# Probability with Martingales のギャップとかメモ

Twitter : @skbtkey

**概要**

タイトル通り。ネットの海からこれを見つけ出した方は参考にしていただけると嬉しい。David Williams 著 "Probability with Martingales"。

## 1 Chapter 6

### 1.1 65 ページ 9 行目

$c_1U_1 + c_2U_2 \sim c_1V_1 + c_2V_2$ について。

$$
\begin{aligned}
&\{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) \neq (c_1V_1 + c_2V_2)(x)\} \\
\Leftrightarrow &\{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) \neq 0\} =: A
\end{aligned}
$$

の測度が 0 であることを示せばよい。明らかに、

$$c_1U_1 \sim c_1V_1, c_2U_2 \sim c_2V_2$$

である。したがって、

$$
\begin{aligned}
A_1 &:= \{x \mid c_1U_1(x) \neq c_1V_1(x)\} \\
A_2 &:= \{x \mid c_2U_2(x) \neq c_2V_2(x)\}
\end{aligned}
$$

の測度はそれぞれ 0 である[*1]。このとき、次が成立。

$$A \subset A_1 \cup A_2$$

背理法で示す。上式の左辺から任意に $x$ を取る。$x \notin A_1 \cup A_2$、つまり、

$$x \in A_1^c \cap A_2^c$$

と仮定する。このとき、$c_1U_1(x) = c_1V_1(x), c_2U_2(x) = c_2V_2(x)$ であるから、

$$(c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) = 0$$

[*1] 別に $A_1$ などと名前を付けなくてもいいが (むしろ名前を付けない方がわかりやすい。)、紙面のスペースの都合上名前を付けている。

より、矛盾する。また、

$$A = \{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) < 0\} \\ \cup \{x \mid (c_1U_1 + c_2U_2)(x) - (c_1V_1 + c_2V_2)(x) > 0\}$$

であるから、$A$ は可測集合。したがって、測度の単調性より、$A$ の測度は 0。

### 1.2 65 ページ 10 行目

$U_n \to U$ より、$N \in \mathbb{N}$ が存在して、$n \geq N \Rightarrow ||U_n - U|| < \varepsilon \quad (\forall \varepsilon > 0)$ である。$U_n \sim V_n, U \sim V$ より、$||V_N - V|| < \varepsilon$ が分かる。

### 1.3 67 ページ 10 行目から 12 行目

(ii) $\Rightarrow$ (i) について。(逆向きは本の中で証明されています。)

任意の $Z \in \mathcal{K}$ を取ると、$||X - Z|| \geq ||X - Y|| + \alpha$ となることを示すとよい。ここで、$\alpha > 0$ である。しかし、$Z$ として $Y + tZ \quad (t \in \mathbb{R})$ とすればよい。これは $\mathcal{L}^p$ の線形性のためである。なんとなれば、$Z = \frac{-Y+W}{t} \quad (\forall W \in \mathcal{K})$ とすればよい。$\langle X - Y, Z\rangle = \mathbf{E}[(X - Y)Z] = 0$ 即ち、$\mathbf{E}[XY] = \mathbf{E}[YZ]$ が成り立つことに注意して、$||X - Y - tZ||^2$ を計算すると分かる[*2]。

## 2 Chapter 7

### 2.1 大数の法則を証明する前の補題

**命題.** $S_k$-値確率変数列 $(X_k)_{k=1,2,\cdots,n}$ は独立で、$g_k \colon S_k \to S'_k$ は $\mathcal{S}_k$-可測関数とする。このとき、$Y_k = g_k(X_k)$ とおけば、$(Y_k)_k$ は独立。

**証明.** $A'_k \in \mathcal{S}'_k$ とする。

$$\{Y_k \in A'_k\} = \{X_k \in g_k^{-1}(A'_k)\}$$

であり、$g_k$ の可測性から、

$$g_k^{-1}(A'_k) \in \mathcal{S}_k$$

であることから、

$$\{X_k \in g_k^{-1}(A'_k)\} \in \sigma(X_k)$$

[*2] 2 乗しないと計算しにくい。

よって、

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n}(Y_k \in A'_k)\right) &= \mathbb{P}\left((\bigcap_{k=1}^{n}(X_k \in g_k^{-1}(A'_k))\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_k \in g_k^{-1}(A'_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n}\mathbb{P}(Y_k \in A'_k)\end{aligned}$$

□

**系.** $(X_k)_{k=1,2,\cdots,n}$ が $\mathbb{R}$-値独立確率変数の列とする。$g = g(x_1, x_2, \cdots, x_i)$ は $\mathbb{R}^i \to \mathbb{R}$ のボレル可測関数とする。ただし、$i < n$。このとき、$Y := g(X_1, X_2, \cdots, X_i)$ とおけば、$Y, X_{i+1}, \cdots, X_n$ は独立。

**証明.** $X = (X_1, \cdots, X_i)$ は $\mathbb{R}^i$-値確率変数であり、$X, X_{i+1}, \cdots, X_n$ は独立である。まずはこれを示す。$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^i), A_{i+1}, \cdots, A_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ について、

$$\mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) = \mathbb{P}(X \in A)\prod_{j=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_j \in A_j) \tag{1}$$

が成立することを言えばよい。そこで、

$$\mathcal{L} = \{A \subset \mathbb{R}^i \mid (1) \text{ が成立 }\}$$

と定義する。$\mathcal{L}$ は $\lambda$-system である。明らかに $\Omega \in \mathcal{L}$ である。次に、$A, B \in \mathcal{L}, A \subset B$ とすると、$\mathbb{P}(X \in B - A) = \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A)$ であることに注意すれば、

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(X \in B - A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) \\ =&\mathbb{P}(X \in B, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) - \mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) \\ =&\mathbb{P}(X \in B)\prod_{j=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_j \in A_j) - \mathbb{P}(X \in A)\prod_{j=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_j \in A_j) \\ =&\left(\mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A)\right)\prod_{j=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_j \in A_j) \\ =&\mathbb{P}(X \in B - A)\prod_{j=i+1}^{n}\mathbb{P}(X_j \in A_j)\end{aligned}$$

なので、$B - A \in \mathcal{L}$。最後に、$A_n \in \mathcal{L} \quad (n = 1, 2, \cdots)$ で、$A_n \uparrow A$ とする。$X \in A$ とすれば、$\exists m \in \mathbb{N} \quad s.t. \quad X \in A_m$ なので、そのような自然数で最小のものを $m$ とする[*3]。集合列 $(A_n)$ は包含関係に関して単調増加であるため、すべての $N \geq m$ に対して、

$$\{X \in A_m\} = \{X \in A_N\}$$

[*3] 自然数全体の部分集合は必ず最小限を持つ

が成立する。したがって当然

$$\{X \in A_m\} = \bigcup_{k=N}^{\infty} \{X \in A_k\} = \{X \in A\}$$

よって、

$$\mathbb{P}(X \in A_m) = \mathbb{P}(X \in A)$$

よって次のように計算ができる。

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) \\
=&\mathbb{P}(X \in A_m, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) \\
=&\mathbb{P}(X \in A_m) \prod_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in A_j) \\
=&\mathbb{P}(X \in A) \prod_{j=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_j \in A_j)
\end{aligned}$$

これにより、$A \in \mathcal{L}$ であることが分かる。以上より $\mathcal{L}$ は $\lambda$-system。

さて、$\mathcal{P} = \{A_1 \times \cdots \times A_i \mid A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), k = 1, 2, \cdots, i\}$ は $\pi$-system であり、$A \in \mathcal{P}$ とすれば、直積の定義より

$$X \in A \Leftrightarrow X_1 \in A_1, \cdots, X_i \in A_i$$

より、

$$\{X \in A\} = \{X_1 \in A_1\} \cap \cdots \cap \{X_i \in A_i\}$$

仮定から $X_1, \cdots, X_n$ は独立なので

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X \in A, X_{i+1} \in A_{i+1}, \cdots, X_n \in A_n) \\
=&\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_k) \\
=&\mathbb{P}(X_1 \in A_1, \cdots, X_i \in A_i) \prod_{k=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_k \in A_k) \\
=&\mathbb{P}(X \in A) \prod_{k=i+1}^{n} \mathbb{P}(X_k)
\end{aligned}$$

と計算できるから、$A \in \mathcal{L}$ がわかる。したがって $\mathcal{P} \subset \mathcal{L}$ である。よって、$\pi$-$\lambda$ 定理より、

$$\mathcal{L} \supset \sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^i)$$

以上により、$X, X_{i+1}, \cdots, X_n$ は独立であることが分かった。

あとは先の命題を適用すればよい。 □

**補題.** $X, Y, Z, W$ は独立な r.v. とする。このとき、$(X, Y^n), (XY^2, Z), (XY, ZW), (X^2, Y^2)$ はそれぞれ独立。

**証明．** 確率変数の独立性は合成によって保たれることに注意する。

$(X, Y^n)$ に関しては、

$$\begin{aligned} f &\colon x \mapsto x \\ g &\colon x \mapsto x^n \end{aligned}$$

として、$X = f(X), Y^n = g(Y)$ と見る。

$(XY^2, Z)$ に関しては、

$$\begin{aligned} f &\colon (x, y) \mapsto xy^2 \\ g &\colon x \mapsto x \end{aligned}$$

として、$XY^2 = f(X, Y), Z = g(Z)$ として見る。

$(XY, ZW)$ に関しては、

$$f \colon (x, y) \mapsto xy$$

として $XY = f(X, Y)$ とみれば、$XY, Z, W$ は独立。もう一度 $ZW = f(Z, W)$ とみれば、$XY, ZW$ は独立。

$(X^2, Y^2)$ に関しては、

$$f \colon x \mapsto x^2$$

として $X^2 = f(X), Y^2 = f(Y)$ として見る。 □