Probability with Martingales のギャップとかメモ

Twitter : @skbtkey

概要

タイトル通り。ネットの海からこれを見つけ出した方は参考にしていただけると嬉しい。David Williams 著 "Probability with Martingales"。

1 Chapter 6

1.1 65 ページ 9 行目

$c_1U_1 + c_2U_2 \sim c_1V_1 + c_2V_2$ について。

$$
\begin{aligned}
&\{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) \neq (c_1V_1 + c_2V_2)(x)\} \\
\Leftrightarrow &\{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) \neq 0\} =: A
\end{aligned}
$$

の測度が 0 であることを示せばよい。明らかに、

$$c_1U_1 \sim c_1V_1, c_2U_2 \sim c_2V_2$$

である。したがって、

$$
\begin{aligned}
A_1 &:= \{x \mid c_1U_1(x) \neq c_1V_1\} \\
A_2 &:= \{x \mid c_2U_2(x) \neq c_2V_2\}
\end{aligned}
$$

の測度はそれぞれ 0 である[*1]。このとき、次が成立。

$$A \subset A_1 \cup A_2$$

背理法で示す。上式の右辺から任意に x を取る。$x \notin A_1 \cup A_2$、つまり、

$$x \in A_1^c \cap A_2^c$$

と仮定する。このとき、$c_1U_1(x) = c_1V_1(x), c_2U_2(x) = c_2V_2(x)$ であるから、

$$(c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) = 0$$

[*1] 別に A_1 などと名前を付けなくてもいいが (むしろ名前を付けない方がわかりやすい。)、紙面のスペースの都合上名前を付けている。

より、矛盾する。また、

$$A = \{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) < 0\} \\ \cup \{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) > 0\}$$

であるから、A は可測集合。したがって、測度の単調性より、A の測度は 0。