈で実際に実行された証明という意味で独自性がある．

定理 2.3.1

直観主義述語論理 IL（LJ または NJ）で以下が成立する．なお，式 $\varphi(x)$ は自由変数 $x, \vec{t}$ を持つ式を表しているとする：

1. $\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall \varphi(x) \to \forall \psi(x))$
2. $\vdash \forall x(\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists \varphi(x) \to \exists \psi(x))$
3. $\vdash \varphi \to \forall x \varphi(x)$（ただし，$\varphi$ は x を自由変数に持たない式で，$\varphi(x)$ は φ に x を加えた式であるとする．）
4. $\vdash \exists x \varphi(x) \to \varphi$（ただし，$\varphi$ は x を自由変数に持たない式で，$\varphi(x)$ は φ に x を加えた式であるとする．）
5. $\vdash \forall \varphi(x) \to \exists \varphi(x)$
6. $\vdash \exists x \exists y \varphi(x, y) \to \exists y \exists x \varphi(x, y)$
7. $\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \forall x \varphi(x, y)$
8. $\vdash \exists x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \exists x \varphi(x, y)$
9. $\vdash \forall x \exists y \varphi(x, y) \to \exists y \forall x \varphi(x, y)$
10. $\vdash \forall x \varphi(x) \to \neg(\exists x \neg \varphi(x))$
11. $\vdash \exists x \neg \varphi(x) \to \neg \forall x \varphi(x)$
12. $\vdash \exists x \varphi(x) \to \neg(\forall x \neg \varphi(x))$
13. $\vdash \forall x(\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \wedge \forall x \psi(x))$
14. $\vdash \exists x(\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \vee \exists x \psi(x))$

Proof.　1. 定理 2.2.6 または 2.2.7 により，IL ハイパードクトリンにおいて $T \leq [\![\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)]\!]$ が成り立つことを示せば良い．なお，簡略化のため自由変数の表示は省略する．まず，$\pi_x : (x, \vec{t}) \to \vec{t}$ を標準的な射影とし，$\mathscr{D}(\pi_x)$ をその射影から誘導された代入関手，この代入関手の右随伴を $\forall x$ とする．すると，随伴性から $\mathscr{D}(\pi_x)\forall x([\![\varphi \to \psi]\!]) \leq [\![\varphi \to \psi]\!]$ と $\mathscr{D}(\pi_x)\forall x([\![\varphi]\!]) \leq [\![\varphi]\!]$ を得るので，

$\mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \wedge \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \rrbracket) \leq \llbracket \varphi \to \psi \rrbracket \wedge \llbracket \varphi \rrbracket$ を得る．したがって以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \wedge \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \rrbracket) \leq \llbracket \varphi \to \psi \rrbracket \wedge \llbracket \varphi \rrbracket &\iff \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \wedge \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \rrbracket) \leq \llbracket \psi \rrbracket \\
&\iff \mathscr{D}(\pi_x)(\llbracket \forall x(\varphi \to \psi) \rrbracket \wedge \llbracket \forall x \varphi \rrbracket) \leq \llbracket \psi \rrbracket \\
&\iff \llbracket \forall x(\varphi \to \psi) \rrbracket \wedge \llbracket \forall x \varphi \rrbracket \leq \forall x \llbracket \psi \rrbracket (\text{随伴性}) \\
&\iff \llbracket \forall x(\varphi \to \psi) \rrbracket \leq \llbracket \forall x \varphi \rrbracket \to \llbracket \forall x \psi \rrbracket \\
&\iff T \leq \llbracket \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi) \rrbracket
\end{aligned}
$$

2. $T \leq \llbracket \forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \exists x \psi) \rrbracket$ となることを示せば良い．なお，記号は 1. と同様の使い方をする．まず，随伴性より $\mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \wedge \llbracket \varphi \to \psi \rrbracket$ を得る．よって，$\llbracket \varphi \rrbracket \wedge \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \leq \llbracket \varphi \rrbracket \wedge \llbracket \varphi \to \psi \rrbracket$ が得られ，したがって，$\llbracket \varphi \rrbracket \wedge \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \leq \llbracket \psi \rrbracket$ を得る．ゆえに，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\llbracket \varphi \rrbracket \wedge \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \leq \llbracket \psi \rrbracket &\implies \llbracket \varphi \rrbracket \wedge \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \leq \mathscr{D}(\pi_x)\exists x \llbracket \psi \rrbracket (\text{随伴性}) \\
&\iff \llbracket \varphi \rrbracket \leq \mathscr{D}(\pi_x)\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \to \mathscr{D}(\pi_x)\llbracket \exists x \psi \rrbracket \\
&\iff \llbracket \varphi \rrbracket \leq \mathscr{D}(\pi_x)(\forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \to \llbracket \exists x \psi \rrbracket) \\
&\iff \llbracket \exists x \varphi \rrbracket \leq \forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \to \llbracket \exists x \psi \rrbracket (\text{随伴性}) \\
&\iff \forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \wedge \llbracket \exists x \varphi \rrbracket \leq \llbracket \exists x \psi \rrbracket \\
&\iff \forall x(\llbracket \varphi \to \psi \rrbracket) \leq \llbracket \exists x \varphi \rrbracket \to \llbracket \exists x \psi \rrbracket \\
&\iff T \leq \llbracket \forall x(\varphi \to \psi) \to (\exists x \varphi \to \exists x \psi) \rrbracket
\end{aligned}
$$

3. φ は自由変数に x を持たないので，$\mathscr{D}(\pi_x)\llbracket \varphi \rrbracket = \llbracket \varphi(x) \rrbracket$ となる．また，随伴性より，$\llbracket \varphi \rrbracket \leq \forall x \mathscr{D}(\pi_x)\llbracket \varphi \rrbracket$ が成り立つので，$\llbracket \varphi \rrbracket \leq \llbracket \forall x \varphi(x) \rrbracket$ を得る．
4. 3. と同様に証明できる．
5. 3.4. より即座に成り立つ．
6. 1. と同様に記号を用いるとする．$\exists x \dashv \mathscr{D}(\pi_x)$ であり，$\exists y \dashv \mathscr{D}(\pi_y)$ であるので，随伴の性質により，$\exists x \exists y \dashv \mathscr{D}(\pi_x)\mathscr{D}(\pi_y)$ と $\exists y \exists x \dashv \mathscr{D}(\pi_y)\mathscr{D}(\pi_x)$ が成立する．IL ハイパードクトリンにおける代入関手は明らかに代入の順番によらない．つまり，$\mathscr{D}(\pi_x)\mathscr{D}(\pi_y) = \mathscr{D}(\pi_y)\mathscr{D}(\pi_x)$ である．よって，随伴は同型を除いて一意に定まるので $\exists x \exists y \cong \exists y \exists x$ となる．したがって，$\llbracket \exists x \exists y \varphi(x,y) \rrbracket = \llbracket \exists y \exists x \varphi(x,y) \rrbracket$ となる．
7. 6. と同様に，代入関手が代入の順番によらずに定まることと，随伴が同型を除いて一意に定まることから $\llbracket \forall x \forall y \varphi(x,y) \rrbracket = \llbracket \forall y \forall x \varphi(x,y) \rrbracket$ が成り立つことによる．
8. $\pi_y : (x, y, \vec{t}) \to (x, \vec{t})$ と $\pi'_y : (y, \vec{t}) \to \vec{t}$ をそれぞれ標準的な射影とする．このとき，この射影から誘導される代入関手 $\mathscr{D}(\pi_y)$ と $\mathscr{D}(\pi'_y)$ が存在する．また x についての代入関手も同様に存在し，その左随伴 $\exists_{\pi_x}$ と $\exists_{\pi'_x}$ が存在することも分かる．今 $\exists$ に関する Beck-Chevalley 条件より，以下の図式が可換になる：

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{D}(x,\vec{t}) \arrow[r, "\exists_{\pi_x}"] \arrow[d, "\mathscr{D}(\pi_y)"'] & \mathscr{D}(\vec{t}) \arrow[d, "\mathscr{D}(\pi'_y)"] \\
\mathscr{D}(x,y,\vec{t}) \arrow[r, "\exists_{\pi'_x}"] & \mathscr{D}(y,\vec{t})
\end{tikzcd}
$$

したがって，$\llbracket \forall y \varphi(x,y) \rrbracket \in \mathscr{D}(x,\vec{t})$ に対して，$\mathscr{D}(\pi'_y)\exists_{\pi_x}(\llbracket \forall y \varphi(x,y) \rrbracket) = \exists_{\pi'_x}\mathscr{D}(\pi_y)(\llbracket \forall y \varphi(x,y) \rrbracket)$ が成立する．随伴性より，$\exists_{\pi'_x}\mathscr{D}(\pi_y)(\llbracket \forall y \varphi(x,y) \rrbracket) \leq \exists_{\pi'_x}(\llbracket \varphi(x,y) \rrbracket)$ が成り立つので，$\mathscr{D}(\pi'_y)\exists_{\pi_x}(\llbracket \forall y \varphi(x,y) \rrbracket) \leq$

$\exists_{\pi'_x}([\![\varphi(x,y)]\!])$ を得る．再び随伴性より，$\exists_{\pi_x}([\![\forall y\varphi(x,y)]\!]) \leq \forall_{\pi_y}\exists_{\pi'_x}([\![\varphi(x,y)]\!])$ を得る．したがって，$[\![\exists x\forall y\varphi(x,y)]\!] \leq [\![\forall y\exists x\varphi(x,y)]\!]$ が成立する．

9. 8. と同様に $\forall$ に関する Beck-Chevalley 条件から $[\![\forall x\exists y\varphi(x,y)]\!] \leq [\![\exists y\forall x\varphi(x,y)]\!]$ が成立することによる．
10. 1. と同様に記号を用いるとする．$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ より，$[\![\forall x\varphi]\!] \leq [\![\forall x\neg\neg\varphi]\!]$ を得る．今，$[\![\forall x\neg\neg\varphi]\!] = \forall x[\![\neg\varphi \to \bot]\!] \leq [\![\exists x\neg\varphi]\!] \to [\![\exists x\bot]\!] = [\![\exists x\neg\varphi]\!] \to [\![\bot]\!] = [\![\neg\exists x\neg\varphi]\!]$ が，ハイティング代数の定義と，$\exists x$ が左随伴で左随伴は余極限を保存するということから成立する．したがって，$[\![\forall x\varphi]\!] \leq [\![\neg\exists x\neg\varphi]\!]$ が成立する．
11. 10. と $\vdash (\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \neg\varphi)$ と $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ により即座に従う．
12. 1. と同様に記号を用いるとする．11. と $\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi$ より $[\![\exists x\varphi]\!] \leq [\![\exists x\neg\neg\varphi]\!] \leq [\![\neg\forall x\varphi]\!]$ を得る．
13. $\forall x$ が右随伴で，右随伴は極限を保存することによる．
14. $\exists x$ が左随伴で，左随伴は余極限を保存することによる．

□

また，直観主義述語論理 IL で証明できない定理の存在は構文的ハイパードクトリンを用いて以下のように示すことができる．なお，以下が一般には成り立たないことは直観主義述語論理においてはド・モルガンの法則 $\vdash \neg(\exists x\neg\varphi(x)) \leftrightarrow \forall\varphi(x)$ が成立しないことを意味している．

命題 2.3.2

直観主義述語論理 IL で以下は一般には成立しない．なお，式 $\varphi(x)$ は自由変数 $x, \vec{t}$ を持つ式を表しているとし，x は変数列 $\vec{t}$ とは異なる変数であるとする：

1. $\vdash \neg(\exists x\neg\varphi(x)) \to \forall\varphi(x)$
2. $\vdash \neg(\forall x\neg\varphi(x)) \to \exists\varphi(x)$

Proof.

1. x を **Cont** における終対象，すなわち空リスト $\varnothing$ とすると，$\varphi(x)$ は自由変数を持たない式になる．すなわち，$\vdash \neg(\exists x\neg\varphi(x)) \to \forall\varphi(x)$ は $[\neg(\exists x\neg\varphi(x))] \leq [\forall\varphi(x)]$ であり，$\neg\neg[\varphi] \leq [\varphi]$ となる．しかし，一般のハイティング代数においては成立しない（成立するならそれはブール代数である）．よって，$\vdash \neg(\exists x\neg\varphi(x)) \to \forall\varphi(x)$ は一般には成り立たない．
2. 2. と同様に証明できる．

□

また，命題 2.1.10 におけるカット規則 (cut) 付きの証明図をカットなしの証明図に置き換えることによって，LJ からカット規則を取り除いた体系（LJ-cut）に対する構文的ハイパードクトリンが IL ハイパードクトリンであるという結果が得られる．これにより，ハイパードクトリンによる LJ-cut の完全性定理が得られ，LJ のカット除去定理のハイパードクトリン的な意味論的証明が得られる．以下がその証明の概要である．（命題 2.1.10 におけるカット規則 (cut) 付きの証明図をカットなしの証明図に置き換える証明をしていないので，厳密な証明にはなっていないことに注意する．）

定理 2.3.3 LJ のカット除去定理

LJ において $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \Delta$ が成立するとする．このとき，LJ-cut において $\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}-cut} \Delta$ が成立する．

Proof. 以下が成立することによる：

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}} \Delta &\Rightarrow [\![\Gamma]\!] \leq [\![\Delta]\!] \text{（LJ の健全性定理）} \\ &\Rightarrow \Gamma \vdash_{\mathrm{LJ}-cut} \Delta \text{（LJ}-cut\text{ の完全性定理）}\end{aligned}$$

なお，$[\![-]\!]$ は任意の IL ハイパードクトリンによる解釈である． □

最後に，ゲーデル変換（Gödel Translation）をハイパードクトリン的に定式化し，実際に証明を試みる．なお，ゲーデル変換とは直観主義論理から古典論理への二重否定を介した翻訳（変換）のことである．

まず，二重否定関手（double negation functor）を定義する．

定義 2.3.4 二重否定関手

関手 $\mathrm{Fix}_{\neg\neg} : \mathbf{Ha} \to \mathbf{Ba}$ を次のように定義する：

$$\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(A) = \{a \in A : a = \neg\neg a\}$$

この時，関手 $\mathrm{Fix}_{\neg\neg}$ のことを二重否定関手と呼ぶ．なお，射についての対応は，ハイティング準同型をそのままブール準同型に制限すればよい．

注意 2.3.5

任意のハイティング代数 A に対して $a = \neg\neg a$ を満たす元 a のことをレギュラー元（regular element）という．A をレギュラー元に制限した $A_{\neg\neg} = \{a \in A : a = \neg\neg a\}$ は A の順序を保つブール代数になることが一般に知られており，二重否定関手の well-definedness を示すのに必要である．なお，$A_{\neg\neg}$ はブール代数になることの証明には，$\neg\neg : A \to A$ なる関数がハイティング準同型であるという事実を用いる．これは，命題論理におけるグリベンコの定理の代数的証明において本質的な役割を果たす．

また，A がブール代数であることと，A が各 $a \in A$ に対して $a = \neg\neg a$ を満たすハイティング代数であることは同値であるという結果も知られている．なお，$a = \neg\neg a$ という条件は $a \vee \neg a = 1$ という条件に変えて良い．

二重否定関手を用いると述語論理に関するゲーデル変換を定式化することができる．

定理 2.3.6 ゲーデル変換

$P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ha}$ を IL ハイパードクトリンであるとする．この時，合成関手 $\mathrm{Fix}_{\neg\neg} \circ P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ba}$ は CL ハイパードクトリンとなる．

Proof. $\mathbf{C}$ における射影射 $\pi : X_1 \times X_2 \to X_1$ に対して，代入関手 $\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(\pi)) : \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1)) \to \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2))$（$\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(\pi))(a) = P(\pi)(a)$）が誘導される．ここで，関手 $\exists_{\neg\neg\pi} : \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2)) \to \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))$ を $\exists_{\neg\neg\pi}(a) = \neg\neg\exists_{\pi}(a)$ と定義する．（なお，$\exists_{\pi}$ は $P(\pi)$ の左随伴である．）この時，$\exists_{\neg\neg\pi}$ が $\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(\pi))$ の左随伴となることを示す．つまり，任意の $a \in \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))$ と $a' \in \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2))$ に対して以下を示す．

$$\exists_{\neg\neg\pi}(a) \leq a' \iff a \leq \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi)(a')$$

$(\Rightarrow)\exists_{\neg\neg\pi}(a) \le a'$ が成立すると仮定する．この時，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
\exists_{\neg\neg\pi}(a) \le a' \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))) &\iff \neg\neg\exists_{\pi}(a) \le a' \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1)))\\
&\implies \neg\neg\exists_{\pi}(a) \le a' \quad (\text{in}\,P(X_1))\\
&\implies \exists_{\pi}(a) \le a' \quad (\text{in}\,P(X_1))\\
&\iff a \le P(\pi)(a') \quad (\text{in}\,P(X_1 \times X_2))\\
&\implies \neg\neg a \le \neg\neg P(\pi)(a') \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2)))\\
&\iff a \le \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi)(a') \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2)))
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 逆に，$a \le \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi)(a')$ が成立と仮定する．この時，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
a \le \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi)(a') \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2))) &\iff a \le P(\pi)(a') \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2)))\\
&\implies a \le P(\pi)(a') \quad (\text{in}\,P(X_1 \times X_2))\\
&\iff \exists_{\pi}(a) \le a' \quad (\text{in}\,P(X_1))\\
&\implies \neg\neg\exists_{\pi}(a)\neg\neg a' \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1)))\\
&\iff \exists_{\neg\neg\pi}(a) \le a' \quad (\text{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1)))
\end{aligned}$$

$\exists_{\neg\neg\pi}$ は $\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(\pi))$ の左随伴である．次に，$\exists_{\neg\neg\pi}$ が Beck-Chevallery 条件と Frobenius-Reciprocity を満たすことを確かめる．Beck-Chevallery 条件は任意の $\mathbf{C}$ における射 $f : Z \to Y$ と任意の $x \in \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(Y \times X)$ に対して以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned}
\exists_{\neg\neg\pi}\mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(f \times 1_X)(x) &= \exists_{\neg\neg\pi}P(f \times 1_X)(x)\\
&= \neg\neg\exists_{\pi}P(f \times 1_X)(x)\\
&= \neg\neg P(f)\exists_{\pi}(x) \quad (\exists_{\pi}\text{の BeckChevallery 条件})\\
&= P(f)(\neg\neg\exists_{\pi}(x))\\
&= \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(f)\exists_{\neg\neg\pi}(x)
\end{aligned}$$

また，Frobenius-Reciprocity は $\mathbf{C}$ における任意の射影射 $\pi : X_1 \times X_2 \to X_1$ と任意の $a \in \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(X_1)$ と任意の $b \in \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(X_1 \times X_2)$ に対して以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned}
\exists_{\neg\neg\pi}(\mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi) \wedge b) &= \neg\neg\exists_{\pi}(P(\pi)(a) \wedge b)\\
&= \neg\neg(a \wedge \exists_{\pi}(b)) \quad (\exists_{\pi}\text{の FrobeniusReciprocity})\\
&= \neg\neg a \wedge \neg\neg\exists_{\pi}(b)\\
&= a \wedge \exists_{\neg\neg\pi}(b)
\end{aligned}$$

また，関手 $\forall_{\neg\neg\pi} : \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2)) \to \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))$ を $\forall_{\neg\neg\pi}(a) = \neg\neg\forall_{\pi}(a)$ と定義する．（なお，$\forall_{\pi}$ は $P(\pi)$ の右随伴である．）この時，$\forall_{\neg\neg\pi}$ が $\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(\pi))$ の右随伴となることを示す．つまり，任意の $a \in \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))$ と $a' \in \mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2))$ に対して以下を示す．

$$\mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi)(a) \le a' \iff a \le \forall_{\neg\neg\pi}(a')$$

$(\Rightarrow)\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(\pi)(a)) \leq a'$ が成立すると仮定する．この時，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
\mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi)(a) \leq a' &\iff P(\pi)(a) \leq a' \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2))) \\
&\Longrightarrow P(\pi)(a) \leq a' \quad (\mathrm{in}\,P(X_1 \times X_2)) \\
&\iff a \leq \forall_\pi(a') \quad (\mathrm{in}\,P(X_1)) \\
&\Longrightarrow \neg\neg a \leq \neg\neg\forall_\pi(a') \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))) \\
&\iff a \leq \forall_{\neg\neg\pi}(a') \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1)))
\end{aligned}$$

$(\Leftarrow)$ 逆に，$a \leq \forall_{\neg\neg\pi}(a')$ が成り立つと仮定する．この時，以下が成立する．

$$\begin{aligned}
a \leq \forall_{\neg\neg\pi}(a') \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))) &\iff a \leq \neg\neg\forall_\pi(a') \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))) \\
&\Longrightarrow a \leq \forall_\pi(\neg\neg a') \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1))) \\
&\Longrightarrow a \leq \forall_\pi(\neg\neg a') \quad (\mathrm{in}\,P(X_1)) \\
&\iff P(\pi)(a) \leq \neg\neg a' \quad (\mathrm{in}\,P(X_1 \times X_2)) \\
&\Longrightarrow \neg\neg P(\pi)(a) \leq \neg\neg\neg\neg a' \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2))) \\
&\iff \mathrm{Fix}_{\neg\neg}P(\pi)(a) \leq a' \quad (\mathrm{in}\,\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(X_1 \times X_2)))
\end{aligned}$$

したがって，$\forall_{\neg\neg\pi}$ は $\mathrm{Fix}_{\neg\neg}(P(\pi))$ の右随伴である．また，$\forall_{\neg\neg\pi}$ が Beck-Chevalley 条件を満たすことは $\exists_{\neg\neg\pi}$ の場合と全く同様に示すことができる． □

注意 2.3.7

ここまでの二重否定関手とゲーデル変換の定式化は [23] による．しかし，[23] にはゲーデル変換の証明が書かれていない．そのため，筆者自身により証明を試みた．

定理 2.3.8 構文的ゲーデル変換

$P : \mathbf{Cont}^{op} \to \mathbf{Ha}$ を IL（LJ または NJ）に対する構文的ハイパードクトリンであるとする．この時，合成関手 $\mathrm{Fix}_{\neg\neg} \circ P : \mathbf{Cont}^{op} \to \mathbf{Ba}$ は CL（LK または NK）に対する構文的ハイパードクトリンとなる．

Proof. $\mathrm{Fix}_{\neg\neg} \circ P : \mathbf{Cont}^{op} \to \mathbf{Ba}$ を $(\mathrm{Fix}_{\neg\neg} \circ P)(\vec{x}) = \{[\varphi(\vec{x})] \in P(\vec{x}) : [\varphi(\vec{x})] = \neg\neg[\varphi(\vec{x})]\}$ と定義する．すると，$[\varphi(\vec{x})] \in (\mathrm{Fix}_{\neg\neg} \circ P)(\vec{x})$ は CL（LK または NK）に対するリンデンバウム-タルスキ代数の対象になるので $\mathrm{Fix}_{\neg\neg} \circ P : \mathbf{Cont}^{op} \to \mathbf{Ba}$ は CL（LK または NK）に対する構文的ハイパードクトリンである． □

注意 2.3.9

CL（LK または NK）に対する構文的ハイパードクトリンも命題 2.1.10 おいて IL に対する構文的ハイパードクトリンが IL ハイパードクトリンとなることを示したのと同様の仕方で CL ハイパードクトリンとなることが示せる．

注意 2.3.10

[23] ではゲーデル変換に加えて直観主義論理から線形論理への変換であるジラー変換（Girard Translation）をハイパードクトリン的に定式化している．また，[27] ではファジー論理から古典論理への変換である Baaz 変換（Baaz Translation）をもハイパードクトリン的に定式化している．

2.4　ハイパードクトリン的な等式解釈

続いて，等式を持つ直観主義論理の体系（$\mathrm{IL}_=$*1）もハイパードクトリンによって解釈可能であることを見る．この体系のハイパードクトリン解釈には「$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリン」という概念を用いる．なお，$\mathscr{H}$ 集合とは集合とハイティング値同値関係という構造の組によって定義される概念である．定義と証明は主に [30] を参考にした．

定義 2.4.1　$\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリン

等式を持つ直観主義論理の体系（$\mathrm{IL}_=$）に対するハイパードクトリン（$\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリン）は IL ハイパードクトリン

$$\mathscr{D} : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ha}$$

であり，以下の条件を満たすもののことである：

- 各 $A \in \mathbf{C}$ に対して，次の条件を満たすファイバー等号という対象 $\delta_A \in \mathscr{D}(A \times A)$ が存在する：
  - 各 $X \in \mathbf{C}$ と各射 $(\pi_1, \pi_2, \pi_2) : X \times A \to X \times A \times A$ に対し，関手

    $$\exists_{\pi_1,\pi_2,\pi_2} : \mathscr{D}(X \times A) \to \mathscr{D}(X \times A \times A), \exists_{\pi_1,\pi_2,\pi_2}(\alpha) = \mathscr{D}(1_X \times \pi_1)(\alpha) \wedge \mathscr{D}(\pi_2, \pi_2)(\delta_A)$$

    が関手 $\mathscr{D}(\pi_1, \pi_2, \pi_2) : \mathscr{D}(X \times A \times A) \to \mathscr{D}(X \times A)$ の左随伴になる（すなわち，$\exists_{\pi_1,\pi_2,\pi_2} \dashv \mathscr{D}(\pi_1, \pi_2, \pi_2)$ が成立する）．

定義 2.4.2　$\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンによる解釈

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，c_i を定項，f_i を関数記号，P_j を述語記号とする．また，$\mathscr{D}_= : \mathbf{C}^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ha}$ を $\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンとする．このとき，与えられた $C \in \mathbf{C}$ に対して，ハイパードクトリン $\mathscr{D}_=$ による解釈を以下のように定義する：

- （定項）：$[\![c_i]\!] : 1 \to C$（終対象からの射）
- （関数記号）：$[\![f_i]\!] : C^{n_i} \to C$（$n_i$は f_i のアリティ）
- （述語記号）：$[\![P_j]\!] \in \mathscr{D}_=(C^{n_j})$（$n_j$は P_j のアリティ）

また，項と式の解釈を項と式の構成により帰納的に定義する：

- （項）：項 $t(x_1, ..., x_n)$ は射 $[\![t]\!] : C^n \to C$ であり，以下のように定義される：
  - $[\![x_i(x_1, ..., x_n)]\!] = \pi_i : C^n \to C$
  - $[\![f_i(t_1, ..., t_m)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![f_i]\!]([\![t_1]\!], ..., [\![t_m]\!])$
- （式）：式 $\varphi(x_1, ..., x_n)$ は対象 $[\![\varphi(x_1, ..., x_n)]\!] \in \mathscr{D}(C^n)$ であり，以下のように定義される：
  - $[\![P_j(t_1, ..., t_m)(x_1, ..., x_n)]\!] = \mathscr{D}([\![t_1]\!], ..., [\![t_m]\!])([\![P_j]\!])$
  - $[\![\neg\psi(x_1, ..., x_n)]\!] = \neg[\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \wedge \chi)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!] \wedge [\![\chi(x_1, ..., x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \vee \chi)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!] \vee [\![\chi(x_1, ..., x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \to \chi)(x_1, ..., x_n)]\!] = [\![\psi(x_1, ..., x_n)]\!] \to [\![\chi(x_1, ..., x_n)]\!]$

*1 $\mathrm{IL}_=$ を IL（LJ や NJ）に等式関する規則を加えてできる体系の総称として使っている．

– $[\![\forall x_n.\psi(x_1,...,x_n)]\!] = \forall_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}[\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$(以下 $\forall_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}$ を $\forall x_n$ と書くことにする)
– $[\![\exists x_n.\psi(x_1,...,x_n)]\!] = \exists_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}[\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$(以下 $\exists_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}$ を $\exists x_n$ と書くことにする)
– $[\![(t=t')(x_1,...,x_n)]\!] = \mathscr{D}_=([\![t]\!]\times[\![t']\!])(\delta_C)$

また，シーケント $\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_n(x_1,...,x_n) \vdash \psi(x_1,...,x_n)$ は以下のように定義される：

$$[\![\varphi_1(x_1,...,x_n)]\!] \wedge ... \wedge [\![\varphi_n(x_1,...,x_n)]\!] \leq [\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$$

なお，シーケントの右側が空である場合は $[\![\varphi_1(x_1,...,x_n)]\!]\wedge,...,\wedge[\![\varphi_n(x_1,...,x_n)]\!] \leq \bot$ とし，左側が空である場合は $\top \leq [\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$ とする．

注意 2.4.3

通常のハイパードクトリン的解釈に等式述語の解釈を加えただけである．

さて，$\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンによる解釈の元で $\mathrm{IL}_=$ の完全性定理を証明していく．しかし，どのような $\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンが $\mathrm{IL}_=$ に適していいるのだろうか？

$\mathscr{H}$ をハイティング代数とし，$\mathscr{H}^C = \{f : C \to \mathscr{H} | C \in ob(\mathbf{C})\}$ は自然に演算子を定義することによりハイティング代数となる．ゆえ，$\mathscr{D}_=(C) = \mathscr{H}^C$ なる関手 $\mathscr{D}_= : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Ha}$ を定義することができる．これは，実際に，$\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンになることが示せるようである．しかし，残念なことに，これは $\mathrm{IL}_=$ の完全性定理が成り立つようなカノニカルなモデルとはならない．等式述語については古典的（つまり，$\top$ または $\bot$）となってしまい，この点においてのみ直観主義の性質を反映できていないのである．

この問題を解決するハイパードクトリンが「$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリン」である．以下では実際に $\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンを導入し，これを用いた $\mathrm{IL}_=$ の完全性定理を証明する．そのための準備として，$\mathscr{H}$ 値同値関係などの概念を定義していく．また，以下，$\mathscr{H}$ はハイティング代数のことであるとする．

定義 2.4.4 $\mathscr{H}$ 値同値関係

A を空でない集合とする．このとき，関数 $\rho : A \times A \to \mathscr{H}$ が以下の 3 つの条件を満たすとき ρ を $\mathscr{H}$ 値同値関係であるという：

- (反射的)：各 $a, a' \in A$ に対し，$\rho(a,a') = 1 \iff a = a' \in A$ を満たす．
- (対称的)：各 $a, a' \in A$ に対し，$\rho(a,a') \leq \rho(a',a)$ を満たす（これは，$\rho(a,a') = \rho(a',a)$ を満たすことに等しい）．
- (推移的)：各 $a, a', a'' \in A$ に対し，$\rho(a,a') \wedge \rho(a',a'') \leq \rho(a,a'')$ を満たす．

定義 2.4.5 $\mathscr{H}$ 値述語

A を空でない集合，$\rho : A \times A \to \mathscr{H}$ を $\mathscr{H}$ 値同値関係とする．このとき，関数 $p : A \to \mathscr{H}$ が以下の条件を満たすとき，p を A 上の ρ に基づいた $\mathscr{H}$ 値述語という：

- (代入)：各 $a, a' \in A$ に対し，$\rho(a,a') \wedge p(a) \leq p(a')$ を満たす．

定義 2.4.6 $\mathscr{H}$ 値関数

$\rho : A \times A \to \mathscr{H}$，$\rho' : A' \times A' \to \mathscr{H}$ をそれぞれ $\mathscr{H}$ 値同値関係とする．このとき，関数 $f : A \to A'$ が以下の条件を満たすとき，f を ρ, ρ'に基づいた $\mathscr{H}$ 値関数 という：

- (代入)：各 $a, a' \in A$ に対し，$\rho(a,a') \leq \rho'(f(a), f(a'))$ を満たす．

注意 2.4.7

通常，この $\mathscr{H}$ 値同値関係，述語，関数は代数論理的な等式付き述語論理の健全性定理を証明する際に用いられる概念である．大まかには，述語の解釈に $\mathscr{H}$ 述語を，関数記号の解釈に $\mathscr{H}$ 値関数を，等式の解釈に $\mathscr{H}$ 値同値関係を対応させることで解釈される．また，この解釈にはハイティング代数 $\mathscr{H}$ には完備性が要求され，量化子の解釈に本質的な役割を果たす．ハイパードクトリンによる解釈もこの代数論理的な解釈がベースになっており，基本的に以下では $\mathscr{H}$ は完備ハイティング代数となることに注意する．

定義 2.4.8 $\mathscr{H}$ 集合の圏

$\mathscr{H}$ を完備ハイティング代数する．このとき，$\mathscr{H}$ 集合の圏 $\mathscr{H}-\mathbf{Set}$ を以下のように定義する：

- (対象)：組（C,ρ)．ここで，C は集合で，ρ は $\mathscr{H}$ 値同値関係である．
- （射）：$[f]:(C,\rho)\to(D,\sigma)$．$[f]$ は $\mathscr{H}$ 値関数 f の同値類である．

注意 2.4.9

$\mathscr{H}$ 集合とは何かを厳密に定義していないが，$\mathscr{H}$ 集合の圏の定義から見て分かるように，それは，集合と $\mathscr{H}$ 値同値関係の組として定義される．$\mathscr{H}$ 集合の概念は参照した文献では命名されないまま使用されていたが，命名した方が分かりやすいと判断したので文脈に応じて $\mathscr{H}$ 集合と命名した．

定義 2.4.10 $\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリン

$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンとは，以下の関手のことである：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}_{=}:(\mathscr{H}-\mathbf{Set})^{\mathbf{op}}\to\mathbf{Ha}\\ \mathscr{D}_{=}(C,\rho)=\{\varphi\in\mathscr{H}^{C}|\forall c,c'\in C(\varphi(a)\wedge\rho(c,c')\leq\varphi(c'))\}\\ \mathscr{D}_{=}([f]:(C,\rho)\to(D,\sigma))=(-\circ[f]:\mathscr{D}_{=}(D,\sigma)\to\mathscr{D}_{=}(C,\rho)),\mathscr{D}_{=}([f])(\varphi)=\varphi\circ[f]\end{aligned}$$

以下，実際に上記の $\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンが $\mathrm{IL}_{=}$ ハイパードクトリンとなることを示す．

命題 2.4.11

$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリン $\mathscr{D}_{=}:(\mathscr{H}-\mathbf{Set})^{\mathbf{op}}\to\mathbf{Ha}$ は $\mathrm{IL}_{=}$ ハイパードクトリンである．

Proof. まず，$\mathscr{H}-\mathbf{Set}$ が任意の有限積を持つことを示す．$(\{*\},e)\in\mathscr{H}-\mathbf{Set}$ は終対象である．実際に，任意の対象 (C,ρ) に対して，射 $[u]:(C,\rho)\to(\{*\},e)$ が定義できる．実際に，$u:C\to\{*\}$ は $\mathbf{Set}$ における射であり $\rho(c,c')\leq T=e(*,*)=e(u(c),u(c'))$ が成立する．また，u の一意性より $[u]$ の一意性も明らかである．よって，$(\{*\},e)$ は終対象である．続いて，$(C_1,\rho_1),(C_2,\rho_2)\in\mathscr{H}-\mathbf{Set}$ が与えられたとする．このとき，この２つの対象の積を以下のように定義する：

$$(C_1,\rho_1)\times(C_2,\rho_2)=(C_1\times C_2,\rho_1\times\rho_2)$$

ここで，$C_1\times C_2$ は単に積集合であり，$\rho_1\times\rho_2$ は以下のように定義される：

$$\begin{aligned}\rho_1\times\rho_2:(C_1\times C_2)\times(C_1\times C_2)\to\mathscr{H}\\ \rho_1\times\rho_2((c_1,c_2),(c_1',c_2'))=\rho_1(c_1,c_1')\wedge\rho_2(c_2,c_2')\end{aligned}$$

このように定義した $\rho_1\times\rho_2$ が well-defined であること（$\mathscr{H}-\mathbf{Set}$ の条件を満たすこと）を示す：
(反射的)：$(\rho_1\times\rho_2)((c_1,c_2),(c_1,c_2))=\rho_1(c_1,c_2)\wedge\rho_2(c_1,c_2)=T\wedge T=T$
(対称的)：$(\rho_1\times\rho_2)((c_1,c_2),(c_1',c_2'))=\rho_1(c_1,c_1')\wedge\rho_2(c_2,c_2')=\rho_1(c_1',c_1)\wedge\rho_2(c_2',c_2)=(\rho_1\times$

$\rho_2)((c_1', c_2'), (c_1, c_2))$
(推移的)：$(\rho_1 \times \rho_2)((c_1, c_2), (c_1', c_2')) \wedge (\rho_1 \times \rho_2)((c_1', c_2'), (c_1'', c_2'')) = (\rho_1(c_1, c_1') \wedge \rho_2(c_2, c_2')) \wedge (\rho_1(c_1', c_1'') \wedge \rho_2(c_2', c_2'')) = \rho_1(c_1, c_1') \wedge \rho_1(c_1', c_1'') \wedge \rho_2(c_2, c_2')) \wedge \rho_2(c_2', c_2'') \leq \rho_1(c_1, c_1'') \wedge \rho_2(c_2, c_2'') = (\rho_1 \times \rho_2)((c_1, c_2), (c_1'', c_2''))$
したがって，$\rho_1 \times \rho_2$ は well-defined である．次に射影 $\pi_i : C_1 \times C_2 \to C_i$ に対し，$[\pi_i] : (C_1 \times C_2, \rho_1 \times \rho_2) \to (C_i \times \rho_i)$ なる $\mathscr{H} - Set$ の射影射を容易に定義することができる．また，$\pi_i \circ \overline{f} = f_i$ なる射 $\vec{f} : X \to C_1 \times C_2$ を $\overline{f} = \langle f_1, f_2 \rangle$ として定義する．これに対して，$[\overline{f}] : (X, \tau) \to (C_1 \times C_2, \rho_1 \times \rho_2)$ なる射を考える．これは，$\mathscr{H} - Set$ の射であり，積の定義の普遍性を満たす射であること容易に確認できる．実際に，$[\pi_i] \circ [\overline{f}] = [f_i]$ であることは **Set** での可換性，$[\overline{f}]$ の一意性は $\overline{f}$ の一意性により成り立つ．よって，$\mathscr{H} - Set$ は任意の有限積を持つといえた.

次に，射影 $\pi_1 : C_1 \times C_2 \to C_1$ に対して，定義より得られる，$\mathscr{D}_=(\pi_1) : \mathscr{H}^{C_1} \to \mathscr{H}^{C_1 \times C_2}, \mathscr{D}_=(\pi_1)(\varphi : C_1 \to \mathscr{H}) = \varphi \circ \pi_1 : C_1 \times C_2 \mathscr{H}$ なる **Ha** における射を考える．このとき，$\mathscr{D}_=(\pi_1)$ の左と右の随伴が存在することを示す．$\mathscr{D}_=(\pi_1)$ の左随伴は以下のように定義する：

$$\exists_{\pi_1} : \mathscr{H}^{C_1 \times C_2} \to \mathscr{H}^{C_1}, \exists_{\pi_1}(\psi : C_1 \times C_2 \to \mathscr{H}) = \exists x_2.\psi : C_1 \to \mathscr{H}$$

ここで，$\exists x_2.\psi$ は $(\exists x_2.\psi)(c_1) = \vee_{x \in C_2} \psi(c_1, x)$ と定義する．また，右随伴は以下のように定義する：

$$\forall_{\pi_1} : \mathscr{H}^{C_1 \times C_2} \to \mathscr{H}^{C_1}, \forall_{\pi_1}(\psi : C_1 \times C_2 \to \mathscr{H}) = \forall x_2.\psi : C_1 \to \mathscr{H}$$

ここで, $\forall x_2.\psi$ は $(\forall x_2.\psi)(c_1) = \wedge_{x \in C_2} \psi(c_1, x)$ と定義する．このように定義した $\exists_{\pi_1}$ と $\forall_{\pi_1}$ が実際に $\mathscr{D}_=(\pi_1)$ の左と右の随伴になっていることを確認する．まず，左随伴であることを確認する．各 $\varphi \in \mathscr{H}^{C_1}, \psi \in \mathscr{H}^{C_1 \times C_2}$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}(\exists x_2.\psi)(c_1) \leq \varphi(c_1) &\iff \vee_{x \in C_2} \psi(c_1, x) \leq \varphi(c_1) \\ &\iff \psi(c_1, c_2) \leq \varphi(c_1) \\ &\iff \psi(c_1, c_2) \leq \varphi(\pi_1(c_1, c_2))\end{aligned}$$

よって，左随伴である，つまり，$\exists_{\pi_1} \dashv \mathscr{D}_=(\pi_1)$ が成立する．次に，右随伴であることを確認する．各 $\varphi \in \mathscr{H}^{C_1}, \psi \in \mathscr{H}^{C_1 \times C_2}$ に対して，以下が成立する：

$$\begin{aligned}\varphi(c_1) \leq (\forall x_2.\psi)(c_1) &\iff \varphi(c_1) \leq \wedge_{x \in C_2} \psi(c_1, x) \\ &\iff \varphi(c_1) \leq \psi(c_1, c_2) \\ &\iff \varphi(\pi_1(c_1, c_2)) \leq \psi(c_1, c_2)\end{aligned}$$

よって，右随伴である，つまり，$\mathscr{D}_=(\pi_1) \dashv \forall_{\pi_1}$ が成立する.

次に，$\exists_{\pi_1}$ が Beck-Chevalley 条件を満たすことを示す．射影 $\pi : X \times C \to C, \pi' : X \times C' \to C'$ が与えられたとする．このとき，各 $\beta \in \mathscr{H}^{X \times C}$ に対して，$\exists_{\pi'} \mathscr{D}_=(1_X \times f)(\beta) \leq \mathscr{D}_=(f) \exists_\pi(\beta)$ が同型射（つまりイコール）となることを示す．実際に，以下が成立する：

$$\begin{aligned}\exists_{\pi'} \mathscr{D}_=(1_X \times f)(\beta) &= \exists_{\pi'}(\beta \circ (1_X \times f)) \\ &= \vee_{x' \in X'} \beta((1_X \times f)(x', -)) \\ &= \vee_{x \in X} \vee_{x' \in X'} \beta(x, (\pi \circ (1_X \times f)(x', -))) \\ &= \vee_{x' \in X'} \vee_{x \in X} \beta(x, f \circ \pi'(x', -)) \\ &= \vee_{x \in X} \beta(x, f(-)) \\ &= \mathscr{D}_=(f)(\vee_{x \in X} \beta(x, -)) \\ &= \mathscr{D}_=(f) \exists_\pi(\beta)\end{aligned}$$

よって，$\exists_{\pi'}\mathscr{D}_=(1_X \times f)(\beta) \leq \mathscr{D}_=(f)\exists_\pi(\beta)$ が同型射であるとわかるので，$\exists_{\pi_1}$ は Beck-Chevalley 条件を満たす．次に，$\exists_{\pi_1}$ が Frobenius-Reciprocity を満たすことを示す．つまり，射影 $\pi : X \times C \to C$ に対し，各 $\alpha \in \mathscr{H}^C, \beta \in \mathscr{H}^{X\times C}$ について，$\exists_\pi(\mathscr{D}_=(\pi)(\alpha) \wedge \beta) \leq \alpha \wedge \exists_\pi(\beta)$ が成立することを示す．実際に，各 $x \in X, c \in C$ に対し，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\exists_\pi(\mathscr{D}_=(\pi)(\alpha) \wedge \beta)(x,c) &= \exists_\pi((\alpha \circ \pi)(x,c) \wedge \beta(x,c)) \\
&= \vee_{x\in X}(\alpha \circ \pi)(x,c) \wedge \vee_{x\in X}\beta(x,c) \\
&= \alpha(c) \wedge \exists_\pi\beta(c)
\end{aligned}
$$

よって，$\exists_{\pi_1}$ が Frobenius-Reciprocity を満たす．

次に，$\forall_{\pi_1}$ が Beck-Chevalley 条件を満たすことを示す．射影 $\pi : X \times C \to C, \pi' : X \times C' \to C'$ が与えられたとする．このとき，各 $\beta \in \mathscr{H}^{X\times C}$ に対して，$\mathscr{D}_=(f)\forall_\pi(\beta) \leq \forall_{\pi'}\mathscr{D}_=(1_X \times f)(\beta)$ が同型射（つまりイコール）となることを示す．実際に以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_=(f)\forall_\pi(\beta) &= \mathscr{D}_=(f)(\wedge_{x\in X})(\beta(x,-)) \\
&= \wedge_{x\in X, x'\in X'}\beta(x,(f\circ\pi')(x',-)) \\
&= \wedge_{x\in X, x'\in X'}\beta(x,(\pi'\circ(1_X \times f))(x',-)) \\
&= \wedge_{x'\in X'}\beta((1_X \times f)(x',-)) \\
&= \forall_{\pi'}(\beta \circ (1_X \times f)) \\
&= \forall_{\pi'}\mathscr{D}_=(1_X \times f)(\beta)
\end{aligned}
$$

よって，$\mathscr{D}_=(f)\forall_\pi(\beta) \leq \forall_{\pi'}\mathscr{D}_=(1_X \times f)(\beta)$ が同型射であるとわかるので，$\forall_{\pi_1}$ は Beck-Chevalley 条件を満たす．

最後に $\mathscr{D}_=$ が等式を持つことを示す．各 $(C,\rho) \in \mathscr{H} - Set$ に対し，(C,ρ) 上のファイバー等号を以下のように定義する：

$$
\delta_{(C,\rho)} = \rho \in Ob(\mathscr{D}_=((C,\rho)\times(C,\rho))) = \mathscr{H}^{C\times C}
$$

実際に $\rho \in \mathscr{H}^{C\times C}$ であることを確かめる．各 $(c,c'),(d,d') \in C \times C$ に対して，以下が成立する（ρ が反射律，対称律，推移律を満たすことに注意する）：

$$
\begin{aligned}
\rho(c,c') \wedge (\rho\times\rho)((c,c'),(d,d')) &= \rho(c,c') \wedge \rho(c,d) \wedge \rho(c',d') \\
&= \rho(c',c) \wedge \rho(c.d) \wedge \rho(c',d') \\
&= \rho(c',d) \wedge \rho(c',d) \\
&= \rho(d,c') \wedge \rho(c',d) \\
&= \rho(d,d')
\end{aligned}
$$

したがって，$\rho \in \mathscr{H}^{C\times C}$ である．次に，$X \in Ob(\mathscr{H} - Set)$ と，射影射の組 $(\pi_1,\pi_2,\pi_2) : X\times C \to X\times C\times C$ を考える．この射は次の２つの随伴関手 $\exists_{(\pi_1,\pi_2,\pi_2)} \dashv \mathscr{D}_=(\pi_1,\pi_2,\pi_2)$ を創出する：

$$
\begin{aligned}
\exists_{(\pi_1,\pi_2,\pi_2)} &: \mathscr{D}_=(X\times C) \to \mathscr{D}_=(X\times C\times C) \\
\exists_{(\pi_1,\pi_2,\pi_2)}(\varphi) &= \mathscr{D}_=(1_X,\pi_2)(\varphi) \wedge \mathscr{D}_=(\pi_2,\pi_2)(\delta_C)
\end{aligned}
$$

（ここで，$\mathscr{D}_=(1_X,\pi_2)(\varphi)\wedge\mathscr{D}_=(\pi_2,\pi_2)(\delta)((x,c),c') = (\varphi\circ(1_X,\pi_2)\wedge\delta_C\circ(\pi_2,\pi_2))((x,c),c') = \varphi(x,c)\wedge\rho(c,c')$ となることに注意する．）

$$
\begin{aligned}
\mathscr{D}_=(\pi_1,\pi_2,\pi_2) &: \mathscr{D}_=(X\times C\times C) \to \mathscr{D}_=(X\times C) \\
\mathscr{D}_=(\pi_1,\pi_2,\pi_2)(\psi) &= \psi \circ (\pi_1,\pi_2,\pi_2)
\end{aligned}
$$

以下，実際にこの２つの関手が随伴になること，つまり，各 $\varphi \in \mathscr{H}^{X\times C}$，$\psi \in \mathscr{H}^{X\times C\times C}$ に対して以下が成立することを示す：

$$\varphi(x,c) \wedge \rho(c,c') \leq \psi(x,c,c') \iff \varphi(x,c) \leq (\psi \circ (\pi_1,\pi_2,\pi_2))(x,c) = \psi(x,c,c)$$

$(\Leftarrow)$：$\varphi(x,c) \leq \psi(x,c,c)$ を仮定する．このとき，$\varphi(x,c) \wedge \rho(c,c') \leq \psi(x,c,c) \wedge \rho(c,c') \leq \psi(x,c,c')$ を得る．

$(\Rightarrow)$：$\varphi(x,c) \wedge \rho(c,c') \leq \psi(x,c,c')$ を仮定する．このとき，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\varphi(x,c) \wedge \rho(c,c') \leq \psi(x,c,c') &\Rightarrow \varphi(x,c) \wedge \rho(c,c') \wedge \rho(c',c) \leq \psi(x,c,c') \wedge \rho(c'c) \\
&\iff \varphi(x,c) \leq \rho(c,c') \wedge \rho(c',c) \to \psi(x,c,c') \wedge \rho(c',c) \\
&\Rightarrow \varphi(x,c) \leq \rho(c,c) \to \psi(x,c,c') \wedge \rho(c',c)(\text{推移律}) \\
&\iff \varphi(x,c) \wedge \rho(c,c) \leq \psi(x,c,c') \wedge \rho(c'c) \\
&\iff \varphi(x,c) \wedge T \leq \psi(x,c,c)(\text{推移律}) \\
&\iff \varphi(x,c) \leq \psi(x,c,c)
\end{aligned}$$

したがって，$\exists_{(\pi_1,\pi_2,\pi_2)} \dashv \mathscr{D}_=(\pi_1,\pi_2,\pi_2)$ が成立する．よって，$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリン $\mathscr{D}_= : (\mathscr{H}-\mathbf{Set})^{\mathbf{op}} \to \mathbf{Ha}$ は $\mathrm{IL}_=$ に対する $\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンであると結論付けられる． □

続いて，この $\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンを用いた $\mathrm{IL}_=$ の解釈を以下のように定義する．

定義 2.4.12 $\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンによる解釈

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，c_i を定項，f_i を関数記号，P_j を述語記号とする．また，$\mathscr{D}_= : \mathscr{H}-\mathbf{Set^{op}} \to \mathbf{Ha}$ を $\mathrm{IL}_=$ に対する $\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンとする．このとき，与えられた $C \in \mathbf{C}$ に対して，ハイパードクトリン $\mathscr{D}_=$ による解釈を以下のように定義する：

- （定項）：$[\![c_i]\!] : (1,.\delta) \to (C,\rho)$（$\delta : 1\times 1 \to \mathscr{H}, \delta(*,*) = T$）
- （関数記号）:$[\![f_i]\!] : (C,\rho)^{n_i} \to (C,\rho)$($n_i$は f_i のアリティ, $\rho^{n_i} : C^{n_i}\times C^{n_i} \to \mathscr{H}, \rho^{n_i}(c_1,...,c_{n_i},c'_1,...,c'_{n_i}) = \rho(c_1,c'_1)\wedge ... \wedge \rho(c_{n_i},c'_{n_i})$)
- （述語記号）:$[\![P_j]\!] = \{\varphi \in \mathscr{H}^{C_j} | \varphi(c_1,...,c_{n_j}) \wedge \rho(c_1,c'_1) \wedge ... \wedge \rho(c_{n_i},c'_{n_i}) \leq \varphi(c'_1,...,c'_{n_j})\} \in \mathscr{D}_=(C^{n_j})$（$n_j$は P_j のアリティ）

また，項と式の解釈を項と式の構成により帰納的に定義する：

- （項）：項 $t(x_1,...,x_n)$ は射 $[\![t]\!] : (C,\rho)^n \to (C,\rho)$ であり，以下のように定義される：
  - $[\![x_i(x_1,...,x_n)]\!] = \pi_i : (C,\rho)^n \to (C,\rho)$
  - $[\![f_i(t_1,...,t_m)(x_1,...,x_n)]\!] = [\![f_i]\!]([\![t_1]\!],...,[\![t_m]\!])$
-
- （式）：式 $\varphi(x_1,...,x_n)$ は対象 $[\![\varphi(x_1,...,x_n)]\!] \in \mathscr{D}(C^n)$ であり，以下のように定義される：
  - $[\![P_j(t_1,...,t_m)(x_1,...,x_n)]\!] = \mathscr{D}([\![t_1]\!],...,[\![t_m]\!])([\![P_j]\!])$
  - $[\![\neg\psi(x_1,...,x_n)]\!] = \neg[\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \wedge \chi)(x_1,...,x_n)]\!] = [\![\psi(x_1,...,x_n)]\!] \wedge [\![\chi(x_1,...,x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \vee \chi)(x_1,...,x_n)]\!] = [\![\psi(x_1,...,x_n)]\!] \vee [\![\chi(x_1,...,x_n)]\!]$
  - $[\![(\psi \to \chi)(x_1,...,x_n)]\!] = [\![\psi(x_1,...,x_n)]\!] \to [\![\chi(x_1,...,x_n)]\!]$
  - $[\![\forall x_n.\psi(x_1,...,x_n)]\!] = \forall_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}[\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$(以下 $\forall_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}$を $\forall x_n$ と書くことにする)

– $[\![\exists x_n.\psi(x_1,...,x_n)]\!] = \exists_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}[\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$(以下 $\exists_{(\pi_1,...,\pi_{n-1})}$ を $\exists x_n$ と書くことにする)
– $[\![(t=t')(x_1,...,x_n)]\!] = \mathscr{D}_=([\![t]\!]\times[\![t']\!])(\rho)(\rho\in\mathscr{D}_=((C,\rho)^2))$

また，シーケント $\varphi_1(x_1,...,x_n),...,\varphi_n(x_1,...,x_n)\vdash\psi(x_1,...,x_n)$ は以下のように定義される：

$$[\![\varphi_1(x_1,...,x_n)]\!]\wedge...\wedge[\![\varphi_n(x_1,...,x_n)]\!]\leq[\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$$

なお，シーケントの右側が空である場合は $[\![\varphi_1(x_1,...,x_n)]\!]\wedge,...,\wedge[\![\varphi_n(x_1,...,x_n)]\!]\leq\bot$ とし，左側が空である場合は $\top\leq[\![\psi(x_1,...,x_n)]\!]$ とする．

注意 2.4.13

$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンは $\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンの具体例なので，基本は $\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリンの解釈とまったく同じである．

以下では，$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンを用いた $\mathrm{IL}_=$ の健全性，完全性定理を示すために必要な補題を証明する．これは，IL の健全性，完全性定理を示すのに必要な補題の拡張版である．そのため，証明の一部はすでに記述済みであるため一部省略して証明をする．

補題 2.4.14 weakning

項 $t(x_1,...,x_n)$ と式 $\varphi(x_1,...,x_n)$ と $x_i(i=1,...,n)$ とは異なる変数 y に対して，以下が成立する：

$$(1)[\![t(-,y,-)]\!] = [\![t(\vec{x})]\!]\circ(\vec{\pi})$$
$$(2)[\![\varphi(-,y,-)]\!] = \mathscr{D}_=(\vec{\pi})([\![\varphi(\vec{x})]\!])$$

ただし，$(\vec{x})=(x_1,...,x_j,x_{j+1},...,x_n)$，$(-,y,-)=(x_1,...,x_j,y,x_{j+1},...,x_n)$，$(\vec{\pi})=(\pi_1,...,\pi_n)$ であるとする．

Proof. 前補題の notation を用いる．式 $t=t'$ のときのみ証明すれば十分である：

$$\begin{aligned}[\![(t=t')(-,y,-)]\!] &= \mathscr{D}_=([\![t(-,y,-)]\!],[\![t'(-,y,-)]\!])(\rho)\\ &= \mathscr{D}_=([\![t(\vec{x})]\!]\circ\vec{\pi},[\![t'(\vec{x})]\!]\circ\vec{\pi})(\rho)\\ &= \mathscr{D}_=(([\![t(\vec{x})]\!],[\![t'(\vec{x})]\!])\circ\vec{\pi})(\rho)\\ &= \mathscr{D}_=(\vec{\pi})\circ\mathscr{D}_=([\![t(\vec{x})]\!],[\![t'(\vec{x})]\!])(\rho)\\ &= \mathscr{D}_=(\vec{\pi})\circ([\![t=t'(\vec{x})]\!])\end{aligned}$$

□

補題 2.4.15 substitution

項 $t(x_1,...,x_n)$ と式 $\varphi(x_1,...,x_n)$ と $x_i(i=1,...,n)$ に対して，以下が成立する：

$$(1)[\![t(\vec{x})[s/x_i]]\!] = [\![t(\vec{x})]\!]\circ\langle\pi_1,...,[\![s]\!],...,\pi_n\rangle$$
$$(2)[\![\varphi(\vec{x})[s/x_i]]\!] = \mathscr{D}_=(\pi_1,...,[\![s]\!],...,\pi_n)([\![\varphi(\vec{x})]\!])$$

ただし，$(\vec{x})=(x_1,...,x_j,x_{j+1},...,x_n)$，$(-,s/x_i,-)=(x_1/x_1,...,s/x_i,...,x_n/x_n)$ であるとする．

Proof. 前補題の notation を用いる．式 $t = t'$ のときのみ証明すれば十分である：

$$\begin{aligned}
[\![(t = t')[s/x_i]]\!] &= \mathscr{D}_=([\![t[s/x_i]]\!], [\![t'[s/x_i]]\!])(\rho) \\
&= \mathscr{D}_=([\![t]\!] \circ (\pi_1, [\![s]\!], \pi_2), [\![t']\!] \circ (\pi_1, [\![s]\!], \pi_2))(\rho) \\
&= \mathscr{D}_=(([\![t]\!], [\![t']\!]) \circ (\pi_1, [\![s]\!], \pi_2))(\rho) \\
&= \mathscr{D}_=(\pi_1, [\![s]\!], \pi_2) \circ \mathscr{D}_=([\![t]\!], [\![t']\!])(\rho) \\
&= \mathscr{D}_=(\pi_1, [\![s]\!], \pi_2)([\![t = t']\!])
\end{aligned}$$

□

補題 2.4.16 カノニカルな解釈

解釈 $[\![-]\!]$ を $[\![c_i]\!] = c_i$，$[\![f_i]\!] = f_i$，$[\![P_i(t_1, ..., t_m)]\!] = [P_i(t_1, ..., t_m)]$ とし，ρ を等式の同値類であるとする．このとき，各式 $\varphi(x_1, .., x_n) \in Form_{\mathscr{L}}$ に対して，$[\![\varphi(x_1, ..., x_n)]\!] = [\varphi(x_1, ..., x_n)]$ が成立する．なお，$[\varphi(x_1, ..., x_n)]$ は $\mathrm{IL}_=$ の成すリンデンバウム-タルスキ代数の対象である．

Proof. 前補題の notation を用いる．式 $t = t'$ のときのみ証明すれば十分である：

$$\begin{aligned}
[\![t = t'(x_1, ..., x_n)]\!] &= \mathscr{D}_=([\![t]\!], [\![t']\!])(\rho) \\
&= \mathscr{D}_=(t, t')(\rho) \\
&= [t = t'(x_1, ..., x_n)]
\end{aligned}$$

□

定理 2.4.17 健全性定理 for $\mathbf{IL}_=$

言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし, $\mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ を式の集合, $\mathscr{H}$ を完備ハイティング代数とする．このとき, $\Gamma(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in \mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ と $(C, \rho) \in Ob(\mathscr{H} - Set)$ に対して，等式付きの直観主義述語論理の体系 $\mathrm{IL}_=$ で $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ であるなら，各ハイパードクトリン $\mathscr{D}$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\varphi(\vec{x})]\!]$ が成立する．

Proof. 前定理と同様にシーケント $\Gamma \dashv \varphi$ の証明図を π とし，π の複雑さに関する帰納法で証明する．なお，前定理で行っていない部分のみ証明する：(Base Case)：

- $\Gamma \dashv \varphi$ が= -ax のとき：
  $\varphi = (t = t)$ であり，$[\![t = t]\!] = \mathscr{D}_=([\![t]\!], [\![t]\!])(\rho) = T$ となる．したがって，$[\![\Gamma]\!] \leq T = [\![t = t]\!]$ となる．

(Inductive Case)：

- π の最後のステップが $(=_1)$ のとき：
  このとき $\Gamma = \Sigma, \Gamma'(s), t = s \vdash \varphi(s)$ であり，帰納法の仮定より $[\![\Sigma]\!] \wedge [\![t = s]\!] \wedge [\![\Gamma'(t)]\!] \leq [\![\varphi(t)]\!]$ が成立する．また，代入の定義により以下が成立する：

$$\begin{aligned}
(1)[\![\Sigma]\!] \wedge [\![\Gamma'(s)]\!] \wedge [\![t = s]\!] &\leq [\![\Sigma]\!] \wedge [\![\Sigma'(t)]\!] \\
(2)[\![\varphi(t)]\!] \wedge [\![t = s]\!] &\leq [\![\varphi(s)]\!]
\end{aligned}$$

  (1) より，$[\![\Sigma]\!] \wedge [\![\Gamma'(s)]\!] \wedge [\![t = s]\!] \leq [\![\Sigma]\!] \wedge [\![\Sigma'(t)]\!] \wedge [\![t = s]\!] = [\![\Sigma]\!] \wedge [\![t = s]\!] \wedge [\![\Sigma'(t)]\!]$ が成立する．また，仮定より，$[\![\Sigma]\!] \wedge [\![t = s]\!] \wedge [\![\Gamma'(t)]\!] \leq [\![\varphi(t)]\!] \wedge [\![t = s]\!]$ をえる．よって，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![\Sigma]\!] \wedge [\![\Gamma'(s)]\!] \wedge [\![t = s]\!] &\leq [\![\Sigma]\!] \wedge [\![t = s]\!] \wedge [\![\Gamma'(t)]\!] \\
&\leq [\![\varphi(t)]\!] \wedge [\![t = s]\!] \\
&\leq [\![\varphi(s)]\!]
\end{aligned}$$

- π の最後のステップが $(=_2)$ のとき：
  $=_1$ のときと同様に示すことができる．

よって，健全性定理が示された． □

最後に $\mathrm{IL}_=$ に対する完全性定理を示してこの節を閉じる．繰り返しではあるが，この定理の実質は $\mathrm{IL}_=$ においてもカノニカルな解釈が存在するという事実である．

定理 2.4.18 完全性定理 for $\mathbf{IL}_=$
言語 $\mathscr{L}$ を一階の言語とし，$\mathrm{Form}_{\mathscr{L}}$ を式の集合とする．このとき，$\Gamma(\vec{x}), \varphi(\vec{x}) \in Form_{\mathscr{L}}$ に対して，各 $\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリン $\mathscr{D}_=$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma(\vec{x})]\!] \leq [\![\varphi(\vec{x})]\!]$ であるなら，等式付きの直観主義述語論理の体系で $\Gamma(\vec{x}) \vdash \varphi(\vec{x})$ が成立する．

Proof. 簡略化のため自由変数の表示は省略する．各 $\mathrm{IL}_=$ ハイパードクトリン $\mathscr{D}_=$ と解釈 $[\![-]\!]$ に対して，$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!]$ が成立すると仮定する．このとき，カノニカルな解釈 $[-]$ についても上の主張は成立するので以下が成立する：

$$[\![\Gamma]\!] \leq [\![\varphi]\!] \implies [\Gamma] \leq [\varphi] \iff \Gamma \vdash \varphi$$

よって，完全性は成立する． □

注意 2.4.19
$\forall x_1 \forall x_2 (x_1 = x_2 \vee \neg x_1 = x_2)$ が $\mathrm{IL}_=$ で証明できないことが $\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンを用いることで証明できる．詳しくは [30] を見よ．

2.5 圏論的普遍論理について

前節までで，ハイパードクトリンの定義や具体例，ハイパードクトリン的な一階述語論理の健全性定理・完全性定理を紹介した．ハイパードクトリンは圏論的な枠組みを用いて一階述語論理（または，高階論理）の体系を解釈する有用な道具であり，ホモトピー論で用いられているファイブレーションや幾何学と論理学を同時に扱うトポス理論における主要概念トポスとも密接に関係している．（ハイパードクトリンとファイブレーションの関係は付録 A でトポスの論理学的側面に関しては付録 B で議論している．）

現在も，ハイパードクトリンの研究は個別の論理体系をハイパードクトリンの枠組みで解釈するという，従来のハイパードクトリン研究の延長線上に位置する研究が活発である*2．ラッセルやウィトゲンシュタインの時代とは異なり，論理的多元主義が主流の現在において，部分構造論理を初め，無数の論理体系が考案され，現に今もされているが，その膨大に増えつつある論理体系に対応する圏論的構造を考えるのは自然な発想であり，それが述語論理の場合にはハイパードクトリンを用いるのが最も都合が良いのである．実際に，線形論理や BL 論理などをハイパードクトリンで解釈すると言う研究がある [9][4]．

様々な述語論理の体系をハイパードクトリンで解釈するという現行の研究で，最も注目に値する研究が丸山善宏による「圏論的普遍論理（Categorical Universal Logic）」[21][23] である．これは，広範な述語論理の体系（古典論理，直観主義論理，様相論理，ファジー論理，線形論理，量子論理など）を 1 つのハイパードクト

*2 その他にも，2 圏論や高次圏論の枠組みでハイパードクトリンを定式化したり，トポスとの関係を高次の階層から観測する研究も存在する．なお，有名な結果としては，トポスの成す圏とトライポスの成す圏は 2 圏同値であるという結果がある．

リンで解釈することを可能にし，論理的多元主義の時代に，様々な論理体系を統一的に見渡す視点を与えてくれる．（これは，不統一の時代における統一の可能性を考える際の 1 つの重要な結果だと考える．）

圏論的普遍論理の目的は「単なる意味論ではなく，特定の構文や意味論に依存せず，異なる構文や意味論を一つの概念に統合した普遍的な論理概念に到達すること」([23], p.136) であるという．ただ広範な論理体系を解釈することを可能にするだけでなく，圏論のトップダウン的なアプローチにより，それらを構文的・意味論的な観点から見て自由に（シンタックス・フリー，セマンティクス・フリーに）解釈することが可能となる条件を明らかにし，論理概念の普遍的な構造をも明らかにすることを目的としているのである．数学的のみならず哲学的にも研究をする意義を感じる．

圏論的普遍論理とは，端的に言えば，モナドによる普遍代数とハイパードクトリンによる述語論理という 2 つの観点からのアプローチによって達成される普遍論理のことである．**Sets** 上のモナド T から生成される T 代数によって様々な命題論理の体系が代数的に解釈でき，ハイパードクトリンにより量化子の圏論的扱いを可能にし T 代数によって解釈される命題論理の体系を述語論理に自然に拡張することを可能にする，というのが基本的な考え方である．

T 代数によって様々な命題論理の体系が解釈できるということは，T 代数の成す圏 $\mathbf{Alg}(T)$（アイレンバーグ・ムーア圏ともいう）が様々な代数構造の成す圏を具体例に持つ一般的な圏であるということを意味している．前節までで扱ったハイティング代数の圏 **Ha** やブール代数の圏 **Ba** さらにはフルランベック代数の圏 **FL** もその範疇に入る．この意味で T 代数は命題論理の圏論的実質と言える[*3]．

さて，圏論的普遍論理の実質である T ハイパードクトリンを定義しよう．圏論的普遍論理の議論は，前節までで行っていたハイパードクトリンにおいて，そのコドメインに位置する代数論理の圏を T 代数の圏 $\mathbf{Alg}(T)$ にそれぞれ相対化させることによって得られる普遍的なハイパードクトリンを定式化することから始まる．このモナド T によって相対化されるハイパードクトリン（Monad-Relativized Hyperdoctrine）を T-ハイパードクトリンといい，以下のように定義される．

定義 2.5.1 T-ハイパードクトリン

圏 $\mathbf{C}$ が任意の有限積を持つとする．このとき，T-ハイパードクトリンとは，反変関手 $P : \mathbf{C}^{op} \to \mathbf{Alg}(T)$ のことである．さらに，

1. 各射影 $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$ に対して，関手 $P(\pi_i) : P(X_i) \to P(X_1 \times X_2)$ が左随伴 $\exists_{\pi_i} : P(X_1 \times X_2) \to P(X_i)$ を持ち，$\exists$ に関する Beck-Chevalley 条件を満たすとき，T-ハイパードクトリン P は存在量化子 $\exists$ を持つという．
2. 各射影 $\pi_i : X_1 \times X_2 \to X_i (i = 1, 2)$ に対して，関手 $P(\pi_i) : P(X_i) \to P(X_1 \times X_2)$ が右随伴 $\forall_{\pi_i} : P(X_1 \times X_2) \to P(X_i)$ を持ち，$\forall$ に関する Beck-Chevalley 条件を満たすとき，T-ハイパードクトリン P は全称量化子 $\forall$ を持つという．
3. 各対角射 $\delta : X \to X \times X$ に対して，関手 $P(\delta) : P(X \times X) \to P(X)$ が左随伴 $\mathrm{EQ}_\delta : P(X) \to P(X \times X)$ を持つとき，T-ハイパードクトリン P は等式 $=$ を持つという．

また，T-ハイパードクトリン P が $\forall$, $\exists$, $=$ を持つとき，P を一階 T-ハイパードクトリンという．

また，T-ハイパードクトリン P が一階 T-ハイパードクトリンでかつ，$\mathbf{C}$ がカルテシアン閉圏でかつ，T-ハ

[*3] しかし，$\mathbf{Alg}(T)$ は位相空間の圏 **Top** や群の圏 **Group**，環の圏 **Ring** など論理とは直接関係がない代数構造の圏も範疇に入ってしまう．そのため圏論的普遍論理の定式化として妥当であるかは議論の余地がある．

イパードクトリン P のグロタンディーク構成[*4]によって得られる圏 $\int P$ に対し，$\mathrm{T}(X)=(X,\mathrm{T_{P(X)}})$（$\mathrm{T_{P(X)}}$ は T 代数 $P(X)$ の最大元）によって定義される関手 $\mathrm{T}:\mathbf{C}\to\int P$ が右随伴 $\{-\}:\int P\to\mathbf{C}$ をもち，さらに，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\Omega)\cong P$ なる対象 $\Omega\in\mathbf{C}$ が存在するとき，P を高階 T-ハイパードクトリン，または，T-トライポスという．

つまり，この T-ハイパードクトリンは，T 代数に対応する命題論理の体系（古典論理，直観主義論理，様相論理，ファジー論理，線形論理，量子論理など）を適切に選択することによって，その一階述語論理・高階論理の拡張を自然に与えることができるということである．

個別の述語論理，高階論理の体系を考える際には，それぞれ独自のシンタックス，セマンティクスを考え，それに基づいて理論を展開すれば良い．シンタックス・セマンティクスが一見何を表現しているか分かり辛く，論理の本質を隠しているように見えたとしてもその個別の体系・理論を展開する分には問題はない．

しかし，「論理とは何か？」を問い，論理体系そのものが持つ本質的な構造を明らかにしようとする際は，個別の体系を扱えるだけで不満足で，それらを統一的に扱う方法を模索していく必要性が生じる．特定のシンタックス・セマンティクスという表現方法に依存することなく論理体系を定式化する方法を考える必要性が生じるのである．

この「圏論的普遍論理」は，統一的に各命題論理・述語論理・高階論理を扱うことを可能にし，特定の表現方法に依存しない定式化なのではないだろうか．つまり，上記の問いにある程度の回答を提出しているのではないだろうか．しかし，残念ながらこの「圏論的普遍論理」の哲学的含意を考察する時間はないので，この考察は今後の課題とする．

最後に双対性と圏論的普遍論理の関係性についてまとめる．詳しくは [23] を参照してほしい．

双対性の一般理論によると 2 つの忠実関手 $U:\mathbf{C}\to\mathbf{Sets}$ と $V:\mathbf{D}\to\mathbf{Sets}$ があり，$\mathbf{C}$ と $\mathbf{D}$ のヤヌス対象 Ω が存在するとき，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\Omega):\mathbf{C}\to\mathbf{D}$ と $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(-,\Omega):\mathbf{D}\to\mathbf{C}$ の間に双対随伴 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{D}}(-,\Omega)\dashv\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\Omega)$ が成立することが知られている [35].

ここで, T を $\mathbf{Sets}$ 上のモナドとして取れば, 忠実関手 $\mathbf{Alg}(T)\to\mathbf{Sets}$ が存在するため, 上記の $\mathbf{D}$ を $\mathbf{Alg}(T)$ に置き換えることにより，関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\Omega):\mathbf{C}^{op}\to\mathbf{Alg}(T)$ とと関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}(T)}(-,\Omega):\mathbf{Alg}(T)\to\mathbf{C}^{op}$ が得られ，この関手の間に双対随伴 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Alg}(T)}(-,\Omega)\dashv\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\Omega)$ が成立する．

この関手 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\Omega):\mathbf{C}^{op}\to\mathbf{Alg}(T)$ は $\mathbf{C}$ を有限積を持つ圏として取れば T-ハイパードクトリンの具体例となること確かめられる．さらに，それだけに留まらず，T-ハイパードクトリン $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(-,\Omega)$ は全称量化子 $\forall$，存在量化子 $\exists$，等式 $=$ を持つことが示されるため，一階 T-ハイパードクトリンとなることもわかる．また，$\mathbf{C}=\mathbf{Sets}$ とすると，T-ハイパードクトリン $\mathrm{Hom}_{\mathbf{Sets}}(-,\Omega)$ は高階 T-ハイパードクトリンとなることも確認できる．

この事実は，双対随伴を双対性として捉える場合，双対性が圏論的普遍論理の意味論になることを示唆している．このような双対性による圏論的論理学の解釈を「双対性モデル」（あるいは「ストーン・モデル」）といい，意味論そのもののが双対性によって与えられるということを示唆している．丸山氏の言葉を借りれば，「圏論的論理において双対性は，もはや二項対立の圏論的表現ではなく，多様な述語論理・集合論の圏論的様態」([50], p190) なのである．

[*4] 付録 A.3 節を参照.

第 3 章

The Dynamics of Duality の批判的検討

本章では丸山善宏（Maruyama Yoshihiro）による「The Dynamics of Duality」（以下 DD）[24] という文献の内容を批判的に検討し，丸山の思想を明確にすることを目指す．丸山はオーストラリア州立大学に在籍している数学者兼哲学者であり，主に圏論を研究対象としている．圏論に関する業績は豊富で「圏論的統一科学」や「圏論的普遍論理」など興味深い論考が多い．（なお，圏論的普遍論理については前章で触れた．）和雑誌『現代思想』に圏論をはじめとした様々なトピックについての論考を執筆・投稿しており，彼の圏論に対する捉え方や思想をこれらの論考から知っている人も少なくないだろう．2015 年にオックスフォード大学で世界的に有名な圏論研究者であるアブラムスキーの指導の元で博士号を取得し，その後しばらくの間は京都大学の白眉プロジェクトの特任助教として働いていた．この京都大学で勤務している期間にこれまでの自身の研究を総括したような文章を書き上げる．それが DD である．

DD は我々の現代社会は「大きな物語の終焉」などの言葉で形容されるような統一的な世界像の欠いた「不統一化」の極値にあるという現状分析から始める．格差社会などの社会的分断のみならず科学・数学・哲学などの学問を横断した知識における分断現象が進行中であり，その分断の傾向は強まる一方である．多様性など不統一な現状それ自体にも一定の価値があることは確かであるので不統一を否定した形での統一を安易に主張することはできない．そこで，丸山はこのような不統一を否定せずに統一を実現する「多元的統一」というあり方を提唱する．この多元的統一とは，端的に言えば「異なるものを異なるままにした統一」のことであり多様性を認めた上での統合である．そして，この多元的統一を実現させる上で実質的な役割を果たしていくのが「双対性」である．

双対性とは，数学における代数と幾何のような一見すると正反対に見える理論を結びつける概念的枠組みである．実際にストーン双対性やゲルファント双対性という数学における双対性定理は代数と幾何の数学的構造の等価性をある程度示してきたという事実がある．数学におけるこの双対性の考え方を哲学に適応してみると何がわかるのだろうか？丸山は哲学の長い歴史の中で姿形を変えながら議論されてきた実在論と反実在論の二元論的対立と双対性とを結びつけ，双対性が二元論的対立を乗り越える枠組みになり得るということを示していく．そして，この二元論的対立の双対性による乗り越え方こそが多元的統一なのである．

DD はこのような「二元論」「双対性」「多元的統一」という概念の紹介を主としている．これらの概念は哲学や数学を初め，論理学，物理学，社会学というように極めて広範な文脈に現れ，捉え所のなさがある．実際，DD における議論は守備範囲の広さこそ天下一品であるものの，概念やそれに関する議論には具体性・明瞭性が欠ける箇所（例えば，数学における双対性も思想における双対性もどちらも「双対性」と一括りにしている点や，思想における双対性が多元的統一を実現するというがその意味が曖昧であるという点など）がいくらかある．

本章では「二元論」「双対性」「多元的統一」などの基本概念とその間の相互関係を理解することを目標にする．まず，3.1 節では DD 内容を丸山自身による様々な文献を参照しながら読解し，「二元論」「双対性」「多元的統一」などの基本概念の理解を深めていく．私見による解釈を踏まえながらではあるものの丸山自身によるテキストに忠実に従うことを心がけた．続く 3.2 節では，文献の内容を批判的に検討し，概念の相互関係や文献中の議論が明瞭性に欠けるということを指摘する．指摘したいくつかの点については実際に明瞭化の議論を二つに分けて行った．

一つ目の議論は「双対性」と「多元的統一」の繋がりについてである．丸山の用いる双対性概念には数学的なものと思想的なものの二つがある．それらをそれぞれ「数学的双対性」「思想的双対性」と定義して区別する．その後，この二つの概念の類似点と相違点の二つを確認する．そして，この相違点があることこそ双対性が多元的統一を実現するために実質的な役割を果たしているのだということを示す．

二つ目の議論は「圏論的統一科学」と「多元的統一」の繋がりについてである．DD では直接圏論的統一科学という言葉は使用されないものの，他の様々な文献から圏論的統一科学は多元的統一を実現する実質的なプロジェクトであることは確かであり，その実質を理解することは重要だと思われる．そこで圏論的統一科学を理解を目指すのだが，まず圏論的統一数学である圏論的基礎論について理解を深める．圏論的基礎論はいくつかのバージョンがあり，その一部は公理的集合論と数学的表現力が等価であることが示され，この意味で圏論的基礎論は公理的集合論に代替可能な理論なのである．しかし，フェファーマンなどの集合論支持者は「圏論は集合概念に依存している」ので「圏論は集合論に依存している」と批判してきた．この批判については筆者自身による応答を試みた．また，基礎付け主義的ではない基礎論のあり方として丸山は「相対的基礎論」というものを提唱する．この相対的基礎論が圏論的統一科学という丸山の理想の科学像と繋がっているということを確認し，最後に圏論的統一科学の理解を深めると共にその限界を示す．

3.1 内容解説と丸山の思想

「The Dynamics of Duality」[24] という文献は数学者兼哲学者である丸山善宏によって書かれた文献である．丸山は DD や [44][28][43] を参照すると「圏論的統一科学」や「双対性」を通した「多元的統一」を通した「近代（現代）の超克」を目論んでいるとわかる．これらの文献の中でも特に丸山の思想が色濃く現れてる文献が DD である．そのため，本節では丸山の目論見を達成するために重要だと考えている「二元論」「双対性」「多元的統一」という概念の理解を深めるために，DD の内容を読解していく．DD だけでは理解が困難な箇所については丸山の他の文献を参照しながら読み進めていく．

DD は全部で 5 つの節に分かれており，本節では 1 節ずつを順に解説していく．DD の構成は以下の通りである．

1. Unity, Disunity, and Pluralistic Unity
2. Dualism
3. Duality
4. Disduality
5. The Logic of Duality in the Kyoto School

5 節の「The Logic of Duality in the Kyoto School」では「双対性」と「京都学派の思想」の比較を行っているのだが，私が両者の関係性を理解するだけの知識を持ち合わせていないので，5 節の解説は割愛した．なお，あくまで DD における概念の理解を目標に進めていくので，数学的な議論は多くは省略してある．また，

英語文献の引用箇所の翻訳は私自身による．

3.1.1 統一と不統一

本項では DD の 1 節「Unity, Disunity and Pluralistic Unity」の内容を [44] などの文献を参照しながら解説する．この節は丸山による「近代化論」であり「統一」と「不統一」の関係性が論じられる．

DD の冒頭で，丸山は我々の生きている時代は近代化（科学の発達や資本主義の加速など）に伴い，知識の断片化と脱魔術化が進行し，世界を統一的に見ることが難しくなっており「グローバルな意味」が喪失した時代だという．実際，我々は「統一的な世界の見方を欠いており，無数の不確実性と偶然性に支配された不統一（disunity）な時代を生きて」([24],p77) おり，「不確実性と偶然性は量子理論と統計的機械学習に基づいた人工知能を含む様々な偶然の科学によって，またリスク社会特有の後モダン的特徴のそれぞれによって例証されるように，科学と社会を蝕んでいる」([24],p77) と論述し，統一の欠いた現状に対し否定的な見解を持っている．[44] では上記の脱魔術化による「意味」の喪失現象を以下のように鮮やかに論述する．

> 近代以前，自然は「意味」に満ち満ちていた．例えば星空の神秘に内蔵された意味の解読が占星術を生み出し，そういった魔術的な意味のシステムが政治的な意思決定においてさえクリティカルな役割を果たしていたように．自然には彩豊かな意味が内蔵され自然それ自体が内在的な目的のもとに躍動すると考えられていたのである．しかしルネッサンス以降自然の意味はいわば「ブリーチ（漂白）」され世界は脱魔術化されてゆく．科学革命は前近代的な目的論的世界観，アリストテレス的世界観を葬り去り，機械論的世界観，ガリレオ的世界観を支配的なものとした．（中略）「モノ」の世界が脱魔術化された結果，おそらく唯一残された神秘の領域は「心」や「意識」の世界であり，そこでは未だメンタリストという名の占い師が跋扈しファンシーな人間占いとして謎めいた精神分析が行われることがあるとしても，認知科学による「心」というシステムの脱神秘化は着々と進行している．([44], p.144)

では脱魔術化が進行した現代において，統一的な世界の見方を持てないことは悪いことなのだろうか．必ずしもそうではない．不統一な状況を多様性が尊重される状況と読み替えるならばそれがむしろ善いことであると解する人が多いのではなかろうか．丸山も統一性よりも多様性をおり重要視する人がいるように，これは必ずしも否定的なことばかりではなく，芸術の分野では特に不確実性や偶然性から多くのインスピレーションをうけることがあり善いこともあるのだという [24].

しかし，丸山と同様，統一的な世界の見方を持つことのできない現状に不満を抱いている人が一定数いるということも理解できる．統一性の放棄の帰結としての基礎付け主義の棄却の後，「ポスト真理（真実）」という客観的な事実より感情や個人の心に訴えかけるような言明が重要視される社会的な状況が出来上がり，「真理」よりもまず持って「同調」が求められる現状になってきているからだ．また，社会的な「分断」もまた統一性の放棄の帰結の一つであろう．近年では，インターネットや SNS の急速な普及により格差が助長もしくは可視化されたことによる社会の分断現象が話題になっているが，この「分断」が政治学や社会学の文脈でしばしば批判の的となっている．この社会的な分断に対する批判の声も統一的な世界観を持てないということに対しての不満の現れであろう[*1].

[*1] 「分断」に関していえば，「この割れ切った世界の片隅で」[68] という高校生によって note に投稿された記事が一時期話題となった．この記事は一高校生の視点から「ふつう」についてを述べ，いかに普通が指し示す意味合いが曖昧であり，普通という言葉の意味が各人にとって異なるかを伝え，多様性を受け入れることの重要性を説いた記事である．記事の筆者は分断については否定的であるが，多様性についてはむしろ肯定的である．不統一と多様性は相反するものではないということを物語っており，「多様性と包摂（ダイバーシティ and インクルージョン）」という近年話題の考え方とも親和的である．

丸山は，一般にこのような統一的な意味や世界の見方を欠いた状態のこと（社会学の文脈に限っていえば「分断」が引き起こされている状況のこと）を「不統一（disunity）」や「不統一主義（disunitism）」と定義する．不統一化（disunification）は脱魔術化などの近代化の進行を表現する概念であり，丸山の近代化論において中心的な役割を果たす概念の一つである*2．統一されていた意味や価値，学問や共同体，さらには世界観が徐々に解体され，不統一または細分化，または文脈化されていくことを表している．

この不統一化は社会学に限らず様々な学問分野の中で見られる一般的な現象である．例えば，哲学においては，分析哲学の台頭それ自体や分析哲学における主流派が統一科学を掲げるウィーン学派から反統一科学を掲げるスタンフォード学派に移行したこと，さらに大陸哲学におけるリオタールの「大きな物語の終焉」を起点にポストモダン哲学へ移行したことが不統一化現象である．科学哲学や論理学，数学における分野の細分化・多元化（科学一般についての哲学から個別科学の哲学への移行や，ウィトゲンシュタイン的な絶対論理から論理的多元主義への移行，ブルバキ的統一数学から計算論的な数学への移行など）も学問の中における不統一化現象の一具体例として見なすことができる．丸山はこのことを「社会の分断と知識の分断 (そして理性の分断) は別々の現象 ではなく，ここで私が不統一主義によって特徴づける人間の歴史における同じ性質の結果なのである」([24], p.80) という．

不統一化，または，近代化に伴う自然の機械論的な見方の浸透は，自然を「意味の内在的な担い手」ではなく「外在的に使役される道具」として利用することを可能にし，科学革命と産業革命の 2 つの革命を引き起こしたようというのが通説である ([44],p144)．不統一化の進行は，革命以後，科学と技術を加速度的に発達させていき，「高度にテクノロジカルにブラックボックス化された現代の社会システム」([44],p144) という我々の生きる現代社会を築いたのである．

この不統一化の行き着いた果ての現代社会は社会的・知識的分断をはじめ様々な問題を抱えている．社会学者モリス・バーマンは上記の不統一化（近代化，脱魔術化）による機械論哲学の流布と科学と技術の発達に伴って生じた「科学的意識または参加しない意識（自己を世界から疎外する意識）」が主体と客体との分離や事物の完全な物象化の感覚を招き，ついには「意味の喪失」へと至り，ストレスとフラストレーションの毎日が帰結するという．バーマンはこのような問題は日常生活にも深く食い込んでいると指摘し，以下のように言う．

> 今世紀（20 世紀）初頭に一握りの知識人が捉えられていた疎外感・無力感を，いまでは街を歩くふつうの人々がそれぞれに抱え持っているようだ．感覚をマヒさせるばかりの仕事．薄っぺらな人間関係．茶番としか思えない政治．伝統的価値観の崩壊によって生じた空虚の中で，我々にあるものといえば，狂信的な信仰復権運動，統一教会への集団改宗，そして，ドラッグ，テレビ，精神安定剤によってすべてを忘れてしまおうとする姿勢である．あるいはまた，いまや国民的強迫観念と化した，精神療法の泥沼の追及．何百万ものアメリカ人が，価値観の喪失と文化の崩壊を感じながら，自分の生を立て直そうともがいているのだ．憂鬱症が標準的な精神状態である時代．([66], p.15)

バーマンはこのような事態に対し，脱魔術化からの「再魔術化」という概念を提示し，不統一化・近代化に伴う意味喪失に関する問題解決に取り組んだ．*3バーマンのいう「再魔術化」とは端的に言うと，科学的意識に対峙する「参加する意識（自己と世界を融合し同一化させようとする意識）」を取り戻し，意味を回復させ

*2 不統一，不統一化の厳密な定義は明らかではないが，近代化や脱魔術化と並置する概念として用いていることは用語の使い方からして明らかである．

*3 フッサールやハイデガー，廣松渉，また宮台真司，さらに落合陽一などの多くの学者が同じような問題意識をもち，問題解決に向けて取り組んでいた（いる）．

ようとする試みである．つまり，「再魔術化」は近代から前近代への逆行運動（回帰）であり，「近代の超克」運動の一つである．

丸山はさらに「加速主義」で有名なニック・ランドの暗黒啓蒙や新反動主義も近代化を象徴する資本主義を乗り越える思想という意味で，「再魔術化」と同型の構造を持ち，近代から前近代への回帰として捉えられるという [44]．さらに，京都学派の哲学も「主客」の分離を問題視し，「統一的世界像」の構築を現代の根本的な課題としているという点で，「再魔術化」と同型の構造も持つ [24]．

これらの「回帰」に関する思想について丸山は「近代化論において用いられる純粋に「記述的」な概念群と異なり，再魔術化の概念は未来の姿に関する「規範的」な側面を持って」([44], p.150) おり，「「近代性のポジティブ・フィードバック」という，過去から現在に至る近代化プロセスの記述的な分析理解を与えながら，そのプロセスの徹底という「規範」を基礎として未来の構築あるいは未来への脱出へと向けたプロジェクトを示している」([44], p.151) ので，「その意味でこれらの立場は「現代の思想」というよりむしろ「未来の思想」という側面を色濃く持っている」([44], p.151) と評価する．つまり，再魔術化などの回帰の思想は未来志向的であり，ある種のプロジェクトと認識している．これは，後述する丸山にとっての「統一」を実現するプロジェクトである「圏論的統一科学」についても同様である．なお，近代化のプロセスである「近代性のポジティブ・フィードバック」とは，ランドによる近代化の定義である[*4]．

バーマンによる再魔術化やランドの加速主義は主に社会学や経済学といった社会科学における議論であるが，丸山によると不統一化と同様，近代から前近代への回帰現象は哲学や数学などの幅広い分野に見られるという [44]．例えば，近年，分析哲学における「構造実在論」「科学的形而上学」や大陸哲学のメイヤスーらによる「思弁的実在論」やガブリエルによる「新実在論」などの登場に見られるような，実在論的なものへの回帰がそれである．哲学は，ローティの言葉で言えば，実在論から認識論的転回，言語論的転回を経て段階的に不統一化・脱魔術化されていったのである．丸山はこれを拡張させ，言語論的転回（さらに近年の情報論的展開）を経たのち，現在では実在論的転回を迎え魔術的なもの，統一的なものへ「回帰」していると言う．（数学についての再魔術化の議論の詳細は DD を直接参照してほしい．）

脱魔術化や近代化に相当する丸山の近代化論における概念が「不統一」であったが，再魔術化や回帰に対応する概念が存在する．それが「統一（unity)」と「統一主義（unitism)」である．つまり，「統一」は不統一化が進行する前の，「グローバルな意味」が存在しており，世界を統一的に見ることができた状態のことであり，再魔術化や回帰のことを一般的に表現する概念である．

この「統一」と「不統一」，「統一化」と「不統一化」は相反する概念である（ように見える）一方で，実は両者は密接に関係しあっており，ある意味で「相補的な関係性」にある．実際に，再魔術化は脱魔術化による反動であり，脱魔術化の必然的な帰結として再魔術化があると脱魔術化の提唱者であるマックス・ウェーバーは言う．以下がその引用である．

> 知性主義が呪術への信仰を撃退し，かくして世界の諸事象が「脱魔術化」されて呪術的意味内容を失い，それらがただなお「存在」し「生起」するだけでそれ以上のなにものをも「意味」しなくなるにつれ，世界と「生の導き」に対する要請は，これらが常に一つの全体として有意義にかつ「意味深く」秩序づけられるべきであると言う方向に向かって，いっそう切実なものとなる．([64], p.160)

[*4] ランドによる加速主義の基本テーゼは，近代システムのポジティブ・フィードバックを際限なく回し続けることにより，そのシステムの「特異点」に至り，近代システムを脱出するというものである．つまり，「近代を近代の徹底による超克する」という近代内部からの近代の解体のことである．これは，人工知能研究が進むことにより，人工知能が自己改良をするようになるという知の「特異点」に至り，「知の爆発」が起こるというシンギュラリティの議論と類比的である．詳しくは [44] を参照してほしい．

また，佐々木雄大は以下のようにいう．

> ウェーバーの世俗化が意味するところはむしろ，魔術化が脱魔術化を呼び込み，魔術化がさらなる脱魔術化へと反転する，逆説的な論理である．あるいは，ウェーバーの合理化とは，ある視点からすれば非合理的に思われたものが，実はもう一つ別の合理性として立ち現れ，複数の合理性が拮抗するという，多義的な合理性の相克である．世界にかかっていた魔法が徐々に解けていったのではない．世界に魔法をかけることで，かえって魔法から醒めること，これがウェーバーの魔術化=脱魔術化なのである．([47], p.60)

どちらも異なる合理性によって引き起こされ，どちらも合理性の帰結という面では等しいということである．

不完全性定理で有名なゲーデルも脱魔術化に相当する概念を「左」「左傾化」と表し，魔術化に相当する概念を「右」「右傾化」とし，両者の間の関係を”The modern development of the foundations of mathematics in the light of philosophy” と題された 1961 年頃の講義ノートにおいて論じている．丸山はゲーデルの議論を以下のようにまとめる．

> 「右」の代表例が形而上学，観念論や神学であり，「左」の代表例が唯物論，実証主義，経験論や懐疑論である．これらは程度を許す区別であり例えば経験論的に基礎付けられた神学も存在するとゲーデルは注意する．この「近代化の左傾化」の傾向をゲーデルは科学の発展の中にも見出す．そしてゲーデルは，特に物理学においてこの「左傾化」がピークに達し，世界の「客観化可能な状態に関する知識の可能性」が大部分否定され，我々は実験結果の「予測」のみで満足しなければならなくなり，そして「これは本当に通常の意味での全ての理論科学の終焉である」と留保なく述べるのである．([44], p147)

ゲーデルの「理論科学の終焉」は量子力学についてのことであり，「物理学の左傾化」をそこに見出した．また，ゲーデルにとってヒルベルト・プログラムもまた「数学の左傾化」であり，形而上的な「無限」ないし「理想元」の導入による「右傾化」の果てにパラドクスに陥った「超越的数学」を，その危機から救出するために不可欠な「左傾化」のプログラムであるという [44]．つまり，魔術を脱魔術化により正当化する，統一から不統一の運動としてヒルベルト・プログラムも解釈し直すことができるのである．

丸山は続いて，ランドの「加速主義」やメイヤスーの「思弁的実在論」，ガブリエルの「新実在論」さらに分析哲学における「構造実在論」「科学的形而上学」といった不統一から統一，近代から前近代への「回帰」をゲーデルの「左」と「右」の概念に則して以下のように批判的に論じる．

> しかし暗黒啓蒙思想や新反動主義などの右派加速主義的な立場は半ば逆説的にその「左傾化の徹底」の彼方に「右」的な理想の実現を見ている．メイヤスーの「思弁的実在論」も加速主義と同種の構造があり，基本的には「左」の必然化としての「右」を志向する立場であると言える．（中略）大陸哲学における思弁的実在論に見られるような「実在論的転回」は英米の分析哲学にも共通したものであり，そこでは「構造実在論」や「科学的形而上学」が勢いを増している．構造実在論は端的に言えば「構造」という「左」の要素により「実体」としての「右」を正当化するという論理構造を持っている．科学的形而上学もまた近代科学という「左」による，形而上学という「右」の正当化のプログラムである．これらの構造はゲーデルがヒルベルト形式主義に見たという論理構造と同型のものである．実体的な実在論や形而上学は「右」の思想であるが，ゲーデルの言う近代以降の世界観の「左傾化」のなかで，単純に「実在」や「世界」を措定することは困難になり（数学の場合には巨大な無限の実在を措定することが

> パラドクスにさえ陥り)，その結果「左」による「右」の正当化があるいは擬装のプログラムが科学と思想の様々な文脈で同時発生してきたと考えられる．([44], p.148-149)

ゲーデルも丸山も（批判的ではあるものの）ウェーバーら同様に「不統一化」（脱魔術化，左傾化）の必然的帰結として「統一化」（再魔術化，右の正当化）が生じるという論理構造を見てとり，それについて論じている．これらの議論から汲み取れることは，「統一」の概念は「不統一」と相反する概念である（ように見える）一方で両者は互いに「相補的な関係」になっているということである．

「不統一」（脱魔術化，左）と「統一」（魔術，右）の間の関係性については上述したように興味深いテーマである．丸山は DD において，脱魔術化された「不統一」な世界観のことを機械論的世界観とし，その一方で，魔術的な「統一」的な世界観のことを全体論的世界観とみなし，この機械論的世界観（不統一的世界観）と全体論的世界観（統一的世界観）が互いに「双対」であり，ある意味で「構造的に等価である」という [24].

この「不統一」と「統一」の世界観が「双対」で「構造的に等価」でという主張内容は，明らかに数学的構造が「双対」であるという主張内容の領域を超えでている．DD のみを参照しているだけではその意味することは明らかではないが，上述した [44] における「左傾化」の果てに「右」を措定するという現代哲学ややウェーバーや佐々木による脱魔術化の果てに再魔術化が生じるという議論を参照すると，「不統一」と「統一」の間の必然的な関係のことを「双対性」と言っていると解釈することができる．（しかし，数学における純粋に構造に関する「双対性」とこのような思想な意味合いを持つ概念間の「双対性」には幾分かギャップがある．この両者の関係性については次節で詳しく考察する．）

丸山の「統一」「不統一」をめぐる議論を解説した．この議論は社会学や経済学から科学や数学さらには哲学に至るまで幅広い分野に横断的な議論であるのでその詳細を追うのは困難である．詳細を追うことは困難だとしても「不統一」と「統一」の区別は「近代化論」と言う観点から現代を理解する上で重要な区別であるとは言えそうである．

ここまでの丸山による「統一」「不統一」の区別を以下の表にまとめる．なお，本章で論じたこと以外の点についても付け加えたまとめであることに注意してほしい．

統一（Unity）	不統一（Disunity）
（再）魔術化（バーマン）	脱魔術化（ウェーバー）
左（左傾化）（ゲーデル）	右（右傾化）
基礎づけ主義	反基礎づけ主義
絶対性	偶然性
自然の鏡（ローティ）	自然の鏡の否定
大きな物語（リオタール）	大きな物語の否定
体系哲学	分析哲学
グローバルな意味	ローカルな意味
統一的科学・数学・論理学	多元的科学・数学・論理学（科学・数学・論理学の細分化）
思弁的実在論，新実在論，暗黒啓蒙，新反動主義	ポストモダン哲学

最後に「統一」と「不統一」の 2 つの関係性を超克する「多元的統一」について解説する．「統一」と「不統一」などの二項対立を克服するための方法は「ヘーゲルの弁証法」がよく知られる．「正」「反」「合」の論理と言われるように，対立する二つの立場を包摂する第三の立場を設けることによって対立を解消させる方法であ

る．つまり，ヘーゲルの弁証法とは対立する二つの立場の「異質性」を第三の立場から「無化」して対立を解消させ，両者を統合・統一させる方法論である．（この点でヘーゲルの弁証法は全体主義的である．）

丸山は双対性も二項対立を克服する方法であると言うがヘーゲルの弁証法とは異なる形式を持っていると言う．ヘーゲルの弁証法は「異質性」を「無化」して「統一」するのに対して，双対性は「異質性」を保ったまま「統一」する．すなわち，「不統一」を否定することなく「統一」を復権させることを可能にする．換言すれば，多元性を維持しつつ構造という点に関しては同じいう意味で「統一」を実現するのが双対性による「統一」であるのである（構造的統一とも言えるだろう）．この多元性を維持したままの「統一」，つまり対立をある程度は無化させることができるが，完全には無化させない仕方での統一のことを「多元的統一」と言う．この「多元的統一」の実現こそ丸山の目論見であり，丸山の思想における核心である．

しかし，この「多元的統一」の具体的な内容は現時点ではよく分からない．次項以降で「多元的統一」を実現する概念的方途の一つである双対性については解説するが，この双対性について理解を深めた後でさえも「多元的統一」が何であるかはっきりとは理解できないかもしれない．この点をより明瞭にするため次節で「双対性」と「多元的統一」の繋がりについて詳しく検討する．

また，丸山は「多元的統一」を実現させ，失われた統一的世界像を恢復するプロジェクト「圏論的統一科学」[43] を構想している．これは丸山の目論見を実現させるための実質・根幹であり，丸山の研究や取り組みの意図をよく説明してくれる．「圏論的統一科学」についても「多元的統一」と同じく次節以降で取り扱いと思う．

3.1.2　二元論と双対性

前項では主に DD の 1 節「Unity, Disunity and Pluralistic Unity」の内容 [44] を参照しながら解説した．続く本項では主に DD の 2 節「Dualism」の内容を解説する．

丸山は「二元論と双対性は互いに関係する概念であるが確固として異なる概念である（ただし，どのように異なっているかは明らかではない）」([23], p.2) という．二元論は単に 2 つの立場が対立するというイメージがある一方で双対性は「構造的等価」と表現されるように対立が解消され，2 つの立場の類似性に着目しているというイメージがある．

丸山のいう「二元論」は主に実在論と反実在論の対立関係のことである．実際に，「哲学の発達は，実在論と反実在論の緊張関係が中心にある」([24], p.81) といい，この実在論と反実在論の間の対立関係は「言葉の意味とは何か？」などの哲学的な問いを巡ってしばしば哲学史の中で姿形を変えて論じられてきたという．丸山は「言葉の意味とは何か？」をはじめ「真理とは何か？」や「存在とは何か？」という様々な観点での哲学的な問いに対して「実在論」と「反実在論」の対立をそれぞれの立場を擁護する人物を挙げながら網羅的に記述する．「実在論」と「反実在論」の二元論的対立についての丸山の記述をまとめると以下のようになる [24]．

- 「言葉の意味とは何か？」
  - 実在論：言語と現実の対応（初期ウィトゲンシュタイン，デイビットソン）
  - 反実在論：言語実践の自律システムまたは言語の内部構造または言語実践（後期ウィトゲンシュタイン，ダメット）
- 「真理とは何か？」
  - 実在論：主張と事実または情勢との対応（ラッセル）
  - 反実在論：向きの参照は存在せず，主張の内部的な一貫性またはある種の手段的な語用論によって構成される（ブラッドリー）

- 「存在とは何か？」
  - 実在論：永続的な実体（アリストテレス）
  - 反実在論：変化していくプロセス，認識，構造，ネットワーク，環境，または文脈の中で出現するもの（カッシーラー/ハイデガー/ホワイトヘッド）
- 「知能とは何か？」
  - 実在論：行動のシミュレーション以上のものであり，心の志向性を特徴とする（サール）
  - 反実在論：チューリングテストや中国語の部屋のようにコピーキャットすることで完全に与えられるもの（チューリング）
- 「空間とは何か？」
  - 実在論：延長のない点の集まり（ニュートン，カントール/ラッセル）
  - 反実在論：場所，関係，性質，または情報の構造（ライプニッツ，フッサール/ホワイトヘッド）

この実在論と反実在論の二元論的対立は，より一般的に「認識論的なもの（the Epistemic)」と「存在論的なもの（the Ontic)」という二つの概念を用いて捉え直すことができる．この「認識論的なもの」と「存在論的なもの」という概念は丸山が導入した概念であり，前項におけるゲーデルの「左」と「右」または，カッシーラーの「関数概念」と「実体概念」，前章で扱ったハイパードクトリンの生みの親であるローヴェアの「形式的なもの」と「概念的なもの」の区別と類比的な概念対である．丸山は実在論と反実在論の二元論的対立はこの「認識論的なもの」と「存在論的なもの」の間，その関係性の内で生じると言う．この「存在論的なもの」と「認識論的なもの」により哲学における対立関係を捉え直すと図 3.1 のようになる．

	Ontic	***Epistemic***	
Descartes	*Matter*	*Mind*	Cartesian Dualism
Kant	*Thing-in-itself*	*Appearance*	Idealism
Cassirer	*Substance*	*Function*	Logical Idealism
Heidegger	*Essence*	*Existence*	Analysis of *Dasein*
Whitehead	*Reality*	*Process*	Holism/Organicism
Wittgenstein	*World*	*Language*	Logical Philosophy
Searle	*Intentionality*	*Simulatability*	Philosophy of Mind
Dummett	*Truth*	*Verification*	Theory of Meaning

図 3.1 ([24], p.82) より引用

「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の区別は前項での「統一」と「不統一」の区別と類比的である．「統一」と「不統一」と同様,「存在論的なもの」と「認識論的なもの」は互いに対立する概念である一方で，両者は密接に関係している．近代の到来に伴い「統一」から「不統一」へ移行し，現在は再び「統一」へと回帰しつつあると前項で述べたが，この「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の間にも移行（と回帰[*5]）が存在

[*5] 丸山が正確に回帰もあるということは述べていないが丸山が掲げる「多元的統一」や「圏論的統一科学」は様々な箇所での議論を

するのである．

丸山はこの「存在論的なもの」から「認識論的なもの」への移行について，カッシーラーの「関数概念化」とホワイトヘッドの「空間概念の点なし化（ポイントフリー化）」を（さらに [28] ではウィトゲンシュタインやブラウワーの空間に関する哲学的な主張をも）具体例として挙げながら論じる．なお，前項のゲーデルの「左傾化」やヒルベルトの「形式主義」もこの移行についての具体例の一つとして数えることができる．

カッシーラーの「関数概念化」とは端的に言えば，「実体的世界像」という実在論的な思想傾向から「関数的世界像」または「シンボル的世界像」という反実在論的な思想傾向への移行である．これはローティのいう「認識論的転回」から「言語論的転回」を経て近年の「情報論的転回」へと移行する近代化，脱魔術化，不統一化の移行と同型である．カッシーラーによれば「関数概念」または「シンボル形式」の反復的な使用がこの移行をもたらしたのである．

この「関数概念化」すなわち「実体的世界像」から「関数的世界像」への移行は，世界像の近代化を捉えるための図式である一方で，数学や物理学の近代化を捉える際にも有効である．丸山は実際に「20 世紀後半の数学における，「点の集まり」としての集合論的な空間概念から「点」という「超越概念」を仮定しない代数的（あるいは構成主義的）な空間概念への移行は，まさに実体概念としての空間概念から関数概念としての空間概念の移行であり「空間の関数概念化」と捉えられる」([44], p.149) という．

ホワイトヘッドの「プロセス哲学」においてもカッシーラーと同様の主張を見てとることができる．数学が物理学へ応用され始めた 17 世紀後半に空間概念にはニュートン的な実在論的空間概念からライプニッツ的な反実在論的概念の 2 つの概念の間に緊張関係があった．ニュートン的な空間論の場合，空間を認識対象としての自然の側に立て，認識からは独立した実在と捉える．一方で，ライプニッツ的な空間論の場合，空間を「共存するものの秩序」と考え，認識における感性の形式と捉えるのである [57].

ホワイトヘッドは数学的な空間概念における点集合空間（point set space）と点なし空間（point free space）の間に同様の緊張関係を見出し，後者の方が認識論的に適切であるため後者を支持した*6．カッシーラーと同様，ホワイトヘッドも実体や事物よりも関係性や連続性が有意であるとし，関係性を重視するライプニッツ的な空間概念を基本とする「点なし空間化」を押し進めた．

カッシーラーの「関数概念化」やホワイトヘッドの「点なし空間化」，一般に「存在論的なもの」から「認識論的なもの」への移行は，丸山のいう「シフト（Shift）」という概念でまとめあげることができる．「シフト」とは「近代化」「脱魔術化」「不統一化」と類比的な概念である*7．以下の表は丸山によるまとめ ([23], p.44) の一部である．

Cassierer Shift	Substance	Function
Whitehead Shift	Material	Process
Brouwer Shift	Point	Choice Sequence
Wittgenstein Shift	Tractatus	Investigations
Bohr Shift	Classical Realism	Complementarity
Godel Shift	Right	Left

参照すると「認識論的なものから」から「存在論的なもの」への回帰として位置付けられると考えている．

*6 点集合位相空間論は選択公理のようないくつかの非決定的原理の助けを借りてのみ存在する超越的な点を措定する一方で，点なし位相空間論は構成的に理論を展開することができる．丸山はこの意味で認識論的に適切であるという．

*7 クーンの「パラダイム・シフト」も科学理論における「シフト」として捉え直すこともできるのではないか．これについて詳しく考察することも面白い試みであると考えている．

この「シフト」という概念が意味しているのは（前項でも述べたことだが）「存在論的なもの」と「認識論的なもの」は単に二項対立の関係にあるのではなく，両者の概念は密接に関係しているということである．また，歴史的に見ると 2 つの間で行き来しあっているということである．つまり，両者の関係性はこの意味で「相補的な関係性」なのである．二項対立の関係性を詳しく観察することで，その対立する二項の間に「相補的な関係性」別の言い方をすれば「トレードオフの関係性」が見えてくるのだ．

この「トレードオフの関係性」を如実に表しているのが数学の哲学における「ベナセラフのジレンマ」である．「ベナセラフのジレンマ」とは数学的真理の実在論（存在論的なもの）と数学的知識の反実在論（認識論的なもの）の間の「トレードオフの関係性」のことであり，以下で概要を簡潔に記述する．

数学の哲学においては，数学的言語を標準的意味論（タルスキ型指示的意味論）で解釈すべきであるという実在論的な要請がある．一方，数学的知識は標準的知識論（知識の因果説）で解釈すべきであるという反実在論的な要請がある．これらの 2 つの要請を同時に満たそうとすると，指示的意味論の要請から数学的対象への認識論的なアクセス可能性が拒否され，数学的知識を因果説的に説明できなくなり，因果説で数学的知識を説明しようとすると数学的対象への指示の可能性が拒否される，というように矛盾が生じる．これが「ベナセラフのジレンマ」の概要である [59].

丸山は「ベナセラフのジレンマ」について以下のように論述する．（以下の引用には「双対」という言葉が出てくるがその意味はあまり気にしなくても問題ない．）

> もし数がプラトニックな宇宙にあるのだとすれば，我々の認知は如何にしてその宇宙に対する因果的アクセスを得ているのか（この宇宙ではない他の宇宙の出来事について我々は如何にして知り得るのか）という問題である．この種の問題は反実在論には存在しない．ブラウワー的直観主義では数学的対象は精神的な存在であり我々の頭の中に存在するとされる．頭の中にあるものに対して頭がアクセスを持つことは何ら神秘的なことではない．唯名論でも同様である．一方，数学的対象の客観性や数学的真理の絶対性を保障するには反実在論は不利である．頭の中の存在という主観的存在がなぜ客観性を持ち得て，それに関する真理がなぜ絶対性を持ち得るのかという問題が生じる．唯名論でも適応可能性の問題や恣意性の問題が生じる．これはベナセラフのジレンマの双対である．要するに，安易な存在論は認識論を困難にし，安易な認識論は存在論を困難にするのである．これをベナセラフの双対性と呼ぶ．([46], p.30)

ベナセラフのジレンマが示唆していることは，数学の哲学における真理値実在論と知識論的反実在論が「トレードオフの関係性」になっているということである．実在論の利点である無限などの超越的な対象に存在論的にコミットをすればするほど，豊かな数学の世界を記述できるようになるが，一方で認識論的に正当化することが難しくなる．一方，反実在論的な毛色を強めその利点である認識論的に正当化できる対象だけが数学において許されるとすれば，幾分数学の世界は制限されてしまい，数学者は不満を述べることになる．このように数学の哲学において数学的対象の存在と認識という点で実在論と反実在論は連続的な関係にあり「トレードオフの関係性」にあるのである．

ここまでの議論をまとめる．上述した「ベナセラフのジレンマ」や「シフト」に関する議論から引き出せる帰結は，「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の間には「相補的な関係性」「トレードオフの関係性」が成り立っているということである．簡潔に言えば「何かについて簡単に説明できる存在論はしばしばその認識論を困難にし，逆もまた同様のこと成立」([24], p.84) し，「実在論的/存在論的な世界観と反実在論的/認識論的な世界観の間では何かが逆転している」([24], p.84) のである．

DD や [23] によると，丸山は「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の間の「相補的な関係性」「トレード

オフの関係性」それ自体を双対性であるという言い方をする（私見ではこれは「二元論」と数学における双対性の中間体である「思想的双対性」であり，数学における双対性と思想における双対性を一括りで「双対性」と言うことには問題があるように思う．詳しくは次節以降で論じる）．一方で，この「相補的な関係性」「トレードオフの関係性」を数学的に昇華させたものが双対性であるという言い方もする．つまり，「二元論」と「双対性」の相違点，もしくは「二元論」から「双対性」への移行は「単なる二項対立」から「相補的な関係性」へと至り，最終的に数学的な表現を与えた結果両者の間の「構造的等価性」が明らかになるという形のダイナミックな運動として捉えることができるというわけである．

[42] では「言葉と意味」の二項対立という限定的な文脈においてだが「二元論」と「双対性」の相違点「二元論」から「双対性」への移行を以下のように記述する．

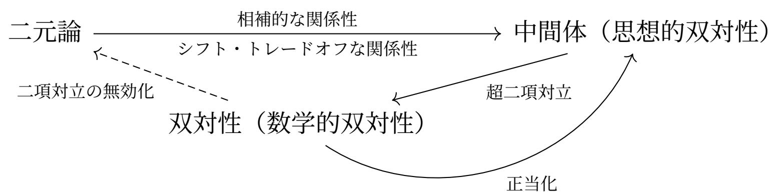
> 特に双対性という概念は,「言葉と意味」という哲学上の古典的対比 を基礎とすると考えられる一方で，同時にその基礎的対比を失効させる帰結をも (双対性という一つの概念のうちに) 併せ持つという点において，双対性は “transdichotomy”なのであると論じる (無理に和訳すれば「超二項対立」)．二項対立の帰結として生じてきたものが同時に元々の二項対立を無効化してしまう，双対性という概念にはそういったアイロニーが含意されているのである．そしてこのアイロニーは，双対性というものを， 単なる哲学的思考原理としての二項対立として捉えるに留まらず，それに 数学的 (圏論的) 表現を与えた結果，立ち現れてくるものなのである．この意味で双対性は critique としての側面を持っていると言って良い．([42], p.3)

「言葉と意味」の二項対立はストーン双対性やゲーデルの完全性定理という純粋に数学の定理によって，その「構造的等価性」が示される．その他の文脈（例えば,「空間概念の対立」など）においても同様に「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の二項対立を数学的に昇華させ，それを双対性（例えば,「ゲルファント双対性」など）という形式にまで昇華させることにより，双対性から帰結する数学的構造の等価性が最初に措定された二項対立を失効させる．丸山はこの意味で双対性は「超二項対立」であるという．

双対性には数学的に昇華する前の「トレードオフの関係性」という意味合いのニュアンスも残っている．[42] では論理学と代数幾何学における双対性を引き合いに出しながら，このことを以下のように分かりやすく説明する．

> 完全性定理による論理学的双対性も，零点定理による代数幾何的双対性も,「式が増えれば，それらを満たすものは減る」という実に単純な，明々白々たる原理に基づいている．まず，構文論的なもの（論理式や多項式）と意味論的なもの（モデルや多様体）がある（言葉と意味の二項対立）．そして，前者の増加が後者の減少を生むという関係にある．言葉をふやす，つまり多くの条件を要求すれば，それらの条件を満たすものは減る，つまり可能な意味の範囲は狭くなる．端的に言えば,「言葉を多く語れば意味はその分限定される」のである．([42], p.6)

ここまでの「二元論」や「相補的な関係性」「双対性」などの概念群に関する丸山の議論（と私による若干の考察）を図にまとめると以下の通りとなる．



既にストーン双対性やゲルファント双対性などの数学における双対性を例として挙げたが，これら数学における双対性については次の項で詳しく考察する．また，数学における双対性が思想における双対性の正当化の役割も果たしているということは私による考察の結果である．詳しくは次節で指摘する．また，「双対性」は「二元論」の二項対立を失効せるという意味で「二元論」を「脱構築」する枠組みであると見なすこともできるのである．

3.1.3　数学における双対性

前項では主に DD の 2 節「Dualism」の内容を [42][46][23] の議論を参照し，若干の私的な考察を加えながら解説した．続く本項では主に DD の 3 節「Dualiy」の内容を解説する．

丸山は「双対性（の理論）」は「二元論」で対立する 2 つのものを，それらが「1 つの同じコインの両面であることを示すという究極の目的を持ち，それらを結合する試み」([23], p.84) であるという．また，言い換えると，双対性は「二元論で対立するものを，1 つの同じ基本的な現実のちょうど 2 つの異なる外観として調整および結合することを可能に」([24], p.84) し，この意味において双対性は「二元論の上に確立された一種の一元論である」([24], p.84) という．この丸山の主張が意味していることは前項で既に見た通りである．また，「二元論の上に確立された一種の一元論」という点は（二項を包摂する第三項を設けるという点を除いて）ヘーゲルの弁証法と同型の構造であり，弁証法もある種の双対性なのであると言う [24].

DD の 3 節では，この「二元論」を深化させることで生じる「双対性」の数学における具体例の解説が中心になる．本項での「双対性」は前項までの思想における双対性とは違い数学における双対性とはハッキリと数学的に定式化可能な概念であると言うことに注意する必要がある．（圏論では双対性は主に圏 A と圏 B の間の反変圏同値性 $\mathrm{A}\simeq\mathrm{B}^{op}$ として用いられる．）

数学における双対性には具体的にはどのようなものがあるのだろうか？丸山が例示する双対性は以下の通りである．表現論におけるコンパクト群とその表現の間の双対性である「ポントリャーギン双対性」，代数幾何における代数閉体上の有限生成被約代数とアファイン多様体の間の双対性である「ヒルベルト双対性[*8]」，作用素環論における可換 C^* 環と局所コンパクト・ハウスドルフ空間との間の双対性である「ゲルファント双対性」，最もよく知られた双対性であるブール代数とストーン空間（完全非連結コンパクトハウスドルフ空間）の間の双対性である「ストーン双対性」などである．数理論理学でよく知られた（また，圏論的な表現では 2 章で証明した）完全性定理（意味論的完全性）はストーン双対性の具体例として捉えることができ，完全性定理も「数学的双対性」の一つなのである[*9]．また，代数幾何でよく知られるヒルベルトの零点定理も「ヒルベルト双対性」の具体例として考えられるという．

これらの丸山が例示する双対性は 20 世紀初頭に次々に発見されていった定理群である．これらの双対性は関数解析，一般位相幾何学，普遍代数，他方では代数幾何学，表現論，数論へと応用され，異なる数学分野間

[*8] 丸山による用語法である．
[*9] これは 2.6 節で解説した「双対性モデル」とも関係が深い事実である．

	Ontic	Epistemic	
Complex Geometry	*Complex Surface*	*Function Field*	Riemann
Algebraic Geometry	*Variety/Scheme*	*k-Algebra/Ring*	Hilbert-Grothendieck
Galois Theory	*(Profinite) G-Set*	*Algebra Extension*	Galois
Representation Th.	*Compact Group*	*Representations*	Pontryagin-Tannaka
Anabelian Geometry	*Elliptic Curve*	*Frobenioid*	Mochizuki
Topology	*Topological Space*	*Algebra of Opens*	Isbell-Papert
Convex Geometry	*Convex Space*	*Semantic Domain*	Maruyama
Logic	*Space of Models*	*Algebra of Theories*	Gödel-Stone
Computer Science	*System*	*Observable Properties*	Abramsky-Smyth
System Scicence	*Controllability*	*Observability*	Kalman
Quantum Physics	*State Space*	*Alg. of Observables*	von Neumann
General Relativity	*Spacetime Manifold*	*Vector Field*	Weyl

図 3.2　([24], p.86) より引用

を繋ぐ重要な役割を果たしている．異なる数学分野間の二項対立を失効し，双対定理の示す「構造的等価性」がそれらを密接に結びつけるのである．

また，この双対性は数学のみならず，理論物理学や計算機科学などの理論科学の分野においても確認されている．物理学においては「状態」と「観測値」が双対の関係になっており，計算機科学においては「システム」と「観測可能な特性・行動」が双対の関係になっているという．さらに，「最適化」「線形計画」「制御理論」「電気回路理論」という工学の分野においても双対的な関係は見られ双対性は実用性のある工学の分野においても活用されているようである．このような数学・科学に幅広く存在している双対性を丸山は図 3.2 のようにまとめる．

ここで思想における双対性から数学における双対性への移行がどのようになされるかを「空間概念の対立」と「意味論上の対立」の 2 つの例について簡単にスケッチする．

空間概念には大きく分けて，実体的に（実在論的に）空間を捉えるニュートン的な空間概念と，関係主義的（反実在論的）なライプニッツ的な空間概念があると言った．カッシーラーやホワイトヘッドの思想と丸山による彼らの解釈を頼りに，これを数学的に捉え直すと，ニュートン的な空間概念が「幾何学的な空間論」に対応しており，ライプニッツ的な空間概念が「代数的な空間論」に対応している．

そして「幾何学的な空間論」と「代数的な空間論」は数学的（または圏論的）に見たとき，幾何と代数の関係は（図 3.2 に示されているように）しばしば双対の関係になっており双対性が成り立つ．この意味でニュートン的な空間概念とライプニッツ的な空間概念は（ある意味で）双対であり，双対性の関係にあると結論づけられる[*10]．（この主張には数学において双対性が成り立つことがその前段階である思想における双対性にある種の正当化を与えるという主張も暗に含んでいることに注意が必要である．）

丸山はこの代数と幾何の間の（双対的な）深い関係性は圏論を用いることで上手に捉えることができるとい

[*10] ただし，幾何学をニュートン的，代数をライプニッツ的と捉える捉え方が大雑把すぎる捉え方であり，このように思想から数学への発展には各人の解釈が入り込む余地を残す．この意味でこの議論は大雑把であり批判の余地がある．

う．丸山は [22] で以下のようにいう．

> 圏論は一見すると代数的である（実際，圏は多ソート代数である）．しかし，現在では幾何学の広い分野で幾何学的な概念を定式化するために使われており，それは，代数，算術，幾何学から結び目理論，低次元位相幾何学までに至る．表現論や数理物理学においても重要な手法でさえある．技術的な点についていうと，代数構造と 幾何構造の間にはたくさんの圏論的双対性（例えば，ゲルファント双対性やストーン双対性）がある． このように，圏論の概念は数学の代数的側面と幾何学的側面の両方をより深いレベルで捉えており，代数と幾何学の間には二元論ではなく，双対性があると言えるのだ．([22], p.112)

また「（言語哲学における）意味論上の対立」に関しても「空間概念の対立」と同様の議論が可能である*11．言語哲学上の意味論には大きく 2 つの立場が存在する．「言葉の意味とは言葉と実在の対応である」という実在論ベースのモデル論的意味論のような立場（前期ウィトゲンシュタインやディヴィドソンが代表的な支持者）と,「言葉の意味とは言葉の使用法である」とか「言葉の意味とは検証条件である」とする反実在論ベースの証明論的意味論のような立場（後期ウィトゲンシュタインやダメットが代表的な支持者）である．

言語哲学上の意味論を論理学的に発展させたものは明らかにモデル理論（モデル論的意味論）と証明論（証明論的意味論）である．丸山は論理学的に発展させたモデル論的意味論と証明論的意味論の間にも依然として対立関係があることを見出す [22]．この意味論に関する対立のことを「意味論的二元論 (Semantic Dualism)」という．そしてこの二元論は圏論的論理学によって乗り越えられるという．

圏論的論理学における意味論のことを圏論的意味論という．圏論的意味論では，与えられた論理に対して適切な圏（またはハイパードクトリンなどの圏構造）を選択することで，どちらの意味論も扱うことができる．例えば，カルテシアン bi 閉圏と $*$-自律圏（$*$-autonomous category），または一階ハイパードクトリンはそれぞれ直観主義命題論理や古典線形論理，一階述語論理の完全性を満たす圏論的意味論を与え，それぞれがモデル論的意味論・証明論的意味論の双方の振る舞いをする．

この圏構造がモデル論的意味論と証明論的意味論の双方の振る舞いをするというのは，換言すれば，ある圏構造からある証明体系を構成することができ（これを内部論理という），それと同時にその圏の内部でモデル理論的に論理体系を解釈することができるということである．つまり，圏論的な構造一つ取れば証明論的なこととモデル理論的なことがどちらも可能になるということである．丸山はこの事実を以下のようにまとめる．

> 圏論の特徴により，論理のモデル理論的側面と証明理論的側面の両方を一つの概念に組み込むことができる．一言で言えば，圏論的意味論は，証明理論的意味論とモデル理論的意味論の両方を内在しており，この観点からは，証明理論的意味論とモデル理論的意味論の間には二元論（的な対立関係）はなく，双対性があるだけである．これを意味論的双対性と呼び得るのである．([22], p.113)

モデル論的意味論と証明論的意味論は圏論的意味論の一つのインスタンスと見なすことができ，モデル論的意味論は関手的意味論（意味論圏（Semantic Category））に，証明論的意味論は構文論圏（Syntactic Category）にちょうど対応する*12．そして，圏論的意味論の観点からはモデル論的意味論と証明論的意味論を統一することができる．この圏論的意味論によるモデル論的意味論と証明論的意味論の統一を「意味論的双

*11 思想における「二元論的対立」から数学における双対性の移行ついて，その他の例については検証が不足している．しかし，最近「Duality, Intensionality, and Contextuality」という論文が書かれたので（未出版)，(この論文のタイトルから察するに）知能についての「二元論的対立」からの「数学的双対性」への移行に関する議論は既に丸山はやり遂げたのだろう．

*12 なお，意味論圏からも構文論圏からも健全性定理や完全性定理を示すことができる．

対性（Semantic Duality）」とよび，「意味論的双対性」は元の「意味論的二元論」における対立関係を失効させる役割を果たす．圏論的意味論ではもはや対立が存在しない．

この丸山の「意味論的双対性」はローヴェアのいう「構文論」と「意味論」が「双対」であるという主張（ローヴェア双対性）と同じものであると考えられる．「ローヴェア双対性」を図式で表現すると以下のようになる．

$$\text{Syntax} \simeq \text{Semantics}^{op}$$

この「ローヴェア双対性」の実質的な内容は，理論 $\mathbf{T}$ が与えられるとき，その構文論圏 $\mathbf{C_T}$ と $\mathbf{T}$ のモデルの成す圏 $\mathbf{Mod}(\mathbf{T})$ のとある部分圏 $\mathbf{M}$ の間に反変圏同値

$$\mathbf{C_T} \simeq \mathbf{M}^{op}$$

が成立するということであり [37]，圏論的意味論が持つ二つの顔である証明論的意味論とモデル論的意味論の間には双対性が成立することを意味する．この意味で「意味論的双対性」はまさしく双対性であり，「二元論的対立」を無化し，「構造的等価性」を明らかにすることで「モデル論的意味論」と「証明論的意味論」を統合するのである*13.

ここまでは”具体的”な双対性について議論してきた．では個々の具体的な「数学的双対性」に縛られない”普遍的”な双対性の形式・構造はないのだろうか？実は，このような疑問に答える「圏論的双対性の理論」という理論が存在する*14.「圏論的双対性の理論」は具体的な「数学的双対性」が共通して持つ普遍的な形式を（部分的に）明らかにし「双対性とは何であるか？」という疑問に対してある程度の答えを出してくれる．

丸山はこの「圏論的双対性の理論」が明らかにしてきた双対性のメカニズム（双対性が「どのようにして現れ」「どのように変化し」「どのように崩壊するか」）を簡潔に解説する．

- 双対性はどのようにして現れるのか？それは，一つの実体の二面性が互いに調和しているときであり，私が「調和条件」と呼んでいるものは，この調和を説明するものである．代数的構造が位相構造と調和している場合，圏論的なトポロジーと代数学による双対性の理論（の調和条件）に従って，双対随伴が現れる．代数と空間の双対随伴において，調和条件は基本的に代数のスペクトルに誘起される代数的操作が連続的であることを意味している．双対同値は，（私の理解する）自然的双対性の理論（natural duality theory）によれば，既存の項関数の関数全体に対する比率によって決定される．
- 双対性はどのように変異するのか？双対的な構造は項関数が増えるにつれて単純化される；これは自然的双対性の理論が示していることである．限定的なケースとして，もし既存の項関数がすべての関数

*13 しかし，丸山は「このような統一が数学的にも哲学的にも意味があるのかどうかには注意が必要である．モデル理論的な意味論と証明理論的な意味論を通常通り分離しておくべきだと主張する概念的な理由は確かにあるかもしれない.」([22], p.113) ともいう．

*14 圏論による具体構造から一般構造への昇華は双対性に限らず様々な文脈で見られることである．圏論は具体的な構造に横たわる抽象構造，一般構造を取り出すのに適した言語なのである．丸山は圏論は単なる抽象化や一般化の枠組みであるに留まらず，それ以上のものを提供できると言い，その特徴は主に以下の 3 つにまとめられるという．

- 規範性：圏論は，私たちの考え方の方法（例えば，数学をするなど）に影響を与え，数学的概念が持つべきそれらの普遍的な形式概念を規定している．双対性とは何か？含意（または論理定項）とは何か？圏論はそれらの一般的なアーキテクチャ，あるいはそのような概念がどうあるべきかを規定する．
- 理解 (説明，参照)：圏論は，定理の構造をオーダーメイドのフレームワーク，または視点，またはバイアスの中で明確にすることによって，なぜ定理が成立するのかを教える．なぜゲルファント双対性が成り立つのか？なぜストーン双対性が成り立つのか？統合失調消的対象（Johnstone, Porst-Tholen らによる）によって誘導される双対性の理論はこれに理解を与える．
- 存在論的絵的主義：圏論は，矢印の絵的な使用を介して図式的な推論の手助けをする．質的であるが，特定の場合には量を表現することもできる．絵的主義は，数学の存在論（例えば，集合の図的な概念）をもたらす．([42], p.14)

圏論は様々な数学分野に横たわっている概念を抽象化・一般化すること，その普遍的な構造・規範・メカニズムを明らかにすること，絵的に解釈することで直観的な概念や証明を理解することに貢献していると言える．

（すなわち，論理的には関数的完全）であれば，双対空間はストーン空間（別名：ブール空間）になる（これは原始的な双対定理であり，空間上の余分な構造は準原始的な双対定理では不可欠である）．連続関数が項関数と一致する場合，双対的な構造はコヒーレント空間である（これは連続関数の完全性と呼ばれ，コヒーレント空間に関してはストーン双対性を伴う）．

- 双対性はどのように破れるか？それは，後述するように，存在論的なものの過剰か，認識論的なものの過剰のどちらかによって起こる．非可換代数では，認識論の過剰を示すある不可能性定理が知られている．しかし，これは層の理論を用いて解決することができる．層の理論による非可換的双対性理論の考え方は簡単である：非可換的代数の可換的核を取り出して，それを双対化し，その双対空間に非可換的な部分を説明するための層構造を与える．この方法は，作用素代数，量子代数，部分構造論理を含む様々な非可換代数にも適用できる．部分構造論理では，この方法はさらに拡張されており，一般的には，部分構造論理の構造的核を取り，それを双対化し，それを用いて部分構造部分を扱うための層構造を与えるようになっている．このプロセスは，グロタンディーク状況（Grothendieck situation）という一般的な概念によって表現される．([24], p.87-88)

この「圏論的双対性の理論」が明らかにした双対性のメカニズムについての詳細は [23] を見よ．

最後に，圏論と論理学と双対性がどのように対応しているかを確認する．前章で諸論理体系はそれに対応する圏構造を考えることができると述べたが，実はこの対応の仕方とは異なる仕方でも圏論は論理学と関係する．上述したように図 3.1.3 では代数と幾何が双対であるということを示している．諸論理はリンデンバウム代数などのある種の代数構造と見なすことができるので，当然それに対応する幾何構造であるモデル空間を考えることができる．この論理体系とモデル空間は圏論的な観点で見たときまさしく双対性なのである．丸山は論理体系とモデル空間の間の双対性を具体的に以下ように例示する．なお詳細については [24] を見よ．

認識論的なもの	存在論的なもの
古典論理	ストーン空間
直観主義論理	コンパクト sober 空間
様相論理	位相空間上の Vietoris 余代数
一階述語論理	位相的グルーポイド or インデックス付き位相空間*15
無限論理	フレーム
多値論理	様々ある

圏論は論理体系のモデルとしても機能するが，論理体系とそのモデルの関係性をも上から捉えることができるというある種の超越論的な機能も持つ．このことは圏論の高階性の一端を示しており，「数学の数学」と呼ばれる由縁である．圏論のこの超越論的な機能について考察を深めることは今後の課題とする．

3.1.4 非双対性

前項までの議論で「統一」「不統一」の区別とその間の「二元論的対立」さらに双対性によってその対立が如何に克服されていくかを様々な文献を引用し私見を踏まえながら解説した．哲学における「空間概念の対立」や「意味論の対立」を数学的に昇華させることによって対立が消えて無くなるのである*16．

*16 丸山も留保して述べているように，数学的に見たとき対立がなくなるとはいえ，思想間の対立が完全になくなるわけでもなければ，両者の区別をする必要がなくなるというわけでもない．

本項では DD の 4 節「Disduality」の内容を解説する．なお，本項の内容は少々双対性との関連を見出すのが難しい．詳しくは [24][25] を参照してほしい．

丸山は DD の 4 節において双対性概念に対峙する「非双対性（Disduality）」という概念について言及する．この「非双対性」とは端的に言えば，双対性を構成している「存在論的なもの」か「認識論的なもの」の過剰によって生じる双対性の崩壊・破れのことである [24]．双対性が「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の間の「相補的な関係性」であったのに対して，非双対性は片方が過剰である（もしくは過小である）がゆえに，この両者の「相補的な関係性」に亀裂が生じ双対性が成立し得ないことである．

丸山は非双対性のの具体例として次の三つを挙げている．「ゲーデルの不完全性定理」「人工知能のフレーム問題」「非可換ゲルファント双対性の不可能性」である．このうち，「非可換ゲルファント双対性の不可能性」は「認識論的なもの過剰」によって引き起こされ，その他 2 つは「存在論的なものの過剰」によって引き起こされるという．

丸山は「非可換ゲルファント双対性の不可能性」という「認識論的なものの過剰」によって引き起こされる非双対性を端的に以下のように解説する．

> 量子代数（quantum algebra）にはある種の不完全性がある．ゲルファント双対性は（非ユニタリーな）可換 C^* 代数と局所コンパクトハウスドルフ空間の間の双対同値性を示している．非可換代数，特に量子論における観測量に関する代数を含むようにそれ（ゲルファント双対性）を一般化するさまざまな試みがあったが, 非可換代数の双対が純粋に位相幾何学的である限り，これは実際には不可能なのである．したがって，空間と代数の間の双対性は非可換性の量子論の領域へは拡張することができないのである．これは確かに認識論的なものの過剰による非双対性の事例である．使用可能な位相空間と比べ，非可換代数はあまりにもたくさんあるのである．([24], p.90-91)

ただ，非可換性への拡張は「存在論的なもの」である幾何的な空間を層の理論やスキーム理論などを用いて代数的に翻訳することにより非双対性を修復することもできるようである．しかし，この修復による双対性は「存在論的なもの」と「認識論的なもの」がどちらも代数的（すなわち，どちらも「認識論的なもの」）であるため，本論文で論じている「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の間の双対性ではないということに注意すべきである．

丸山は不完全性定理とフレーム問題は共に「存在論的なものの過剰」によって生じる非双対性の具体例であるという．もう少し詳しく述べると，それは，実在の無限性（数学的真理が無限に存在することや現実世界の情報が無限に存在すること）とそれを認識する側の有限性（システムやフレームが有限的な制約に基づいているということ）の間の不均衡（丸山の言い方で言えば「有限的な存在（finitary beings)」と「無限的な実在（infinitary reality)」の不一致）によって生じる同じ構造を持つ現象であるという．以下で，この不完全性定理とフレーム問題が共に「有限的な存在」と「無限的な実在」の間の不一致の構造を持つということを解説する[*17]．

まず，不完全性定理は「形式理論が算術を含み，再帰的に公理化可能で，無矛盾であるなら理論で証明も反証もできない論理式（ゲーデル文）を構成できる」という第一不完全性定理と，その帰結として得られる「形式理論で理論自身の無矛盾性を証明することができない」という第二不完全性定理の二つがある．完全性定理

[*17] なお，この不完全性定理と人工知能を結びつけるような不完全性定理解釈はルーカス・ペンローズの悪名高い議論で有名で，すでに数学者のファーマン，人工知能学者のマッカーシー，哲学者のチャーマーズらによって批判されていることである．しかし，丸山はルーカス・ペンローズの主張は「自分の主張と似ている」と言い，必ずしもその議論やその帰結について否定的ではない [24][25].

はモデルと理論の間の双対性であったのに対し，第一不完全性定理は（算術を含み，再帰的に公理化可能な）形式理論を介しては公理化できないモデルの存在を示している*18ため，（理論のモデル空間は「存在論的なもの」に対応しているということに言及すれば）「存在論的なものの過剰」であり非双対性であるといえる．なお，不完全性定理が「非双対」であるという時の双対性は「構文論的完全性（理論における任意の論理式がその理論で証明可能か反証可能が決定できるということ）」を意味している．実際に，丸山は以下のようにいう．

> 完全性は理論とモデルの間の双対性の一形態と見なされうる．ゲーデルの第一不完全性定理が示しているのは，関係する意図されたモデルの真理を特徴付けるのに十分な形式理論が存在しないということ，また言い換えるならば，形式理論を介しては公理化できないあるモデルが存在するということである．([24], p.90)

形式理論によっては数学的真理を完全に特徴付けることができない（つまり非双対性が成立してしまう）という事実は，不完全性定理が形式理論に課す「算術を含む」と「再帰的に公理化可能」という二つの条件に起因している．「算術を含む」という条件が「（形式理論で扱う）数学的真理は無限に存在する」ということを帰結し，さらに「再帰的に公理化可能」という条件が付け加わることによって「ゲーデル文の存在」や「構文論的完全性と無矛盾性の両立不可能性」という不完全性が帰結する．つまり，二つの条件が同時に課されることで「無限に存在する数学的真理を形式理論では完全に特徴付けることができない」という（条件を課された）形式理論の限界が示されるのである．

この「再帰的公理化可能」という「有限性の制約条件」を付け加えなければ不完全性は解消される（双対性が成立する）ということが知られている．[25] を参照すれば，無限の公理や無限の計算を許すような「無限の理論」は構文論的完全性を満たし，このような「完全な無限の理論」は数学的真理の完全な特徴付けが可能になるということが分かる．事実，無限論理上のペアノの公理系は（構文論的に）完全であり，超準モデル（non-standard model）が存在しないようである [25].

しかし，この「有限の制約条件」を付け加えないこと，すなわち無限の公理や無限の計算を許すということは認識論的に不適切である．ヒルベルト・プログラムがこの意味での有限性にこだわったのは，あくまでも，数学を行うのは人間であるからであり，無限の条件は人間の認識条件の観点から不適切であり，認識論的に適切な理論体系のもとでの無矛盾性と構文論的完全性の両立（可解性）を目指すべきだったからである．無限という超越的な対象（ゲーデル的に言えば「右的なもの」）を用いないことにこそ意味があったのである．

また，無限の条件を許せば第二不完全性定理も成立しなくなるというのも自明なこととなる．第二不完全性定理が意味していたことは「ある形式理論の無矛盾性はその形式理論より強い形式理論によってしか保証されない」ということであったが，無限の理論であれば，自身よりも強い理論として自身をとることができるので自身の無矛盾性を自身で証明できてしまう．「無限的な存在」と「無限的な実在」の間には第二不完全性定理も成り立たず，そこにはお互いが対等な・等価な関係性すなわち「双対性」がひっそりと成立しているだけである．

不完全性定理と同様に人工知能のフレーム問題もまた（有限性の条件という制約を課すと）「存在論的なものの過剰」によって生じる非双対性であると見なすことができる．まず，丸山はフレーム問題を以下のように抽象的に（構造的に）定式化し直す．

---

*18 ダメットは「不完全性定理が示したことは算術を含む理論の数学的真理のクラス，あるいは数学的真理を特定する原理のクラスは「際限なき拡張可能性」を持つことである [40]，というが丸山の不完全性定理解釈はダメットによる解釈を基にしていると考えられる．

- 現実における情報空間はおそらく無限である；
- 限りない量の情報を縮小し，関連情報の最終的な範囲を特定するため，（有限的な）フレームが必要となる；
- フレームが無限に多い可能性があるため，フレームを選択するにも（有限的な）メタフレームが必要となる；
- このメタフレームの決定手続きは無限に続く．([24], p.92)

この定式化によると，フレーム問題は有限のフレームが無限の情報を処理することができないということによって生じるということが分かる．「存在論的なもの」が現実における情報に対応し「認識論的なもの」がフレームやエージェントに対応しており，この観点から見ればフレーム問題は明らかに「存在論的なものの過剰」による非双対性であると分かる．

また，各フレームは形式理論が有限性の条件を課せられるのと同じように有限の条件が課せられている．つまり，フレームが扱える情報は有限であるという条件である．仮にこの有限の条件がなければ，もはやフレームの選択をする必要がなくなり，全てのフレームを組み合わせたような全ての情報を扱える無限フレームを想定することができるが，それがもし可能ならば，フレーム問題の論理構造上明らかにフレーム問題は生じない．これは不完全性定理における無限公理を許すことにより不完全性が解消されるという議論と同型である．

また，有限の制約をフレームの側から取り払うのではなく（フレームを選択する）エージェントの側から取り払うことでフレーム問題を解消することができる．つまり，エージェントがフレームを選択したり情報を処理するための時間を無限に許すのである．このようにすると，エージェントはあらゆるフレームを駆使し，現実にある無限の情報を取得・処理することができるので，フレーム問題は生じないと結論づけられる．これは不完全定理における無限計算を許すことにより不完全性が解消されるという議論と同型である．

これらの不完全性定理とフレーム問題の「存在論的なものの過剰」による非双対性という事実，別の言い方をすれば「実在の無限性」と「システムの有限性」の不一致に関して，丸山は以下のようにまとめる．

> 不完全性定理（の一つの形）は，無限にある真理の全てを，有限的なシステムの中にもれなく閉じ込めることはできないことを述べる．概念的に言えば，これは実在の無限性とシステムの有限性の間の対立である（無限的システムでは不完全性は事実成り立たない）．無限にある環境条件の全てを有限的エージェントが確認しようとすると無限後退に陥るという，人工知能におけるフレーム問題もまた実在の無限性とエージェントの有限性の間の対立であり，概念的には不完全性定理と同根のものであると考えられる．([45], p.92)

不完全性定理とフレーム問題はどちらも有限性の条件を課されることによって生じる「システム（存在）の有限性」と「現実（システム）の無限性」の間の不一致，すなわち非双対性なのである．以上の議論をまとめると以下の図のようになる．

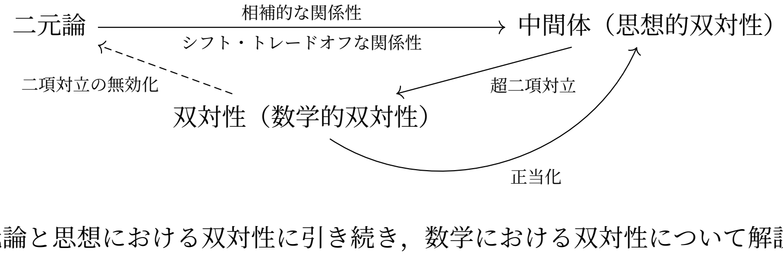
	認識論的なもの	存在論的なもの
不完全性定理	形式理論の有限性（再帰的公理化可能）	数学的真理の無限性（算術を含む）
フレーム問題	フレームの有限性，認知能力の有限性	フレーム選択の無限後退（無限の情報）
非双対性	存在の有限性	実在の無限性

3.1.5 内容の総括

前項までで DD における基本概念である「統一」「不統一」「二元論」「双対性」「非双対性」の説明は完了した．これらの概念群は丸山の目指す「圏論的統一科学」のような学問の多元的統一を実現させる上で重要な役割を果たすであろうということが（ぼんやりと）理解することができたのではないだろうか．本項では DD の 1 節から 4 節の内容の総括を行い，これまでの議論をまとめる．

3.1.1 項の内容は丸山の「近代化論」の解説であった．丸山の「近代化論」を理解するために鍵となるのが「不統一（Disunity）」と「統一（Unity）」という概念で，それらを順に解説していった．「不統一」はウェーバーの「脱魔術化」やゲーデルの「左」に対応するような近代化を意味する概念である．「不統一化」として捉えることができる．現代は「不統一化」の進行した極地であり，意味や目的の欠いた時代である．この意味の喪失現象は「社会的な分断」のみならず「知識の分断」すなわち「大きな物語の終焉」などに形容されるような「科学や哲学の領域での細分化」の現象と密接に関係している．このような「不統一化」によってもたらされた現代の問題を解決するためにバーマンは再び「統一」が必要であると論じる．「統一」はバーマンの「再魔術化」やゲーデルの「右」に対応する概念で近代の超克を希求する未来志向的な概念である．そして，この「統一」と「不統一」は互いに密接に関係しているということを「加速主義」や「ヒルベルト・プログラム」を引き合いに論じた．丸山はこのような「統一」と「不統一」の世界像の密接に絡み合う関係性を双対性と言っている（丸山の言い方でいうと「全体論的世界観」と「機械論的世界観」の双対性）ということを私見を踏まえて解説した．

3.1.2 項では丸山による「二元論」と「双対性」の関係性を解説した．哲学における「二元論的対立」の具体例をいくつか例示し，その二項対立を丸山による「存在論的なもの」と「認識論的なもの」という二つの概念で一般的に定式化した．そして，3.1.1 項と同様に「存在論的なもの」と「認識論的なもの」は一見すると互いに相反する概念であると同時に「シフト」という概念を通じて互いに密接に関係するということも論じた．カッシーラーやホワイトヘッドの哲学がそれに具体的な内容を与えてくれている．この「シフト」の議論からは丸山が「存在論的なもの」と「認識論的なもの」が双対であるという意味が（曖昧ではあるが）理解可能になってくる．すなわち，一見すると相反する概念同士だが「相補的な関係性」つまり「トレードオフの関係性」にあるということが双対性なのである．この理解からすると「ベナセラフのジレンマ」という数学の哲学における実在論と反実在論の対立も双対性という視点から理解できる．しかし，この双対性はあくまで思想における双対性（中間体）のことであり数学における双対性とは異なることには注意が必要である．なお「二元論」「中間体」「双対性」の三つの概念の関係性を図にまとめると以下のようになる．



3.1.3 項では二元論と思想における双対性に引き続き，数学における双対性について解説した．数学における双対性に関する定理群（ストーン双対性やゲルファント双対性など）は 20 世紀初頭に次々と発見されていった．これらの結果は数学の分野間を結びつける役割を果たし，数学の中に内在する二項対立を失効させ両者の「構造的等価性」を明らかにしてきた．これは「双対性」と「統一」が数学において交差する点であるとも捉えられる．また，現在は双対性は数学のみならず科学や計算機科学，さらには工学などの分野にも見つかってお

り，如何に双対性が普遍的な現象を定式化したものであるかを理解した．続いて，思想における双対性から数学における双対性の移行がどのような形で成されるかを「空間概念の対立」と「意味論上の対立」の二つの具体例を通して簡単にスケッチした．この議論には圏論的な双対性が本質的な役割を果たしていた．最後にこの圏論による双対性の理解を目指す「圏論的双対性の理論」が明らかにしたことを丸山の記述から引用した．

3.1.4 項では双対性が崩壊した状態・関係性を表す「非双対性」という概念について解説した．非双対性とは端的に言えば「存在論的なもの」または「認識論的なもの」の過剰によって生じる双対性の崩壊・破れのことである．「認識論的なものの過剰」による非双対性の具体例として挙げられるのが「非可換ゲルファント双対性の不可能性」で，「存在論的なものの過剰」による非双対性の具体例として挙げられるのが「ゲーデルの不完全性定理」と「人工知能のフレーム問題」である．非可換ゲルファント双対性の不可能性については簡潔に説明し，不完全性定理とフレーム問題については詳しく説明した．不完全性定理とフレーム問題を双対性という観点から見たときに共通する構造は，「無限に存在する数学的真理や情報」とそれを認識する「形式理論やエージェントの有限性」の非対応，より一般に言うなら「実在の無限性」と「システムの有限性」の不一致である．不完全性やフレーム問題は有限性の条件が形式理論やエージェントに課されることで必然的に帰着する結果であり，有限性の条件を外し無限の公理や無限の時間を許すのであれば，全く問題ではなくなってしまう．しかし，認識論的な観点から見たとき有限の条件は必要不可欠で，ヒルベルトが「有限主義」に拘ったのもそのためである．

3.2 批判的検討

「The Dynamics of Duality（DD）」は不統一な世界像が支配的な現在において，統一的な見方の重要性を「双対性」という概念を中心としながら，哲学や数学，論理学などの幅広い分野を例に取り上げて論じた画期的な文献である．数学と哲学，数学と思想を結びつける壮大な試みも含意しており，丸山の双対性に関する哲学が今後如何に発展していくか期待したい[*19]．

しかし，DD に登場する概念や議論には明瞭性に欠ける点が多い．具体的に以下のような点である．

1.「双対性」概念の定義が曖昧
2.「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の定義がない，またはそれらの識別基準がない
3.「思想的双対性」と「数学的双対性」の関係性が曖昧
4.「多元的統一」の概念がよく分からない（「不統一」のまま「統一」するとは何か？）
5.「圏論的統一科学」とは何であるか明らかではない
6.「知識の分断」と「社会の分断」の関係性が明らかではない
7.「双対性」から「統一」への繋がりが曖昧
8.「双対性」と「京都学派の思想」との関係性が明らかではない

2 について検討してみよう．丸山は双対性という関係性は「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の間よって生じると言った．換言すれば，双対性とは「存在論的なもの」と「認識論的なもの」によって構成される二項関係である．しかし，この双対性を構成する「存在論的なもの」と「認識論的なもの」の定義は何であろうか．ローヴェアの「概念的なもの」と「形式的なもの」に対応している，数学においては「代数の理論」

[*19] 数学を徹底的に考察することを通してフレーゲは「分析哲学」をフッサールは「現象学」を創設したように，現行の哲学パラダイムを塗り替えるような偉大な哲学が圏論を主な考察対象とする丸山の研究から誕生すると期待したい．

と「幾何学の理論」に対応しているとは言うが，どのような基準でこのような対応付けを行っているのかが明確ではない．「存在論的なもの」「認識論的なもの」と言っているので，伝統的な哲学の分野である「存在論」や「認識論」に依拠した概念であるということは分かる．しかし，双対性を規定する最も重要な二つの概念であるので，その概念の定義は明確にする必要があるだろう．

また，5 についても考えてみる．丸山は前節で見たように「多元的統一」の実現を押し進めようとしている．そして，その多元的統一のための実質的なプロジェクトとして「圏論的統一科学」というものがあることを紹介した．しかし，DD には圏論的統一科学は登場しないのでその実質が分からない．20 世紀初頭カルナップをはじめとするウィーン学派の哲学者たちも「統一科学」のプロジェクトを押し進めていたが，彼らの統一科学とは何が異なるのだろうか．さらに，科学の統一以前に数学の統一について丸山はどのように考えているのだろうか．圏論的統一科学の実質を理解するには上記の問いに対する回答は必要であると考える．

このように DD には明瞭性に欠ける点が複数ある．しかし，DD は一つ一つを詳細に論じることに重きが置かれている文献ではなく，あくまで丸山の思想とそれに関する概念群の概要を述べたものなので，概念の定義や議論が曖昧になることは避けられない．そのため，上述した批判点は丸山の目から見れば大した問題ではなく，解決済みなのかもしれない．しかし，「双対性」や「多元的統一」を理解し，丸山の思想を正確に記述するためにはこれらの批判点に答えていくことは重要であると考える．そこで，次節以下では，この曖昧な点を明瞭にしていく．

しかし，全ての批判点に応答するほど時間的な余裕がない．そこで，以下の項では 1,3,4,5,7 の批判点に絞って論じていくことにする．まず，3.2.1 項では「双対性」と「多元的統一」の繋がりについて検討する．ポイントとなるのが思想的双対性と数学的双対性の相違点である．数学的双対性は対立する理論の間に「構造的等価性」を見出すことによって対立を解消させるが，思想的双対性はあくまで思想であるので「構造」で構成されているわけではないので異なる思想を単純に比較するのが難しい．この点をどのように解釈するべきかについて検討する．

続く 3.2.2 項では「圏論的統一科学」と「多元的統一」の繋がりについて検討する．圏論的統一科学は「多元的統一」を実現する実質的なプロジェクトであることは確かであり，その実質を理解することは重要である一方でその実質がなんであるかハッキリとしない．そこで，圏論的統一科学の理解を深めていくのであるが，まずその前に圏論的統一数学である圏論的基礎論についての理解を深める．圏論的基礎論はいくつかのバージョンがあり，その一部は公理的集合論と数学的表現力が等価であることが示され，この意味で圏論的基礎論は公理的集合論に代替可能な理論なのである．しかし，集合論者は「圏論は集合概念に依存している」ので「圏論は集合論に依存している」と批判してきた．この批判については筆者自身による応答を試みる．また，基礎付け主義的ではない基礎論のあり方として丸山は「相対的基礎論」というものを提唱する．この「相対的基礎論」が「圏論的統一科学」という丸山の理想の科学像と繋がっているということを確認し，最後に圏論的統一科学の理解を深めると共にその限界を示してみる．

3.2.1 双対性から多元的統一へ

本項では「双対性」と「多元的統一」の関係性を明確にし「双対性」が「多元的統一」を実現するための概念的方途となっていることの理解を目指す．双対性という二元論的対立を乗り越える概念的枠組みが「多元的統一」という「多元性を維持した統一」，換言すれば，「二項対立における異なる立場を異なるままにした統一」をどのように実現されているかを吟味する．この「双対性」から「多元的統一」への移行を考える際に重要なのは思想における双対性（思想的双対性）と数学における双対性（数学的双対性）の相違点の理解である．

DD においてはどちらも一括りに「双対性」として論じられるので，両者の相違点は認識し難いが厳然とした相違点があるのである（ただし，類似点もある）．そのために思想と数学の違いについて議論をする．そして，二つの双対性の相違点こそ「異なるものを異なるままにした統一」という「多元的統一」なのである．

「双対性」概念再考

「双対性」と「多元的統一」の関係性を理解するためにまず「双対性」概念について再考する．双対性は数学や物理学，論理学，哲学をはじめ様々な学問分野で用いられる概念である．様々な分野で用いられているためその概念そのものの意味を理解することは重要である一方，この双対性という概念が何を意味しているかはその多義性ゆえ曖昧である．

丸山は DD をはじめ様々な文献の中で「双対性」という言葉を用いて議論を展開するが，意味や使用法が曖昧である．実際，丸山は「双対性」とは「二元論で対立する 2 つのものを調整および統合することを可能にする概念的な枠組み」や「二つの対立する理論間の構造的等価性を明らかにするための枠組み」と言ったり，「相補的な関係性」や「トレードオフな関係性」などのニュアンスでも使用しており，双対性の意味を確定させていない．双対性が単に「構造」に関する関係性を述べたものであるのか，それ以上のことを言っているのかはっきりしないのである．

双対性が単に「数学的な構造」に関する関係性を意味する場合，その双対性の意味は確定的である．事実，「ストーン双対性」の数学的な意味は「ブール代数の圏とストーン空間の圏が反変圏同値」であり，確定的である．（もちろん，圏論ではない方法（例えば集合論）で定理の内容を表現することは可能だがどの表現法を取ったとしても同じ事実を指しており，意味することは同じである．）ここで，この数学における意味が確定的な双対性のことを「数学的双対性」と定義する．

ただし，数学的双対性の意味が確定的であるからといって，数学的双対性が一種類であるということにはならない．数学において「双対」という言葉は，「極限の双対概念は余極限である」といったように「概念」に対して使用される場合もあれば，「「右随伴が極限を保存する」の双対命題は「左随伴が余極限を保存する」である」といったように「命題」に対して使用される場合もある．「ストーン双対性」の場合，圏に対して，（少し荒っぽく言えば）「理論」に対して使用されている．つまり，数学における双対性は「概念」「命題」「理論」に対する三種類に分類することができる．これらをそれぞれ（数学における）「概念的双対性」「命題的双対性」「理論的双対性」と定義する．これらの定義に照らせば，丸山が DD で論じる「数学的双対性」は専ら「理論的双対性」のことであると言える[*20]．

では，数学的双対性ではない双対性は何についての双対性なのか．それは，個人の解釈の仕方によってその関係性のあり方が変わる「思想」についての双対性である．DD において「機械論的世界観」と「全体論的世界観」が双対であるという時や「実在論と反実在論」が双対であるという時の双対性がそれである．この「思想」についての双対性は 3.1.2 項でも論じた通りだが，「二元論的対立」における二項間に「相補的な関係性」や「トレードオフの関係性」を認識することができた時，両者のその密接な関係性を表す言葉として用いている．また，「相補的な関係性」になっている二項を数学的に昇華させた時（つまり，各思想を数学の理論で表現（ある種の理想化）した時），その二項の間に数学的双対性が成立することそれ自体も二項間の間に双対性の関係があると言ったりする．

このような対立する思想の間（丸山の言い方に基づけば「二元論的対立」における二項間）に「相補的な関

[*20] しかし，この「概念的双対性」「命題的双対性」「理論的双対性」の区別自体は確定的なものではない．例えば，ベクトル空間と双対空間の関係性は「概念的双対性」としても「理論的双対性」としても捉えることができる．

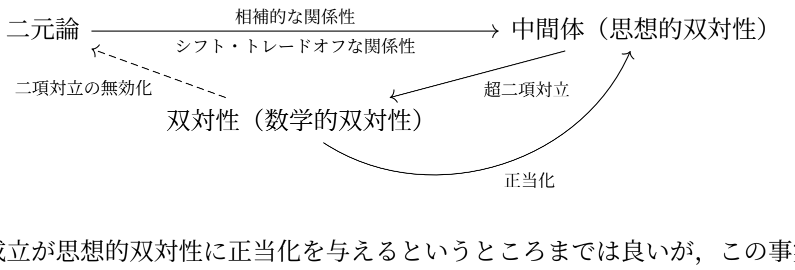
係性」や「トレードオフの関係性」，もしくはそれらを数学的に昇華させた時に数学的双対性が成立するような，両者の間に密接な（ある種の必然的な）関係性がある時，その関係性を「思想的双対性」と定義する．思想的双対性はその定義から明らかに「思想」に関する関係性であるので数学的双対性とは異なり意味が確定的になることはない．この意味が確定しているか不確定であるかの違いが数学的双対性と思想的双対性の違いの一つと言える（この違いは（後で論じるように）専ら数学と思想の違いに基づいている）．

数学的双対性と思想的双対性の相違点について述べたが両者の間には類似点も見られる．数学的双対性は「概念的双対性」「命題的双対性」「理論的双対性」の三種類に分類することができると述べたが，このような区別は思想的双対性に対しても適応することができ，思想における「概念的双対性」「命題的双対性」「理論的双対性」という概念を定義することができるのである．物理学者の江口は「実生活においては男と女，陰と陽，善と悪といったものが互いに双対をなしている」([51],p.6) と言い，哲学者の藤本は時間の本来性を捉えるには物理学における客観的な時間感覚を重んじる時間論と哲学における主観的な時間感覚を重んじる時間論の二つを同時に考察しなければならないと考え「時間を深く論じるためにはフィジカとメタフィジカのアイディアを双対的にみることは今後必要である」([61], p.20-21) と述べる．江口の「善と悪」の関係性は思想における概念的双対性の例として，藤本の「物理学的時間と哲学的時間」の関係性は思想における理論的双対性の例として捉えられる．また，丸山が DD で言う「実在論と反実在論の間の双対性」や「機械論的世界観と全体論的世界観の双対性」は理論的双対性の例としてとして捉えられる．このように数学的双対性において双対性を下位区分できるように，思想的双対性においてもそれが可能であり，また同じように下位区分できるのである．ここまでの考察をまとめると以下の表のようになる．

	概念的双対性	命題的双対性	理論的双対性
数学	「極限」と「余極限」	「命題 A」と「双対命題 A^{op}」	「ストーン空間」と「ブール代数」
思想	「善」と「悪」	「善人はいない」と「悪人しかいない」	「実在論」と「反実在論」

「双対性」の二重構造

再び，数学的双対性と思想的双対性の相違点について考える．3.1.2 項では思想的双対性は相補的な関係性になっている二項を数学的に昇華させることによって数学的双対性へと至り，逆に数学的双対性が成立することが対立する思想が思想的双対性の関係になっていることの正当化を与えているという議論をした．図にまとめると以下の通りであった．



数学的双対性の成立が思想的双対性に正当化を与えるというところまでは良いが，この事実によって思想的双対性においても数学的双対性が「構造的等価性」という意味を持つように「思想的な等価性」という意味を持つと考えてしまってはいけない．「思想的な等価性」は端的な誤解である．実際に，丸山も DD で「機械論的な見方は明らかに全体論的な見方とは異なり，双対性が言うことはもちろん，それらが等しいことではない」([24], p.80-81) と言っている．思想を数学化して数学的双対性が示され，数学的構造について「等価」で

あったとしても思想の「内容」それ自体は等価ではないということは主張しなければならない．「空間概念の対立」や「意味論上の対立」においても思想を数学化し数学的双対性にまで発展させ思想と数学を連続的に捉えることは可能である．しかし，数学的双対性が成り立つからと言って「ニュートン的空間概念」と「ライプニッツ的空間概念」,「モデル論的意味論」と「証明論的意味論」の思想の「内容」はやはり異なるものである．

この数学と思想ないし「構造」と「内容」の差異は，数学と思想の両者には「機能における相違点」があることに由来する．この数学と思想の「機能における相違点」は野家のいう「科学的言明」と「哲学的言明」の区別の仕方で説明できる．野家はクワインの「経験主義とふたつのドグマ」の議論による帰結である，アプリオリ/アポステリオリの間の境界線が連続的なものであり哲学，数学，論理学，科学，文学には明確な線引きをすることができないという「連続主義」の立場を積極的に擁護する．その上で哲学や科学の間には「信念体系における位置」が異なり「機能における相違点」があると言う [67][*21]．

野家は哲学的言明や思想は「記述の規範」や「アプリオリな機能を持つ総合命題」というような「超越論的」な機能を持つと言う．ここで「超越論的」と言っているのはあくまで「経験の可能性の条件」や「経験的命題を構成する高次の経験命題」という意味であり，カントの経験に先立つと言う意味での「アプリオリ性」の条件は課されていないことには注意が必要である．クワインが言うようにアプリオリ/アポステリオリの明確な境界線は存在せず，あらゆる言明は広い意味でのアポステリオリだからである．

しかし，あらゆる言明がアポステリオリであるということから哲学や思想の言明が数学や科学などの言明と区別がつかないということにはならない．アポステリオリな言明であったとしても言明が信念体系においてどのような位置に定位するかによって，言明の果たす役割が相対的に異なるからである．我々は経験命題を得るためのいわば信念のような「高次の経験命題」を必要とするのである．ゲーデルは数学的プラトニズムであったために不完全性定理を発見できたと言われることや，フレーゲは論理主義であったために概念記法を考案したと言われることがその例であろう．ゲーデルやフレーゲにおいて数学的プラトニズムや論理主義の哲学的な立場が数学における偉大な発見を促した，換言すれば，ゲーデルやフレーゲが採用した哲学的言明が彼らの偉大な数学的言明を構成したということである．ウィトゲンシュタインはこのことを以下のように言う．

> われわれのたてる経験命題が全て同じ身分のものではないということは，次のことから明らかである．われわれは経験命題としてではなく記述の規範として，その一つを定位することができるのだ．([63], 167 節)

既に述べてきたように，哲学的言明や思想はしばしば「経験の可能性」を定める「記述の規範」として信念体系上に定位し，数学や科学における言明を構成する．しかし，哲学的言明や思想が常に「記述の規範」で数学や科学が「規範から構成された命題」として信念体系上に定位しているわけではない．これらの両者の機能における関係性は決して固定的ではなく，両者の関係性は入れ替わることがある．実際に，不完全性定理は 3.1.4 項で論じたように哲学的言明を構成する「記述の規範」にもなりうる．また，量子力学や相対性理論などの現代物理学の結果は我々の世界に対する見方を大きく変えている，換言すれば，経験的命題を構成する仕方を変えるという意味で哲学的言明や思想に対する「規範」的な機能を果たしていると言える．繰り返しになるが，哲学的言明や思想と数学や科学における言明の関係性が「記述の規範」と「規範から構成された命題」という固定的な関係ではなく入れ替わる可能性があるのだ．この意味で両者は（連続的ではあるものの）異なるものであり，自律性を保っていると言える．ウィトゲンシュタインはこのことを以下のように言う．

[*21] 丸山も同様に「思想が数学的に昇華する」や「数学的双対性が思想的双対性に正当化を与えている」というような議論をしており，思想と数学の間の連続性に着目しつつも「機械論的な見方は明らかに全体論的な見方とは異なり，双対性が言うことはもちろん，それらが等しいことではない」([24], p.80-81) と言うように両者を区別している．

こう考えてもいいだろう．経験命題の形を備えたいくつかの命題が凝固して，固まらずに長江れる経験命題のための道管となるのである．この関係は時に応じて塩化するのであって，流動的な命題が凝結したり，また固まっていた命題が逆に流れ出したりする．([63], 96 節)

さて，野家の思想と数学の「機能における相違点」に関する考察を丸山の議論に適用してみよう．丸山が「思想を数学的に昇華させる」という時，思想が「記述の規範」の機能を果たし，数学が「規範から構成された命題」に対応していることは明らかだろう．換言すれば，対象となる思想が持っている思想の構造を数学理論に形式化することにより，数学理論・命題が構成されるということだ．このように構成された数学理論・命題については数学という共通の枠内で比較・検討することが可能になる．何かを比較する際には比較するための共通の土台を設定する必要があるが，それが今回は数学となっているということである．そして，二つの思想から構成された数学理論・命題は数学の枠内（時には圏論や集合論という数学の特定の理論の枠内で）で比較・検討されたことにより，数学的双対性という数学的な意味で「等価」が示されるかもしれない．もし数学的双対性の成立が言えたなら，二つの数学理論・命題は等価であり，二つは統一されたと結論づけることができる．もう少し控えめな言い方をするなら「相互翻訳可能」だろうか．いずれにせよ，二つの数学理論・命題は共通の枠内である程度の等価性が保証されたとは言える．

しかし，上述したように思想と数学は機能における相違点があり，両者は自律している．そのため「数学的双対性」が成り立つ，つまり思想から構成された数学理論・命題にある程度の等価性が保証されたとしても，そのことから直ちに二つの思想の間にある程度の等価性が保証できるということにはならない．換言すれば，たとえ構成された数学理論間にある程度の等価性が保証されたとしても，一方の思想と数学が自律しており，もう一方の思想と数学も自律しているのであるから，二つの思想は自律しているということである．確かに，構成された数学理論は構成する思想の構造を反映しているものではあるので，「思想の構造」についてはある程度の等価性を示せたことにはなるかもしれない．しかし，思想は構造だけで存在しているものではなく，「社会性」や「歴史性」などのあらゆる観点が複合的に絡まり合って出来上がっている総体であるので，その一面である構造だけの等価性から直ちに思想それ自体の等価性が導けるとは言えない．「機能的な相違点」とはこの社会性や歴史性などの複合的なものと，その一部として取り出された構造のみという違いであるとも捉えられる．ここで，数学も社会性や歴史性を持つ複合的なものであるという反論があるかもしれない．確かにその通りであるとも言える．しかし，それはあくまで数学を構成する「規範」の社会性や歴史性のことであり，（もちろん両者は連続しているが，両者を機能の点で区別をするなら）数学的対象や構造それ自体に社会性や歴史性を求めることはナンセンスであると考える*22.

*22 筆者は単なる数学的構造は思想の構造を表現するのみで思想それ自体を（完全には）表現することはできないという点で両者をはっきり区別するべきだと考える．現代論理学，分析哲学の創始者として謳われるフレーゲはこの「形式言語」と「思想内容」について面白い考察をしていたので以下で付言しておく．フレーゲは自身が考案した「概念記法」を形式言語ではあるが「思想の内容」をも表現することができる「自然言語から心理学的外皮を取り除いてできる結晶化された言語」と考えていた（なお，これはウィトゲンシュタインによって批判された）．この「概念記法」は「三乗すると 8 になる数」などといった純粋に論理から導出される「思想の内容」が表現可能であり，ブール代数などの単なる推論計算としての体系なのではなくライプニッツが目指していた「記号言語」なのであるという．実際，フレーゲはブールらによる論理を計算であると考える立場や数学を単なる記号ゲームであると考える形式主義を批判した．というのも，フレーゲは「言語が言語である以上–それが自然言語であれ，数学の言語であれ，概念記法言語であれ–それは基礎の部分では，同一の論理的原始事実に基づき，したがって同一の論理法則にしたがっているはずである」という汎論理主義の立場を取るからである．この立場からの帰結は「言語が文法の形成に心理学的な要素が加わらなければすべての言語が同一の文法を持つ」ということである．「概念記法」が仮に思想の内容まで表現可能な「言語」であり，「言語が文法の形成に心理学的な要素が加わらなければすべての言語が同一の文法を持つ」という二つを要請すると，「概念記法」と世界に存在する「事物」の間に成り立つ意味論的な関係はある種「語り得ないもの」になってしまうという「意味論の表現不可能性」「メタ言語の成立不可能性」が帰着する（これはカントの超越論的観念論における「悟性のカテゴリー」や「感性の形式」という知識探索活動の概念枠組みが不可知で表現不可能になってしまうという「超越論的認識のパラドクス」と類比的である）．このパラドキシカ

では，思想的双対性における二つの思想は比較・検討することはできないのだろうか．実際，数学の枠内における数学理論間の比較・検討ほど厳密な意味で比較・検討することはできないだろうが，二つの思想を含みうる第三項を設定し，その第三項という共通の枠内で比較・検討することは可能である．これを体系的に説明しているのがいわゆるヘーゲルの弁証法なのだろう．しかし，丸山はあくまで双対性はその思想を比較・検討するための枠組みである第三項を設定しないという意味でヘーゲルの弁証法とは異なると主張する．このことは前節で既に確認した．これは思想それ自体の比較を拒否し，あくまで思想から構成された数学のみの比較に留めておこうということである．思想的双対性は思想間の「トレードオフの関係性」や「相補的な関係性」であると述べたが，この観点からすると思想的双対性は思想の中に内在している「思想の構造」における関係性であり，それらの構造が逆転しているという意味で双対性という言葉を使用していると理解できる．これまでの議論を図にまとめると以下のようになる．なお，Math(A) とは思想 A を数学的に昇華させたものであるとする．

$$
\begin{tikzcd}
\text{思想 A} \arrow[r, "\text{数学化}"] \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\text{自律性が保たれている}"'] & \mathrm{Math}(\mathrm{A}) \cong \mathrm{Math}(\mathrm{B})^{op} & \text{思想 B} \arrow[l, "\text{数学化}"']
\end{tikzcd}
$$

数学における言明が記述の規範となり思想という規範を変更する，つまり，思想を再構成するという上の図に示したこととは逆の事態も起こりうるということは野家の議論やウィトゲンシュタインの引用で既に見た通りである．この事態は丸山の議論においても現れており，これが数学的双対性によって思想的双対性が正当化されるということに対応していると考えられる．しかし，この場合においてもこれまでの議論と同様に数学理論間にある程度の等価性が成り立つとしても，数学と思想は自律しているので思想それ自体の間に等価性が見出せるとは言えない．見出せるとしたとしてもそれは思想に内在する「構造」についてのみであるという謙虚な主張しかできない．この逆の事態を双対性の文脈に基づいてまとめると以下の図のようになる．

$$
\begin{tikzcd}
\text{思想 A} \arrow[rr, bend right, leftrightarrow, "\text{自律性が保たれている}"'] & \mathrm{Math}(\mathrm{A}) \cong \mathrm{Math}(\mathrm{B})^{op} \arrow[l, "\text{規範を再構成}"'] \arrow[r, "\text{規範を再構成}"] & \text{思想 B}
\end{tikzcd}
$$

このように数学的双対性と思想的双対性の間の相違点を数学と思想の相違点に基づいて詳しく見てみることによって，双対性が多元的統一という「異なるものを異なるままにした統一」を実現する概念的方途であるということの意味が明らかとなる．すなわち，双対性による多元的統一とは端的に言えば，数学における構造に関しては「統一的」だが思想それ自体に関しては「不統一」という形式の「統一」ということである．換言すれば，双対性の数学的な面と思想的な面の「二重構造」による統一が双対性による多元的統一なのである．

また，次項で論じる圏論的統一科学も科学理論の「圏論化」を介しての多元的統一であり，双対性による多元的統一と同型の構造を持っている．つまり，科学と数学の間にも思想と数学と同様の相違点が存在し，この相違点に基づいて「二重構造を伴って統一をする」という意味で圏論的統一科学は多元的統一なのである．

ルな状況は大変興味深い．詳しくは [60] を読んで欲しい．筆者としてはやはりクワインが指摘したようにアプリオリ/アポステリオリに明確な境界線を引くことはできず，したがってフレーゲのいう論理的原始事実や論理法則を特定することは不可能であると考える（そのようなアプリオリな法則がないとは言わないがそれは独我論の中で語られるべきである考える）．そして，「思想内容」は言語によって表現可能であるとする時点である種「経験」が伴った命題であらざるをえず，「思想内容」の経験性を一部もしくはほとんどを剥ぎ取って構成される数学的構造は「思想内容」を表現できていないと考える．

3.2.2　圏論的基礎論と圏論的統一科学

前項では，数学的双対性と思想的双対性の二つの概念の相違点に注目し「双対性」から「多元的統一」へどのように移行していくかを議論した．本項では，「圏論的統一科学」について検討し，圏論的統一科学が多元的統一を実現するプロジェクトであるということの実質を理解することを目指す．そのために，まず圏論的統一数学または圏論的基礎論というものについて理解を深める．圏論的基礎論についての理解を深める中で，圏論的基礎論は集合論に「依存」しているという集合論支持者からしばしばなされる批判について検討し私的な応答を試みる．最後に圏論的統一科学の持っている内的な構造を素描し，その限界を示す．

数学基礎論の歴史

数学は確実な体系であるというのが一般的な認識である．科学が客観的な真理を主張できているとするのも，確実な体系の学である数学に基づいているからであろう．物理学の開祖であるガリレオは「自然という書物は数学の言葉で書かれている」と言い，ノーベル物理学賞を受賞したウィグナーは「自然科学における数学の理不尽なまでの有効性」[38] という論文を執筆したように，古今東西数学を用いる多くの人々が数学の有効性に驚嘆してきた．現在では 5G や人工知能といった情報技術が我々の生活を豊に変えつつあるが，この情報技術を支えるコンピュータサイエンスは数学と不可分の関係にあり，我々の生活は数学によって支えられているのである．

我々の知的活動を含めたあらゆる活動に直接的・間接的に影響を及ぼしている数学は 19 世紀に入り「厳密化」の動きが進んだ（これは丸山の「不統一化」の具体例として数えることもできる）．物理学などの自然科学の基礎にある数学をより厳密にすることにより人間の知の体系を曖昧さが取り除かれたより確実なものにしようという試みが進行していった．この数学の厳密化の只中で 19 後半以降カントールは「集合論」という無限についての数学理論を確立した．この集合論は無限という超越的な概念を含んでいるため批判を受けることもあったものの，デデキントやヒルベルトらにより積極的に集合論は用いられ，20 世紀初頭には数学の基礎となる理論と認識されるようになり各数学分野で大きな成果を残していった．しかし，それと同時に数学の基礎としての地位が確立しつつあった集合論に「ラッセルのパラドックス」という矛盾が潜んでいることが明らかとなった．このパラドックスの発見は数学の確実性，ないし科学の確実性を脅かすものであると認識されるようになり，当時の数学者・哲学者はこのパラドックスの解決に尽力した．そして，この矛盾の発見を起点として長きに渡る数学の基礎にまつわる論争が始まったのである．

この数学の基礎にまつわる論争はパラドックスの解消を含め，数学全体をより確実な体系の上に構築することを目指す，いわゆるヒルベルト計画という論理学上の論点と，「数学とは何であるか？」という哲学的な問題に答える哲学上の論点の主に二つがある．哲学上の論点に答えるための実質的な解決の手段として論理学上の論点が必要になってきたり，逆に論理学上の論点で得られた帰結を解明するために哲学上の論点が必要になっているというように互いに密接に結びついている（前項の双対性の議論の中で数学と思想の関係性が連続的だが機能の面で区別されるということを論じたが，この数学と思想の関係性と同型のものであると捉えて良い）．

哲学上の論争を端的にまとめると「数学は論理学の一部である」とする論理主義と「数学とは公理と推論規則に基づく形式的な体系である」とする形式主義と，「数学とは心的活動である」とする直観主義の 3 つの立場間に分かれた論争である．当時の代表的な論者には論理主義にフレーゲとラッセルが，形式主義にヒルベルトが，直観主義にブラウワーが挙げられる．フレーゲやラッセルの押し進めた論理主義プログラムは分析哲学の誕生の契機となったり，ヒルベルトの形式主義プログラムがヒルベルト計画という論理学上の論争を巻き起

こし，その論争の只中で発見された「不完全性定理」を皮切りに計算機科学などの現代科学の地平を開いた．ブラウワーの直観主義数学もウィトゲンシュタインやハイティンクに影響を与え，哲学や論理学など幅広い分野でその影響力を行使している．歴史的に振り返ってみれば，この哲学上の論争には真の勝者はいない [62]．しかし，上述したように実り多い結果をこの論争は残しており，この哲学上の論争が如何に有意義な論争であったかを物語っている．

論理学上の論点，いわゆるヒルベルト計画という有限の手続きによって数学を確実な体系に基礎づけることを目指す取り組みは，通説では「不完全性定理」によって失敗に終わったとされている．数学全体を絶対に確実な体系に基礎づけるということがある意味で不可能であると不完全性定理によって示されたというわけである*23．そのため，不完全性定理以後，基礎的な問題や基礎付けへ意欲は論理学者からは消え失せ，数理論理学の個別の分野「集合論」「計算可能性理論」「証明論」「モデル理論」の技術的な関心にばかり興味が移行していった．数理論理学が細分化され，数理論理学が扱っていた当初の基礎的な問題はもはや問題にされることはなくなったのである．

実際，パトナムは「基礎づけのいらない数学」という論文の中で，「数学が「基礎づけ」を持っているとも，必要としているとも思えない」([59], p.273) と言い，数学において基礎づけを必要とするのは，科学哲学において還元主義者たちが統一科学を目指したことと同じように馬鹿げていると批判する．（そして，パトナムはこの論文で様相論理を用いた数学を提案し，集合論だけが数学に基礎づけを与える理論であるというのはおかしなことであるとも言う．）そして，マクレーンは「数学の健康」という論考でこの細分化の傾向は，数理論理学において顕著であり，その中でも集合論の研究を以下のように批判する．

> 数理論理学は数学の基礎に対する当初の関心をほぼ完全に失っている．研究者の一部は，概念的な興味よりも，自分たちにも難問が解けることを実証することに躍起である．そのため，例えば，巨大基数のネバー・ネバーランド（決して到達できない地）で打ち立てた新しい公理を彼は使おうとする．あるいは，集合論において連続体仮設の独立性が証明されたので，今度はあらゆる組み合わせ的な概念の独立性を証明しようとする．ゲーデルの不完全性定理から再起的関数が生まれ，その関数族が次数の階層をもつことがわかったので，今度はその階層構造の細部に関する技術的に困難な問題を解決しようとする．集合論の公理と連続体仮設がゲーデルの構成的集合族で成立していることが分かったので，それが形成する泥沼がどんなに深くても，この集合族の微細構造を探索しようとする．([58], p.6)

もちろん，細分化された数学の分野を研究しその分野を発達させることはそれ自体で重要なことである．パトナムも同様に「体系を組み立てることは知的で面白く」「体系間での論争や体系内での研究はまず間違いなくこれからも続いていく」([59], p.273) という．細分化された個別の分野にはその分野独自の問題があり，どの分野においても問題を解いていくということは研究において重要なことである．しかし，その一方で，見失ってしまうこともある．「数学の諸理論分野の繋がりがどうなっているのか？」や「数学における本質的な概念は何か？」や「数学の基礎論として適切な基礎論は何か？」という問いに真摯に向き合うことである．そもそも数理論理学は上記のような哲学的な問いに論理学的・数学的に取り組むことを発端にして生まれた学問である．現在の数理論理学は数学の哲学における議論と密接に結びついていたはずの当初の役割を忘れ去り，細分化された分野の細分化された問題の解決ばかりに躍起になり，技術的になりすぎているということである．マクレーンは続けて以下のように言う．

*23 絶対的に確実な体系に数学を位置付けることは不可能であるが，その後も構成主義数学など，形を変えてヒルベルト計画は進行中である．なお，集合論は相対無矛盾性という体系間の無矛盾性の強さを問題にして今も基礎的な問題を扱っている．

> 集合論は本当に数学の基礎として適当だろうか？いままでも他の基礎づけの提案はあったが，ほとんどのロジシャンはそれらをノー天気に無視してきた．私が主張している真の基礎論は，そのような異なる基礎づけを活発に比較検討するものである．([58], p.40)

このマクレーンの嘆きにより，基礎づけの比較検討は（多少ではあるものの）再び開始された．これはヒルベルト計画の破綻の後，技術偏重すぎた数理論理学を再び基礎論的な問題に向かわせたという意味で現代的な数学・論理学上の論争であると言える．そしてマクレーンがいう他の基礎づけとして最も代表的な基礎論が本項で扱う「圏論」による基礎づけ理論である「圏論的基礎論」である．マクレーンは圏論の創始者ということもあってか，当時圏論界隈を賑わせていたトポス[*24]による新しい基礎論が「公理的集合論」に取って代わる新しい基礎論であると信じていた．そして，数学の基礎論として絶対的な地位を占めている公理的集合論と新しく台頭してきた圏論的基礎論は比較検討されるべきだと言ったのである．

公理的集合論と圏論的基礎論

さて，圏論的基礎論についての理解を深め，実際に公理的集合論と圏論的基礎論を比較してみることにする．まず，圏論的基礎論とは何であるかを整理する．圏論的基礎論とは端的に言えば圏論を用いた数学の基礎づけ理論である（しかし，あとで基礎論を基礎付け理論と同一視することは問題含みであると指摘する）．基礎づけの理論とは全ての既存の数学の理論をその部分体系として記述できる理論のことを言い，ある意味で全数学をそこから導出できるような広大な宇宙となるような理論のことである．（だからと言って，全ての数学理論をその基礎づけ理論から展開されるべきであると言うわけではない．）集合論による基礎づけ理論は主に「公理的集合論」と呼ばれる．この公理的集合論は前項で紹介したラッセルのパラドックスの発見以後，集合論を危機から救うべくパラドックスに陥らないように公理論的に整備された理論体系である．公理的集合論にはいくつかのバリエーションが存在するが，現在，公理的集合論として真っ先に名前が上がるのがツェルメロらによって整備・構築された「ZFC（Zermelo-Fraenkel set theory with the axiom of Choice)」である．この理論はコーエンによる「連続体仮説の独立性証明」をする際に用いられて以来，集合論研究者が用いる標準的な理論となった．この ZFC は述語論理と公理によって定められる「集合」と「所属関係 $\in$」により全数学を展開する宇宙なのである．

圏論的基礎論は ZFC とは異なり，「所属関係」を用いず圏論特有の（圏論の精神と言っても良い）「対象」と「射」によって数学の基礎づけを履行する．この圏論的基礎論も公理的集合論がそうであるようにいくつかのバリエーションが存在する．有名なところで言えば，ローヴェアによる「ETCS（Elementary Theory of Category of Sets)」[13]「CCAF（Category of Categories as a Foundation)」[14] やオシウスによる「ETS(ZF)」[31][49]，ベルによる「Local Set Theory」[3][*25]などが挙げられる．この中でも最も標準的で様々な議論の対象になるのが ETCS であるので，以後 ETCS について詳しく見ていくことにする．

早速 ETCS の定義を確認する．ETCS は以下の 9 つの公理から構成される理論である．なお，定義は [32] を参照した．

1. 終対象 1 と始対象 0 が存在する（終対象と始対象の存在公理）
2. 終対象 1 と始対象 0 は同型ではない（Non-deneracy 性）
3. 任意の対象 A と B に対して積 $A \times B$ が存在する（積の存在公理）

[*24] 付録 B を参照.
[*25] ベルの Local Set Theory は付録 B で扱っている.

4. 任意の射 $f, g : A \to B$ に対してイコライザ $e : E \to A$ が存在する（イコライザの存在公理）
5. 部分対象分類子 true: $1 \to \Omega$ が存在する（部分対象分類子の存在公理）
6. 任意の対象 A に対しパワー対象 $P(A)$ が存在する（パワー対象の存在公理）
7. 任意の射 $f, g : A \to B$ が各射 $x : 1 \to A$ に対して $fx = gx$ であるなら $f = g$ となる（well-pointed 性）
8. 任意のエピ射 $j : A \to B$ に対して $jg = 1_B$ なる射 $g : B \to A$ が存在する（選択公理）[*26]
9. 自然数対象が存在する（自然数対象の存在公理）

終対象と積とイコライザの存在から有限極限の存在を示すことができることや，部分対象分類子の存在から示唆されるように ETCS の公理はあるトポス（正確には，自然数対象がが存在し選択公理が成り立つ非自明な well-pointed トポス）のことに他ならない．この ETCS は ZFC を外延性公理，対の公理，空集合・冪集合・和集合の存在公理，論理式が Δ_0 であるものに制限された内包性公理図式と基礎の公理に制限してできる公理系 Z_0 を内部で構成することができ，ある種の集合論を展開することができるのである．また，オシウスによりこの ETCS は ETS(ZFC) という体系に拡張され ETS(ZFC) は ZFC と無矛盾等価（equiconsistent）であるということが示される．数学的な議論の詳細は [31][49] を参照してほしい．さらに，巨大基数公理に関しても同様に圏論的に取り扱うことが可能で，ZFC に巨大基数を加えてできる体系と無矛盾等価であるような圏論的基礎論の体系を構築することも可能である．詳しくは [29] を見よ．

つまり，圏論における「対象」や「射」によって構成される体系である ETCS は基礎づけ理論として成立していると言って良い．無矛盾等価性は基礎づけ主義的な視点で理論がどれだけの数学をその理論の内部で展開できるか（数学的表現力）を測る指標として用いられているが，ETCS やその拡張体系は標準的な公理的集合論と無矛盾等価であるということが証明されていることを踏まえれば，基礎づけ主義的な視点による数学的表現力の等価性の指標に基づいて圏論的基礎論と公理的集合論は等価であると結論づけられる．

また，無矛盾等価という指標ではない指標に基づいた基礎論の等価性に関する議論もある．それが「相互構成可能性」による議論である．ここでいう「相互構成可能性」とは，一方の理論をある明示的な操作に基づいて他方の理論を構成でき，逆もまた然りであるようなことを指している．この相互構成可能という視点よる基礎論の比較はアウディが [2] で行っている．アウディは基礎論として「集合論」「型理論」「圏論」の三つを挙げ，三つの基礎論はそれらが実際に相互構成可能であるということを示す．そして，三つの理論は数学理論としては等価であるという．相互構成について以下で簡潔に解説する．

集合論から型理論の構成は与えられた任意の型理論には集合論モデルが存在するという構成である．別の言い方で言えば集合論から意図した型理論のモデルが構成できるということである．型理論から圏論の構成はいわゆる構文圏の構成のことである．これについては前節や付録で議論していることで，型理論の形式体系から圏構造を構成することである．圏論から集合論の構成は与えられたあるトポスから直観主義的集合論を構成のことである．このような集合論から型理論，型理論から圏論，そして再び圏論から集合論への構成を形式的に定義でき，この構成を介して三つの理論が行き来可能になる．形式的には，「集合論」→「型理論」→「圏論」→「集合論*」という構成において，元の集合論と構成された集合論 * は（ある意味で）[*27]同値であるため，三つの基礎論のどこからスタートしてもこの「相互構成」により結局は同じ結果を与えるのである．つまり，三

[*26] 対象を集合，射を関数で考えた時，実際に選択公理と同値の命題であると示すことができる．ある意味でこの命題は選択公理の圏論的一般化であり，構造的実質であると言うこともできなくない．この観点から選択公理の本質を解明する試みが [53] の知識論の部分で成されている．

[*27] ある意味と言葉を濁して言っているのは，アウディの元の文献でも正確な意味で同値であるとは言っておらず，筆者自身も検証が不足している点だからである．しかし，アウディの構成の議論により，基礎論の三者間で行き来が可能であるということは事実である．詳しくは [2] を見て欲しい．

つの基礎論のいずれかに特権的な地位が認められることはない．

集合論支持者からの批判の検討

以上の議論により，公理的集合論と圏論的基礎論，もしくは集合論と圏論は，数学的には「等価」であるということが分かった．つまり，「圏論も数学の基礎論たり得る」と主張できる．しかし，このような主張は集合論支持者からしばしば批判されてきた．それは数学的表現力が不足しているという数学的な批判ではなく，「圏論の公理は存在論的主張（existential assertion）がない」や「圏論は集合概念に依存しているので集合論は圏論に優先される」といった哲学的な批判である．

前者の「圏論の公理は存在論的主張がない」という批判はヘルマンによるものである [10]．ヘルマンは基礎づけの理論の公理はある数学的対象の存在を主張したものでないといけないと言った上で，圏論の公理（例えば「射について結合法則が成り立つ」など）は数学的対象の存在について何も主張しておらず，それゆえ圏論は基礎づけとしては不十分であると言う．詳しくは論じないが，私見ではこのヘルマンの主張は基礎付け理論を比較する際の妥当な主張だとは思えない．基礎づけ理論の目的はあくまで全数学理論をその理論の中で展開することを可能にすることにあり，理論内である数学的対象の存在を規定することができないことは問題だが，公理が何かしらの数学的存在を主張しなければならないという要請はナンセンスであると考える．また，ETCS などの標準的な圏論的基礎論の公理は「存在論的主張」をしている．事実，上述した定義を参照すれば明らかだが，ETCS では「終対象」や「部分対象分類子」という数学的対象の存在を主張している．これは圏の定義における公理と圏論的基礎論の公理を混同していることによる誤解なのではないだろうか．[32] ではこのヘルマンの批判について詳しく検討し「ETCS はヘルマンの批判から免れている」と結論づけている．

後者の「圏論は集合概念に依存しているので集合論は圏論に優先される」という批判は何人かの集合論支持者からなされてきた．近年でもそれと似たような批判が日本の集合論研究者の渕野によってなされた．渕野は [54] で以下のように言う．

> 先のカテゴリーの定義で，「射と呼ばれるものの集合」という表現が現れていることからもわかるように，カテゴリーの定義は集合の概念を既知としてなされている．この点をうやむやにするために，「集合」という言葉を使う代わりに「射の集まり」（collection of morphisms）というような表現が使われることもあるがこの「集まり」がなんであるかを（数学の基礎づけの観点から）で特定するためには，いずれにしても何らかの意味での集合論の概念がカテゴリーの定義に先立て導入されている必要がある．([54], p.85)

この渕野の指摘は圏論的基礎論の是非を巡って集合論支持者から「圏論は集合論に依存しているので圏論は基礎論としての資格がない」というようにしてしばしば指摘されてきたことであり，この「概念依存問題」を最初に明示的に指摘したのはフェファーマンである．フェファーマンは単に数学的表現力が等しいからといって圏論的基礎論が公理的集合論に取って代わるようなことはあり得ず，「圏論」と「集合論」の間には優先関係が依然としてあると言った．フェファーマンの議論 [7] を筆者による解釈をふまえて要約すると以下のようになる．

1. 概念を定義する際の順序によって論理的優先性（logical priority）を考えることができる．これは理論を比較する際に重要であると考える．例えば，「位相空間」の概念は「集合」を用いて定式化されているので，「集合」は「位相空間」より論理的に優先であると言える．
2. 概念を把握する際の順序によって心理的優先性（psychological priority）を考えることができる．この

順序は論理的優先性の順序と基本的には一致するので慎重に考える必要はないという．心理学的優先性とは，例えば，論理学における「かつ」や「ならば」または「全ての〜」というような論理学的概念や「自然数」という算術の概念が前提とされなければ集合論などの基礎的な数学を理解することが不可能ということであり，論理学的概念や「自然数」概念は集合論に心理的に優先であるというように使う．

3. 理論の優先性はその理論を構成する「基本概念」の論理的優先性に依存する．つまり，集合論における基本概念である「集合」概念は位相空間論の基本概念である「位相空間」より論理的優先であるので，集合論は位相空間論より理論的に優先であると言える．
4. 集合論の「関数」や「集合」という基本概念は，「圏」などの構造概念より論理的に優先されている．実際，「圏」は「対象の集合」「射の集合」「合成という関数」... というように「集合」概念や「関数」概念を用いて定義されている．したがって，論理的優先性の定義から「集合」は「圏」より論理的に優先である．
5. 圏論の基礎概念は「圏」概念である．したがって，集合論の基礎概念である「集合」と圏論の基礎概念である「圏」の間に論理的優先性があるので，集合論は圏論よりも理論的に優先である．[*28]

このフェファーマンの議論は一見妥当なように見える．実際，フェファーマンが主張するように圏の概念なしに圏論を展開するのは不可能であり，その圏を定義する際には集合概念が必要不可欠である．また，圏論の有名な定理である「米田の補題」の証明では「Hom 集合（対象間の射の集合）を考え，その Hom 集合から元を取る・・・」などの集合論的な議論が積極的になされる．圏論には集合概念が抜き難く存在しており，集合論的な議論無しに圏論を十分に展開することは不可能と言える．しかし，だからと言って「圏論が集合論に依存している」あるいは「集合論は圏論より優先される」と結論付けるのは早計な判断と言わざるを得ない．フェファーマンの判断が早計である点は三つ挙げられる．

一つ目は理論の基本概念がどのように判定されるかの判定のされ方を明示していないという点である．この仕方が明示されていなければ，理論の基本概念のなす集合の外延は人によって異なるようになることは明らかであろう．実際，圏論は確かに圏を定義する際にも集合概念を前提しなければならないので筆者自身は圏論の基本概念に集合概念を含めるべきだと考えるが，西郷らの「一切を射（矢印）に還元する「射」の一元論として圏論を解釈することができる」([56], p.203) などの言明に見られるように基本概念を「射」のみとして考える人や「対象」と「射」のみが基本概念であるという人がいることも想像できる．「論理的優先性」の定式化は十分理解できるものであるが，理論を比較する際の「基本概念」の定式化が十分に満足のいく仕方では与えられていないのである．

二つ目は「論理的優先性」が成立することから「理論の優先性」が成立するとは即座に言うことはできないという点，還元すれば，「理論の優先性」が成立する条件を明示していないという点である．「論理的優先性」と「理論の優先性」は確かに関係はするように見える．実際，群論や位相空間論は集合論や圏論という基礎論のいずれかを理解していない限り理論を理解することが困難である．基本概念と思われる「群」や「位相空間」も「集合」もしくは「対象」と「射」を使わなければ定義できないのでこれらの基本概念間に「論理的優先性」が成立している．よって，集合論や圏論は群論や位相空間論よりも優先されているというのは直観に適っている．しかし，集合論が圏論よりも優先されるというのは果たして直観に適っているのだろうか．直観に適っていないと感じる人も一定数いる故に論争になるのだろう．その是非を判断するには「理論の優先性」

[*28] なお，フェファーマンは基本概念という言葉は用いていないが，議論を分かりやすく説明するために基本概念という言葉を使った．基本概念という概念自体曖昧な概念だが，理論を展開する上で最も基礎的なな概念であるというくらいのニュアンスで捉えてほしい．

を厳密に定式化し直して確かめなければならない．そこで，次のように「理論の優先性」を定式化する．【「理論 T_1 が理論 T_2 よりも優先である」 $\iff$ 「理論 T_1 の全ての基本概念が理論 T_2 の基本概念の中に含まれる，または，理論 T_1 の基本概念が理論 T_2 の基本概念より論理的優先である」】という定式化である．

この定式化は，集合論が群論や位相空間論より優先されるという帰結を導き，この点直観に即した定式化となっている．しかし，集合論と圏論を比較したときはどうだろうか．仮に集合論の基本概念を「集合」と「射」とし，圏論の基本概念を「対象」と「射」と「集合」と「所属関係」*29にしたとする．すると対象と射という二つの概念は集合論に含まれない概念なので集合論は圏論より優先ではないし，逆に圏論が集合論よりも優先ではないという帰結が得られる*30．つまり，理論の優先性は理論の優先性それ自体の定式化と基本概念の判定の仕方に相対的なものであり，論理的優先性から自明に得られる帰結ではないのである．

なお，このフェファーマンからはじまる「依存関係」を巡っては [32] による議論が詳しい．[32] では理論の自律性を「論理的自律 (logical autonomy)」「概念的自律 (conceptual autonomy)」「正当化的自律 (justificatory autonomy)」という三つに分けて定式化する．以下がその定義である．

- 論理的自律：
  T_1 が T_2 に対して論理的自律であるとは，T_2 に属する概念を用いることなく T_1 を定式化することができることを言う．
- 概念的自律：
  T_1 が T_2 に対して概念的自律であるとは，T_2 に属する概念をはじめに理解することなく T_1 を理解することができることを言う．
- 正当化的自律：
  T_1 が T_2 に対して正当化的自律であるとは，T_2 もしくは T_2 の正当化の方法を用いることなく T_1 の主張を動機付け，正当化することができることを言う．

この論理的自律や概念的自律については筆者の議論と類比的である．実際 [32] では ETCS を事例に用いて議論を進め，ETCS は集合論から論理的自律でありかつ概念的自律であると結論づけている．しかし，正当化的自律の面で問題があると言う．集合論には「反復的集合観」のような背景哲学のようなものがあるが ETCS などには背景哲学のようなものがなく正当化することができていないのではないかと疑問を呈している．この点について十分に吟味する時間はないが，圏論は「モノ」的な世界観ではなく「コト」的な世界観と親和的であるとよく言われるように，集合の累積的な階層を世界観とする「反復的集合観」とは全く異なる（何らかの）背景思想を持つということは言えそうである．その背景思想によって正当化されていると言えるかどうかは分からないが「反復的集合観」に依存しているということはなさそうである．

三つ目はそもそも「理論の優先性」を考えることの妥当性について検討していない点である．まず，個々の理論は基本概念だけで構成されているわけではない．理論は「公理」や「基本概念の使用のされ方」など様々な要素が複合的に絡まり合って全体を形成している*31．その理論における構成要素である基本概念だけを比較することで理論を比較したと言うのは早計な判断であると言わざるを得ない．公理的集合論は確かに基本概念が少なく，原子概念を特定しそこから全数学をエンコードするという基礎付け主義的な観点から見れば非常

*29 所属関係は対象と射によって特徴付けられるので基本概念としなくても良いという立場とインフォーマルだとしても所属関係を用いなければ圏論を展開できないので基本概念とするべきだとする立場に分かれるだろう．

*30 しかし，圏論の基本概念を圏すれば集合論が圏論に優先するということが帰結する．しかし，このように基本概念を定めても「理論の優先性」の定式化を変更すれば異なる帰結が出てくるだろう．

*31 ここに「理論の背景哲学や思想」も含まれるかも知れない．

に優れた理論である．事実，述語論理と所属関係の記号と集合の存在公理のみで全ての数学理論を展開できるというのだから驚きである．しかし，公理的集合論には様々な集合を予め措定するための複数の公理が必要になる．そのため，広大な数学の宇宙に対する存在論的コミットメントを必要とするのである．その一方，圏論は公理的集合論のような宇宙を措定する必要がなく膨大な数の数学的対象に存在論的なコミットをする必要がない（ただし，ETCS などの圏論的基礎論は公理的集合論と同様に広大な宇宙に存在論的コミットメントが必要になる）*32．つまり，必要となる数学理論に応じて存在論的にコミットする対象を柔軟に変更することができるのである．このことを丸山は以下のようにいう．

> 集合論には，果てしなく超限的に続く累積階層のユニバースという，途方もない実体に対する存在論的コミットメントがあるが，圏論は集合論的ユニバースのような独自の実体に対する存在論的コミットメントを必要としない理論である．実際ごく限られた数学的対象しか存在しない世界でも圏論は成立する．([46], p.24)

「理論の優先性」や「理論の依存関係」は専ら基礎付け主義的・還元主義的な発想に基づいた考え方である．つまり，理論の自律性を認めず，理論全体を集めた集合には順序構造・階層構造を入れることができるという観念が前提されている*33そして，この基礎付け主義的な観念はフッサールや後期ウィトゲンシュタイン，ローティなど多くの哲学者が批判してきたことであり，数学の理論においても理論の多元性や自律性という観念をむしろ前提とするべきだと考えたい．公理的集合論や ETCS などの圏論的基礎論はどちらも基礎付け主義的な発想に基づいているため，両者がしばしば比較されフェファーマンやヘルマンから批判を受けてきた*34．しかし，圏論の真価は理論を基礎付けることにあるのではなく，異なる理論を理論の自律性を担保した上で比較検討することで，数学全体を組織化することを可能にする点にある．実際，前章における「ハイパードクトリン」は命題論理から高階論理まで，古典論理から線形論理までを上手に組織化することにより論理体系を圏論の視点から比較していることを既に見た．このような圏論による理論の比較は，前者の観念を前提とする，論理的原子から理論を再構成することによって理論の比較する基礎付け主義的な比較の仕方と異なり，後者の観念を前提とする，プラグマティックな実践に基づいた理論の比較・組織化なのである．

圏論の創始者であるマクレーンは数学とは単一の理論を構築することではなくそれぞれの理論の間のネットワークを形成することであると言う．

> 数学を無理に単一の形式体系としてまとめ上げることは実質的ではない．むしろ数学は，形式体系，公理系，規則およびそれらの間の連関からなる緊密で精巧なネットワークであると考えたほうがよい．このネットワークは人間の日常活動や科学上の諸問題の中にあるさまざまな出発点に結びつけられている．([65], p.543)

つまり，数学全体を組織化することが数学の活動の根幹にあり，数学の活動の根幹を具現化した数学理論が圏論なのである．基礎論とは基礎付けのみならず，数学の活動の根幹にある組織化を実質的に行うという意味も含むような概念であることを認めるならば，組織化理論としての圏論は基礎付け理論とは異なる様相の基礎論であると言える．この「基礎付けとしての基礎論」と「組織化としての基礎論」の議論は丸山も [20] で議論し

---

*32 しかし，圏論を論理的に正当化するためには公理的集合論などで用いられるような階層の区別は必要不可欠となるが「そのために必要な階層の概念は真正の集合論的な累積階層の概念とは似て非なるもの」([46], p.24）である．

*33 反復的集合観による正当化という発想もこの観念が前提とされていると言える．また，これは，複数の要素が絡まり合って全体を成すそれ自体では比較しようのない複合体をあたかも比較可能なものとして捉えるという近代が積極的に行ってきたことだと考えている．これは，人間を一つの指標に基づいて比較し，優劣をつけることに似ている気がする．

*34 この批判に対しても直接答え，批判を免れていると主張した．

ており，「数学の実践」という観点から集合論と圏論を比較している．

ここで，組織化理論は数学の基礎論として認めるのは誤りで，あくまで基礎論と呼べるのは基礎付け理論に限り，基礎論と基礎付けは同一視すべきだという反論が考えられる．基礎付け理論は数学全体の存在論的・認識論的な正当化を行っているが，組織化理論はこのような正当化を行えていないからである．確かに，組織化理論は全数学理論を一挙に正当化することはしない．ハイパードクトリンなどの圏論的論理学の概念もあくまで論理学の範疇における組織化であり全数学をその範疇とするわけではないので，もちろん全数学の正当化は行えていない．しかし，だからと言って正当化になり得ていないわけではない．上の丸山の引用にもあるように，圏論は正当化が必要な理論や数学的対象に応じた分だけ存在論的にコミットし，そこからコミットした対象に基づいて数学的対象を構成し正当化する．群論を正当化したい場合は群対象や群の成す圏などに限って存在論的コミットメントをすれば良い．述語論理を正当化したい場合はハイパードクトリンに存在論的コミットメントをすれば良いのである．つまり，組織化理論としての圏論は相対的な基礎付け理論と呼ぶことも可能なのである．ただし，あくまでこの相対的な基礎付けというのは理論を圏論の概念を用いて置き換えるという意味なので，諸理論の自律性は保たれている．

圏論的統一科学の構造と限界

丸山は基礎付け主義的な基礎論を「絶対的基礎論」と呼び，組織化的な基礎論，または，相対的な基礎付け的基礎論を「相対的基礎論」と呼ぶ．丸山の言葉で言えば，絶対的基礎論とは「当該学問に関する全ての存在と知がその唯一の枠組みの中に還元されるというような種類の基礎論」([46], p.27) である．つまり，数学的対象を全てエンコードする枠組みとして与えられる理論が数学的な絶対的基礎論であり，公理的集合論や ETCS などの一部の圏論的基礎論は絶対的基礎論である．逆に，相対的基礎論は絶対的基礎論とは異なり，還元主義的ではなく，諸理論の自律性を保つ基礎論である．この相対的基礎論は一つの理論を特権的に見ることをしない意味で，上で見たアウディの相互構成可能による議論やマクレーンの組織化としての数学観と親和的であることも分かるだろう．丸山自身による説明は以下の通りである．

> 相対的基礎論，存在の種類・知の種類に応じて異なる存在論的・認識論的枠組みが用いられる種類の基礎論がある．ローカルな基礎論や構造的基礎論と言っても良い．([46], p.27)

圏論は数学理論を論理的原子からボトムアップ的に再構成することはせず，数学理論における対象・概念・構造を逐次的に圏論の言葉で置き換えていくことで，その数学理論を展開するのに必要な分だけの圏構造を特定することができる．このように理論を特定の圏構造で表現することを理論の「圏論化」と呼ぶことにする．そして，数学理論を圏論化することで得られた特定の圏構造（もしくは圏構造の集まり）を丸山は「存在論的・認識論的枠組み」と言っていると解釈でき，この意味において圏論は相対的基礎論であると言える[35]．

諸数学理論を圏論化することで諸数学理論を圏論の枠組みで（あるいは圏論を介して）比較・検討することができるようになる．圏論の枠組みでの比較・検討とは関手や自然変換といった圏構造を比較することができる圏論の概念・道具を用いた比較・検討のことを意味している．そして，この圏論による相対的基礎論，換言すれば，圏論化を介しての理論の比較を図で表現すると以下のようになる．なお，Cat(X) とは数学理論 X を

[35] 公理的集合論ではない素朴集合論もこの意味で相対的基礎論の機能を持っている．しかし，素朴集合論にはラッセルのパラドックスが内在しているので基礎論と見なすことには慎重にならなければならない．また，丸山はブルバキなどが実行した素朴集合論的な統一数学は「構造主義」の視点から見て不純であると批判する．詳しくは [46] を参照してほしい．

圏論化させたものである．

$$
\begin{tikzcd}
\text{数学理論 X} \arrow[r, "\text{圏論化}"] \arrow[rrr, leftrightarrow, bend right, "\text{自律性が保たれている}"'] & \mathrm{Cat(X)} \arrow[r, bend left, "\text{関手など}"] & \mathrm{Cat(Y)} \arrow[l, bend left, "\text{関手など}"] & \text{数学理論 Y} \arrow[l, "\text{圏論化}"']
\end{tikzcd}
$$

この図は双対性の二重構造として 3.2.1 項で議論した際に用いた図と同型であることがすぐに見て取れる．そして，この圏論による相対的基礎論の諸数学理論の自律性は 3.2.1 項での議論と全く同様にして，その自律性を担保するためのさらなる根拠を与えることができる．つまり，数学理論 X と圏論化された Cat(X) は連続的だが区別されると言う議論に訴えることによってである．仮に圏論的な枠組みで Cat(X) が Cat(Y) と等価であると示されたとしてもこれは圏論に相対的に等しいと言えるだけで，数学理論 X と Y がそれ自体等しいということにはならないのである．

ここで相対的基礎論と言っておきながら圏論が特権的な地位にあるのではないか，相対的基礎論はある意味では絶対的基礎論なのではないか，という反論が考えられる．しかし，この批判についても 3.2.1 項での議論を援用して答えることができる．すなわち，思想と数学のどちらかに規範の役割が「固定的」にあるのではないのと同様に，圏論と諸数学理論の間にも「往来」（つまり，X で示された結果を Cat(X) と Cat(Y) の関係性を用いることで Y に適応したり，その逆をしたりといったような往復関係）があるので圏論に固定的な特権的な地位が与えられているわけではない．逆に，公理的集合論はこの「往来」がないので絶対的基礎論であるとも言える．圏論は全ての数学を展開する枠組みとして機能しているというより，諸数学理論を組織化したり，諸数学理論間の相対的な関係性を明らかにする機能を果たしている．この意味でやはり圏論は相対的基礎論であり，相対的基礎論は絶対的基礎論とは異なるのである．

すなわち，ここまでの議論を踏まえると圏論による相対的基礎論は「多元的統一」であるということが明らかとなるだろう．圏論は諸数学理論の自律性を保ち統合することを可能にする．換言すれば，諸数学理論を異なるままに統一することを可能にしている[*36]．双対性は圏論的な枠組みで記述することができるので，3.2.1 項で議論した双対性による「多元的統一」もある意味でこの圏論による相対的基礎論的性質からの帰結であると捉えることもできるだろう．圏論が相対的基礎論であるということを丸山は以下のように表現する．

> 圏論は数学或いは諸科学の相対的基礎論である．集合論のユニバースとは異なり，圏論は本性的にマルチバース的である．存在の種類や知識の種類に応じて異なる圏（或いは圏論的枠組み）がある．相対性は様々な意味で圏論の根幹に関わる．（中略）圏論においては，遍く存在は他の存在と相対的に存在するのである．([46], p.27-28)

丸山の上の引用にあるように，圏論による相対的基礎論はその射程を数学理論のみならず科学理論にも広げることが可能である．つまり，諸科学理論を圏論化することによって圏論の枠内で諸科学理論の比較・検討を行い，諸科学理論それ自体の自律性を保った上で諸科学理論を統一することが可能である．この諸科学理論の自律性を保った上での多元的な統一科学のことを丸山は「圏論的統一科学」と呼ぶ．つまり，圏論的統一科学とは数学的な相対的基礎論を科学に拡張させた相対的基礎論であるので，これまでの考察を踏まえると以下

[*36] これはラングランズ・プログラムといった数学の統一プロジェクトを駆動させる圏論の持つ内在的な機能だと考えることもできるのではないだろうか．

のような構造をしていると分かる．

$$
\begin{tikzcd}
\text{科学理論 A} \arrow[r, "\text{圏論化}"] & \mathrm{Cat(A)} \arrow[r, bend left, "\text{関手など}"] & \mathrm{Cat(B)} \arrow[l, bend left, "\text{関手など}"] & \text{科学理論 B} \arrow[l, "\text{圏論化}"'] \arrow[lll, leftrightarrow, bend left, "\text{自律性が保たれている}"]
\end{tikzcd}
$$

圏論的統一科学とは圏論による相対的基礎論による帰結として現れる統一科学観であり，諸科学理論を圏論を用いることで有機的に組織化・ネットワーク化することによって出来上がる科学全体のことである．丸山は「圏論を基盤とした分野横断的な科学基礎論を推進し，その帰結を哲学の立場から分析綜合することにより，科学の断片化・細分化を乗り越え，失われた統一的世界像を恢復する，それが「圏論的統一科学」という理想の眼目である」([43], p.1) と言い，3.1.1 項で論じた「不統一」の只中で「統一的な世界像」を恢復する実質的なプロジェクトとして期待を寄せている．

圏論的統一科学の実現にはまず第一に諸科学理論の圏論化がある程度進行していなければならないが，諸科学理論の圏論化の現状はどうなのであろうか．現状を報告すると，論理学，物理学，計算機科学などの理論科学の圏論化は順調に進行しておりその大部分が圏論化に成功している[*37]．

実際，論理学の圏論化については前章で見てきた通りである．命題を対象，演繹関係を射という解釈の元では命題論理の体系はカルテシアン閉圏や対称モノイダル閉圏などに圏論化され，述語論理の体系は量化子を解釈する構造を伴ったハイパードクトリンやロゴス，トポスなどの圏構造に圏論化されることが知られている．そして，2.5 節で見たように，あらゆる論理体系は T-ハイパードクトリンの具体例として圏論化される．これを圏論的普遍論理というのであった．物理学の圏論化は主に物理システムを対象とし，物理プロセスを射とする圏論化が基本である．この圏論化は基本的にはコンパクト閉圏になることが知られている．古典物理学の体系と量子物理学の体系の間の関係性を圏論的双対性によって記述しようとする「ミクロ・マクロ双対性」も物理学の圏論化の一つに数え上げることができる．さらに，量子力学などをトポスによって記述する試みなどもあり，量子力学全体の圏論化も着々と進行中である [46][45][50]．

計算機科学においては「カリー・ハワード・ランベック対応」としてよく知られているように，型を対象，プログラム（項）を射とする圏論化が基本である．このような圏論化によりカルテシアン閉圏となることが知られている．近年では記号的 AI と統計的 AI の圏論的統合を目論む圏論的 AI や，ニューラルネットワークの「バックプロバゲーション」の構造を関手を用いて書き直す試みなど実用的な情報技術の圏論化も進んでいる [26][48]．さらに，理論科学ほど顕著ではないが生物学，言語学，認知科学，経済学，社会学などの圏論化も進行中である．「諸科学理論を圏論化し圏論的な枠組みで諸科学理論は相互に交流し合い発展する・・・」というような圏論的統一科学の実現は着々と目の前に迫ってきているのである．丸山は以下のように言う．

> 諸科学の諸領域を圏論的に定式化することにより異なる科学の異なる領域を圏という共通の土俵に乗せることで，異分野間の（脱中心化された）知のネットワーキングとトランスファーが可能になる．例えば論理と物理の圏論的対応を利用することで物理の自動推論システムが構築されてきた．文明の近代化と効率性の局所最適化が齎した「知の断片化」という知識の次元における分断社会を超克し，ライプ

[*37] 論理学と物理学と計算機科学を圏論化することによって明らかとなる三者間の対応関係のことを「アブラムスキー・クッカ対応」と呼ぶ．圏論の「構造」という観点からすれば理性の学である論理学，自然の学である物理学，記号の学である計算機科学の境界線はあってないようなものなのである．実際，ある種の部分構造論理の圏と量子力学の圏とある種の関数型プログラミング言語の圏の間に正確な圏論的対応が存在する [46]．

> ニッツの自然哲学のような「百学連環」を体現する綜合的な知の体系の地平をこの現代において切り拓くことがもし可能であるとしたら，圏論はその為の殆ど唯一の方途である．実際，諸科学を横断した圏論的基礎論の著しい発展が齎している知の再統合のランドスケープは，「現代の自然哲学」としての圏論という描像に絵空事ではない幾らかの現実味を与えるのに十分なものである．([46], p.20)

圏論的統一科学は圏論による相対的基礎論の適応範囲を諸数学理論から諸科学理論へ拡張したものであり，実際の科学実践の中で行われている諸科学理論の圏論化を進めることによる圏論による諸科学理論の組織化・ネットワーク化である．この意味で，圏論的統一科学は理念が先行しただけのものではなく，確固とした「科学実践に基づいた活動」であると言える．

この点で 20 世紀初頭にウィーン学派が志した，全諸科学理論を物理学と論理学という単一の科学へ還元することによって統一を試みた一元論的で，理念的で改定主義的な活動とは異なる性格の統一科学なのである．丸山自身の言葉では以下のように表現される．

> 圏論的統一科学は（ウィーン学派のそれとは異なり）規範的なテーゼではなく，生身の科学の知の前線において今まさに起きている革命を表象する記述的な概念である．圏論的統一科学は，夢見がちなアームチェア型の思想家が理念主導で生み出すファンシーな絵空事とは異なり，諸科学を横断したアクチュアルな圏論的実践とそれによる現代の知のランドスケープの変容を表象する概念なのである．([46], p31)

なお，ウィーン学派による 20 世紀初頭の統一科学と圏論的統一科学の比較を図にまとめると以下の通りとなる．

20 世紀初頭の統一科学	圏論的統一科学
ウィーン学派	オックスフォード学派
絶対的基礎論	相対的基礎論
基礎付け主義的	組織化・ネットワーク的
論理学と物理学への還元	諸理論の自律性を担保
一元的統一	多元的統一
理念的	実践に基づく

しかし，である．確かに還元主義的な統一科学とは異なり，圏論的統一科学は諸科学理論の自律性を認め，実際の科学実践に基づいたものであるため，現に統一に向かって進行しているのだが，圏論的統一科学を押し進めた末に「科学の断片化・細分化を乗り越え，失われた統一的世界像を恢復する」([43], p.1) ことが可能かどうかについては一歩立ち止まって考えてみなければならない．圏論的統一科学を相対的基礎論として解釈することが正しいとするなら，圏論的統一科学が統一できるのはあくまで「圏論化された」科学理論または数学理論だけである．そして，圏論化された科学理論または数学理論は単なる圏構造に過ぎなかった．理論それ自体の自律性を保ち，理論は圏論を介して相対的に関係づけられると考える圏論的統一科学では，理論を圏論化して得られる圏構造については積極的に統一へ向かっていこうとする一方で，理論それ自体（数学的構造や背景哲学，歴史性，社会性，実在との対応づけなどの複合的な体系）についての統一や関係づけについては見て見ぬ振りをするのではなかったか．

丸山が「統一的世界像の実現」と言う時，統一的世界像が何を意味しているかは定かではないので確定的に

述べることはできないが，理論それ自体の統一を目指しているように見えなくもない．相対的基礎論としての圏論的統一科学を解釈するのであれば理論それ自体の統一は避けていたはずなのにである．丸山は「圏論を基盤とした分野横断的な科学基礎論を推進し，その帰結を哲学の立場から分析綜合することにより」「失われた統一的世界像を恢復する」([43], p.1) というのだが，これが一つの哲学体系を構築し諸科学理論の結果をその哲学に還元することであると解するなら，相対的基礎論としての圏論的統一科学が内在する異なるものを異なるままにした統一・多元的統一を可能にする二重構造と矛盾しているのではないだろうか．

もちろん，丸山は圏論的統一科学を「圏構造による多元的統一」という観点と，その帰結として得られる諸科学理論間のアナロジーとディスアナロジーの哲学的考察を経て構築される「統一的世界像」の二つを分けて考えてはいるだろう．両者は圏論的統一科学の二つの側面であり，別々のものであるから矛盾してはいないとも言えるだろう．しかし，DD をはじめとする丸山の文献には「圏構造による多元的統一」から「統一的世界像」へはどのようなステップを経ていくかを示しているものがまだ無いように思われる．ここに現在の圏論的統一科学の限界を見てとることができる．

私見では，統一的世界像を構築することは一つの理論や体系哲学に還元されるような仕方で世界を見ることを強要するという「全体主義」の陥った倫理的な悪行に繋がりかねないので賛同できない．（ただし，「圏構造による多元的統一」の帰結として得られる諸科学理論間のアナロジーとディスアナロジーの哲学的考察を経て何が言えるかを検討していくことは興味深いと感じる．実際に私自身もこの研究に着手し考察していきたい．）また，現代人が統一的世界像を求めてやまず，その構築が必要に迫られているとも思えない．しかし，3.1.1 項で論じたように「人生の意味」を含めた広い意味での「意味の回復」は必要だと考えるし，現に現代人も求めていることであると思う．そこで，統一的世界像に依らずに意味の回復が如何に可能であるかを考えることこそ重要であると考える．私見では，意味の回復は「他者」や「世界」との主観的な関わり方に求められると考える*38．ただし，これはどこまでも独我論的であり，決して客観的な学としては語り得ない事柄であるのかもしれない．

*38 この意味の回復についてはレヴィナスをはじめとする「他者」に関する哲学に回答を求めていきたい．

第 4 章

結論

4.1 総括

本論文では圏論の論理学への応用に関する 2 章と，哲学への応用に関する 3 章の二部構成という体裁をとって議論を展開していった．

2 章は主に圏論的論理学における主要概念の一つである「ハイパードクトリン」についての研究結果であった．まず，標準的な述語論理の体系である LJ と NJ のハイパードクトリンによる健全性定理・完全性定理を示し，結果としてこれらの体系間の等価性をハイパードクトリンの視点から示した．また，ハイパードクトリンによる述語計算やゲーデル変換の証明も試みた．さらに，$\mathscr{H}$ 集合ハイパードクトリンという特殊なハイパードクトリンによって等式付きの述語論理の体系について健全性定理・完全性定理が成り立つことを確認した．最後に，現在のハイパードクトリンに関する研究のうち最も興味深い研究の一つである丸山善宏の「圏論的普遍論理」について解説した．圏論的普遍論理とは T-ハイパードクトリンという形式で表現され，諸論理体系を一つの圏構造で解釈するという論理体系の「統一」をある意味実現している．

3 章では「The Dynamics of Duality（DD)」という丸山善宏によって書かれた文献の批判的検討を行った．まず，DD に登場する「統一」「不統一」「多元的統一」「二元論」「双対性」「非双対性」といった主要概念を実際のテキストを読解していきながらその概念の意味するところを明らかにしていった．DD のテキストだけでは詳細が明らかではない箇所については様々な文献を参照したり，私的な解釈を踏まえて解説した．続いて，DD の概念の相互関係や議論における具体性・明瞭性に欠ける箇所（例えば，数学における双対性も思想における双対性もどちらも「双対性」と一括りにしている点や，思想における双対性が「多元的統一」を実現するというがその意味が曖昧であるという点など）を指摘し，明瞭化の議論を二つに分けて行った．

一つ目が「双対性」と「多元的統一」の繋がりに関してであった．まず，双対性の概念は大きく「数学的双対性」と「思想的双対性」に区別することができるということを言った．その二つの双対性には類似点があるものの相違点も存在する．その相違点とは数学と思想の違いによっており，その違いを「記述」と「規範」の機能的な違いによるものであると論じた（ただし，両者の機能は入れ替わるということも同時に論じた)．そして，双対性による多元的統一の実現とは，思想と数学の差異に基づいた，思想それ自体に関しては不統一だが数学的構造に関しては統一的であるような形式の統一のことであると結論付けた．二つ目の議論では，DD では紹介されていないが丸山の思想において重要な位置を占める「圏論的統一科学」についての検討であった．圏論的統一科学を検討する前にまず数学基礎論の歴史を振り返ると共に，圏論による統一数学ないしは圏論的な基礎論である「圏論的基礎論」の検討を行った．圏論的基礎論にはいくつかのバージョンがあるがその一部は公理的集合論と数学的表現力（その体系内で展開できる数学理論の射程の範囲）が実質的に等価である

という事実や，アウディによる「相互構成可能性」に基づいて「集合論」「圏論」「型理論」のいずれかに特権性があるわけではないという議論を確認した．また，圏論的基礎論は「圏論は集合論に依存している」というフェファーマンらによる批判を受けてきたのだが，これに対しては筆者なりに応答を試みた．圏論は確かに集合概念に依存してはいるが，概念に依存することから直ちに理論に依存することにはならないということを三つに分けて論じた．フェファーマンの批判に応答の中で次第に姿を表してきたのが理論の自律性や相対性という観点であった．この諸理論の自律性を担保した上で諸理論を比較・検討する枠組みとなるような基礎論として丸山による「相対的基礎論」を紹介した．そして，この相対的基礎論の適応範囲を諸数学理論から諸科学理論までを含むものに拡張させたのが圏論的統一科学であると解釈した．また，双対性による多元的統一と同様に，相対的基礎論や圏論的統一科学は理論それ自体については不統一だが圏構造については統一である形式の多元的統一であると論じた．最後に，圏論的統一科学をこのように解釈するなら圏論的統一科学による「圏構造による多元的統一の実現」とその帰結として得られる諸科学理論間のアナロジーとディスアナロジーの哲学的考察を経て構築される「統一的世界像の構築」の間には幾分ギャップがあることを指摘した．

4.2　展望

論理学についてと哲学についての二つに分けて展望を述べる．まず，論理学についてである．本研究では一階ハイパードクトリンについてのみ詳しく検討したが，ハイパードクトリンが真価を発揮するのは一階ハイパードクトリンを自然に拡張して得られる高階ハイパードクトリン（トライポス）においてである．そのため，今後はこのトライポスについて詳しく検討し，トライポスの視点から見た高階論理の体系間の繋がりを具体的な定理を示すことで理解を深めたい．また，ハイパードクトリン（やトライポス）の成す圏の性質を調べることもハイパードクトリン（やトライポス）と論理の関係性を考察するのに良い方法だとも考える．また，2.3 節でも述べたことだが，丸山によって線形論理と古典論理を繋ぐジラー変換やファジー論理と古典論理を繋ぐ Baaz 変換のハイパードクトリン的な定式化が試みられているので，これらの論理体系間に成り立つ変換定理（グリベンコの定理など）をハイパードクトリンの視点から示してみたい．しかし，証明するために必要な線形論理やファジー論理，または部分構造論理の代数的実質であるフルランベック代数（とその拡張構造）に関する知識が不足している．そのため，まずはこの知識不足を補いたい．また，2.5 節でも述べたことだが，圏論的普遍論理についての哲学的考察をしてみたい．圏論的普遍論理は諸論理体系を統一的に見る視座を与えてくれる．圏論的普遍論理の実質的な圏構造は T-ハイパードクトリンであったが，T-ハイパードクトリンの何が論理に関する普遍的な性質を与えているのか哲学的に考察することで，「論理とは何か？」という問いに対する圏論視点による答えを提出してみたい．

哲学については，まず DD で登場した哲学思想の詳細について理解していきたいと考えている．特に，カッシーラーやホワイトヘッドなどの哲学者が度々登場してきたが，彼らの哲学は DD やその周辺の文献を読んで理解しているだけなので理解が浅いままである．思想における双対性をより深く理解するためには彼らの哲学に精通する必要があると考えるので，彼らの主要論文を読み，双対性についての考察を深めたい．また，3.2.1，3.2.2 項の議論は「思想」や「理論」の自律性を擁護する議論が中心であったが，（優先性や依存関係を定めるような比較方法を考えることは難しいとしても）やはり，思想や理論を比較する方法はいくらか存在すると考える．丸山はその比較方法を数学もしくは圏論における「構造」に求めていると解釈して議論をしたのであるが，「構造」以外の比較方法も存在する．例えば，理論の信念体系における「近さ」がそれである．物理学と化学の関係は物理学と生物学の関係よりも近い関係にあると言うように，理論間を比較する際には「構造」以外に「近さ」という観点が挙げられる．このように，理論をどのように比較するべきかについてを多角

的な視点から考察し，それを集合論と圏論の関係性の問題に応用してみる価値はありそうである．また，3.2.2 項の議論において集合論の背景哲学には「反復的集合観」があるが，圏論にはそのような背景哲学がないという批判を紹介した．この点については「コト」的世界像のような視点から応答できそうであるということを述べたが，詳しくは論じられなかった．この点については今後詳しく検討してみたいと考えている．また，本文の最後でも述べたが，諸科学理論の圏論化の進行による多元的統一の帰結としての諸科学理論間のアナロジーとディスアナロジーを哲学的考察するという研究は興味深いが，未だ積極的になされていないことである．この圏論的統一の哲学的考察については今後是非行っていきたい[*1]．

[*1] また，「意味の回復」には「他者」との積極的な関わりが重要な要因になると考えていると述べた．しかし，どのように他者と関わることが意味の回復へと繋がるかは明らかではない．そこで，他者に関する哲学的・社会学的な考察を行っているレヴィナスやカッサーノという哲学者・社会学者の主要論文を読み，「他者」と「意味の回復」の間の関係についての考察も深めていきたい．

謝辞

指導教員の久木田水生准教授には，ゼミでの指導をはじめ多くの助言をいただきました．特に，論文の提出の時期が迫る中，妥協した内容に留めておこうかと迷っていた際に相談に乗ってくださり，励ましの言葉をくださいました．最後まで粘り強く執筆し続けることができたのはその励ましの言葉のおかげです．心から感謝申し上げます．

最後に，数学や哲学の議論を長時間付き合ってくれた友人や研究室の皆様には厚く御礼を申し上げ，感謝の意を表します．

2021 年 1 月

名古屋大学 情報学研究科 社会情報学専攻 川嶋康太

付録 A

ファイブレーションとインデックス圏

本論文のタイトルある「ハイパードクトリン」とは，圏論的な枠組みを用いて述語論理の体系を解釈する方法である．この概念の肝は，論理的な概念をまず型とその上の述語に二分し，型からその上の述語への対応関係を関手を用いて表現していることである．この型と述語の構造を二分しつなぎ合わせる仕方は，位相幾何学などにみられる局所と大域の構造をつなぐ手法であるファイブレーションと同型なものである．実際，ハイパードクトリン（より一般的にはインデックス圏）はグロタンディーク構成とその逆の構成によってファイブレーションと本質的に同じ概念であると判明する．証明等の詳細については [11][12] を見よ．

本章では簡単にファイブレーションとインデックス圏の定義を確認し，ハイパードクトリンが位相幾何学などの文脈の中でも使われるファイブレーションと関係の深い概念であるということを理解し，ハイパードクトリンを数学一般の文脈の中に位置付けることをする．A.1 ではファイブレーションの定義と具体例を確認する．A.2 ではファイブレーションと述語論理の関係を確認する．最後の A.3 ではグロタンディーク構成について紹介し，ファイブレーションとハイパードクトリン（より一般的にはインデックス圏）を結びつける．

A.1　ファイブレーション

早速ファイブレーションを定義する．ファイブレーションの定義にはカルテシアン射の定義が必要なので，カルテシアン射を定義したのちにファイブレーションを定義する．

定義 A.1.1 カルテシアン射

$P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ を関手とする．$\mathbf{E}$ の射 $f : X \to Y$ が $\mathbf{B}$ の射 $u : I \to J$ 上カルテシアンであるとは次の条件を満たすことをいう：
$Pf = u$ であり，ある $\omega : PZ \to I$ に対し $Pg = u \circ \omega$ を満たすような任意の $\mathbf{E}$ における射 $g : Z \to Y$ に対して，$f \circ h = g$ なる ω 上の射 $h : Z \to X$ が一意的に存在する．

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "h"'] \arrow[drr, "g"] & & \\ & X \arrow[r, "f"'] & Y \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[dr, dashed, "\omega"'] \arrow[drr, "u \circ v = Pg"] & & \\ & I \arrow[r, "u"'] & J \end{tikzcd}$$

なお，通常の圏論の概念と同じく，カルテシアン射は同型を除いて一意的に定まることが容易に示される．また，2 つのカルテシアン射の合成射はカルテシアン射であるということや，同型射上のカルテシアン射も同型射になることも成立する．詳細は [11] を見よ．

定義 A.1.2 ファイブレーション

関手 $P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ がファイブレーションであるとは，任意の対象 $Y \in \mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ における任意の射 $u : I \to PY$ に対して，u 上のカルテシアン射 $f : X \to Y$ が存在することである．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$$I \xrightarrow{u} PY$$

また，任意の対象 $I \in \mathbf{B}$ に対して，$PX = I$ なる対象 $X \in \mathbf{E}$ と $Pf = 1_I$ なる $\mathbf{E}$ における射 f を集めてできる圏を $\mathbf{E}_I$ と書き，I 上のファイバー圏という．また，関手のドメインの圏のことをベース圏，コドメインの圏のことをトータル圏という．

定義だけを見るとファイブレーションはどのような構造を指し示しているのかはっきりしない．しかし，例を見るとわかるように，ファイブレーションは実に多くの数学的構造を表現することができる．実際，ハイパードクトリン同様にファイブレーションも述語論理を解釈できる構造でもある．まず，最も基本的なファイブレーションであるコドメインファイブレーション，族ファイブレーション，単純ファイブレーションを確認する．

例 A.1.3 コドメインファイブレーション

圏 $\mathbf{B}$ がプルバックを持つとする．このとき，射圏（arrow category）$\mathbf{B}^{\to}$ とは以下のように定義される圏である：

- 対象：$\mathbf{B}$ における射 $\varphi : X \to I$
- 射：$\mathbf{B}$ における 2 つの射の $u : I \to J, f : X \to Y$ の組（u, f）: $(\varphi : X \to I) \to (\psi : Y \to J)$ で $\psi \circ f = u \circ \varphi$ を満たすもの

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ I \arrow[r, "u"'] & J \end{tikzcd}$$

なお，対象 $I \in \mathbf{B}$ に対するスライス圏 $\mathbf{B}/I$ は $\mathbf{B}^{\to}$ の部分圏であり，$\mathbf{B}^{\to}$ は恒等関手 $1_{\mathbf{B}}$ に関するコンマ圏 $1_{\mathbf{B}} \downarrow 1_{\mathbf{B}}$ のことであり，射圏はコンマ圏の具体例として位置付けることができる．

この射圏 $\mathbf{B}^{\to}$ に対して，コドメイン関手 $\mathrm{cod} : \mathbf{B}^{\to} \to \mathbf{B}$ を $\mathrm{cod}(\varphi : X \to I) = I, \mathrm{cod}(u, f) = f$ と定義する．すると，これはファイブレーションになることが確認でき，このファイブレーションのことをコドメインファイブレーションという．実際にファイブレーションになることを以下で簡潔に証明する．

命題 A.1.4

コドメイン関手 $\mathrm{cod} : \mathbf{B}^{\to} \to \mathbf{B}$ はファイブレーションである．

Proof. 示すべきことは，任意の $(\psi : Y \to J) \in \mathbf{B}^{\to}$ と任意の $\mathbf{B}$ における射 $u : I \to \mathrm{cod}(\psi)$ に対して，u 上のカルテシアン $(u, f) : (\varphi : X \to I) \to (\psi : Y \to J)$ が存在することである．

まず，(u, f) を以下の図式がプルバックになるようなものとして定義する：

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
I \arrow[r, "u"'] & J
\end{tikzcd}$$

このように定義された (u, f) が u 上のカルテシアンであることを示す．任意の $\mathbf{B}^{\rightarrow}$ における射 $(v, g) : (\chi : Z \to K) \to (\psi : Y \to J)$ で $u \circ \omega = \mathrm{cod}(v, g) = v$ を満たす $\omega : K \to I$ が存在するとする．このとき，以下の可換図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[d, "\chi"'] \arrow[rr, bend left, "g"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
K \arrow[r, "\omega"'] \arrow[rr, bend right, "v"'] & I \arrow[r, "u"'] & J
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\omega \circ \chi"] & Y \arrow[d, "\varphi"] \\
I \arrow[r, "v = u \circ \omega"'] & J
\end{tikzcd}$$

よって，プルバックの普遍性により $f \circ h = g$,$\varphi \circ h = \omega \circ \chi$ を満たす射 $h : Z \to X$ が一意的に存在するとわかる：

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, dashed, "h"] \arrow[d, "\chi"'] \arrow[rr, bend left, "g"] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"] & Y \arrow[d, "\psi"] \\
K \arrow[r, "\omega"'] \arrow[rr, bend right, "v"'] & I \arrow[r, "u"'] & J
\end{tikzcd}$$

よって，左側の四角形の可換性により $\mathbf{B}^{\rightarrow}$ における $(u, f) \circ (h, \omega) = (v, g)$ を満たす一意的な射 $(h, \omega) : (Z \to K) \to (X \to I)$ が存在するとわかる．ゆえ，(u, f) は u 上カルテシアンであり，関手 cod はファイブレーションである． $\square$

このコドメインファイブレーションは特に依存型理論を解釈する圏論的な枠組みを提供する．詳しくは [11] を参照して欲しい．

例 A.1.5 族ファイブレーション

$\mathbf{C}$ を任意の圏とする．このとき，族圏 $\mathrm{Fam}(\mathbf{C})$ とは以下のように定義される圏である：

- 対象：$(X_i)_{i \in I}$（I は集合, X_i は $\mathbf{C}$ の対象）
- 射：組 $(u, (f_i)_{i \in I}) : (X_i)_{i \in I} \to (Y_j)_{j \in J} (f_i : X_i \to Y_{u(i)})$
- 射の合成：$(u, (f_i)_{i \in I}) : (X_i)_{i \in I} \to (Y_j)_{j \in J}$ と $(v, (g_j)_{j \in J}) : (Y_j)_{j \in J} \to (Z_k)_{k \in K}$ の合成射を $(v \circ u, (g_{u(i)} \circ f_i)_{i \in I})$ とする

この族圏 $\mathrm{Fam}(\mathbf{C})$ に対して，関手 $P : \mathrm{Fam}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sets}$ を $P((X_i)_{i \in I}) = I, P(u, (f_i)_{i \in I}) = u$ と定義する．すると，これはファイブレーションになることが確認でき，このファイブレーションのことを族ファイブレーションという．実際にファイブレーションになることを以下で簡潔に証明する．

命題 A.1.6

関手 $P : \mathrm{Fam}(\mathbf{C}) \to \mathbf{Sets}$ はファイブレーションである．

Proof. 示すべきことは，任意の $\mathrm{Fam}(\mathbf{C})$ における射 $(v,(g_k)_{k\in K}):(Z_k)_{k\in K}\to(Y_j)_{j\in J}$ で $u\circ\omega=v$ なる $\omega:K\to I$ が存在するとき，$(u,(1^u_{Y_{u(i)}})_{i\in I})\circ(\omega,(f^\omega_k)_{k\in K})=(v,(g^v_k)_{k\in K})$ なる ω 上の射 $(\omega,(f^\omega_k)_{k\in K}):(Z_k)_{k\in K}\to(Y_{u(i)})_{i\in I}$ が一意的に存在するということである．なお，上にある添字は関手で飛ばした先に対応する射を表している．

ここで，$f^\omega_k:Z_k\to Y_{\omega(k)}$ を $f^\omega_k=g^\omega_k$ と定義すると，以下が成立する：

$$\begin{aligned}(u,(1^u_{Y_{u(i)}})_{i\in I})\circ(\omega,(g^\omega_k)_{k\in K})&=(u\circ\omega,(1^u_{Y_{u(\omega(k))}}\circ g_k)_{k\in K})\\&=(v,(g^v_k)_{k\in K})\end{aligned}$$

よって存在性は確かめられた．最後に一意性を確認する．$(u,(1^u_{Y_{u(i)}})_{i\in I})\circ(\omega,(f'^\omega_k)_{k\in K})=(v,(g^v_k)_{k\in K})$ なる ω 上の射 $(\omega,(f'^\omega_k)_{k\in K}):(Z_k)_{k\in K}\to(Y_{u(i)})_{i\in I}$ が存在したとすると，$(u\circ\omega,(f'^\omega_k)_{k\in K})=(u\circ\omega,(g^\omega_k)_{k\in K})$ より，$f'_k=g_k$ をえる．ゆえ，一意性も確かめられた．よって，$(\omega,(1^u_{Y_{u(i)}})_{i\in I})$ は ω 上カルテシアンであり，関手 $P:\mathrm{Fam}(\mathbf{C})\to\mathbf{Sets}$ はファイブレーションである． □

また，この族ファイブレーションとコドメインファイブレーションはベース圏が $\mathbf{Sets}$ のとき，以下の図式が可換になるので相互翻訳可能であり，ファーブレーション的には同じ振る舞いをする．

$$\begin{tikzcd}\mathrm{Fam}(\mathbf{Sets}) \arrow[rr, "\cong"] \arrow[dr, "P"'] & & \mathbf{Sets}^{\to} \arrow[dl, "\mathrm{cod}"] \\ & \mathbf{Sets} & \end{tikzcd}$$

ただし，ベース圏が $\mathbf{Sets}$ のときのみ成り立つことであるので注意が必要である．

例 A.1.7 単純ファイブレーション

圏 $\mathbf{B}$ を積を持つ圏とする．このとき圏 $S(\mathbf{B})$ は以下のように定義される圏である：

- 対象：$\mathbf{B}$ の対象の組 (I,X)
- 射： $\mathbf{B}$ における射 $u:I\to J$,$f:I\times X\to Y$ の組 $(u,f):(I,X)\to(J,Y)$
- 合成：$(u,f):(I,X)\to(J,Y)$ と $(v,g):(J,Y)\to(K,Z)$ の合成射は $(v\circ u,g\circ\langle u\circ\pi,f\rangle)$ である

この圏 $S(\mathbf{B})$ に対して，関手 $S:S(\mathbf{B})\to\mathbf{B}$ を $S(I,X)=I,P(u,f)=u$ と定義する．すると，これはファイブレーションになることが確認でき，このファイブレーションのことを単純ファイブレーションという．実際にファイブレーションになることを以下で簡潔に証明する．

命題 A.1.8

関手 $S:S(\mathbf{B})\to\mathbf{B}$ はファイブレーションである．

Proof. 任意の $(J,Y)\in S(\mathbf{B})$ と任意の $u:I\to S(J,Y)$ に対して，$(u,\pi'):(I,Y)\to(J,Y)$ が u 上のカルテシアンとなっていることを示す．つまり，任意の $S(\mathbf{B})$ における射 $(v,f):(K,X)\to(J,Y)$ で $u\circ\omega=v$ なる $\omega:K\to I$ が存在するものに対して，$(u,\pi')\circ(\omega,h)=(v,f)$ なる射 $(\omega,h):(K,X)\to(I,Y)$ が一意的に存在することを示せば良い．

$h:K\times X\to Y$ を $h=f$ と定義すると以下が成立する：

$$\begin{aligned}(u,\pi')\circ(\omega,h)&=(u,\pi')\circ(\omega,f)\\&=(u\circ\omega,\pi'\circ\langle\omega\circ\pi,f\rangle)\\&=(v,f)\end{aligned}$$

よって，存在性は確認できた．次に，(ω, f) の一意性を示す．$(u, \pi') \circ (\omega, f') = (v, f)$ を満たす射 $(\omega, f') : (K, X) \to (I, Y)$ が存在したとする．このとき，以下が成立する：

$$\begin{aligned}(u, \pi') \circ (\omega, f) = (u, \pi') \circ (\omega, f') &\iff (u \circ \omega, \pi' \circ \langle \omega \circ \pi, f \rangle) = (u \circ \omega, \pi' \circ \langle \omega \circ \pi, f' \rangle) \\ &\iff (u \circ \omega, f) = (u \circ \omega, f') \\ &\iff f = f'\end{aligned}$$

よって一意性も確かめられた．したがって，(u, π') は u 上カルテシアンである．したがって関手 $S : S(\mathbf{B}) \to \mathbf{B}$ はファイブレーションである． □

この単純ファイブレーションは特に単純型理論を解釈する圏論的な枠組みを提供する．コドメインファイブレーションと同様に詳しくは [11] を参照して欲しい．

A.2 ファイブレーションと述語論理

上記のファイブレーションの例を用いることで単純型理論や依存型理論などの型理論の体系を解釈できると言った．しかし，ファイブレーションで解釈できるのは型理論の体系だけではない．述語論理の体系も同様にファイブレーションの枠組みで解釈することができるのである．以下では簡単にファイブレーションによって述語論理の体系がどのように解釈されるのかを確認する（この事実はハイパードクトリンによる解釈と本質的に同じことを言っている）．

さて，一階述語論理を解釈するファイブレーションである一階ファイブレーションを定義したい．一般に，論理体系を解釈する際には，「論理積」「論理和」「含意」という論理定項が解釈できなければならない．ファイブレーションで述語論理の体系を解釈する際は，各ファイバー圏は変数付きの命題論理の体系に対応している．つまり，「論理積」「論理和」「含意」の 3 つの論理定項は各ファイバー圏に対して整合性を保つ形で定義されなければならない．そして，その整合性とは変数代入によって論理定項が保存されるということに他ならない．

まず変数代入の圏論的表現である代入関手という概念を定義する．この代入関手は以下のようにカルテシアン射の普遍性によって定義される．

定義 A.2.1 代入関手

$P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ をファイブレーションとし，$\mathbf{B}$ における射 $u : I \to J$ に対するカルテシアン射を $\bar{u}(X) : u^*(X) \to X$ と書くとする．すると，I, J 上のファイバー圏の間に

$$u^* : \mathbf{E}_J \to \mathbf{E}_I$$

なる関手を定義することができる．対象の対応は上に示した通りである．射の対応は次のように与えられる．$\mathbf{E}_J$ における射 $f : X \to Y$ に対して，カルテシアン射 $\bar{u}(X), \bar{u}(Y)$ が存在するが，このカルテシアン射の普遍性から次の図式を可換にする射 $h : u^*(X) \to u^*(Y)$ が一意的に存在すると分かる：

$$\begin{tikzcd} u^*X \arrow[r, "\bar{u}(X)"] \arrow[d, dashed, "h"] & X \arrow[d, "f"] \\ u^*Y \arrow[r, "\bar{u}(Y)"] & Y \end{tikzcd}$$

この h を $u^*(f)$ とすると，u^* の射の対応が与えられ，関手として well-defined となる．上記のような対応によって与えられる関手 u^* を u から誘導された代入関手という．

また，射 $u : I \to J$ と $v : J \to K$ が与えられたとき，この 2 つの射の代入関手とそれぞれの射の代入関手の合成の間には，カルテシアン射の普遍性から以下のような自然同型が得られる：

$$u^* \circ v^* \overset{\cong}{\Longrightarrow} (v \circ u)^*$$

この自然同型が特に恒等自然変換のとき（つまり，$u^* \circ v^* = (v \circ u)^*$ となるとき），そのファイブレーションのことを分裂であるという．コドメインファイブレーションのベース圏が **Sets** の場合，分裂ファーブレーションであるが，一般には分裂とはならない．

圏論的命題論理では「論理積」「論理和」「含意」を「積」「余積」「冪対象」によって与える．これはファイブレーションの文脈においても同じである．代入関手用いることにより圏論的述語論理における「論理積」「論理和」「含意」に対応する概念（ファイバー積，余積，冪）が定義できる．

定義 A.2.2 ファイバー積，余積，冪

ファイブレーションがファイバー積（余積，冪）を持つとは，そのファイブレーションにおける任意のファイバー圏が積（余積，冪）をもち，代入関手がそれを保存することをいう．

ここまでで，述語論理の体系を圏論的に解釈するために必要な基本的な論理定項のファイブレーション的な定式化を確認した．最後に量化記号の解釈を考える．ファイブレーション的な量化記号の解釈は以下の量化関手によって与えられる．

定義 A.2.3 量化関手

$P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ をファイブレーションとし，$\mathbf{B}$ が積を持つ圏であるとする．任意の $I, J \in \mathbf{B}$ について，射影 $\pi_{I,J} : I \times J \to I$ から誘導される代入関手 $\pi^*_{I,J} : \mathbf{E}_I \to \mathbf{E}_{I \times J}$ が右随伴

$$\forall_{I,J} : \mathbf{E}_{I \times J} \to \mathbf{E}_I$$

を持ち，Beck-Chavalley 条件という条件を満たすとき，その右随伴のことを全称量化関手という．また，同様に左随伴

$$\exists_{I,J} : \mathbf{E}_{I \times J} \to \mathbf{E}_I$$

を持ち，Beck-Chevalley 条件という条件を満たすとき，その左随伴のことを存在量化関手という．（なお，Beck-Chevalley 条件は量化操作と代入操作が可換であるという条件であるが，ハイパードクトリンの定義に書かれているのでそちらを参照してほしい．）

ファイブレーションによる述語論理解釈のための必要な概念が出そろった．では，一階述語論理のファイブレーションによる解釈の枠組みである一階ファイブレーションを定義する．なお，一階ファイブレーションはファイバー圏が前順序であるので分裂ファイブレーションである．

定義 A.2.4 一階ファイブレーション

$P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ を分裂ファイブレーションとする．このとき，次の条件を満たすとき，P を一階ファイブレーションという：

1. ファイバー前順序である（任意のファイバー圏は前順序である）．
2. ファイバー有限積，有限和，冪を持つ（各ファイバー圏は有限和を持つカルテシアン閉圏であるということ）．

3. 全称量化関手，存在量化関手を持ち，存在量化関手については Frobenius reciprocity という条件が成立する（Frobenius reciprocity についてもハイパードクトリンの定義に書いてある）．
4. ベース圏 $\mathbf{B}$ が有限積を持つ．

つまり，各ファイバー圏で論理積，論理和，含意などの通常の述語論理の論理定項が定義でき，ファイバー圏間を量化操作が可能であり，ソートに積を入れることができるようなファイブレーションが一階ファイブレーションである．ファイブレーション的な述語論理の完全性定理の証明には構文的ファイブレーションというファイブレーションを用いるが，この構文的ファイブレーションは一階ファイブレーションであることを示すことができる．このような完全性定理の証明の仕方は，次節で行うハイパードクトリン的な証明の仕方と全く同じである．なお，一階ファイブレーションは一階ハイパードクトリンと構造的に等価な概念である．

なお，一階ファイブレーションの条件を弱めるとレギュラーファイブレーション，コヒーレントファイブレーションといったファイブレーションが得られる．これらもまたレギュラー論理やコヒーレント論理という論理体系を解釈する枠組みを与える．

最後に，ファイブレーション的な高階論理の解釈の枠組みである高階ファイブレーションを定義する．一階ファイブレーションに高階性を付加することが必要になるのだが，それを体現するのが以下のジェネリック対象という概念である．このジェネリック対象が高階の量化を許す．

定義 A.2.5 ジェネリック対象

$P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ を分裂ファイブレーションとする．このとき，P がジェネリック対象を持つとは，ある対象 $\Omega \in \mathbf{B}$ が存在し，以下の全単射が任意の $I \in \mathbf{B}$ について自然に成り立つことをいう：

$$\mathbf{B}(I, \Omega) \xrightarrow[\cong]{\theta_I} \mathrm{Ob}(\mathbf{E}_I)$$

なお，任意の $I \in \mathbf{B}$ について自然に成り立つとは，任意の $v : J \to I$ と $u \in \mathbf{B}(I, \Omega)$ に対して，$\theta_J(u \circ v) = v^*(\theta_I(u))$ が成立することをいう．

定義 A.2.6 高階ファイブレーション

$P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ を一階ファイブレーションとする．このとき，次の条件を満たすとき，P を高階ファイブレーションという：

1. ジェネリック対象を持つ．
2. ベース圏がカルテシアン閉圏である．

高階ファイブレーションは，先ほど定義した高階の量化を許すジェネリック対象を持ち，ソートにおいて単純型付き λ 計算の構造を備えているようなファイブレーションということである．なお，高階ファイブレーションは高階ハイパードクトリン（トライポス）と対応している．

ここまでにいくつかのファイブレーションを定義してきた．それをまとめると以下の図のようになる．

A.3 グロタンディーク構成

何度も言うように，ファイブレーションは本章でメインに取り扱うハイパードクトリンという概念と本質的に同じ概念である．では，どのようにして同じであるということができるのであろうか？それは，以下で示すグロタンディーク構成という方法によってである．これは，ハイパードクトリンよりも一般的な概念であるインデックス圏という概念に適応されるファイブレーションの構成法である．ファイブレーションからイン

論理の種類	ファイブレーションの種類
依存型理論	コドメインファイブレーション
単純型付きラムダ計算	単純ファイブレーション
レギュラー論理	レギュラーファイブレーション
コヒーレント論理	コヒーレントファイブレーション
一階述語論理	一階ファイブレーション
高階論理	高階ファイブレーション

デックス圏の構成法も存在するので，その両者を組み合わせることによって 2 つの概念が等しいといえるのである．

では，早速ハイパードクトリンのより一般的な概念であるインデックス圏を定義する．

定義 A.3.1 インデックス圏

$\mathbf{B}$ を任意の圏とする．このとき，関手 $\Psi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ を考える．これは，各 $I \in \mathbf{B}$ に対し圏 $\Psi(I)$ を与え，$\mathbf{B}$ における射 $u : I \to J$ に対して関手 $\Psi(u) : \Psi(J) \to \Psi(I)$ を与える．この関手 $\Psi(u)$ を u^* と表記する．この関手 Ψ が各 $I \in \mathbf{B}$ と射 $u : I \to J$，$v : J \to K$ に対し次の 2 つの自然同型

$$\eta_I : 1_{\Psi(I)} \overset{\cong}{\Longrightarrow} (1_I)^* \mu_{u,v} : u^* v^* \overset{\cong}{\Longrightarrow} (v \circ u)^*$$

が存在し，以下のコヒーレンス条件を満たすとき，関手 Ψ をインデックス圏（または Psedo 関手）という：

- 各 $u : I \to J$ に対して，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} & u^* \arrow[dl, Rightarrow, "\eta_I u^*"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, Rightarrow, "u^* \eta_J"] & \\ (1_I)^* u^* \arrow[r, Rightarrow, "\mu_{1_I,u}"'] & u^* & u^*(1_J)^* \arrow[l, Rightarrow, "\mu_{u,1_J}"] \end{tikzcd}$$

- 各 $u : I \to J$,$v : J \to K$,$w : K \to L$ に対して，以下の図式が可換になる：

$$\begin{tikzcd} u^* v^* w^* \arrow[r, Rightarrow, "u^* \mu_{v,w}"] \arrow[d, Rightarrow, "\mu_{u,v} w^*"'] & u^*(w \circ v)^* \arrow[d, Rightarrow, "\mu_{u,w \circ v}"] \\ (v \circ u)^* w^* \arrow[r, Rightarrow, "\mu_{v \circ u, w}"'] & (w \circ v \circ u)^* \end{tikzcd}$$

また，上で与えられた 2 つの自然同型が恒等自然変換であるとき分裂インデックス圏という．恒等自然変換である場合，明らかにコヒーレンス条件を満たすことに注意する．（なお，ハイパードクトリンはファイバー圏が前順序であるので分裂インデックス圏である．）

次の命題によってファイブレーションからインデックス圏の構成が与えられる．

命題 A.3.2 ファイブレーションからインデックス圏の構成

$P : \mathbf{E} \to \mathbf{B}$ をファイブレーションであるとする．関手 $\Psi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ を

$$I \mapsto \mathbf{E}_I, u \mapsto u^* (\text{代入関手})$$

と定めると Ψ はインデックス圏となる．また，P が分裂ファイブレーションであるとき Ψ は分裂インデックス圏となる．

Proof. [11] による． □

続いて，インデックス圏からファイブレーションの構成法を確認する．まず，与えられたインデックス圏からファイブレーションのトータル圏を構成する仕方であるグロタンディーク構成を定義する．

定義 A.3.3 グロタンディーク構成

$\Psi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ をインデックス圏とする．このとき，Ψ のグロタンディーク構成 $\int_{\mathbf{B}}(\Psi)$ とは以下のように定められる圏のことである：

- 対象：$I \in \mathbf{B}$ と $X \in \Psi(I)$ の組 (I, X) である
- 射：(I, X) と (J, Y) の間の射は $\mathbf{B}$ における射 $u : I \to J$ と $\Psi(I)$ における射 $f : X \to u^*(Y) = \Psi(u)(Y)$ の組 (u, f) である
- 恒等射：(I, X) 上の恒等射は $1_I : I \to I$ と $\eta_I(X) : X \to (1_I)^*(X)$ の組 $(1_I, \eta_I(X))$ である
- 合成：2 つの射 $(u, f) : (I, X) \to (J, Y)$ と $(v, g) : (J, Y) \to (K, Z)$ の合成射は組 $(v \circ u, \mu_{w,v}(Z) \circ u^*(g) \circ f)$ によって与えられる

グロタンディーク構成は実際に圏の定義を満たすことが容易に確認できる．そして，このグロタンディーク構成からインデクッス圏のベース圏への射影関手によってファイブレーションが与えられる．この事実は以下のようにまとめられる．

命題 A.3.4 インデックス圏からファイブレーションの構成

$\Psi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}$ をインデックス圏とし，$\int_{\mathbf{B}}(\Psi)$ を Ψ のグロタンディーク構成とする．このとき，$P(I, X) = I, P(u, f) = u$ によって定められる射影関手 $P : \int_{\mathbf{B}}(\Psi) \to \mathbf{B}$ はファイブレーションとなる．また，Ψ が分裂インデックス圏のとき，P は分裂ファイブレーションとなる．

Proof. [11] による． □

ファイブレーションの具体例として定義した「コドメインファイブレーション」「族ファイブレーション」「単純ファイブレーション」はそれぞれあるインデックス圏からグロタンディーク構成によって構成することができる．具体的に以下のようなインデックス圏から構成される：

ファイブレーション	インデックス圏
コドメインファイブレーション	$\Psi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}, I \mapsto \mathbf{B}/I$($\mathbf{B}/I$ はI上のスライス圏)
族ファイブレーション	$\Psi : \mathbf{Sets}^{op} \to \mathbf{Cat}, I \mapsto \mathbf{C}^I$($I$ は集合，$\mathbf{C}$ は任意の圏)
単純ファイブレーション	$\Psi : \mathbf{B}^{op} \to \mathbf{Cat}, I \mapsto \mathbf{B}//I$($\mathbf{B}//I$ は I 上の単純スライス圏)

命題 A.3.2 と命題 A.3.4 によってファイブレーションとインデックス圏を相互に行き来することが可能となった．しかし，その 2 つの概念が本質的に同じと言っても良いのだろうか？その答えは「イエス」であり，これを保証するのが以下の命題である．

命題 A.3.5

次の 2 つの事実が成立する：

1. あるファイブレーションから命題 A.3.2 によりインデックス圏を構成し，構成されたインデックス圏から命題 A.3.4 により再びファイブレーションを構成すると元のファイブレーションと同値になる．

2. あるインデックス圏から命題 A.3.4 によりファイブレーションを構成し，構成されたファイブレーションから命題 A.3.2 により再びインデックス圏を構成すると元のインデックス圏と同値になる．

Proof. [11] による． □

以上により，ファイブレーションとインデックス圏が本質的に同値の概念であることが確認できた．ハイパードクトリンはインデックス圏の具体例であるので，ハイパードクトリンの議論はファイブレーションの議論に還元できる．（もちろんファイブレーションの議論をインデックス圏の議論に還元することもできる．）

本章ではファイブレーションを定義し，論理学的に重要な具体例をいくつか確認した．また，ハイパードクトリンのより一般的な概念であるインデックス圏とファイブレーションが本質的に同じであるということを確認し，ハイパードクトリンがファイブレーションの文脈の中に位置付けられるということも確認できた．

付録 B

トポスと高階直観主義論理

本章では，トポスが高階直観主義論理（ここでは Bell によって定式化された Local Set Theory）のモデルとなること，すなわちトポスによる高階直観主義論理解釈のもとで健全性定理が成り立つことを示す．また，トポスモデルは健全性定理のみならず，完全性定理も成立させる．スケッチのみとなるが，完全性定理の証明も行う．なお，2 節以降は [3] を参考にしている．

まず，B.1 節では，トポス理論の概要を簡単に紹介する．主にグロタンディークとローヴェアの努力の末に誕生したトポス理論の誕生の経緯と，トポスの定義とその性質を述べ，トポスについての理解を深める．

B.2 節では，健全性定理の証明で用いられるトポスの部分対象にまつわる諸命題の証明を行う．トポスの対象 A の部分対象のクラス $\mathrm{Sub}(A)$ はハイティング代数になることが知られているが，これの事実に関する命題の証明である．

B.3] 節では，Local Language と Local Set Theory を定義する．これらは Bell によって定式化されたものであり，一般の高階直観主義論理の構造を備えている．

B.4 節が本章のメインである．トポスを用いて Local Set Thoery の解釈を行い，実際に健全性定理を証明する．[3] では省略されている箇所や間違った箇所があったが，それを補い，訂正することによって完全な証明を与えた．

B.5 節では, 完全性定理の証明のスケッチを行う．また，トポスから Local Set Theory を Local Set Theory からトポスを創出するという，トポスの内部言語的アプローチによってトポスと Local Set Theory が圏論的にも同じ構造を有しているということを主張する同値定理についても触れる．

B.1 トポス理論の概要

本節では，トポス理論の概要を簡潔に説明する．トポス理論の誕生の経緯，トポスの定義と性質の確認という順で概要を説明していく．

トポス理論とは，端的に言えば圏論が発展していく中で生まれ，幾何学と論理学が融合する舞台となる理論である．この理論が圏論の歴史の中でどの段階で生まれたのか，一度，1945 年の誕生から 1970 年代に多くの異分野応用されるまでの圏論の歴史を簡単に振り返る．

1945 年 アイレンベルクとマクレーンの「自然同値の一般論」という論文で圏論が確立した．

1940 年代後半 代数的位相幾何，とくに，ホモロジー論と抽象代数の分野で初めて主要な応用がなされた．

1950 年代 グロタンディーク他が圏論を用いて，代数幾何の分野で多大な成功を収めはじめた．

1960 年代 ローヴェア他が圏論を論理に適用し始め，深淵な驚くべき関連をいくつか明らかにした．

1970 年代 応用がすでに，計算機科学，言語学，認知科学，哲学など多くの他分野に現れつつあった．

([1], p.1-2)

トポスの産みの親は，２０世紀後半の最大の数学者の一人とも言われるグロタンディークである．彼は，1950 年代，圏論を使って代数幾何を発展させるための研究に打ち込んでいた．その中で 1958 年，現代の代数幾何には欠かせない「スキーム」という概念に至り，その直後「トポス」という概念に至った．「トポス」は，グロタンディークによる代数幾何研究の脈絡で生まれた概念であり，「スキーム」と同じ年に誕生した双子の兄弟ということができる．グロタンディーク本人は，「トポス」について以下のように語った．

> トポスのテーマはスキームのテーマから生まれました．スキームが出現したのと同じ年です—しかしトポスのテーマは，その広がりにおいては，はるかに源となったスキームのテーマを超えています．幾何学と代数，トポロジーと数論，数理論理学と圏論，連続の世界と「不連続」または「離散」構造の世界が結び合う，この「ベッド」，あるいはこの「深い川」は，スキームのテーマではなくて，トポスのテーマです．スキームのテーマが新しい幾何学の核心としてあるとすれば，トポスのテーマはこの幾何学の外皮あるいは住まいです．それは，豊かな幾何学的響きを持つ同一の言語によって，数学上の事柄からなる広大な宇宙のあれこれの地域から由来する，相互に非常に隔たった状況に共通する「エッセンス」を繊細に捉えるために私がより広く構想したものです．([8], p65-66)

このグロタンディークが構想したトポスは，今日では「グロタンディーク・トポス」と言われる古典的なトポスである．グロタンディークは「グロタンディーク・トポス」を数学における空間概念（位相空間）の一般化（グロタンディークの言葉を借りるならば，「空間概念の思いがけない拡張，もっと適切な言い方をすれば，空間概念の変身」）として考えていた．その一般化が可能となったのは，当時注目され始めてた新理論「層の理論」と「圏論」をグロタンディークが巧みに用いて，空間概念を「層」と「圏」の言葉で翻訳したことによる．（以下，カテゴリーとは圏のことであることに注意する．）

> これらの概念の中の最初のもの，つまり空間という概念はいわば「極大な」概念—すでに極めて一般な概念であって，さらに「道理にかなった」拡張をどのように見出すかは非常に想像しにくいものです．ところが，鏡の向こうにある，位相空間から出発して，巡り合ったこれらの「カテゴリー」（または「装備」）は，極めて特殊な性質を持っていることがわかります．実際それらは非常に典型的な一連の性質を有しており，これによって，これらのうちで想像できる限り一番単純なもの—一点からなる空間から出発して得られるもの—の様々な「模作」に類似したものになっているのです．つまり，伝統的な位相空間を一般化している「新しいスタイルの空間（あるいはトポス）」は，必ずしも通常の空間に由来するものでなくとも，「層のカテゴリー」が持つこれらすべての良い性質を持っている（もちろん，はっきりと明確に指定された）「カテゴリー」として単純に叙述されるのです．([8], p60-61)

そして，位相空間において重要なのは「層」と「圏」であると結論づける．

> つまり，位相空間において本当に考慮すべきなのは，その「点」や点からなる部分集合や点の間の近さなどの関係では全くなく，この空間の上の層と，これらが作るカテゴリーであるということです．([8], p61)

グロタンディーク自身は，このように位相空間の一般化としての「グロタンディーク・トポス」に大きな期待を寄せていたが，他の数学者たちは「スキーム」ほどに「グロタンディーク・トポス」を歓迎しなかった．

> しかしながら，このトポスのテーマはスキームのテーマが受けた評価からははるかにかけ離れたところにあります [8].

ではなぜ，グロタンディークが期待した「グロタンディーク・トポス」は他の数学者に快く受け入れられなかったのだろうか？その理由の一つとして，「グロタンディーク・トポス」は（その定義を見るとわかるように）決して扱いやすいものではなかったからだと考える．しかし，皮肉なことに，グロタンディークが数学界を去った 1970 年以降，トポス理論は急速な発展を見せるようになった（数学界を去るようになったのは，当時，反戦運動に熱心であって，自らが所属していた研究所が軍からの資金援助があることを知ったため）.

その発展の火付け役となったのが，本論文のメインであり，今日通常の意味で使われる「トポス（もしくは初等トポス)」である．トポスは 1958 年の誕生から，一度大きな成長を遂げて，今日通常の意味で用いられるトポスに至ったのである．この「初等トポス」は「グロタンディーク・トポス」の一般化であり，より扱いやすい定義となっている（実際に，層の理論の言葉を用いることなく，圏論の基本的な概念のみによって定式化される)．その「扱いやすさ」のために，多くの数学者に受け入れられ，トポス理論は発展したのだと考える．

さて,「グロタンディーク・トポス」から「初等トポス」へトポスを成長させたのは，ローヴェアとティエルニーという二人の数学者である．とくに，ローヴェアの貢献が大きかったように思われる．実際に,「初等トポス」という概念は，ローヴェアが，集合論の圏論的特徴付けに関する研究をする中で顔を出しはじめた．簡単に流れを追ってみることにする．

ローヴェアは，1963 年に圏論の創設者の一人アイレンベルクの元で博士号を取得した．その後，リード大学にてはじめて教鞭を取るようになり，基礎論的知見から抽象代数学や微分積分学を教育しようと努めた．その中で「現行の公理的集合論は学部生には難しすぎる」と思い，集合と要素の所属関係 $\in$ による公理的集合論的な基礎づけではなく，集合（もしくは対象）と写像（もしくは射）による圏論的な基礎づけができないか考え，研究するようになった．そうして，そのアイデアが 1964 年の論文「Elementary Theory of the Category of Sets(ETCS) [16]」にまとめられるようになった．この論文がトポス理論が成長する第一段階となったのである [39].

そして，この論文が出版された 1964 年前後に，ローヴェアが関心を持っていた幾何学と論理学の分野でいくつかの重要な結果が示された．驚くべきことに，トポス理論を成長させる（発展させる）動機となったのが，その「幾何学と論理学における様々な成果を本質的に統合する」というものであった．以下のように，ローヴェア自ら証言している．

> 1963 年の前後に・・・，幾何と論理学の分野で 5 つの著しい発展が為された．これらの成果の本質的な統一ということこそが，われわれをして新しい集合概念（トポス）の真剣な考察へと向かわせたと，私は信じている．それらは以下の 5 つである．
> ・超準解析 (A. ロビンソン)
> ・集合論における独立性証明 (P. J. コーエン)
> ・直観主義的述語論理の意味論 (S. クリプキ)
> ・集合論の圏論的な公理化 (F. W. ローヴェア)
> ・グロタンディーク・トポスの特徴づけ (J. ジラー)([41], p263, 本論文の著者により一部編集)

ローヴェアは，この「本質的な統一」のために動き出し，ダルハウジー大学にてティエルニーと共同研究を

し,「集合上の層の圏」の効果的な公理化を発見した．そして間も無く「初等トポス」の定義に成功し，トポス理論は新たな展開を迎えるようになったのである．

そして，彼らは，新たなトポス理論を用いて，これらの成果の統合を見事に果たしたのである．詳しくは，著者も勉強不足でコメントすることができないが，これらの統合によりトポス理論は大きく注目されるようになり，ジョンストン，ミッチェル，マッカイ，フレイド，ジョイヤルらによって更なる展開をみせ，今日に至るのである．

このような歴史的背景によりトポス理論は現在整備され，今日ある姿となっている．少々歴史的な記述が長くなったが，早速トポスを定義しよう．なお，以下で定義するトポスはローヴェアによる初等トポスである．

定義 B.1.1 トポス

トポスとは，以下の 3 つの条件を満たす圏 $\mathscr{E}$ のことである:

(1) 圏 $\mathscr{E}$ は有限完備である．

(2) 圏 $\mathscr{E}$ は部分対象分類子を持つ．

(3) 圏 $\mathscr{E}$ は冪対象を持つ．

(1)(3) のみであればその条件を満たす圏はカルテシアン閉圏である．つまり，(2) の部分対象分類子という概念がトポスを特徴付けるのに本質的な役割を果たしている．この部分対象分類子とは，端的に言えば，真理値判定を行える構造のことである．詳しい説明は [18] に譲り，定義だけ以下で確認する．

定義 B.1.2 部分対象分類子

有限完備な圏 $\mathbf{C}$ の部分対象分類子 (subobject-classifier) とは，組 (Ω, true) のことであり，以下の二つの条件を満たすものである (なお，1 は終対象とする)：

(1) 対象 $\Omega \in \mathbf{C}$ で, 射 $\mathrm{true} : 1 \to \Omega \in \mathbf{C}$ である．

(2) 任意のモノ射 $f : B \to A$ に対して, 以下の図式をプルバックにするような射 $\chi_B : A \to \Omega$ が一意的に存在する：

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r, "!_B"] \arrow[d, "f"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi_B"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

このような一意的に定まる射 χ_B のことを A の部分対象 B に対する特性射という．合成射 $\mathrm{true}\circ !_C$ を単に true_C と書くこともある．また，射 χ_B のことを χ_f と書くこともある．

このトポスという圏は，単に「部分対象分類子を持つカルテシアン閉圏」なのであるが，この圏から実に多くのことが言えるのである．例えば,「エピ射かつモノ射である射は同型射になること」「任意の射がエピ射とモノ射に分解できること」「有限余完備性」「スライス圏もまたトポスとなること」などである．これらは集合の圏 **Sets** についての成り立つ性質であり，トポスはどことなく **Sets** に似ているのである．この事実が示唆しているように，トポスを用いた集合論の特徴付けの議論，トポス論的な数学の基礎論の展開は実際に試みられており，主に「トポス理論的な基礎論は公理的集合論に取って代わることが可能か？」という文脈で活発な議論が成されている．詳しくは [18][52] などを参照してほしい．

もちろん本章で扱う,「部分対象がハイティング代数の構造を持つこと」「高階直観主義論理のモデルにな

る」こともトポス理論で言えることである．トポスは，単に様々な圏論の構造を有しているというだけでなく，その圏論的な概念を適切に用いることによって，集合論，論理学をも包摂する（ある意味で）巨大な圏と言えるだろう．

さらに，幾何学とも関連が深く，「一般化された位相空間」という意味合いも持つ．これらは主にグロタンディーク・トポスの持つ重要な性質なのであるが，詳しくは省略する．

すなわち，トポスは「集合論や論理学の圏論的定式化」という側面があり，「位相空間の一般化」という側面があり，一言では言い尽くせない多様な側面を持っている．このことをジョンストンはトポス理論の辞書的教科書 [12] のまえがき中で「像」の比喩を用いて，面白く説明しており，トポスの特徴を１３個列挙する．以下そのうち５つを紹介する．

(1) トポスとは，景上の層の成す圏である．

(2) トポスとは，有限極限とパワー対象を持つ圏である．

(3) トポスとは，直観主義的高階理論である．

(4) トポスとは，一般化された空間である．

(5) トポスとは，直観主義的形式体系に対するセマンティクスである．([12],preface p.7)

本章はこの内，(3)(5) に相当する箇所についてである．本章を通して，トポスの論理学的な側面を少しでも理解する手立てとなれば幸いである．

概要を終わる前に，現在のトポス理論を簡潔に紹介する．

現在の最も活発に研究されているトポス理論の分野は，ルアーによって考案された「高次トポス」についてである．通常の圏論からトポスが生まれたように，高次圏論から新たに高次トポスが生まれたのである．この高次トポスについては，ルアー自身による [17] を参照してほしい．

ルアーによる高次トポスはグロタンディーク・トポスがベースとなっているトポスである．グロタンディーク・トポスから初等トポスが成長したように，高次トポスについても同様の成長した姿が存在する．それが「初等高次トポス」であり，近年定式化された．これについては [36] を参照してほしい．

また，カラメロは分類トポスの研究を押し進めることで「（異なる数学理論をつなぐ）橋としてのトポス」というトポスの新たな重要な側面を明らかにした．これは異なる数学理論をトポスを介してつなぎ合わせ，数学の統一を図るという統一プロジェクトへと繋がる．詳しくは [6] を参照してほしい．

B.2 部分対象について成り立つ命題

本節では，健全性定理の証明で用いられるトポスの部分対象にまつわる諸命題の証明を行う．トポスの対象 A の部分対象のクラス $\mathrm{Sub}(A)$ はハイティング代数になることが知られているが，これの事実に関する命題の証明である．

定義 B.2.1 モノ射における同値関係

圏 C において，ある２つのモノ射 $m : B \to A$，$n : C \to A$ が同等であるとは，$m \circ i = n$ となる，同型射

$i : B \to C$ が存在することをいい，$m \sim n$ と書く．明らかに関係 $\sim$ は同値関係である．

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "m"'] & & C \arrow[dl, "n"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

また，モノ射 m と同値なモノ射のクラスを $[m]$ と書く．

注意 B.2.2 記法

対象 A の部分対象を，上のようなモノ射のことを指す場合と，そのモノ射のドメインのことを指す場合がある．また，対象 A の部分対象全体のクラスを $\mathrm{Sub}(A)$ と書く．

定義 B.2.3 モノ射における包含関係

圏 C において，ある 2 つのモノ射 $m : B \to A$，$n : C \to A$ に対して，m が n に含まれるとは，$m \circ i = n$ となる，射 $i : B \to C$ が存在することをいい，$m \subseteq n$ と書く．

また，$[m] \subseteq [n] \iff m \subseteq n$ とクラスにおける包含関係を定義する．

上記のように定義された包含関係 $\subseteq$ が $\mathrm{Sub}(A)$ における半順序となることは容易に確かめられる．

注意 B.2.4 記法

部分対象分類子を Ω とし，Ω へ向かう特性射 u に対するただ一つに定まる部分対象 (モノ射) のことを，$\bar{u}$ と書くことにする．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(\bar{u}) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bar{u}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "u"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

補題 B.2.5

部分対象分類子を持つ任意の圏 C における，コドメインが A である 2 つのモノ射 m,n と，射 $u : A \to \Omega$ に対して，以下の 3 つが成り立つ：

(1) $u = \chi(\bar{u})$

(2)$[\overline{\chi(m)}] = [m]$

(3)$[m] = [n] \iff \chi(m) = \chi(n)$.

Proof. (1) は定義より明らか.

(2):(1) より,$\overline{\chi(m)} = m$ を得る．あとはモノ射のクラスの定義から明らか.

(3):

($\Longleftarrow$):(2) より以下が成り立つ.

$$\chi(m) = \chi(n) \Longrightarrow [\overline{\chi(m)}] = [\overline{\chi(n)}] \iff \overline{\chi(m)} = \overline{\chi(n)} \iff [m] = [n]$$

$(\Longrightarrow)$:$[m]=[n]$ とすると，定義から以下が可換になるような同型射 $f:\mathrm{dom}(n)\to\mathrm{dom}(m)$ を得る．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "f"] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[dl, "m"'] \\ A & \end{tikzcd}$$

いま，圏 C は部分対象分類子を持つので，以下のようなプルバック図式が成立する．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

よって，上の 2 つの図式から以下のようなプルバック図式を得る．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "n"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

よって，上の図式における特性射の普遍性から，$\chi(m)=\chi(n)$ を得る． □

定義 B.2.6 特性射間の半順序

任意の特性射 $u,v\in C(A,\Omega)$ に対して，半順序 $\leq$ を以下のように定める．

$$\begin{aligned} u\leq v &\iff [m]\subseteq[n](\chi(m)=u,\chi(n)=v)\\ &\iff [\bar{u}]\subseteq[\bar{v}]\\ &\iff \bar{u}\subseteq\bar{v}\\ &\iff \text{任意の射 } f:\mathrm{dom}(\bar{u})\to\mathrm{dom}(\bar{v}) \text{ に対して}, \bar{u}=\bar{v}\circ f \text{ が成立} \end{aligned}$$

実際に，先ほども述べたように，包含関係 $\subseteq$ は $\mathrm{Sub}(A)$ における半順序になっているので，関係 $\leq$ は $C(A,\Omega)$ における半順序になる．よって，特性射の普遍性から，$(\mathrm{Sub}(A),\subseteq)\cong(C(A,\Omega),\leq)$ となる．

定義 B.2.7 逆像

圏 C における，任意の射 $f:C\to A$ と，任意の A の部分対象 m に対して，$f^{-1}(m)$ を以下のように定義する．

$$f^{-1}(m)=\overline{\chi(m)\circ f}$$

つまり，$f^{-1}(m)$ の特性射は，まさしく $\chi(m)\circ f$ のことである．上の定義は補題 B.2.5 から以下のように，書き直すこともできる．

$$\chi(f^{-1}(m))=\chi(m)\circ f$$

補題 B.2.8
以下の図式はプルバックである.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}
$$

Proof. 図式

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "f\circ f^{-1}(m)"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

が可換であるので，以下のようなプルバック図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[drr, bend left, "!"] \arrow[dr, dashed, "f*"'] \arrow[ddr, bend right, "f\circ f^{-1}(m)"'] & & \\
& \mathrm{dom}(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
& A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

よって，上の図式を書き直すと以下のような図式を得る.

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, dashed, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

いま，部分対象分類子の定義から，右の四角形と全体の四角形が共にプルバックであるので，補題**??**から，左の四角形もプルバックとなる. □

命題 B.2.9
任意のモノ射 n,m でコドメインを A,C に持つようなものを考える．このとき，任意の射 $f : C \to A$ に対して，以下の 3 つの主張は同値である.
(1) $n \sim f^{-1}(m)$
(2) $\chi(n) = \chi(m) \circ f$

(3) 以下の図式をプルバックにするような射 $g : \mathrm{dom}(n) \to \mathrm{dom}(m)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}$$

Proof. ((1) $\implies$ (2)) :

$$\begin{aligned}
n \sim f^{-1}(m) &\iff \chi(n) = \chi(f^{-1}(m)) \\
&\iff \chi(n) = \chi(m) \circ f
\end{aligned}$$

((2) $\implies$ (3)) :
$\chi(n) = \chi(m) \circ f$ より，

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(n) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "n"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C \arrow[r, "\chi(m)\circ f"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

はプルバックであるため可換である．また，

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "g"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

の全体の四角形はプルバックであるから，プルバックの条件を満たす射 $u : \mathrm{dom}(n) \to \mathrm{dom}(f^{-1}(m))$ がただ一つ存在するとわかる．よって，以下の図式を得る．

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(n)) \arrow[r, "g\circ u"'] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "m"] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C \arrow[r, "f"'] & A \arrow[r, "\chi(m)"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

いま，上図の右側の四角形はプルバックであり，全体もプルバックである．よって，補題**??**より左側の四角形もプルバックであるとわかる．
((3) $\implies$ (1)) :

いま，以下の二つの図式はプルバックである．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(n) \arrow[r] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

よって，プルバックの条件を満たす唯一の射 $u : \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \to \mathrm{dom}(n)$ と $u' : \mathrm{dom}(n) \to \mathrm{dom}(f^{-1}(m))$ が存在する．ゆえに，$n \sim f^{-1}(m)$ を得る．

□

命題 B.2.10

以下の２つの主張は同値である．

(1) $n \subseteq f^{-1}(m)$

(2) 以下の図式を可換にするような射 $g : \mathrm{dom}(n) \to \mathrm{dom}(m)$ が存在する：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

Proof. ((1) $\implies$ (2)) :

$n \subseteq f^{-1}(m)$ であることと，補題 B.2.8 より，以下のような可換図式を得る．

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(n)) \arrow[r, "j"] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "1_C"'] & C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

$g = i \circ j$ とすると，求めていた射を得る．

((2) $\implies$ (1)) :

図式

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "n"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

が可換であり，補題 B.2.8 より，

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"'] \\ C \arrow[r, "f"'] & A \end{tikzcd}$$

がプルバックであることより，$f^{-1}(m) \circ u = n$ となるような唯一の射 $u : \mathrm{dom}(n) \to \mathrm{dom}(f^{-1}(m))$ が存在する．よって，$n \subseteq f^{-1}(m)$ となる． □

命題 B.2.11

任意のコドメインが A である，モノ射 n,m と，任意の射 $f : C \to A$ に対して，以下が成立する：

$$m \subseteq n \Longrightarrow f^{-1}(m) \subseteq f^{-1}(n)$$

Proof. $m \subseteq n$ より，$m = n \circ g$ となる射 $g : \mathrm{dom}(m) \to \mathrm{dom}(n)$ が存在する．よって，以下のような可換図式を得る:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"'] \arrow[dr, "g"'] & \\ C \arrow[r, "f"'] & A & \mathrm{dom}(n) \arrow[l, "n"'] \end{tikzcd}$$

また，上図の左側の四角形は補題 B.2.8 よりプルバックなので，$f^{-1}(n) \circ u = f^{-1}(m)$ となる唯一の射 $u : \mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \to \mathrm{dom}(f^{-1}(n))$ が存在する．よって，$f^{-1}(m) \subseteq f^{-1}(n)$ を得る． □

命題 B.2.12

以下の図式が与えられたとする．

$$\mathrm{dom}(n) \xrightarrow{n} C \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} A$$

このとき，n がモノ射であるならば，以下が成立する：

$$f \circ n = g \circ n \iff n \subseteq \langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A)$$

Proof. $f \circ n = g \circ n = h$ は，以下の図式が可換であることと同値である：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "n"'] & A \arrow[d, "\Delta_A"] \\ C \arrow[r, "\langle f,g \rangle"'] & A \times A \end{tikzcd}$$

ここで，命題 B.2.10 より $n \subseteq \langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A)$ が成立することは，上の図式が可換であることと同値である． □

定義 B.2.13 モノ射における共通部分

コドメインが A である 2 つのモノ射 m,n が与えられたとする．このとき，以下のようなプルバック図式を考えることができる：

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, "m^{-1}(n)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "n"'] & A \end{tikzcd}$$

このとき，上の図式における，$m \circ n^{-1}(m)$ のことを m と n の共通部分といい，$m \cap n$ と書く．プルバックであることから，$m \circ n^{-1}(m) = n \circ m^{-1}(n)$ となり，明らかに，$m \cap n = n \cap m$ となることがわかる．

補題 B.2.14

以下が成り立つ：

$$p \subseteq m \cap n \iff p \subseteq m \text{ かつ } p \subseteq n$$

Proof.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(m \cap n) \arrow[r, "n^{-1}(m)"] \arrow[d, "m^{-1}(n)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "n"'] & A \end{tikzcd}$$

はプルバックである．いま，以下の図式を考える：

$$\begin{tikzcd} \mathrm{dom}(p) \arrow[r, "n^{-1}(p)"] \arrow[d, "m^{-1}(p)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\ \mathrm{dom}(n) \arrow[r, "n"'] & A \end{tikzcd}$$

上図が可換つまり，$p \subseteq m$ かつ $p \subseteq n$ ならば，プルバックの性質から，$p \subseteq m \cap n$ を得る．また，$p \subseteq m \cap n$ ならば，プルバックの性質から上図は可換となり，$p \subseteq m$ かつ $p \subseteq n$ を得る． □

この結果は，$[m \cap n]$ が部分対象の集合 $\{[m], [n]\}$ の下限であるということを含意している．よって，$(\mathrm{Sub}(A), \subseteq)$ は下方な準束である．

命題 B.2.15

任意のコドメインが A であるモノ射 m,n と，任意の射 $f : C \to A$ に対して，以下が成立する：

$$f^{-1}(m \cap n) \sim f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)$$

Proof. $m \cap n \subseteq m$ と $m \cap n \subseteq n$ より，命題 B.2.11 から $f^{-1}(m \cap n) \subseteq f^{-1}(m)$ と $f^{-1}(m \cap n) \subseteq f^{-1}(n)$ が

成立する．よって，補題 B.2.14 から，$f^{-1}(m\cap n) \subseteq f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n)$ を得る．また，以下の図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n)) \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "h"] \arrow[d, "f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n)"] \arrow[dr] \arrow[dd, bend right, "h'"'] & \cdot \arrow[r, "m^{-1}(n)"] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"] \\
\cdot \arrow[r, "f^{-1}(n)"'] \arrow[d] & C \arrow[r, "f"'] \arrow[d, "f"'] & A \arrow[d, "1_A"'] \\
\mathrm{dom}(n) \arrow[r, "n"'] & A \arrow[r, "1_A"'] & A
\end{tikzcd}
$$

この図式は定義から明らかに可換である．ゆえ，$m\circ h = n\circ h'$ となる．また，補題 B.2.8 より，

$$
\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(f^{-1}(m)) \arrow[r, "f*"'] \arrow[d, "f^{-1}(m)"'] & \mathrm{dom}(m) \arrow[d, "m"'] \\
C \arrow[r, "f"'] & A
\end{tikzcd}
$$

はプルバック図式であるので，$h = m^{-1}(n)\circ g$ となる唯一の射 $g : \mathrm{dom}(f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n)) \to \mathrm{dom}(m\cap n)$ が存在する．ゆえ，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
f\circ(f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n)) &= m\circ h \\
&= m\circ m^{-1}(n)\circ g \\
&= (m\cap n)\circ g
\end{aligned}
$$

ゆえ，$f\circ(f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n)) \subseteq m\cap n$ を得る．ここで命題 B.2.11 より，

$$
\begin{aligned}
f\circ(f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n)) \subseteq m\cap n &\implies f^{-1}(f\circ(f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n))) \subseteq f^{-1}(m\cap n) \\
&\iff f^{-1}(m)\cap f^{-1}(n) \subseteq f^{-1}(m\cap n)
\end{aligned}
$$

を得る． □

命題 B.2.16

以下が成立する：

$$u \leq v\circ f \iff \bar{v}\circ g = f\circ\bar{u}\text{を満たす射 } g : \mathrm{dom}(\bar{u}) \to \mathrm{dom}(\bar{v}) \text{ が存在する}$$

Proof. 以下が成立することによる：

$$
\begin{aligned}
u \leq v\circ f &\iff \chi(\bar{u}) \leq \chi(\bar{v})\circ f \\
&\iff \chi(\bar{u}) \leq \chi(f^{-1}(\bar{v})) \\
&\iff \bar{u} \subseteq f^{-1}(\bar{v}) \\
&\iff \text{以下の図式を可換にする射 } g \text{ が存在する．}
\end{aligned}
$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(\bar{u})) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\bar{u}"'] & \mathrm{dom}(\bar{v}) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bar{v}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
C \arrow[r, "f"'] \arrow[rr, bend right, "u"'] & A \arrow[r, "v"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

□

命題 B.2.17

以下が成立する：

$$\chi(m) \le \chi(n) \implies \chi(f^{-1}(m)) \le \chi(f^{-1}(n))$$

また $u = \chi(m), v = \chi(n)$ とすると，以下も成立する：

$$u \le v \implies u \circ f \le v \circ f$$

Proof. まず，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\chi(m) \le \chi(n) &\iff m \subseteq n \\
&\implies f^{-1}(m) \subseteq f^{-1}(n) (\text{命題 } B.2.11) \\
&\implies \chi(f^{-1}(m)) \le \chi(f^{-1}(n))
\end{aligned}$$

よって，$\chi(m) \le \chi(n) \implies \chi(f^{-1}(m)) \le \chi(f^{-1}(n))$ を得る．
また，$u = \chi(m), v = \chi(n)$ とすると，以下が成立する：

$$\begin{aligned}
u \le v &\iff \chi(m) \le \chi(n) \\
&\implies \chi(f^{-1}(m)) \le \chi(f^{-1}(n)) \\
&\iff \chi(m) \circ f \le \chi(n) \circ f \\
&\iff u \circ f \le v \circ f
\end{aligned}$$

したがって，$u \le v \implies u \circ f \le v \circ f$ が成立する． □

命題 B.2.18

以下が成立する：

$$f \circ \bar{u} = g \circ \bar{u} \iff u \le \delta_A \circ \langle f, g \rangle$$

Proof. 以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned}
f \circ \bar{u} = g \circ \bar{u} &\iff \bar{u} \subseteq \langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A) \\
&\iff u \le \chi(\langle f, g \rangle^{-1}(\Delta_A)) \\
&\iff u \le \delta_A \circ \langle f, g \rangle
\end{aligned}$$

□

定義 B.2.19 交わり

二つの射 $u, v : A \to \Omega$ に対して，交わり $u \wedge v$ を以下のように定義する：

$$u \wedge v \iff \chi(\bar{u} \cap \bar{v})$$

補題 B.2.20

以下が成立する：

$$w \le u \wedge v \iff w \le u \text{ かつ } w \le v$$

Proof. 以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned} w \le u \cap v &\iff \chi(\bar{w}) \le \chi(\bar{u} \cap \bar{v}) \\ &\iff \bar{w} \subseteq \bar{u} \cap \bar{v} \\ &\iff \bar{w} \subseteq \bar{u} \text{かつ} \bar{w} \subseteq \bar{v} (\text{補題 } B.2.14) \\ &\iff \chi(\bar{w}) \le \chi(\bar{u}) \text{ かつ} \chi(\bar{w}) \le \chi(\bar{v}) \\ &\iff w \le u \text{ かつ } w \le v \end{aligned}$$

□

補題 B.2.21

以下が成立する：

$$v \le w \implies u \wedge v \le w$$

$$v \le w \implies v \wedge u \le w$$

Proof. まず，$v \le w \implies u \wedge v \implies w$ が成り立つことを示す．$v \le w$ と，$u \wedge v$ から以下のプルバック図式を得る：

$$\begin{tikzcd}
\cdot \arrow[r, "\bar{u}^{-1}(\bar{v})"'] \arrow[d, "\bar{v}^{-1}(\bar{u})"'] \arrow[rr, bend left] & \mathrm{dom}(\bar{v})) \arrow[r] \arrow[d, "\bar{v}"'] & \mathrm{dom}(\bar{w}) \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\bar{w}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\
\mathrm{dom}(\bar{u}) \arrow[r, "\bar{u}"'] & A \arrow[r, "1_A"'] \arrow[rr, bend right, "u"'] & A \arrow[r, "w"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

モノ射とモノ射の合成はモノ射であることから，上図における対象・も A の部分対象である．ゆえに，$\bar{v} \circ u^{-1}(\bar{v}) \subseteq \bar{w}$ が成立する．これは定義から以下のように変形することができる：

$$\begin{aligned} \bar{v} \circ u^{-1}(\bar{v}) \subseteq \bar{w} &\iff \chi(\bar{v} \circ \bar{u}^{-1}(\bar{v})) \le \chi(\bar{w}) \\ &\iff \chi(\bar{u} \cap \bar{v}) \le w \\ &\iff u \wedge v \le w \end{aligned}$$

よって，$v \le w \implies u \wedge v \le w$ が成立する．

同様に，$v \le w$ と，$v \wedge u$ から $\bar{u} \circ \bar{v}^{-1}(\bar{u}) \subseteq \bar{w}$ が成立するので，以下のように変形できる：

$$\begin{aligned} \bar{u} \circ v^{-1}(\bar{u}) \subseteq \bar{w} &\iff \chi(\bar{u} \circ \bar{v}^{-1}(\bar{u})) \le \chi(\bar{w}) \\ &\iff \chi(\bar{v} \cap \bar{u}) \le w \\ &\iff v \wedge u \le w \end{aligned}$$

よって，$v \le w \implies v \wedge u \le w$ が成立する． □

命題 B.2.22

以下が成立する：

$$(u \wedge v) \circ f = (u \circ f) \wedge (v \circ f)$$

Proof. $m = \bar{u}, n = \bar{v}$ とする．
まず，命題 B.2.15 より $\chi(f^{-1}(m \cap n)) = \chi(f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n))$ を得る．あとは以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned}
\chi(f^{-1}(m \cap n)) = \chi(f^{-1}(m) \cap f^{-1}(n)) &\iff \chi(f^{-1}(m \cap n)) = (\chi(\overline{\chi(m) \circ f}) \cap (\overline{\chi(n) \circ f})) \\
&\iff \chi(m \cap n) \circ f = (\chi(m) \circ f) \cap (\chi(n) \circ f) \\
&\iff \chi(\bar{u} \cap \bar{v}) \circ f = (\chi(\bar{u}) \circ f) \cap (\chi(\bar{v}) \circ f) \\
&\iff (u \wedge v) \circ f = (u \circ f) \wedge (v \circ f)
\end{aligned}$$

□

命題 B.2.23

交換則と結合則が成立する：
すなわち，(1) : $u \wedge v = v \wedge u$ と (2) : $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$ が成立する．

Proof. (1) : 定義より明らか.
(2) : 以下が成立することによる：

$$\begin{aligned}
(u \wedge v) \wedge w &= \chi(\overline{(u \wedge v)} \cap \bar{w}) \\
&= \chi(\overline{\chi(\bar{u} \cap \bar{v})} \cap \bar{w}) \\
&= \chi((\bar{u} \cap \bar{v}) \cap \bar{w}) \\
&= \chi(\bar{u} \cap (\bar{v} \cap \bar{w})) \\
&= \chi(\bar{u} \cap \overline{\chi(\bar{v} \cap \bar{w})}) \\
&= \chi(\bar{u} \cap \overline{(v \wedge w)}) \\
&= u \wedge (v \wedge w)
\end{aligned}$$

□

命題 B.2.24

任意の $u, v : A \to \Omega$ と任意の $f, g : C \to A$ に対して，以下の 3 つが成立する：
(1) $\mathrm{true}_C = v \circ f \iff f = \bar{v} \circ g$ を満たす $g : C \to \mathrm{dom}(\bar{v})$ が存在する
(2) $\mathrm{true} = v \circ \bar{v} \iff u \leq v$
(3) $\mathrm{true}_C = \delta_A \circ \langle f, g \rangle \iff f = g$

Proof. (1) : 命題 B.2.9 からほぼ明らかに成り立つ.
(2) :(1) を使えばほぼ明らかに成り立つ.
(3) : 命題 B.2.18 により以下が成り立つことによる：

$$\begin{aligned}
\mathrm{true}_C = \delta_A \circ \langle f, g \rangle &\iff f \circ \overline{\mathrm{true}_C} = g \circ \overline{\mathrm{true}_C} (命題\ B.2.18) \\
&\iff f = g (\overline{\mathrm{true}_C} はエピ射)
\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{true}_C}$ がエピ射であるのは，以下が成り立つことによる：

任意の射 $f, g : C \to A$ に対して，

$$
\begin{aligned}
f \circ \overline{\mathrm{true}_C} = g \circ \overline{\mathrm{true}_C} &\Longrightarrow (f \circ \overline{\mathrm{true}_C}) \circ \mathrm{true}_C = (g \circ \overline{\mathrm{true}_C}) \circ \mathrm{true}_C \\
&\Longleftrightarrow f \circ (\overline{\mathrm{true}_C} \circ \mathrm{true}_C) = g \circ (\overline{\mathrm{true}_C} \circ \mathrm{true}_C) \\
&\Longleftrightarrow f \circ 1_C = g \circ 1_C (\text{図式を書けば明らか}) \\
&\Longleftrightarrow f = g
\end{aligned}
$$

□

B.3 Local Language と Local Set Theory

本節では，Local Language と Local Set Theory を定義する．これらは Bell によって定式化されたものであり，一般の高階直観主義論理の構造を備えている．また，実際に Local Set Theory の内部で直観主義論理で成り立つ定理が証明であるということをいくつかの具体例を通して確認する．

定義 B.3.1 Local Language

Local Language $\mathscr{L}$ は以下の，$(S1)$〜$(S3)$ のシンボルクラスと，$(TS1)$〜$(TS4)$ の型と，$(T1)$〜$(T8)$ の項によって定義される：

(シンボルクラス):

$(S1)$ $\mathbf{1}$ を unity 型シンボル，$\mathbf{\Omega}$ を truth value 型シンボルという．

$(S2)$ シンボル **A,B,C...** の集まりを grand 型シンボルという．

$(S3)$ シンボル **f,g,h...** の集まりを関数シンボルという．

(型): 型は，以下のように再帰的に定義される：

$(TS1)$ $\mathbf{1}$,$\mathbf{\Omega}$ は型である．

$(TS2)$ 任意の grand 型シンボルは型である．

$(TS3)$ $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_n}$ が型であるなら，$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ も型である．また，$n = 1$ のとき，$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ は A_1 であり，$n = 0$ のとき，$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ は $\mathbf{1}$ である．

$(TS4)$ $\mathbf{A}$ が型であるなら，$\mathbf{PA}$ も型である．

$\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$，$\mathbf{PA}$ はそれぞれ，$\mathbf{A}$ の積，パワーと呼ばれる．$\mathbf{PA}$ の形をした型はパワー型と呼ばれる．

また，$\mathscr{L}$ は，型 $\mathbf{A}$ ごとに，変数 $x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, ...$ が存在する．また $\mathscr{L}$ は $*$ という記号も持つ．

関数シンボル $\mathbf{f}$ は $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ というようにアサインメイントを指定することよって決められる．($\mathbf{A}, \mathbf{B}$ はそれぞれ型とする．)

(項):項は，以下のように再帰的に定義される：

$(T1)$ $*$ は $\mathbf{1}$ の項である．

$(T2)$ 任意の型 $\mathbf{A}$ に対して，変数 $x_{\mathbf{A}}, y_{\mathbf{A}}, z_{\mathbf{A}}, ...$ は，型 $\mathbf{A}$ の項である．

$(T3)$ 任意の関数シンボル $\mathbf{f} : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ に対して，τ は $\mathbf{A}$ の項であり，$\mathbf{f}(\tau)$ は $\mathbf{B}$ の項である．

$(T4)$ 任意の型 $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_n}$ それぞれの項 $\tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n$ に対して，$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n \rangle$ は型 $\mathbf{A_1} \times \mathbf{A_2} \times ... \times \mathbf{A_n}$ の項であり，$n = 1$ のときは，$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n \rangle$ は τ であり，$n = 0$ のときは，$\langle \tau_1, \tau_2, \tau_3, ..., \tau_n \rangle$ は $*$

である．

$(T5)$ τ が型 $\mathbf{A_1}, \mathbf{A_2}, ..., \mathbf{A_n}$ の項であるとき，$(\tau)_i$ は型 $\mathbf{A_i}$ の項である．$(1 \leq i \leq n)$

$(T6)$ α が型 Ω の項であり，変数 $x_{\mathbf{A}}$ が型 $\mathbf{A}$ の項であるなら，$\{x_{\mathbf{A}} : \alpha\}$ は型 $\mathbf{PA}$ の項である．

$(T7)$ σ と τ が同じ型の項であるなら，$\sigma = \tau$ は型 $\mathbf{\Omega}$ の項である．

$(T8)$ σ と τ がそれぞれ型 $\mathbf{A}$，$\mathbf{PA}$ の項であるなら，$\sigma \in \tau$ は型 $\mathbf{\Omega}$ の項である．

さらに，この後で必要な言葉を以下のように定義する：

$$\text{項}\tau\text{が式である} \iff \tau\text{は型}\mathbf{\Omega}\textbf{の項である}$$

$$\text{変数 } x \text{ の現れが束縛されている} \iff x \text{ が } \{x : \alpha\} \text{ の形に出現する}$$

$$\text{変数 } x \text{ の現れが自由である} \iff x \text{ が } \{x : \alpha\} \text{ の形に出現しない}$$

$$\tau\text{が閉項である} \iff \tau\text{に自由変数が存在しない}$$

$$\tau\text{が文である} \iff \tau\text{が閉項かつ式である}$$

$$\text{代入規則：任意の項}\tau, \sigma\text{と}\sigma\text{と同じ型の変数 } x \text{ に対して}, \tau(x/\sigma) \iff \tau\text{の自由変数 } x \text{ に}\sigma\text{を代入}$$

また，上記の σ の任意の変数 y に対して，y の $\tau(x/\sigma)$ における y の現れが自由であるなら，σ は τ において x に対して自由であるという．

定義 B.3.2 論理演算子

Local Language $\mathscr{L}$ における論理演算子を以下の $(L1) \sim (L9)$ で定める：
（ω は型 $\mathbf{\Omega}$ の変数である．）

$(L1)$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$	for	$\alpha = \beta$
$(L2)$	true	for	$* = *$
$(L3)$	$\alpha \wedge \beta$	for	$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \text{true}, \text{true} \rangle$
$(L4)$	$\alpha \Rightarrow \beta$	for	$(\alpha \wedge \beta) \Leftrightarrow \alpha$
$(L5)$	$\forall x \alpha$	for	$\{x : \alpha\} = \{x : \text{true}\}$
$(L6)$	$flase$	for	$\forall \omega . \omega$
$(L7)$	$\neg \alpha$	for	$\alpha \Rightarrow false$
$(L8)$	$\alpha \vee \beta$	for	$\forall \omega [(\alpha \Rightarrow \omega \wedge \beta \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega]$
$(L9)$	$\exists \alpha$	for	$\forall \omega [\forall x (\alpha \Rightarrow \omega) \Rightarrow \omega]$

以下の公理と規則によって，上記の論理演算子は直観主義論理で成り立つ諸法則を満たすことを確認することができる．

定義 B.3.3 シーケント

Local Language $\mathscr{L}$ におけるシーケントは以下の以下のように書かれる:

$$\Gamma : \alpha$$

ここで α は式であり，Γ は式の有限集合である．

また，以下のように書くことにする:

$\Gamma, \Delta : \alpha$	for	$\Gamma \cup \Delta : \alpha$
$\beta, \Gamma : \alpha$	for	$\Gamma \cup \{\beta\} : \alpha$
$\beta_1, ..., \beta_n : \alpha$	for	$\{\beta_1, ..., \beta_n\} : \alpha$
$: \alpha$	for	$\emptyset : \alpha$

Tautology	$\alpha : \alpha$
Unity	$: x_1 = *$
Equality	$x = y, \alpha(z/x) : \alpha(z/y)$($x$ と y は z に対してαの中で自由である場合)
Products	$: (\langle x_1, ..., x_n \rangle)_i = x_i$
	$: x = \langle (x)_1, ..., (x)_n \rangle$
Comprehension	$: x \in \{x : \alpha\} \Leftrightarrow \alpha$

定義 B.3.4 公理

Local Language $\mathscr{L}$ における公理を以下の 5 つで定める:

定義 B.3.5 規則

Local Language $\mathscr{L}$ における規則を以下の 5 つで定める:（ただし，Cut における α の任意の自由変数は Γ, β

Thinning $\dfrac{\Gamma : \alpha}{\beta, \Gamma : \alpha}$

Cut $\dfrac{\Gamma : \alpha \quad \alpha, \Gamma : \beta}{\Gamma : \beta}$

Substitution $\dfrac{\Gamma : \alpha}{\Gamma(x/\tau) : \alpha(x/\tau)}$

Extensionality $\dfrac{\Gamma : x \in \sigma \Leftrightarrow x \in \tau}{\Gamma : \sigma = \tau}$

Equivalence $\dfrac{\alpha, \Gamma : \beta \quad \beta, \Gamma : \alpha}{\Gamma : \alpha \Leftrightarrow \beta}$

の中で自由である．$Subsutitution$ における τ は x に対して，Γ と α の中で自由である．$Extensionality$ における x は Γ, σ, τ において自由ではない.）

定義 B.3.6 導出可能性

S をシーケントの集合として，S からの証明図式を頂点を持った有限木として定義する．また，その木のノードは，以下の条件を満たすシーケントであるとする：

(1) : 任意のノードは上にあるノードからから規則を用いて導き出されたものである

(2) : 一番上のノードは公理か S の要素である

この証明図式の頂点を S からの証明の結果と呼ぶ.

また，シーケント $\Gamma : \alpha$ が証明の結果であるとき，S から公理と規則を用いて導出可能 (証明可能) であるとい

い，以下のように書く：

$$\Gamma \vdash_S \alpha$$

また，$\Gamma \vdash_\emptyset \alpha$ のことを，$\Gamma \vdash \alpha$ と書き，妥当なシーケントとよぶ．$\emptyset \vdash_\emptyset \alpha$ を $\vdash_\emptyset \alpha$ と書き，α は S から導出可能 (証明可能) という．

ようやく，Local Set Theory を定義することができるようになった．

定義 B.3.7 Local Set Theory

Local Language $\mathscr{L}$ における Local Set Theory S とは，導出可能性の下で閉じたシーケント集まりのことである．つまり，S を Local Set Theory とし，$\Gamma : \alpha$ を任意のシーケントとすると以下が成立する：

$$\Gamma \vdash_S \alpha \iff S \text{ において } (\Gamma : \alpha)$$

また，明らかに任意のシーケントの集まりは，以下で定義される Local Set Theory $\bar{S}$ を創出する：

$$\bar{S} \text{において } (\Gamma : \alpha) \iff \Gamma \vdash_S \alpha$$

もし，$\bar{S} = S'$ であるならば，S は Local Set Theory S' における公理の集合と言われる．また，公理の集合が空集合であるものから創出された Local Set Theory を純粋な (pure)Local Set Theory と言い，L と書く．

命題 B.3.8 Local Set Theory における 論理$_1$

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\vdash \text{true}$

(2) $x = x' \vdash x' = x$(対称律)

(3) $\alpha \vdash \alpha = \text{true}$

(4) $\alpha = \text{true} \vdash \alpha$

(5) $\langle x, y\rangle = \langle x' = y'\rangle \vdash x = x'$

(6) $\langle x, y\rangle = \langle x' = y'\rangle \vdash y = y'$

Proof. (1):ほとんど明らか．

(2):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{r \text{ として } z = x \text{ をとる}}{x = x', r(z/x) : r(z/x')}\ (equality)}{x = x', x = x : x' = x} \qquad \cfrac{: x = x}{x = x' : x = x}\ (thinning)}{x = x' : x' = x}\ (cut)$$

(3):

$$\cfrac{\cfrac{\alpha : \alpha}{\text{true}, \alpha : \alpha}\ (thinning) \qquad \cfrac{\text{true}}{\alpha, \alpha : \text{true}}\ (thinning)}{\alpha : \alpha \iff \text{true}}\ (equivarence)$$

(4):

ω, ω' を式とする．

$$
\dfrac{
  \dfrac{
    \dfrac{
      \dfrac{
        \dfrac{\dfrac{}{\omega=\omega':\omega'=\omega}\,(2)}{\omega=\omega':\omega'=\omega}\,(\mathit{thinning})
        \qquad
        \dfrac{\dfrac{}{\omega'=\omega,\omega':\omega}\,(\mathit{equality})}{\omega=\omega',\omega'=\omega,\omega':\omega}\,(\mathit{thinning})
      }{\omega=\omega',\omega':\alpha}\,(\mathit{cut})
    }{\alpha=\omega',\omega':\alpha}\,(\mathit{substitution})
  }{\alpha=\mathrm{true},\mathrm{true}:\alpha}\,(\mathit{substitution})
  \qquad
  \dfrac{:\mathrm{true}}{\alpha=\mathrm{true}:\mathrm{true}}\,(\mathit{thinning})
}{\alpha=\mathrm{true}:\alpha}\,(\mathit{cut})
$$

(5):

証明図がとても大きくなるので省略する．

(6):

証明図がとても大きくなるので省略する．

□

命題 B.3.9 Local Set Theory における 論理$_2$

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\Gamma:\alpha \quad \Gamma:\beta}{\Gamma:\alpha\wedge\beta}$

(2) $\dfrac{\alpha,\Gamma:\gamma}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\gamma}$

(3) $\dfrac{\beta,\Gamma:\gamma}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\gamma}$

Proof. 証明図が大きくなるので省略する．命題 B.3.8 で成り立つことを使う． □

命題 B.3.10 Local Set Theory における 論理$_3$(implication)

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\alpha,\Gamma:\beta}{\Gamma:\alpha\Rightarrow\beta}$

(2) $\dfrac{\Gamma:\alpha \quad \beta,\Gamma:\gamma}{\alpha\Leftrightarrow\beta,\Gamma:\gamma}$

(3) $\dfrac{\Gamma:\alpha \quad \beta,\Gamma:\gamma}{\beta\Leftrightarrow\alpha,\Gamma:\gamma}$

(4) $\dfrac{\Gamma:\alpha \quad \beta,\Gamma:\gamma}{\alpha\Rightarrow\beta,\Gamma:\gamma}$

(5) $\dfrac{\Gamma:\alpha\Rightarrow\beta}{\Gamma,\alpha:\beta}$

Proof. (1):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\alpha:\alpha}{\alpha,\Gamma:\alpha}\ (thinning)}{\alpha\wedge\beta,\Gamma:\alpha}\ (\text{命題 }B.3.9(2)) \qquad \cfrac{\alpha,\Gamma:\beta \qquad \cfrac{\alpha:\alpha}{\alpha.\Gamma:\alpha}\ (thinning)}{\alpha,\Gamma:\alpha\wedge\beta}\ (\text{命題 }B.3.9(1))}{\cfrac{\Gamma:(\alpha\wedge\beta)\Leftrightarrow\alpha}{\Gamma:\alpha\Rightarrow\beta}\ (L4)}\ (equivalence)$$

(2)(3)(4) は省略する．

(5):

$$\cfrac{\cfrac{\Gamma:\alpha\Rightarrow\beta}{\Gamma,\alpha:\alpha\Rightarrow\beta}\ (thinning) \qquad \cfrac{\cfrac{\alpha:\alpha}{\Gamma,\alpha:\alpha}\ (thinning) \qquad \cfrac{\beta:\beta}{\Gamma,\alpha,\beta}\ (thinning\times 2)}{\alpha\Rightarrow\beta,\Gamma,\alpha:\beta}\ (\text{命題 }B.3.10(4))}{\Gamma,\alpha:\beta}\ (cut)$$

□

命題 B.3.11 Local Set Theory における 論理$_4$(conjunction)

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\alpha,\beta:\gamma}{\alpha\wedge\beta:\gamma}$

(2) $\dfrac{\alpha\wedge\beta:\gamma}{\alpha,\beta:\gamma}$

(3) $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\wedge\Gamma:\alpha}$

(4) $\dfrac{\wedge\Gamma:\alpha}{\Gamma:\alpha}$

(なお，Γ は式の集合 $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ のことであり，$\wedge\Gamma$ は $\alpha_1\wedge...\wedge\alpha_n$ のことである．)

Proof. □

(1):二段階に分けて証明する：

(i):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{\langle\alpha,\beta\rangle=\langle\text{true},\text{true}\rangle:\beta=\text{true}}\ (\text{命題 }B.3.8(6))}{\alpha\wedge\beta:\beta=\text{true}}\ (L3) \qquad \cfrac{\cfrac{}{\beta=\text{true}:\beta}\ (\text{命題 }B.3.8(4))}{\alpha\wedge\beta,\beta=\text{true}:\beta}\ (thinning)}{\alpha\wedge\beta:\beta}\ (cut) \qquad \cfrac{\cfrac{\alpha,\beta:\gamma}{\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}\ (\text{命題 }B.3.10(1))}{\alpha\wedge\beta,\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}\ (thinning)$$
$$\cfrac{\alpha\wedge\beta:\beta \qquad \alpha\wedge\beta,\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}{\alpha\wedge\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}\ (cut)$$

(ii)

$$
\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha}{\alpha\wedge\beta:\alpha}\ (\text{命題 } B.3.9(2)) \qquad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\overline{\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\ (i) \qquad \dfrac{\alpha:\alpha \qquad \dfrac{\gamma:\gamma}{\gamma,\alpha:\gamma}\ (thining)}{\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\ (\text{命題 } B.3.10(4))}{\alpha\wedge\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}\ (cut)}{\alpha,\alpha\wedge\beta:\alpha\Rightarrow\gamma}\ (thinning) \qquad \dfrac{\overline{\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\ (i)}{\alpha\wedge\beta,\alpha\Rightarrow\gamma,\alpha:\gamma}\ (thining)}{\alpha,\alpha\wedge\beta:\gamma}\ (cut)}{\alpha\wedge\beta:\gamma}\ (cut)
$$

(2)

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\alpha:\alpha}{\alpha,\beta:\alpha}\ (thinning) \qquad \dfrac{\beta:\beta}{\alpha,\beta:\beta}\ (thinning)}{\alpha,\beta:\alpha\wedge\beta}\ (\text{命題 } B.3.9(1)) \qquad \dfrac{\alpha\wedge\beta:\gamma}{\alpha,\beta,\alpha\wedge\beta:\gamma}\ (thinning)}{\alpha,\beta:\gamma}\ (cut)
$$

(3):Γ の要素数に関する帰納法で証明する：$n-1$ 個以下の式に関して (3) が成立するとする．このとき，$\Gamma'=\{\alpha_2,...,\alpha_n\}$ とおくと以下が成立する：

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma:\alpha}{\alpha_1,\Gamma':\alpha}\ (def)}{\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\ (\text{命題 } B.3.10(1))}{\wedge\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\ (\text{帰納法の仮定})}{\wedge\Gamma',\alpha_1:\alpha}\ (\text{命題 } B.3.10(5))}{\alpha_1\wedge(\wedge\Gamma'):\alpha}\ (\text{命題 } B.3.11(2))}{\wedge\Gamma:\alpha}\ (def)
$$

(4):(3) と同様に Γ の要素数に関する帰納法で証明する:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\wedge\Gamma:\alpha}{\alpha_1\wedge(\wedge\Gamma'):\alpha}\ (def)}{\wedge\Gamma',\alpha_1:\alpha}\ (\text{命題 } B.3.11(2))}{\wedge\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\ (\text{命題 } B.3.10(1))}{\Gamma':\alpha_1\Rightarrow\alpha}\ (\text{帰納法の仮定})}{\alpha_1,\Gamma':\alpha}\ (\text{命題 } B.3.10(5))}{\Gamma:\alpha}\ (def)
$$

命題 B.3.12 Local Set Theory における 論理$_5$(universal quantification)

Local Set Theory においては以下が成立する：

(1) $\dfrac{\Gamma:\alpha\Leftrightarrow\beta}{\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}}$

(2) $\dfrac{\Gamma:\alpha}{\Gamma:\forall x\alpha}$

(3) $\dfrac{\Gamma:\{x:\alpha\}=\{x:\beta\}}{\Gamma:\alpha\Leftrightarrow\beta}$

(4) $\forall x \alpha \vdash \alpha$

Proof. 省略 □

もちろん，この他にも直観主義論理で成り立つことは Local Set Theory の論理体系においても幾分証明は厄介であるが証明することができる．この意味で Local Set Theory は (高階) 直観主義論理と言える．

B.4 Local Set Theory のトポスモデルにおける健全性

本節では，トポスを用いて Local Set Thoery の解釈を行い，実際に健全性定理を証明する．なお，[3] では省略されている箇所や間違った箇所があったが，それを補い，訂正することによって完全な証明を与えた．

まず，任意のトポスにおいて Local Set Theory をどのように解釈するかを見る．そして「式の妥当性」という概念を与える．

定義 B.4.1 トポス解釈

Local Language $\mathscr{L}$ と任意のトポス $\mathscr{E}$ が与えられたとする．$\mathscr{L}$ の $\mathscr{E}$ における解釈 $\mathbf{I}$ を以下のように定義する:

(i): $\mathscr{L}$ の型 $\mathbf{A}$ の $\mathbf{I}$ 解釈は $\mathscr{E}$ の対象 $\mathbf{A_I}$ とし，以下のように定める：

$(\mathbf{A_1} \times ... \times \mathbf{A_n})_\mathbf{I}$=$(\mathbf{A_1})_\mathbf{I}$×...×$(\mathbf{A_n})_\mathbf{I}$

$(\mathbf{PA})_\mathbf{I}$=$P(\mathbf{A})_\mathbf{I}$

$\mathbf{1_I}$=1（$\mathscr{E}$ における終対象）

$\mathbf{\Omega_I}$=$\Omega_\mathscr{E}$

(ii):$\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ であるような任意の関数シンボル $\mathbf{f}$ の $\mathbf{I}$ 解釈は,$\mathscr{E}$ の射 $\mathbf{f_I} : \mathbf{A_I} \to \mathbf{B_I}$ である．より一般的には，$\mathscr{L}$ の解釈とは，ペア $(\mathscr{E}, \mathbf{I})$ のことである．しばしば，$\mathscr{E}$ の対象 $\mathbf{A_I}$ を $\mathbf{A}_\mathscr{E}$ または，単に A と書く．

また，解釈 $(\mathscr{E}, \mathbf{I})$ を以下のように，$\mathscr{L}$ の項に対しても拡張することができる．型 $\mathbf{B}$ の項 τ とする．$x_1, ...x_n$ を型 $\mathbf{A_1}, ...\mathbf{A_n}$ の異なる変数で，τ の自由変数をすべて含むものとする．列 $(x_1, ...x_n)$ を $\mathbf{x}$ と書くことにする．

τ の $\mathbf{I}$ 解釈とは，$\mathscr{E}$ における射 $A_1 \times ... \times A_n \to B$ のことであり，$[\![\tau]\!]_{\mathbf{I},\mathbf{x}}$ または，$[\![\tau]\!]_\mathbf{x}$ と書かれ，以下のように再帰的に定義される：

$(\mathbf{I}1) : [\![*]\!]_\mathbf{x} = \mathscr{E}$ における唯一の射 : $A_1 \times ... \times A_n \to 1$

$(\mathbf{I}2) : [\![x_i]\!]_\mathbf{x} = \pi_i$, 射影射 $A_1 \times ... \times A_n \to A_i (1 \leq i \leq n)$

$(\mathbf{I}3) : [\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_\mathbf{x} = \mathbf{f_I} \circ [\![\tau]\!]_\mathbf{x}$

$(\mathbf{I}4) : [\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_\mathbf{x} = \langle [\![\tau_1]\!]_\mathbf{x}, ..., [\![\tau_1]\!]_\mathbf{x} \rangle$

$(\mathbf{I}5) : [\![(\tau)_i]\!]_\mathbf{x} = \pi_i \circ [\![\tau]\!]_\mathbf{x}$

$(\mathbf{I}6) : [\![\{y : \alpha\}]\!]_\mathbf{x} = ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can})^\wedge$

(ここにおける u は $x_1, ...x_n$ の一つではないが，α の中において y に対して自由である．また y は型 $\mathbf{C}$ の項である．射 can は標準的な同型射 $C \times (A_1 \times ... \times A_n) \cong C \times A_1 \times ... \times A_n$ である．)

$(\mathbf{I}7) : [\![\sigma = \tau]\!]_\mathbf{x} = \delta_C \circ [\![\langle \sigma, \tau \rangle]\!]_\mathbf{x}$

(ここにおける σ, τ は型 $\mathbf{C}$ の項である．)

$(\mathbf{I}8) : [\![\sigma \in \tau]\!]_\mathbf{x} = \in_C \circ [\![\langle \sigma, \tau \rangle]\!]_\mathbf{x}$

(ここにおける σ は型 $\mathbf{C}$ の項である．)

補題 B.4.2

$[\![\mathrm{true}]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$ が成立する．(なお，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ で $\mathbf{A} = A_1 \times ... \times A_n$ であり，$x_i : A_i (1 \leq n)$ とする．)

Proof. まず，定義から以下が成立する：

$$\begin{aligned} [\![\mathrm{true}]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![* = *]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= \delta_{\mathbf{A}} \circ [\![\langle *, * \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle [\![*]\!]_{\mathbf{x}}, [\![*]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \end{aligned}$$

いま，以下の図式はプルバックである．

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "!"] \arrow[d, "\langle [\![*]\!]_{\mathbf{x}}, [\![*]\!]_{\mathbf{x}} \rangle"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}"] \\ \mathbf{A} \times \mathbf{A} \arrow[r, "\delta_{\mathbf{A}}"'] & \Omega \end{tikzcd}$$

よって，$[\![\mathrm{true}]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$ を得る． □

補題 B.4.3 テクニカル補題

C を有限積を持つ圏とし，$B, A_1, ..., A_n$ を圏 C における対象とする．射 $\mathrm{can}, \mathrm{can}^*$ を以下のような標準的な同型射

$$\mathrm{can} : B \times (A_1 \times ... \times A_n) \cong B \times A_1 \times ... \times A_n$$
$$\mathrm{can}^* : B \times (B_1 \times ... \times B_m) \cong B \times B_1 \times ... \times B_m$$

とし，射 $proj$ を射の合成 $\pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}$ とする．

このとき，任意の射 $f_1 : A_1 \times ... \times A_n \to B_1$,...,$f_m : A_1 \times ... \times A_n \to B_m$ に対して，以下が成立する：

$$\langle \pi_1, f_1 \circ proj, ..., f_m \circ proj \rangle \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}^* \circ (1_B \times \langle f_1, ..., f_m \rangle)$$

Proof. これは，以下の図式を考えれば簡単に示すことができる：

$$\begin{tikzcd} B \times A_1 \times ... \times A_n \arrow[d, "\pi_1"] & B \times (A_1 \times ... \times A_n) \arrow[l, "\mathrm{can}"'] \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "1_B \times \langle f_1 \times ... \times f_m \rangle"] & A_1 \times ... \times A_n \arrow[d, "\langle f_1 \times ... \times f_m \rangle"] \arrow[dd, bend left, "f_i"] \\ B \arrow[d, "1_B"] & B \times (B_1 \times ... \times B_m) \arrow[l, "p_1"'] \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "\mathrm{can}^*"] & B_1 \times ... \times B_m \arrow[d, "\pi'_i"] \\ B & B \times B_1 \times ... \times B_m \arrow[l, "p'_1"'] \arrow[r, "p'_{i+1}"] & B_i (1 \leq i \leq n) \end{tikzcd}$$

(ここで，π, p, p' も π と同様に標準的な射影射であるとする．)

上図は，積の普遍性と，$\mathrm{can}, \mathrm{can}^*$ が標準的な同型射であることにより明らかに可換である．よって，真ん中

の列における積の普遍性より，以下の等式を得る：

$$\begin{aligned}\mathrm{can}^* \circ (1_B \times \langle f_1 \times ... \times f_m \rangle) &= \langle \pi_1 \circ \mathrm{can}, f_1 \circ \pi_2, ..., f_m \circ \pi_2 \rangle \\ &= \langle \pi_1 \circ \mathrm{can}, f_1 \circ proj \circ \mathrm{can}, ..., f_m \circ proj \circ \mathrm{can} \rangle \\ &= \langle \pi_1, f_1 \circ proj, ..., f_m \circ proj \rangle \circ \mathrm{can}\end{aligned}$$

よって，$\langle \pi_1, f_1 \circ proj, ..., f_m \circ proj \rangle \circ \mathrm{can} = \mathrm{can}^* \circ (1_B \times \langle f_1, ..., f_m \rangle)$ は成立する． □

補題 B.4.4 余剰変数における補題

τ を $x_1, ..., x_n$ の中で自由変数を持つ任意の項とし，$1 < p_1 < ... < p_m < n$ に対する $x_{p_1}, ..., x_{p_m}$ が τ におけるすべての自由変数を含むとする．
このとき，$(x_1, ..., x_n) = \mathbf{x}$，$(x_{p_1}, ..., x_{p_n}) = \mathbf{x}'$ と書くとすると，任意のトポス $\mathscr{E}$ における任意の $\mathscr{L}$ 解釈に対して，以下が成立する：

$$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$$

Proof. τ の構成に関する帰納法で証明する：
まず，τ が原始式の場合を示す．つまり，τ が $*$ の場合と，x_i の場合に成立することを示す．
(**$*$の場合**)：
$[\![*]\!]_{\mathbf{x}} = [\![*]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_2} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を示す．実際にこれは，$[\![*]\!]_{\mathbf{x}}$ と，$[\![*]\!]_{\mathbf{x}'}$ が終対象 1 へ向かう普遍射であり，明らかに型は整合的であることにより，自明に成り立つ．
(**$\tau_\mathbf{i}$の場合**)：
$[\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_2} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を示せばよい．まず，$[\![x_i]\!]_{\mathbf{x}'}$ という射が存在するための条件から，$p_1 \leq i \leq p_m$ となることが分かる．よって，定義から以下を得る：

$$[\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_2} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \iff \pi_i = \pi_i \circ \langle \pi_{p_1}, ..., \pi_{p_m} \rangle$$

いま，π は標準的射影であり，$p_1 \leq i \leq p_m$ であるので，二段目の式は明らかに成り立つ．よって，この場合も成立する．

次に，帰納のフェーズに入る．$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ が成立していると仮定すると，以下のそれぞれの場合で成立することを示す：
(**$\mathbf{f}(\tau)$ の場合**)：
定義より以下が成立する：

$$\begin{aligned}[\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}} &= \mathbf{f_I} \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= \mathbf{f_I} \circ ([\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}) (\text{帰納法の仮定}) \\ &= (\mathbf{f_I} \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'}) \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= [\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

よって，$[\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\mathbf{f}(\tau)]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．
(**$\langle \tau_\mathbf{1}, ..., \tau_\mathbf{n} \rangle$ の場合**)：
定義より以下が成立する：

$$\begin{aligned}[\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \langle [\![\tau_1]\!]_{\mathbf{x}}, ..., [\![\tau_n]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \langle [\![\tau_1]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}, ..., [\![\tau_n]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \rangle (\text{帰納法の仮定}) \\ &= \langle [\![\tau_1]\!]_{\mathbf{x}'}, ..., [\![\tau_n]\!]_{\mathbf{x}'} \rangle \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= [\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

よって，$[\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\langle \tau_1, ..., \tau_n \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($(\tau)_{\mathbf{i}}$の場合)：

定義より以下が成立する：

$$\begin{aligned}
[\![(\tau)_i \rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \pi_i \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \pi_i \circ [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} (\text{帰納法の仮定}) \\
&= [\![(\tau)_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![(\tau)_i \rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![(\tau)_i]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($\tau = \tau'$の場合)

定義より以下が成立する:

$$\begin{aligned}
[\![\tau = \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \delta_C \circ [\![\langle \tau, \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \delta_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \delta_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}'} \rangle \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \delta_C \circ [\![\langle \tau, \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [\![\tau = \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\tau = \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau = \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($\tau \in \tau'$の場合)：

定義より以下が成立する:

$$\begin{aligned}
[\![\tau \in \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}} &= \in_C \circ [\![\langle \tau, \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= \in_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\
&= \in_C \circ \langle [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}'}, [\![\tau']\!]_{\mathbf{x}'} \rangle \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} (\text{帰納法の仮定}) \\
&= \in_C \circ [\![\langle \tau, \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\
&= [\![\tau \in \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\tau \in \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau \in \tau' \rangle]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．

($\{\mathbf{y} : \alpha\}$ の場合)：

このとき，y を型 $\mathbf{B}$ の項，$\{y : \alpha\}$ を型 $\mathbf{PB}$ の項とすると，定義と補題 B.4.3(テクニカル補題) からから以下が成立する:

$$\begin{aligned}
[\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}} &= ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can})^\wedge \\
&= ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ [\![\langle u, x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can})^\wedge (\text{帰納法の仮定}) \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \langle [\![u]\!]_{u\mathbf{x}}, [\![x_{p_1}]\!]_{u\mathbf{x}}, ..., [\![x_{p_m}]\!]_{u\mathbf{x}} \rangle \circ \mathrm{can}]^\wedge \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \langle \pi_1, [\![x_{p_1}]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj, ..., [\![x_{p_m}]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj \rangle \circ \mathrm{can}]^\wedge (proj = \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} \text{であることによる}) \\
&= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \mathrm{can}^* \circ (1_B \times [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m} \rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^\wedge (\text{補題 } B.4.3(\text{テクニカル補題})) \\
&= [\in_B \circ (1_B \times ([\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}'} \circ \mathrm{can}^*)^\wedge) \circ (1_B \times [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m} \rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^\wedge (\in_B \text{ の定義}) \\
&= [\in_B \circ (1_B \times [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}'}) \circ (1_B \times [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m} \rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^\wedge \\
&= [\in_B \circ (1_B \times ([\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p_1}, ..., x_{p_m} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}))]^\wedge \\
&= [\![\{y : \alpha\}]\!]_{\mathbf{x}'} \circ [\![\langle x_{p1}, ...x_{pm} \rangle]\!]_{\mathbf{x}}
\end{aligned}$$

よって，$[\![\{y:\alpha\}]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\{y:\alpha\}]\!]_{\mathbf{x'}} \circ [\![\langle x_{p1},...x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ を得る．したがって，$x_1,...,x_n$ の中で自由変数を持つ任意の項 τ に対して，任意の解釈のもので，$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x'}} \circ [\![\langle x_{p1},...x_{pm}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$ が成立する． □

補題 B.4.5 代入補題

[*1] τ を $z_1,...,z_m$ の中に自由変数を持つ任意の項とし，$\sigma_1,...,\sigma_m$ を $1 \leq i \leq$ それぞれに対して，σ_i が τ の中で，z_i に対して自由あるものとする．このとき，任意のトポスにおける $\mathscr{L}$ の解釈に対して，以下が成立する：

$$[\![\tau(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle \sigma_{\mathbf{1}},...,\sigma_{\mathbf{m}}\rangle]\!]_{\mathbf{x}}$$

(ここで，$\mathbf{x}$ は $\sigma_1,...,\sigma_m$ のすべての自由変数を含んでいるとする．)

Proof. τ の構成に関する帰納法で証明する．原始式の場合と，$\{y:\alpha\}$ 以外の場合は前補題と同様にほとんど定義をなぞるだけなので省略する．

($\{y:\alpha\}$ **の場合):**

このとき，y を型 $\mathbf{B}$ の項，$\{y:\alpha\}$ を型 $\mathbf{PB}$ の項とする．まず，以下の二つに場合分けをして考えることにする．

((i) y が $z_1,...,z_m$ の中に存在しない場合):

このとき，以下が成立する:

$$\begin{aligned}[\![\{y:\alpha\}(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![\{y:\alpha(\mathbf{z}/\sigma)\}]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= [[\![\alpha(\mathbf{z}/\sigma)(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge} \\ &= [[\![\alpha(y/u)(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}\end{aligned}$$

((ii) y が $z_1,...,z_m$ の中に存在する場合):

このとき，$\mathbf{z} = y\mathbf{z}', \sigma = \rho\sigma'$ と書くことができ，以下が成立する：

$$\begin{aligned}[\![\{y:\alpha\}(y\mathbf{z}'/\rho\sigma')]\!]_{\mathbf{x}} &= [\![\{\rho:\alpha(\mathbf{z}/\sigma)\}]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= [[\![\alpha(\mathbf{z}/\sigma)(\rho/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge} \\ &= [[\![\alpha(y/u)(y\mathbf{z'}/\rho\sigma')]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}\end{aligned}$$

よって，(i)(ii) より，y の自由変数の位置によらずに議論を進めていくことができるとわかる．ここで，帰納法の仮定と補題 B.4.3(テクニカル補題) を使うと以下が成立する：

$$\begin{aligned}[\![\{y:\alpha\}(\mathbf{z}/\sigma)]\!]_{\mathbf{x}} &= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ [\![\langle u,\sigma_1,...,\sigma_m\rangle]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}(\text{帰納法の仮定}) \\ &= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \langle \pi_1, [\![\sigma_1]\!]_{\mathbf{x}} \circ [\![\langle x_1,...,x_n\rangle]\!]_{u\mathbf{x}},...,[\![\sigma_m]\!]_{\mathbf{x}} \circ [\![\langle x_1,...,x_n\rangle]\!]_{u\mathbf{x}}\rangle_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge} \\ &= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \langle \pi_1, [\![\sigma_1]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj,...,[\![\sigma_m]\!]_{\mathbf{x}} \circ proj\rangle_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}]^{\wedge}(proj = [\![\langle x_1,...,x_n\rangle]\!]_{u\mathbf{x}}\text{による}) \\ &= [[\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{x}} \circ \mathrm{can}^* \circ (1_B \times [\![\langle \sigma_1,...,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^{\wedge}(B.4.3) \\ &= [\in_B \circ(1_B \times [\![\alpha(y/u)]\!]_{u\mathbf{z}} \circ \mathrm{can}^*)^{\wedge} \circ (1_B \times [\![\langle \sigma_1,...,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^{\wedge}(\in_B \text{ の定義}) \\ &= [\in_B \circ(1_B \times [\![\{y:\alpha\}]\!]_{\mathbf{z}}) \circ (1_B \times [\![\langle \sigma_1,...,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}})]^{\wedge} \\ &= [\in_B \circ(1_B \times [\![\{y:\alpha\}]\!]_{\mathbf{z}}) \circ [\![\langle \sigma_1,...,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}}]^{\wedge} \\ &= [\![\{y:\alpha\}]\!]_{\mathbf{z}} \circ [\![\langle \sigma_1,...,\sigma_m\rangle]\!]_{\mathbf{x}}\end{aligned}$$

*1 [3] に掲載されているこの補題の証明に一部間違いが見られた．本論文には，その間違いを訂正したものを掲載した．

よって，$\llbracket \{y:\alpha\}(\mathbf{z}/\sigma)\rrbracket_{\mathbf{x}} = \llbracket \{\mathbf{y}:\alpha\}\rrbracket_{\mathbf{z}} \circ \llbracket \langle \sigma_{\mathbf{1}}, ..., \sigma_{\mathbf{m}}\rangle \rrbracket_{\mathbf{x}}$ を得る．

□

定義 B.4.6 妥当性

トポスにおける $\mathscr{L}$ の解釈 $\mathbf{I}$ が与えられたとする．このとき，任意の式の有限集合 $\Gamma = \{\alpha_1, ..., \alpha_m\}$ に対する $\mathbf{I}$ 解釈を以下のように書くことにする：

$$\llbracket \Gamma \rrbracket_{\mathbf{I},\mathbf{x}} = \begin{cases} \llbracket \alpha_1 \rrbracket_{\mathbf{I},\mathbf{x}} \wedge ... \wedge \llbracket \alpha_m \rrbracket_{\mathbf{I},\mathbf{x}} & m > 0 \text{ のとき} \\ \mathrm{true}_{\mathbf{A}} & m = 0 \text{ のとき} \end{cases}$$

(ただし，$\mathbf{A}$ は項 $\mathbf{x}$ の型とする．)

また，式 β が与えられたとし，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ を $\Gamma \cup \beta$ におけるすべての自由変数を含むとする．このとき，シーケント $\Gamma : \beta$ が解釈 I のもとで妥当であること ($\Gamma \models_{\mathbf{I}} \beta$) を，以下のように定める：

$$\Gamma \models_{\mathbf{I}} \beta \iff \llbracket \Gamma \rrbracket_{\mathbf{I},\mathbf{x}} \leq \llbracket \beta \rrbracket_{\mathbf{I},\mathbf{x}}$$

(以下の図式を参照):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{dom}(\overline{\llbracket \Gamma \rrbracket_{I,\mathbf{x}}}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\llbracket \Gamma \rrbracket_{I,\mathbf{x}}}"'] & \mathrm{dom}(\overline{\llbracket \beta \rrbracket_{I,\mathbf{x}}}) \arrow[r] \arrow[d, "\overline{\llbracket \beta \rrbracket_{I,\mathbf{x}}}"'] & 1 \arrow[d, "\mathrm{true}_{\mathbf{A}}"] \\
\mathbf{A} \arrow[r, "1_{\mathbf{A}}"'] \arrow[rr, bend right, "\llbracket \Gamma \rrbracket_{\mathbf{x}}"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "\llbracket \beta \rrbracket_{\mathbf{x}}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

以下，このように定めた妥当性の元で成り立つことを確認していくことにする．

補題 B.4.7

以下が成立する．(なお，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ で $\mathbf{A} = A_1 \times ... \times A_n$ であり，$x_i : A_i (1 \leq n)$ とする．)：

$$\models_{\mathbf{I}} \alpha \iff \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$$

Proof. ($\Leftarrow$):明らか.

($\Rightarrow$):$\mathbf{x}$ の型を $\mathbf{A}$ であるので，以下の可換図式を考えれば明らかに成り立つ：

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{A} \arrow[r, "1_{\mathbf{A}}"] \arrow[d, "\llbracket \alpha \rrbracket_{\mathbf{x}}"'] & \mathbf{A} \arrow[d, "\mathrm{true}_{\mathbf{A}}"] \\
\Omega \arrow[r, "1_{\Omega}"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

□

注意 B.4.8

これにより，degenerate トポス (始対象と終対象が同型となるトポス) においては任意の式が妥当になることが分かる．

補題 B.4.9

以下が成立する．(なお，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ で $\mathbf{A} = A_1 \times ... \times A_n$ であり，$x_i : A_i (1 \leq n)$ とする．)：

$$\Gamma \models_{\mathbf{I}} \alpha \iff [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\Gamma \models_{\mathbf{I}} \alpha &\iff [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \\ &\iff \mathrm{true}_{\mathbf{A}} = [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}(\text{補題 } B.2.24(2))\end{aligned}$$

□

補題 B.4.10

以下が成立する：

$$\Gamma \models_{\mathbf{I}} \sigma = \tau \iff [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}$$

Proof.

$$\begin{aligned}\Gamma \models_{\mathbf{I}} \sigma &\iff [\![\sigma = \tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_A(\text{補題 } B.4.9) \\ &\iff \delta_B \circ \langle [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}}, [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_A \\ &\iff \delta_B \circ \langle [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}, [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \rangle = \mathrm{true}_A \\ &\iff [\![\sigma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = [\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}(\text{補題 } B.2.24(3))\end{aligned}$$

□

補題 B.4.11

以下が成立する．(なお，$\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$ で $\mathbf{A} = A_1 \times ... \times A_n$ であり，$x_i : A_i (1 \leq n)$ とする．)：

$$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) \wedge \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$$

$$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})$$

Proof. $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}$ より，$\mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} - (1)$ を得る．一方で，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq \mathrm{true}_{\mathbf{A}}$ より，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} \leq \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) - (2)$ を得る．したがって，(1)(2) より，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})$ が成立する．

同様にして，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \wedge ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}})$ も容易に示すことができる． □

補題 B.4.12

x を Γ または α で自由でない変数とする．このとき，以下が成立する：

$$[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} = [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}$$

Proof.「x を Γ または α で自由でない変数」という条件より，補題 B.4.4(余剰変数における補題) を使うことができる. よって,

$$\begin{aligned}[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} &= [\![\alpha_1]\!]_{x\mathbf{y}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_m]\!]_{x\mathbf{y}} \\ &= [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{y}} \circ [\![\langle y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{x\mathbf{y}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_m]\!]_{\mathbf{y}} \circ [\![\langle y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{x\mathbf{y}}(\text{補題 } B.4.4) \\ &= ([\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{y}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_m]\!]_{\mathbf{y}}) \circ [\![\langle y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{x\mathbf{y}}(\text{命題 } B.2.22) \\ &= [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}\end{aligned}$$

□

補題 B.4.13
以下が成立する：

$$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{y}} \implies [\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{x\mathbf{y}}$$

Proof.

$$\begin{aligned}[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{y}} &\implies [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{y}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1} (\text{命題 } B.2.17) \\ &\iff [\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}} \leq [\![\alpha]\!]_{x\mathbf{y}} (\text{補題 } B.4.12)\end{aligned}$$

□

補題 B.4.14
以下が成立する：

$$\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}} \sim \mathrm{can} \circ (1 \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})$$

Proof. 以下の図式を考える:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, "\pi_2'"] \arrow[d, "1\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}}"'] & \bullet \arrow[d, "\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}}"] \\
\bullet \arrow[r, "\pi_2"'] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & \bullet \arrow[d, "1"] \\
\bullet \arrow[r, "\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1}"'] & \bullet
\end{tikzcd}$$

上図における上と下の２つの四角形はプルバックである．よって，全体の四角形もまたプルバックとなる．
実際に，簡単な場合として以下の図式を考える（一般の場合でも同様）：

$$\begin{tikzcd}
A \times B \arrow[r, "\pi_2'"] \arrow[d, "1_A\times f"'] & B \arrow[d, "f"] \\
A \times C \arrow[r, "\pi_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

これは明らかに可換である．また，

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "h"] \arrow[d, "g"'] & B \arrow[d, "f"] \\
A \times C \arrow[r, "\pi_2"'] & C
\end{tikzcd}$$

を可換にする任意の対象 S に対して，射 $u : S \to A \times B$ を $u = \langle \pi_1 g, h \rangle$ と定義すると，明らかにプルバックとなる．u の唯一性は積の普遍性により保証される．よって，上の四角形はプルバックである．

また，同様にして以下の図を考える：

$$\begin{tikzcd} A\times(B\times C) \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, "\mathrm{can}"'] & B\times C \arrow[d, "1"] \\ A\times B\times C \arrow[r, "\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1}"'] & B\times C \end{tikzcd}$$

これは明らかに可換である．また，

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & B\times C \arrow[d, "1"] \\ A\times B\times C \arrow[r, "\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1}"'] & B\times C \end{tikzcd}$$

を可換にする任意の対象 D に対して，射 $u : D \to A\times(B\times C)$ を $u = \langle \pi_1\circ f, g\rangle$ と定義すると，明らかにプルバックとなる．u の唯一性は積の普遍性によって保証される．よって，下の四角形もプルバックである．あとは，補題**??**(2-プルバック補題) により，全体の四角形もプルバックになることがわかる．
また，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned} \chi(\mathrm{can}\circ(1\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})) &= \chi(\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})\circ\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1}(\text{命題 }B.2.9) \\ &= [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}\circ\pi_2\circ\mathrm{can}^{-1} \\ &= [\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}(\text{補題 }B.4.12) \end{aligned}$$

よって，$\mathrm{can}\circ(1\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})$ と $\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}}$ の間には，一対一の対応が存在する．ゆえ，$\mathrm{dom}(\mathrm{can}\circ(1\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}}))\cong\mathrm{dom}(\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}})$ となる．よって，$\mathrm{can}\circ(1\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{y}}})\sim\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{y}}}$ を得る． □

注意 B.4.15
以下のように書くことにする：

$$\Gamma\models\alpha \iff \text{任意の解釈 } I \text{ に対して} \Gamma\models_I\alpha$$

$$\frac{\Gamma_1\models_I\alpha_1,...,\Gamma_n\models_I\alpha_n}{\Delta\models_I\beta} \iff \Gamma_1\models_I\alpha_1,...,\Gamma_n\models_I\alpha_n \implies \Delta\models_I\beta$$

$$\frac{\Gamma_1\models\alpha_1,...,\Gamma_n\models\alpha_n}{\Delta\models\beta} \iff \text{任意の解釈 } I \text{ に対して}\frac{\Gamma_1\models_I\alpha_1,...,\Gamma_n\models_I\alpha_n}{\Delta\models_I\beta}$$

また，任意の $\mathscr{L}$ における Local Set Theory S に対して，S のすべての公理が解釈 I の元で妥当であるなら，その解釈 I を S のモデルと言う．そして，S の任意のモデルに対して $\Gamma\models_I\alpha$ となるなら，$\Gamma\models_S\alpha$ と書く．

ここに来て，ようやく健全性定理の証明に取りかかることができる．

定理 B.4.16 健全性定理
以下が成立する：

(1) $\Gamma \vdash \alpha \implies \Gamma \models \alpha$

(2) $\dfrac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta} \implies \dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta}$

(3) $\Gamma \vdash_S \alpha \implies \Gamma \models_S \alpha$

Proof. (1) が成り立てば (2)，(3) も成り立つ．実際に，(2) は (1) と規則の適応から導きことができる．また，(3) に関しては，$\Gamma \vdash_S \alpha$ を導くのに必要な公理を $\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n$ とすると，以下が成り立つ：

$$\begin{aligned}\Gamma \vdash_S \alpha &\Longrightarrow \frac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Gamma : \alpha} \\ &\Longrightarrow \frac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Gamma \models \alpha} \\ &\Longrightarrow \Gamma \models_S \alpha\end{aligned}$$

よって，(3) が成立する．したがって，(1) を示せば十分である．
以下，実際に (1) をすべての公理と規則に対して成り立つことを直接示すことによって証明する．

(**Tautology**) $\alpha \models_I \alpha$

Proof. $[\![\alpha]\!]_{I,\mathbf{x}} \leq [\![\alpha]\!]_{I,\mathbf{x}} \iff \alpha \models_I \alpha$

□

(**Unity**) $\models_I x_1 = *$

Proof. $\mathbf{x} : \mathbf{A}$ とすると，

$$\begin{aligned}[\![x_1 = *]\!]_{\mathbf{x}} &= \delta_{\mathbf{A}} \circ [\![\langle x_1, * \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle [\![x_1]\!]_{\mathbf{x}}, [\![*]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle !_{\mathbf{A}}, !_{\mathbf{A}} \rangle \\ &= \mathrm{true}_A\end{aligned}$$

□

(**Equality**)
$(i) \models_I x = x$
$(ii)\ x = y, \alpha(z/x) \models_I \alpha(z/y)$

Proof. (i) : $\mathbf{x} : \mathbf{A}$ とすると，

$$\begin{aligned}[\![x = x]\!]_{\mathbf{x}} &= \delta_{\mathbf{A}} \circ [\![\langle x, x \rangle]\!]_{\mathbf{x}} \\ &= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle [\![x]\!]_{\mathbf{x}}, [\![x]\!]_{\mathbf{x}} \rangle \\ &= \delta_{\mathbf{A}} \circ \langle \pi_A, \pi_A \rangle \\ &= \mathrm{true}_A\end{aligned}$$

(ii) :x, y, z を異なる変数とし，z を α の中で自由に現れるものとする．$z, v_1, ..., v_n$ を α の自由変数とし，以下の式を考える：

$$u \leq [\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \wedge [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}}$$

このとき，補題 B.2.20 より以下が成立する：

$$\begin{aligned} u \leq [\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \wedge [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}} &\iff u \leq [\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \text{かつ } u \leq [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}} (\text{補題 } B.2.20) \\ &\iff u \leq \delta_{xy\mathbf{v}} \circ \langle [\![x]\!]_{xy\mathbf{v}}, [\![y]\!]_{xy\mathbf{v}} \rangle - (1) \text{ かつ } u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} - (2)(\text{補題 } B.4.5) \end{aligned}$$

ここで，(1) と補題 B.2.18 より，$[\![x]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} = [\![y]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} - (3)$ を得る．また，(2) と補題 B.2.16 より，以下が成り立つ：

$$u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \text{を満たすような射 } h : \mathrm{dom}(\bar{u}) \to \mathrm{dom}(\overline{[\![\alpha]\!]_{x\mathbf{v}}}) \text{ が存在する}$$

いま，$u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}}$ は以下のように変形することができる：

$$\begin{aligned} u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \iff \overline{[\![\alpha]\!]_{x\mathbf{v}}} \circ h &= [\![\langle x, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} \\ &= \langle [\![x]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, [\![v_1]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, ..., [\![v_n]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u} \rangle \\ &= \langle [\![y]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, [\![v_1]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u}, ..., [\![v_n]\!]_{x\mathbf{v}} \circ \bar{u} \rangle ((3) \text{ による}) \\ &= [\![\langle y, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} \circ \bar{u} \end{aligned}$$

それゆえ，補題 B.2.16 をもう一度適用させると，以下を得る：

$$u \leq [\![\alpha]\!]_{z\mathbf{v}} \circ [\![\langle y, v_1, ..., v_n \rangle]\!]_{xy\mathbf{v}} = [\![\alpha(z/y)]\!]_{xy\mathbf{v}} (\text{補題 } B.4.5(\text{代入補題}))$$

よって，u は任意の変数なので以下の式を得る：

$$[\![x = y]\!]_{xy\mathbf{v}} \wedge [\![\alpha(z/x)]\!]_{xy\mathbf{v}} \leq [\![\alpha(z/y)]\!]_{xy\mathbf{v}}$$

ゆえ，$x = y, \alpha(z/x) \models_I \alpha(z/y)$ となる． □

(**Products**)

$(i) \models_I (\langle x_1, ..., x_n \rangle)_i = x_i$

$(ii) \models_I x = \langle (x)_1, ..., (x)_n \rangle$

Proof. 補題 B.4.10 を使えば即座に成り立つ． □

(Comprehension) $\models_I x \in \{x : \alpha\} \iff \alpha$

Proof. まず，以下の補題を証明する．

補題 B.4.17

can' を以下のような標準的な同型射であるとする：

$$\mathrm{can}' : A \times (A \times A_1 \times .... \times A_n) \to A \times A \times A_1 \times ... \times A_n$$

η を以下のような射とする：

$$\eta = \langle \pi_2, ..., \pi_n \rangle \circ \mathrm{can}' : A \times (A \times A_1 \times .... \times A_n) \to A \times A_1 \times ... \times A_n$$

また，ε を以下のような射とする：

$$\varepsilon : \langle \pi_2, ..., \pi_n \rangle : A \times A_1 \times ... \times A_n \to A_1 \times ... \times A_n$$

このとき，任意の射 $g : A \times A_1 \times ... \times A_n \to \Omega$ に対して，以下が成立する：

$$(g \circ \eta)^\wedge = (g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon$$

Proof. (補題の証明) : 任意の射 $h : A_1 \times ... \times A_n \to X$ に対して，以下の等式が成り立つことが簡単に確認することができる：

$$(1_A \times h) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times (h \circ \varepsilon)$$

実際に，以下の可換図式を考えれば良い：

$$\begin{tikzcd}
A \times (A \times A_1 \times ... \times A_n) \arrow[d, "\eta"] \arrow[dd, bend left=90, "1_A \times \varepsilon"] \\
A \times A_1 \times ... \times A_n \arrow[d, "\mathrm{can}^{-1}"] \\
A \times (A_1 \times ... \times A_n) \arrow[d, "1_A \times h"] \\
A \times X
\end{tikzcd}$$

上図の積の普遍性より，以下を得る：

$$\begin{aligned}
\mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times \varepsilon (\text{積の普遍性}) &\iff (1_A \times h) \circ (\mathrm{can}^{-1} \circ \eta) = (1_A \times h) \circ (1_A \times \varepsilon) \\
&\iff (1_A \times h) \circ (\mathrm{can}^{-1} \circ \eta) = 1_A \times (h \circ \varepsilon)
\end{aligned}$$

したがって，$(1_A \times h) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times (h \circ \varepsilon)$ が成立する．ここで，$h = (g \circ \mathrm{can})^\wedge$ とすると，$(1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta = 1_A \times ((g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon)$ を得る．それゆえ，以下の等式が成り立つ：

$$\begin{aligned}
\in_A \circ (1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon) &= e_A \circ (1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge) \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta \\
&= g \circ \mathrm{can} \circ \mathrm{can}^{-1} \circ \eta \\
&= g \circ \eta
\end{aligned}$$

なお，二つ目の等号は，以下の図式が可換であることによる：

$$\begin{tikzcd}
A \times (A_1 \times ...A_n) \arrow[d, "1_A \times (g \circ \mathrm{can})^\wedge"'] \arrow[dr, "g \circ \mathrm{can}"] & \\
A \times PA \arrow[r, "\in_A"'] & \Omega
\end{tikzcd}$$

最後にパワー対象の普遍性から，$(g \circ \eta)^\wedge = (g \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon$ が成立する． □

ここから本題の証明に入る．x を型 $\mathbf{A}$ の変数で，$v_1, ..., v_n$ を型 $\mathbf{A_1} \times ... \times \mathbf{A_n}$ の変数だとする．このとき，以下が成立する：

$$
\begin{aligned}
\llbracket x \in \{x : \alpha\} \rrbracket_{x\mathbf{v}} &= \in_A \circ \langle \llbracket x \rrbracket_{x\mathbf{v}}, (\llbracket \alpha(x/u) \rrbracket_{ux\mathbf{v}} \circ \mathrm{can}')^\wedge \rangle \\
&= \in_A \circ \langle \pi_1, (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \llbracket \langle u, v_1, ..., v_n \rangle \rrbracket_{ux\mathbf{v}} \circ \mathrm{can}')^\wedge \rangle (\text{補題 } B.4.5(\text{代入補題})) \\
&= \in_A \circ \langle \pi_1, (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \eta)^\wedge \rangle \\
&= \in_A \circ \langle \pi_1, (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon \rangle (\text{前補題}) \\
&= \in_A \circ (1_A \times (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can})^\wedge) \circ \mathrm{can}^{-1} (\text{可換性のチェックが必要}) \\
&= \llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can} \circ \mathrm{can}^{-1} (\in_A \text{ の定義}) \\
&= \llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}}
\end{aligned}
$$

よって，$\llbracket x \in \{x : \alpha\} \rrbracket_{x\mathbf{v}} = \llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}}$ を得る．ここで，補題 B.4.10 より，$\models_I x \in \{x : \alpha\} = \alpha$ を得る．5つ目の等式が成り立つことを確認する．まず，以下の可換図式を考える：

$$
\begin{tikzcd}
A & A \times A_1 \times ...A_n \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[d, "\mathrm{can}^{-1}"'] & \\
& A \times (A_1 \times ...A_n) \arrow[d, "1_A \times (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can})^\wedge"'] \arrow[dr, bend left, "\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can}"] & \\
& A \times \Omega^A \arrow[r, "e_A"] & \Omega
\end{tikzcd}
$$

また，以下のような標準的な可換図式を考えることができる：

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "1_A"'] & A \times A_1 \times ...A_n \arrow[l, "\pi_2"'] \arrow[r, "\varepsilon"] \arrow[d, "\langle \pi_1, (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon \rangle"'] & A_1 \times ...A_n \arrow[d, "(\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can})^\wedge"] \\
A & A \times \Omega^A \arrow[l] \arrow[r] & \Omega^A
\end{tikzcd}
$$

上二つの図式と，積の普遍性より，以下の等式を得る：

$$\langle \pi_1, (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \varepsilon \rangle = 1_A \times (\llbracket \alpha \rrbracket_{x\mathbf{v}} \circ \mathrm{can})^\wedge \circ \mathrm{can}^{-1}$$

□

以上により，すべての公理が妥当であることが確認できた．次に，規則に関して公理と同様の議論を進めていくことにする．

(**Thining**[*2])

$$\frac{\Gamma \models_I \alpha}{\beta, \Gamma \models_I \alpha}$$

Proof. $\llbracket \Gamma \rrbracket_{\mathbf{x}} \leq \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathbf{x}}$ に対して，補題 B.4.13 より，$\llbracket \Gamma \rrbracket_{\mathbf{yx}} \leq \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathbf{yx}}$ を得る．ここで，$y_1, ..., y_n = \mathbf{y}$ は β の addtional 自由変数であるとする．それゆえ，補題 B.2.21 より，$\llbracket \beta \rrbracket_{\mathbf{yx}} \wedge \llbracket \Gamma \rrbracket_{\mathbf{yx}} \leq \llbracket \alpha \rrbracket_{\mathbf{yx}}$ を得る．したがって結果が従う． □

[*2] [3] に掲載されているこの部分の証明で補題 B.4.13 の使い方が適切ではなかった．本論文には，修正したものを掲載した．

(**Cut**[*3])

$$\frac{\Gamma \models_I \alpha \quad \alpha, \Gamma \models_I \beta}{\Gamma \models_I \beta}$$

α の任意の自由変数は，Γ, β において自由であるとする．

Proof. $[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}$ と $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\beta]\!]_{\mathbf{yx}}$ を考える．ここで, $y_1, ..., y_n = \mathbf{y}$ は β の additional 自由変数であるとする．まず, 補題 B.4.13 より, $[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}}$ を得る．また, 補題 B.2.21 より, $[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}}$ と $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}}$ が成り立つ．よって，$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} = [\![\alpha]\!]_{\mathbf{yx}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{yx}} \leq [\![\beta]\!]_{\mathbf{yx}}$ を得る．したがって，求めていた式が成り立つ.

□

(**Substitution**)

$$\frac{\Gamma \models_I \alpha}{\Gamma(x/\tau) \models_I \alpha(x/\tau)}$$

Proof. x を Γ, α における自由変数であるとする．(そうでなければ，Substitution は自明に成り立つ.) このとき，$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}}$ を考える．補題 B.2.17 と補題 B.2.22 より以下の式を得る:

$$[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}}$$

(ここで，$z_1, ..., z_n$ は τ の addtional 自由変数であるとする．) 実際に,

$$\begin{aligned}
[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} &\iff [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \\
&\iff [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \text{かつ} ... [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \\
&\implies [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \text{かつ...かつ } [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{zy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} (\text{補題 } B.2.17) \\
&\iff [\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{xy}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \\
&\iff ([\![\alpha_1]\!]_{\mathbf{xy}} \wedge ... \wedge [\![\alpha_n]\!]_{\mathbf{xy}}) \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} (\text{補題 } B.2.22) \\
&\iff [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{xy}} \circ [\![\langle \tau, y_1, ..., y_n \rangle]\!]_{\mathbf{zy}}
\end{aligned}$$

ここで，両辺に補題 B.4.5(代入補題) を適用すると，求めていた式 $[\![\Gamma(x/\tau)]\!]_{\mathbf{xy}} \leq [\![\alpha(x/\tau)]\!]_{\mathbf{xy}}$ を得る． □

(**Extensionally**[*4])

$$\frac{\Gamma \models_I x \in \sigma \iff x \in \sigma}{\Gamma \models_I \sigma = \tau}$$

ここで，変数 x は Γ, σ, τ において自由でない.

Proof. $\Gamma \models_I x \in \sigma \iff x \in \tau$ を考える．このとき，補題 B.4.10 より以下の式を得る：

$$[\![x \in \sigma]\!]_{x\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} = [\![x \in \tau]\!]_{x\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} - (1)$$

[*3] [3] に掲載されているこの部分の証明で補題 B.4.13 の使い方が適切ではなかった．本論文には，修正したものを掲載した.

[*4] [3] に掲載されているこの部分の証明に一部間違いが見られた．本論文には，その間違いを訂正したものを掲載した.

補題 B.4.14 から，以下の図式を可換にするような同型射 i が存在する：

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "i"] \arrow[dr, "\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}}"'] & & \bullet \arrow[dl, "\mathrm{can}\circ(1_A\times\overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}})"] \\
& \bullet &
\end{tikzcd}$$

ここで x は型 A の変数とする．よって，以下の等式を得る：

$$\begin{aligned}
[\![x \in \sigma]\!]_{x\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} &= \in_A \circ [\![\langle x, \sigma\rangle]\!]_{x\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} \\
&= \in_A \circ \langle [\![x]\!]_{x\mathbf{z}}, [\![\sigma]\!]_{x\mathbf{z}}\rangle \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{x\mathbf{z}}} \\
&= \in_A \circ \langle \pi_1, [\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \pi_2 \circ \mathrm{can}^{-1}\rangle \circ \mathrm{can} \circ (1_A \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}) \circ i (\text{補題 } B.4.12 \text{と同型射 } i \text{ の存在}) \\
&= \in_A \circ \langle \pi_1 \circ \mathrm{can}, [\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \pi_2\rangle \circ (1_A \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}) \circ i \\
&= \in_A \circ (1_A \times [\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}}) \circ (1_A \times \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}) \circ i \\
&= \in_A \circ (1_A \times ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})) \circ i
\end{aligned}$$

それゆえ，(1) より，$\in_A \circ (1_A \times ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})) \circ i = \in_A \circ (1_A \times ([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})) \circ i$ を得る．よって，i はエピ射でもあるので，$\in_A \circ (1_A \times ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})) = \in_A \circ (1_A \times ([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}))$ を得る．また，

$$\begin{aligned}
\in_A \circ (1_A \times ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})) = \in_A \circ (1_A \times ([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})) &\iff ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})^\wedge = ([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})^\wedge \\
&\implies ([\![\sigma]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}}) = ([\![\tau]\!]_{\mathbf{z}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{z}}})
\end{aligned}$$

となる．したがって，補題 B.4.10 より，$\Gamma \models_I \sigma = \tau$ を得る． □

(**Equivarence**)

$$\frac{\alpha, \Gamma \models_I \beta \quad \beta, \Gamma \models_I \alpha}{\Gamma \models_I \alpha \iff \beta}$$

Proof. $[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \leq [\![\beta]\!]_{\mathbf{x}}$ と $[\![\beta]\!]_{\mathbf{x}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \leq [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}}$ を考える．このとき，$[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} = [\![\beta]\!]_{\mathbf{x}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} - (1)$ が成立する．
よって，以下の等式が成り立つ:

$$\begin{aligned}
[\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} &= ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) \wedge \mathrm{true}_{\mathbf{A}} (\text{補題 } B.4.11) \\
&= ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) \wedge ([\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) \\
&= ([\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}) \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} (\text{補題 } B.2.22) \\
&= ([\![\beta]\!]_{\mathbf{x}} \wedge [\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}) \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} ((1) \text{ より}) \\
&= ([\![\beta]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) \wedge ([\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) (\text{補題 } B.2.22) \\
&= ([\![\beta]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}}) \wedge \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \\
&= [\![\beta]\!]_{\mathbf{x}} \circ \overline{[\![\Gamma]\!]_{\mathbf{x}}} (\text{補題 } B.4.11)
\end{aligned}$$

よって，補題 B.4.10 より，求めていた式 $\Gamma \models_I \alpha \iff \beta$ を得る． □

以上より，すべての規則も妥当になることが確認できた．よって，健全性定理のすべての証明が完了した． □

B.5　完全性定理と同値定理

本節では，完全性定理の証明のスケッチを行う．また，トポスから Local Set Theory を Local Set Theory からトポスを創出するという，トポスの内部言語的アプローチによってトポスと Local Set Theory が圏論的にも同じ構造を有しているということを主張する同値定理についても触れる．

定義 B.5.1 Local language における集合論

Local language $\mathscr{L}$ の集合的項はパワー型の項であるとする．集合的閉項のことを $\mathscr{L}$ 集合，もしくは単に集合と呼ぶことにする．以下，$A, B, ..., Z$ を集合とし，以下のように集合論的な演算や関係を定義する：

(1)	$X \subseteq Y$	for	$\forall x(x \in X \implies x \in Y)$
(2)	$X \cap Y$	for	$\{x : x \in X \wedge x \in Y\}$
(3)	$X \cup Y$	for	$\{x : x \in X \vee x \in Y\}$
(4)	$U_{\mathbf{A}}$	for	$\{x_{\mathbf{A}} : \mathrm{true}\}$
(5)	$\emptyset_{\mathbf{A}}$	for	$\{x_{\mathbf{A}} : false\}$
(6)	$-X$	for	$\{x : \neg(x \in X)\}$
(7)	PX	for	$\{u : u \subseteq X\}$
(8)	$\cap U$	for	$\{x : \forall u(u \in U \implies x \in u)\}$
(9)	$\cup U$	for	$\{x : \exists u(u \in U \implies x \in u)\}$
(10)	$\cap_{i\in I} X_i$	for	$\{x : \forall i(i \in I \implies x \in X_i\}$
(11)	$\cup_{i\in I} X_i$	for	$\{x : \exists i(i \in I \implies x \in X_i\}$
(12)	$\{\tau\}$	for	$\{x : x = \tau\}$
(13)	$\{\sigma = \tau\}$	for	$\{x : x = \sigma \vee x = \tau\}$
(14)	$\{\tau : \alpha\}$	for	$\{z : \exists x_1, ..., \exists x_n(z = \tau \wedge \alpha)\}$
(15)	$X \times Y$	for	$\{\langle x, y\rangle : x \in X \wedge y \in Y\}$
(16)	$X + Y$	for	$\{\langle\{x\}, \emptyset\rangle : x \in X\} \cup \{\langle\emptyset, \{y\}\rangle : y \in Y\}$
(17)	X^Y	for	$\{u : u \subseteq Y \times X \wedge \forall y \exists! x(y \in Y \wedge x \in X \implies \langle y, x\rangle \in u)\}$
(18)	$\prod_{i\in I} X_i$	for	$\{u \in U^I_{\mathbf{A}} : \forall i(i \in I \implies \{x : \langle i, x\rangle \in u\} \subseteq X_i)\}$
(19)	$\coprod_{i\in I} X_i$	for	$\{\langle i, x\rangle : i \in I \wedge x \in X_i\}$

このように定義すると，古典的な集合論で成り立つ基本的な事実が，Local language の枠組みにおいても成り立つと示せる (例えば，$\vdash X \in PY \iff X \subseteq Y$ などが実際に証明できる)．

定義 B.5.2 Local Set Theory S から生成される圏 (トポス)

Local Set Theory S から生成される圏 $\mathbf{C}(S)$ を以下のように定義する：

(対象):

$$X \sim_S Y \iff \vdash_S X = Y$$

で定義される同値関係 $\sim_S$ によって類別されるクラス $[X]_S$ を対象とする．このクラス $[X]_S$ を S 集合という．以下では，$[X]_S$ を単に X と書くことにする．

(射): S 射 $f : X \to Y$ は S 集合の 3 つ組 (f, X, Y) のことで，$\vdash_S f \in Y^X$ を満たす．

以下では，単に f と書くことにする．

以上のように定義された圏 $\mathbf{C}(S)$ は，圏の定義を満たすことを示せる．さらに，この圏はトポスであることも証明できる (このことを証明をするには多くの労力を要する)．

定理 B.5.3

圏 $\mathbf{C}(S)$ はトポスである．

Proof. 省略 □

この事実は，完全性定理のみならず，同値定理においても極めて重要である．圏 $\mathbf{C}(S)$ のことを linguistic トポスと言う．

定義 B.5.4 標準解釈

Local language $\mathscr{L}$ における Local Set Theory S に対して，$\mathbf{C}(S)$ の $\mathscr{L}$ における標準解釈 $C(S)$ を以下のように定義する：

任意の型 $\mathbf{A}$ に対して，$\mathbf{A}_{C(S)} = U_{\mathbf{A}}$

任意の $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$ なる関数シンボル f に対して，$\mathbf{f}_{C(S)} = x \mapsto \mathbf{f}(x) : U_{\mathbf{A}} \to U_{\mathbf{B}}$

補題 B.5.5

以下が成立する：

$$[\![\tau]\!]_{\mathbf{x}} = (\mathbf{x} \mapsto \tau)$$

Proof. 省略 □

命題 B.5.6

以下が成立する：

$$\Gamma \models_{C(S)} \alpha \iff \Gamma \vdash_S \alpha$$

Proof. 補題 B.5.5 を用いると以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\models_{C(S)} \alpha &\iff [\![\alpha]\!]_{\mathbf{x}} = \mathrm{true}_{\mathbf{A}} \\
&\iff (\mathbf{x} \mapsto \alpha) = (\mathbf{x} \mapsto \mathrm{true})(\text{補題 } B.5.5) \\
&\iff \vdash_S \alpha = \mathrm{true} \\
&\iff \vdash_S \alpha(\text{命題 } B.3.8)
\end{aligned}$$

さらに，より一般的に以下が成立する：

$$\begin{aligned}
\Gamma \vdash_S \alpha &\iff \wedge\Gamma \vdash_S \alpha(\text{命題 } B.3.11) \\
&\iff \vdash_S \wedge\Gamma \implies \alpha(\text{命題 } B.3.10) \\
&\iff \models_{C(S)} \wedge\Gamma \implies \alpha \\
&\iff \wedge\Gamma \models_{C(S)} \alpha(\text{定理 } B.4.16) \\
&\iff \Gamma \models_{C(S)} \alpha(\text{定理 } B.4.16)
\end{aligned}$$

下二つの同値性は，健全性定理から得られる． □

これより完全性定理の証明に入る．

定理 B.5.7 完全性定理

以下が成立する：

(1) $\Gamma \models \alpha \implies \Gamma \vdash \alpha$

(2) $\dfrac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta} \implies \dfrac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$

(3) $\Gamma \models_S \alpha \implies \Gamma \vdash_S \alpha$

Proof. (1) : $\Gamma \models \alpha$ が成り立つとすると，もちろん $\Gamma \models_{C(S)} \alpha$ が成り立つ．よって，命題 B.5.6 より $\Gamma \vdash \alpha$ が成立する．よって，$\Gamma \models \alpha \implies \Gamma \vdash \alpha$ となる．
(2) : S を $\{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n\}$ のシーケントの集合とする．このとき，明らかに以下の (B.1)(B.2) が成立する：

$$\Delta \vdash \beta \iff \frac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta} \tag{B.1}$$

$$\Gamma_1 \vdash_S \alpha_1, ..., \Gamma_n \vdash_S \alpha_n \tag{B.2}$$

ここで，仮定より以下の (B.3) を考える：

$$\frac{\Gamma_1 \models \alpha_1, ..., \Gamma_n \models \alpha_n}{\Delta \models \beta} \tag{B.3}$$

(B.2) と命題 B.5.6 より，

$$\Gamma_1 \models_{C(S)} \alpha_1, ..., \Gamma_n \models_{C(S)} \alpha_n$$

を得る．それゆえに，(B.3) より $\Delta \models_{C(S)} \beta$ を得る．よって，再び命題 B.5.6 より，$\Delta \vdash_S \beta$ を得る．よって，(B.1) より，

$$\frac{\Gamma_1 : \alpha_1, ..., \Gamma_n : \alpha_n}{\Delta : \beta}$$

を得る．
(3) : 命題 B.5.6 より，C(S) は S のモデルである．それゆえ，再び命題 B.5.6 を適用すると以下を得る：

$$\Gamma \models_S \alpha \implies \Gamma \models_{C(S)} \alpha \iff \Gamma \vdash_S \alpha$$

□

定義 B.5.8 トポスによって定まる Local language(内部言語)

$\mathscr{E}$ をトポスとする．このとき，$\mathscr{E}$ によって定まる Local language $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ を，$\mathscr{E}$ の任意の対象 A に対して grand 型シンボル $\mathbf{A}$ と定める．また，型 $\mathbf{A}$ に対して，$\mathscr{E}$ の対象 $\mathbf{A}_{\mathscr{E}}$ を以下のように再帰的に対応づける：

そして，$\mathscr{L}$ の関数シンボルは $(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ の 3 つ組と定める．ここで，$\mathbf{A}, \mathbf{B}$ は $\mathscr{L}$ における型であり，f は $\mathscr{E}$ における射 $\mathbf{A}_{\mathscr{E}} \to \mathbf{B}_{\mathscr{E}}$ である．混乱の恐れがない限り，$(f, \mathbf{A}, \mathbf{B})$ を単に $\mathbf{f}$ と書く．

$\mathbf{A}_{\mathscr{E}} = \mathbf{A}$　　　　　　（任意の grand 型シンボル $\mathbf{A}$ に対して）
$(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_{\mathscr{E}} = \mathbf{A}_{\mathscr{E}} \times \mathbf{B}_{\mathscr{E}}$
$(\mathbf{PA})_{\mathscr{E}} = P(\mathbf{A})_{\mathscr{E}}$

定義 B.5.9 トポスから生成される Local Set Theory

トポス $\mathscr{E}$ における $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ の自然な解釈 (natural interpretation) を以下のように定める:

$\mathbf{A}_{\mathscr{E}} = \mathbf{A}$　（任意の grand 型シンボル $\mathbf{A}$ に対して）
$\mathbf{f}_{\mathscr{E}} = f$　　　（任意の関数シンボル $\mathbf{f}$ に対して）

トポス $\mathscr{E}$ から生成される Local Set Theory $th(\mathscr{E})$ を $\mathscr{L}(\mathscr{E})$ の自然な解釈のもとですべての公理が妥当となるような仕方で定義する．

定理 B.5.10 同値定理

任意のトポス $\mathscr{E}$ に対して，以下が成立する：

$$\mathscr{E} \simeq \mathbf{C}(th(\mathscr{E}))$$

つまり，任意のトポスは linguistic トポスと同値である．

Proof. [3] による． □

参考文献

[1] Steve Awodey. *Category theory*, Vol. 49 of *Oxford Logic Guides*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2006. (前原和寿 訳. 圏論. 共立出版.2015).

[2] Steve Awodey. *From sets to types, to categories, to sets*. Springer, 2011.

[3] John L Bell. *Toposes and local set theories: an introduction*. Courier Corporation, 2008.

[4] Bodil Biering, Lars Birkedal, and Noah Torp-Smith. Bi hyperdoctrines and higher-order separation logic. In *European Symposium on Programming*, pp. 233–247. Springer, 2005.

[5] Francis Borceux. *Handbook of Categorical Algebra 3 – Categories of Sheaves*. Cambridge Univ. Press, 1994.

[6] Olivia Caramello. The unification of mathematics via topos theory. *arXiv preprint arXiv:1006.3930*, 2010.

[7] Solomon Feferman. Categorical foundations and foundations of category theory. In *Logic, foundations of mathematics, and computability theory*, pp. 149–169. Springer, 1977.

[8] A. Grothendieck. *RECOLTES ET SEMAILLES*. 1984. (辻雄一訳. 収穫と蒔いた種と (数学者の孤独な冒険). 現代数学社.1989).

[9] Mariana Haim and Octavio Malherbe. Linear hyperdoctrines and comodules. *arXiv preprint arXiv:1612.06602*, 2016.

[10] Geoffrey Hellman. Does category theory provide a framework for mathematical structuralism? *Philosophia Mathematica*, Vol. 11, No. 2, pp. 129–157, 2003.

[11] Bart Jacobs. *Categorical logic and type theory*. Elsevier, 1999.

[12] P. T. Johnstone. *Sketches of an Elephant: A Topos Theory Compendium*, Vol. 43,44 of *Oxford Logic Guides*. Clarendon Press, 2002.

[13] F William Lawvere. An elementary theory of the category of sets. *Proceedings of the National academy of Sciences of the United States of America*, Vol. 52, No. 6, p. 1506, 1964.

[14] F William Lawvere. The category of categories as a foundation for mathematics. In *Proceedings of the conference on categorical algebra*, pp. 1–20. Springer, 1966.

[15] F William Lawvere. Adjointness in foundations. *Dialectica*, pp. 281–296, 1969.

[16] Francis William Lawvere. An elementary theory of the category of sets (long version) with commentary. *Reprints in Theory and Applications of Categories*, Vol. 11, pp. 1–35, 2005.

[17] Jacob Lurie. *Higher Topos Theory*, Vol. 170 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, January 2009.

[18] Saunders MacLane and Ieke Moerdijk. *Sheaves in Geometry and Logic: A First Introduction to*

Topos Theory. Springer, Berlin, corrected edition, May 1992.

[19] Jean-Pierre Marquis and Gonzalo Reyes. The history of categorical logic: 1963-1977. 2011.

[20] Yoshihiro Maruyama. *Sets and Categories as Foundations of Mathematical Practice*.

[21] Yoshihiro Maruyama. Duality theory and categorical universal logic: With emphasis on quantum structures. In Bob Coecke and Matty J. Hoban, editors, *QPL*, Vol. 171 of *EPTCS*, pp. 100–112, 2013.

[22] Yoshihiro Maruyama. Categorical harmony and paradoxes in proof-theoretic semantics. In *Advances in Proof-Theoretic Semantics*, pp. 95–114. Springer, Cham, 2016.

[23] Yoshihiro Maruyama. *Meaning and duality: from categorical logic to quantum physics*. PhD thesis, University of Oxford, 2016.

[24] Yoshihiro Maruyama. *The Dynamics of Duality : A Fresh Look at the Philosophy of Duality*. 数理解析研究所講究録第 2050 巻, 2017.

[25] Yoshihiro Maruyama. The frame problem, gödelian incompleteness, and the lucas-penrose argument: A structural analysis of arguments about limits of ai, and its physical and metaphysical consequences. In *3rd Conference on" Philosophy and Theory of Artificial Intelligence*, pp. 194–206. Springer, 2017.

[26] Yoshihiro Maruyama. The categorical integration of symbolic and statistical ai: Quantum nlp and applications to cognitive and machine bias problems. In *International Conference on Intelligent Systems Design and Applications*, pp. 466–476. Springer, 2019.

[27] Yoshihiro Maruyama. First-order typed fuzzy logics and their categorical semantics: Linear completeness and baaz translation via lawvere hyperdoctrine theory. In *2020 IEEE International Conference on Fuzzy Systems (FUZZ-IEEE)*, pp. 1–8. IEEE, 2020.

[28] Yoshihiro Maruyama. Foundations of mathematics: From hilbert and wittgenstein to the categorical unity of science. In *WITTGENSTEINIAN (adj.)*, pp. 245–274. Springer, 2020.

[29] Colin McLarty. Exploring categorical structuralism. *Philosophia Mathematica*, Vol. 12, No. 1, pp. 37–53, 2004.

[30] Stefano Mengato. On logical connectives and quantifiers as adjoint functors. 2017.

[31] Gerhard Osius. Categorical set theory: a characterization of the category of sets. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol. 4, No. 1, pp. 79–119, 1974.

[32] Linnebo Oystein and Pettigrew Richard. Category theory as an autonomous foundation. *Philosophia Mathematica*, Vol. 3, No. 19, pp. 227–254, 2011.

[33] Andrew M Pitts. Categorical logic. Technical report, University of Cambridge, Computer Laboratory, 1995.

[34] Andrew M Pitts. Tripos theory in retrospect. *Mathematical structures in computer science*, Vol. 12, No. 3, pp. 265–279, 2002.

[35] H Porst. Concrete dualities. *Categiry theory at work (Bremen, 1990)*, pp. 111–136, 1991.

[36] Nima Rasekh. *A Theory of Elementary Higher Toposes*. Cornell University, 2018.

[37] A.Bauer S.Awodey. *Introduction to Categorical Logic*. https://github.com/awodey/CatLogNotes/blob/master/catlog.pdf, 2020.

[38] Eugene P Wigner. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. In *Mathematics and Science*, pp. 291–306. World Scientific, 1990.

[39] wikipedia. https://ja.wikipedia.org/wiki/ウィリアム・ローヴェア. (2021 年 1 月閲覧).

[40] M. ダメット. 真理という謎（藤田晋吾 訳）. 勁草書房, 1986.

[41] 丸山不二夫. カテゴリー論と認識の理論: F. w. ローヴェールの数学思想. 一橋論叢, Vol. 91, No. 2, pp. 259–277, 1984.

[42] 丸山善宏. 圏論的双対性の理論入門. https://researchmap.jp/multidatabases/multidatabase_contents/download/229782/4f589cb82e1990e47c382b19e4b72650/6962?col_no=2&frame_id=698549, 2012.

[43] 丸山善宏. 圏論的統一科学. http://phsc.jp/dat/rsm/20150522_WS1-3.pdf, 2015.

[44] 丸山善宏. ゲーデル・シンギュラリティ・加速主義：近代以降の世界像の変容とその揺り戻し. 現代思想 2019 年 5 月号, 2019.

[45] 丸山善宏. 圏・量子情報・ビッグデータの哲学：情報物理学と量子認知科学から圏論的形而上学と量子 AI ネイティブまで. 現代思想 2020 年 2 月号, 2020.

[46] 丸山善宏. 圏論の哲学：圏論的構造主義から圏論的統一科学まで. 現代思想 2020 年 7 月号, 2020.

[47] 佐々木雄大. 世界に魔法をかける: ウェーバーとデュルケームの宗教社会学. 現代思想 2020 年 12 月号, 2020.

[48] 加藤文元・西郷甲矢人. 圏論がひらく豊穣なる思考のインタラクション. 現代思想 2020 年 7 月号, 2020.

[49] 古賀実・才川隆文. 圏論的集合論 集合圏の特徴付け. The Dark Side of Forcing Vol.9, 2017.

[50] 圏論の歩き方委員会. 圏論の歩き方. 日本評論社, 2015.

[51] 江口・谷村など. 双対性の世界諸分野に広がるディアリティ・パラダイム. 2007, 別冊 数理科学.

[52] 深山洋平. 圏論と構造主義, 第 12 巻. 北海道大学大学院文学研究科, 2012.

[53] 清水義夫. 圏論による論理学. 東京大学出版会, 2007.

[54] 渕野昌. 圏論と集合論. 現代思想 2020 年 7 月号, 2020.

[55] 照井一成. 直観主義論理への招待. 数学基礎論サマースクール 2013 講義資料, 2013.

[56] 田口茂・西郷甲矢人. 圏論による現象学の深化. 現代思想 2020 年 7 月号, 2020.

[57] 米山優. 情報学の展開 情報文化研究への視座. 昭和堂, 2010.

[58] 田中一之編. 数学の基礎をめぐる論争 21 世紀の数学と数学基礎論のあるべき姿を考える. シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999.

[59] 飯田隆編. リーディングス 数学の哲学 ゲーデル以後. 勁草書房, 1995.

[60] 荒畑靖宏. 世界を満たす論理 フレーゲの形而上学と方法. 2019, 勁草書房.

[61] 藤本忠. 時間の思想史双対性としてのフィジカ・メタフィジカ. 晃洋書房, 2017.

[62] ゲーデル（林晋/八杉満利子訳・解説）. 不完全性定理. 岩波文庫, 2006.

[63] L. ウィトゲンシュタイン（黒田亘訳）. 確実性の問題. 大修館書店（ウィトゲンシュタイン全集第 9 巻）, 1975.

[64] M. ウェーバー（武藤一雄・薗田宗人・薗田担訳）. 宗教社会学. 創文社, 1976.

[65] S. マクレーン（赤尾・岡本訳）. 数学 その形式と機能. 森北出版, 1992.

[66] モリス・バーマン（柴田元幸訳）. デカルトからベイトソンへ 世界の再魔術化. 国文社, 1989.

[67] 野家啓一. 物語の哲学 柳田國男と歴史の発見. 岩波書店, 1996.

[68] 鈴. この割れ切った世界の片隅で. https://note.com/carpediem/n/nba61eb70085a, 2020.