

# Probability with Martingales のギャップとかメモ

Twitter : @skbtkey

## 概要

タイトル通り。ネットの海からこれを見つけ出した方は参考にしていただけると嬉しい。  
David Williams 著 "Probability with Martingales"。

## 1 Chapter 6

### 1.1 65 ページ 9 行目

$c_1U_1 + c_2U_2 \sim c_1V_1 + c_2V_2$  について。

$$\begin{aligned} & \{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) \neq (c_1V_1 + c_2V_2)(x)\} \\ \Leftrightarrow & \{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) \neq 0\} =: A \end{aligned}$$

の測度が 0 であることを示せばよい。明らかに、

$$c_1U_1 \sim c_1V_1, c_2U_2 \sim c_2V_2$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} A_1 &:= \{x \mid c_1U_1(x) \neq c_1V_1(x)\} \\ A_2 &:= \{x \mid c_2U_2(x) \neq c_2V_2(x)\} \end{aligned}$$

の測度はそれぞれ 0 である<sup>\*1</sup>。このとき、次が成立。

$$A \subset A_1 \cup A_2$$

背理法で示す。上式の左辺から任意に  $x$  を取る。 $x \notin A_1 \cup A_2$ 、つまり、

$$x \in A_1^c \cap A_2^c$$

と仮定する。このとき、 $c_1U_1(x) = c_1V_1(x), c_2U_2(x) = c_2V_2(x)$  であるから、

$$(c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) = 0$$

---

<sup>\*1</sup> 別に  $A_1$  などと名前を付けなくてもいいが(むしろ名前を付けない方がわかりやすい。)、紙面のスペースの都合上名前を付けている。

より、矛盾する。また、

$$A = \{x \mid (c_1 U_1 + c_2 U_2)(x) - (c_1 V_1 + c_2 V_2)(x) < 0\} \\ \cup \{x \mid (c_1 U_1 + c_2 U_2)(x) - (c_1 V_1 + c_2 V_2)(x) > 0\}$$

であるから、 $A$  は可測集合。したがって、測度の単調性より、 $A$  の測度は 0。

## 1.2 65 ページ 10 行目

$U_n \rightarrow U$  より、 $N \in \mathbb{N}$  が存在して、 $n \geq N \Rightarrow \|U_n - U\| < \varepsilon$  ( $\forall \varepsilon > 0$ ) である。 $U_n \sim V_n, U \sim V$  より、 $\|V_N - V\| < \varepsilon$  が分かる。

## 1.3 67 ページ 10 行目から 12 行目

### 1.3.1 (ii) $\Rightarrow$ (i) について。

(逆向きは本の中で証明されています。)

任意の  $Z \in \mathcal{K}$  を取ると、 $\|X - Z\| \geq \|X - Y\| + \alpha$  となることを示すとよい。ここで、 $\alpha > 0$  である。しかし、 $Z$  として  $Y + tZ$  ( $t \in \mathbb{R}$ ) とすればよい。これは  $\mathcal{L}^p$  の線形性のためである。なんとなれば、 $Z = \frac{-Y+W}{t}$  ( $\forall W \in \mathcal{K}$ ) とすればよい。 $\langle X - Y, Z \rangle = \mathbf{E}[(X - Y)Z] = 0$  即ち、 $\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[YZ]$  が成り立つことに注意して、 $\|X - Y - tZ\|^2$  を計算すると分かる\*2。

### 1.3.2 $\|Y - Y'\| = 0$ について。

$$E[(X - Y)(Y - Y')] = 0$$

$$E[(X - Y')(Y - Y')] = 0$$

という式をそれぞれ期待値の中身を展開して引き算すると、

$$E[(Y - Y')^2] = 0$$

という式が求められるから  $Y = Y'$  (*a.s.*)。

## 1.4 70 ページ 8,9 行目

### 1.4.1 $(\mathbf{P}(u))^q \leq \mathbf{P}(u^q)$ について。

記号が見慣れなくてよくわからないが、 $\mathbf{P}$  は直前で確率測度であると示しているから、 $\mathbf{P}(u)$  とは  $\mathbf{P}$  による  $u$  の期待値である。凸関数  $c(x) = x^q$  を考えると、この不等式はイェンゼンの不等式を用いるとすぐに従うことが分かる。そのためには、イェンゼンの不等式を用いるための条件を満たしているかを確認しよう。 $u$  の定義は  $f(s) = 0$  の部分で  $u(s) = 0$  なので、下記の計算には本当は  $1_{\{f(s) > 0\}}$  を書いておくべき。

---

\*2 2 乗しないと計算しにくい。

#### 1.4.2 $\mathbf{P}(u^q) < \infty$ であること

Chapter 5 で見たように、 $f, h$  を可測関数、 $\mu$  を測度とすれば、

$$(hf)\mu = h(f\mu)$$

が成立していた。これを用いる。また、 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  にも注意しておく。

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u^q) &= \frac{h^q}{f^{q(p-1)}} \frac{f^p \mu}{\mu(f^p)} = \frac{h^q}{f^p} \frac{f^p \mu}{\mu(f^p)} = \frac{h^q}{f^p} f^p \frac{\mu}{\mu(f^p)} \\ &= h^q \frac{\mu}{\mu(f^p)} = \frac{h^q}{\mu(f^p)} \mu = \frac{1}{\mu(f^p)} \int h^q d\mu < \infty\end{aligned}$$

#### 1.4.3 $\mathbf{P}(u) < \infty$ について

ヤングの不等式を用いる。

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(u) &= \frac{h}{f^{p-1}} \frac{f^p \mu}{\mu(f^p)} = hf \frac{\mu}{\mu(f^p)} = \frac{hf}{\mu(f^p)} \mu \\ &\leq \frac{1}{\mu(f^p)} \left( \frac{f^p}{p} + \frac{h^q}{q} \right) \mu < \infty\end{aligned}$$

#### 1.4.4 ヘルダーの不等式の証明

$(\mathbf{P}(u))^q \leq \mathbf{P}(u^q)$  を展開する。ここでも  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$  を適宜変形して利用する。

$$\begin{aligned}\left( \frac{h}{\mu(f^{p-1})} 1_{\{f(s)>0\}} \frac{f^p \mu}{\mu(f^p)} \right)^q &\leq \frac{h^q}{f^{q(p-1)}} 1_{\{f(s)>0\}} \frac{f^p}{\mu(f^p)} \\ \left( \frac{1}{\mu(f^p)} \right)^q (hf\mu)^q &\leq \left( \frac{1}{\mu(f^p)} \right)^q \left( h^q \frac{f^p}{f^{q(p-1)}} 1_{\{f(s)>0\}} \mu \right) \\ (hf\mu)^q &\leq (\mu(f^p))^{q-1} \left( h^q \frac{f^p}{f^p} 1_{\{f(s)>0\}} \mu \right) \\ (hf\mu)^q &\leq (\mu(f^p))^{\frac{q}{p}} (h^q \mu) \\ (hf\mu) &\leq (\mu(f^p))^{\frac{1}{p}} (h^q \mu)^{\frac{1}{q}} \\ \int fh d\mu &\leq \left( \int f^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int h^q d\mu \right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

通常の  $\log$  を使う証明じゃないの面白いね。

## 2 Chapter 7

### 2.1 大数の法則を証明する前の補題

**命題.**  $S_k$ -値確率変数列  $(X_k)_{k=1,2,\dots,n}$  は独立で、 $g_k: S_k \rightarrow S'_k$  は  $S_k$ -可測関数とする。このとき、 $Y_k = g_k(X_k)$  とおけば、 $(Y_k)_k$  は独立。

**証明.**  $A'_k \in S'_k$  とする。

$$\{Y_k \in A'_k\} = \{X_k \in g_k^{-1}(A'_k)\}$$

であり、 $g_k$  の可測性から、

$$g_k^{-1}(A'_k) \in S_k$$

であることから、

$$\{X_k \in g_k^{-1}(A'_k)\} \in \sigma(X_k)$$

よって、

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (Y_k \in A'_k)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^n (X_k \in g_k^{-1}(A'_k))\right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k \in g_k^{-1}(A'_k)) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(Y_k \in A'_k) \end{aligned}$$

□

**系.**  $(X_k)_{k=1,2,\dots,n}$  が  $\mathbb{R}$ -値独立確率変数の列とする。 $g = g(x_1, x_2, \dots, x_i)$  は  $\mathbb{R}^i \rightarrow \mathbb{R}$  のボレル可測関数とする。ただし、 $i < n$ 。このとき、 $Y := g(X_1, X_2, \dots, X_i)$  とおけば、 $Y, X_{i+1}, \dots, X_n$  は独立。

**証明.**  $X = (X_1, \dots, X_i)$  は  $\mathbb{R}^i$ -値確率変数であり、 $X, X_{i+1}, \dots, X_n$  は独立である。まずはこれを示す。 $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^i), A_{i+1}, \dots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  について、

$$\mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \dots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X \in A) \prod_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \in A_j) \quad (1)$$

が成立することを言えばよい。そこで、

$$\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R}^i \mid (1) \text{ が成立} \}$$

と定義する。 $\mathcal{L}$  は  $\lambda$ -system である。明らかに  $\Omega \in \mathcal{L}$  である。次に、 $A, B \in \mathcal{L}, A \subset B$  とすると、

$\mathbb{P}(X \in B - A) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A)$  であることに注意すれば、

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X \in B - A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \dots, X_n \in A_n) \\
&= \mathbb{P}(X \in B, X_{i+1} \in A_{i+1}, \dots, X_n \in A_n) - \mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \dots, X_n \in A_n) \\
&= \mathbb{P}(X \in B) \prod_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \in A_j) - \mathbb{P}(X \in A) \prod_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \in A_j) \\
&= (\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A)) \prod_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \in A_j) \\
&= \mathbb{P}(X \in B - A) \prod_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \in A_j)
\end{aligned}$$

なので、 $B - A \in \mathcal{L}$ 。最後に、 $A_n \in \mathcal{L}$  ( $n = 1, 2, \dots$ ) で、 $A_n \uparrow A$  とする。 $X \in A$  とすれば、 $\exists m \in \mathbb{N}$  s.t.  $X \in A_m$  なので、そのような自然数で最小のものを  $m$  とする\*3。集合列  $(A_n)$  は包含関係に関して単調増加であるため、すべての  $N \geq m$  に対して、

$$\{X \in A_m\} = \{X \in A_N\}$$

が成立する。したがって当然

$$\{X \in A_m\} = \bigcup_{k=N}^{\infty} \{X \in A_k\} = \{X \in A\}$$

よって、

$$\mathbb{P}(X \in A_m) = \mathbb{P}(X \in A)$$

よって次のように計算ができる。

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \dots, X_n \in A_n) \\
&= \mathbb{P}(X \in A_m, X_{i+1} \in A_{i+1}, \dots, X_n \in A_n) \\
&= \mathbb{P}(X \in A_m) \prod_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \in A_j) \\
&= \mathbb{P}(X \in A) \prod_{j=i+1}^n \mathbb{P}(X_j \in A_j)
\end{aligned}$$

これにより、 $A \in \mathcal{L}$  であることが分かる。以上より  $\mathcal{L}$  は  $\lambda$ -system。

さて、 $\mathcal{P} = \{A_1 \times \dots \times A_i \mid A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k = 1, 2, \dots, i\}$  は  $\pi$ -system であり、 $A \in \mathcal{P}$  とすれば、直積の定義より

$$X \in A \Leftrightarrow X_1 \in A_1, \dots, X_i \in A_i$$

より、

$$\{X \in A\} = \{X_1 \in A_1\} \cap \dots \cap \{X_i \in A_i\}$$

---

\*3 自然数全体の部分集合は必ず最小限を持つ

仮定から  $X_1, \dots, X_n$  は独立なので

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \dots, X_n \in A_n) \\
&= \prod_{k=1}^n \mathbb{P}(X_k) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \in A_1, \dots, X_i \in A_i) \prod_{k=i+1}^n \mathbb{P}(X_k \in A_k) \\
&= \mathbb{P}(X \in A) \prod_{k=i+1}^n \mathbb{P}(X_k)
\end{aligned}$$

と計算できるから、 $A \in \mathcal{L}$  がわかる。したがって  $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$  である。よって、 $\pi$ - $\lambda$  定理より、

$$\mathcal{L} \supset \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^i)$$

以上により、 $X, X_{i+1}, \dots, X_n$  は独立であることが分かった。

あとは先の命題を適用すればよい。 □

**補題.**  $X, Y, Z, W$  は独立な r.v. とする。このとき、 $(X, Y^n), (XY^2, Z), (XY, ZW), (X^2, Y^2)$  はそれぞれ独立。

**証明.** 確率変数の独立性は合成によって保たれることに注意する。

$(X, Y^n)$  に関しては、

$$\begin{aligned}
f &: x \mapsto x \\
g &: x \mapsto x^n
\end{aligned}$$

として、 $X = f(X), Y^n = g(Y)$  と見る。

$(XY^2, Z)$  に関しては、

$$\begin{aligned}
f &: (x, y) \mapsto xy^2 \\
g &: x \mapsto x
\end{aligned}$$

として、 $XY^2 = f(X, Y), Z = g(Z)$  として見る。

$(XY, ZW)$  に関しては、

$$f: (x, y) \mapsto xy$$

として  $XY = f(X, Y)$  とみれば、 $XY, Z, W$  は独立。もう一度  $ZW = f(Z, W)$  とみれば、 $XY, ZW$  は独立。

$(X^2, Y^2)$  に関しては、

$$f: x \mapsto x^2$$

として  $X^2 = f(X), Y^2 = f(Y)$  として見る。 □

## 2.2 73 ページ下から 3 行目

まあ明らかなんだけど、さすがにそのまま引き算して証明できるほど明らかではない。

$1_{\{|X-\mu|>c\}}$  を考えよう。

$$\mathbb{P}(|X - \mu| > c) = \mathbf{E}[1_{\{|X-\mu|>c\}}]$$

であり、

$$1_{\{|X-\mu|>c\}} < \frac{(X - \mu)^2}{c^2}$$

が成立することに注意すると、両辺を積分して、

$$\begin{aligned} \int 1_{\{|X-\mu|>c\}} d\mathbb{P} &\leq \int \frac{(X - \mu)^2}{c^2} d\mathbb{P} \\ \mathbb{P}(|X - \mu| > c) &\leq \frac{1}{c^2} \mathbf{E}[(X - \mu)^2] \\ c^2 \mathbb{P}(|X - \mu| > c) &\leq \mathbf{E}[(X - \mu)^2] = \text{Var}(X) \end{aligned}$$

## 2.3 74 ページ (a) の 2 行上

$f$  が有界なのは  $f$  が閉区間上の連続関数だから。位相空間でよくあるお話だけどただ単に「 $f$  は有界である」と書かれるのはちょっと....。

## 3 Chapter 8

眠いし疲れたので明日。なんか書かなきゃいけないことあったはずなんだけど、ちょっと忘れたよ。

## 4 Chapter 9

### 4.1 $E[X; G]$ という書き方について

Chapter 5 で実は定義されています。

$$E[X; G] := \int X 1_G d\mathbb{P} = \int_G X d\mathbb{P}$$

### 4.2 86 ページ 3 行目

$$\{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\} \uparrow \{Y > \tilde{Y}\}$$

とは、

$$\bigcup_n \{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\} = \{Y > \tilde{Y}\}$$

よって、

$$\sum_n \mathbb{P}(Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}) \geq \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{Y > \tilde{Y} + \frac{1}{n}\}\right) \geq \mathbb{P}(Y > \tilde{Y}) > 0$$

であることに注意する。

### 4.3 86 ページ下から 6 行目

almost surelyで  $Y_n$  が非負かつ、 $n$  に関して単調増加であることを示すことに気を付ける。

#### 4.3.1 $0 \leq Y_n$ (a.s.) について

$F := \{Y_n < 0\}$  について考える。 $Y_n$  は  $\mathcal{G}$  可測なので、 $F$  は  $\mathcal{G}$  可測集合となる。 $Y_n$  が  $X_n$  の条件付き期待値であることと、非負の可測関数を確立測度で積分するとその値は非負になることに気をつければ、以下のように計算することができる。

$$\begin{aligned} \int_F Y_n d\mathbb{P} &= \int_F X_n d\mathbb{P} \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

一方、

$$\int_F Y_n d\mathbb{P} = \int_{\Omega} Y_n 1_F d\mathbb{P}$$

だから、

$$\int_{\Omega} Y_n 1_F d\mathbb{P} \geq 0$$

となる。さて、

$$Y_n 1_F(\omega) \leq 0 \quad (\forall \omega \in \Omega)$$

だから、

$$\int_{\Omega} Y_n 1_F d\mathbb{P} \leq 0$$

よって、

$$\int_{\Omega} Y_n 1_F d\mathbb{P} = 0$$

これから、

$$\int_{\Omega} -Y_n 1_F d\mathbb{P} = 0$$

51 ページの LEMMA(b) を用いると

$$\mathbb{P}(F) = 0$$

が分かる。



#### 4.3.2 $Y_n \uparrow (\text{a.s.})$ について

前小節とほぼ同じ。 $s < r$  として、 $G := \{Y_s > Y_r\}$  上で  $X_s, X_r$  をそれぞれ積分する。そしてそれらを引き算する。

#### 4.4 86 ページ下から 3 行目 $Y_n \uparrow Y (\text{a.s.})$ について

上極限の扱い分かってない人みたいになった。

各点収束することを示すから、 $\omega \in \Omega$  を一つ固定する。

##### 4.4.1 $\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = \infty$ のとき

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} Y_n(\omega) = \inf_{n \geq 1} \sup_{\nu \geq n} Y_\nu(\omega)$$

である (定義)。見やすさのために、新たに

$$a_n = \sup_{\nu \geq n} Y_\nu(\omega)$$

とおく。すると、

$$\inf_{n \geq 1} a_n$$

となる。探索範囲が狭まっているので  $a_n$  は単調減少列であることに注意する。仮定より、

$$\inf_{n \geq 1} a_n = \infty$$

だから、

$$a_n = \infty \quad (\forall n)$$

つまり、とりわけ  $n = 1$  に関して

$$\sup_{\nu \geq 1} Y_\nu(\omega) = \infty$$

これはつぎのように書ける。

$$\forall K > 0, \exists m \in \mathbb{N} \quad \text{s.t.} \quad Y_m(\omega) > K$$