反例で巡る確率論

川端諒

コハツ研修士 1 年

発表のしかた

1. トピックについて「正しい」理論の簡単な解説
2. 反例の紹介

確率空間

三つ組 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ を確率空間という。
ここで、

- Ω は標本空間と呼ばれる空でない集合。結果の集まり。
- $\mathcal{F}$ は事象の集まり。σ-algebra という構造を持っている集合族。
- $\mathbb{P}$ は確率測度という。雑に言えば $\mathcal{F}$ から閉区間 $[0, 1]$ への写像

algebra だが σ-algebra でないもの (1/2)

- $\Omega = [0, \infty)$
- $\mathcal{F}_1$ は $[a, b), [a, \infty)$ の形をした区間の集まり
- $\mathcal{F}_2$ は有限個の $\mathcal{F}_1$ の区間 $F_1, \cdots, F_n$ を用いて、

$$F = \bigcup_{i=1}^{n} F_i$$

と表されるもの全体

とすると、$\mathcal{F}_1$ は algebra でない。$\mathcal{F}_2$ は algebra だが σ-algebra ではない。

algebra だが σ-algebra でないもの (2/2)

$\mathcal{F}_2$ については、

$$A_n = \left[0, \frac{1}{n}\right)$$

とする。$A_n \in \mathcal{F}_1$ である。

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$$

だが、

$$\{0\} \notin \mathcal{F}_1$$

よって σ-algebra ではない。

σ-algebra の和は σ-algebra とは限らない

- $\Omega = \{a, b, c\}$
- $\mathcal{F}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{a\}, \{b, c\}\}$
- $\mathcal{F}_2 = \{\emptyset, \Omega, \{b\}, \{a, c\}\}$

このとき、

$$\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$$

は σ-algebra ではない。
共通部分は常に σ-algebra

σ 加法性が成り立たない確率測度？ (1/2)

- $\Omega = [0,1] \cap \mathbb{Q}$
- $\mathcal{F}_1$ は $[a,b], (a,b), [a,b), (a,b]$ の形の区間の集まり。a, b は有理数。
- $\mathcal{F}_2$ は $\mathcal{F}_1$ の互いに交わらない要素の和集合
- $A \in \mathcal{F}_1$ ならば $\mathbb{P}(A) = b - a$
- $B \in \mathcal{F}_2$ ならば $\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i)$

このとき、$\mathcal{F}_2$ は algebra で、$\mathbb{P}$ は有限加法的だが σ 加法性は満たさない。

σ 加法性が成り立たない確率測度？ (2/2)

$\{r\} \in \mathcal{F}_2$ で Ω は可算集合なので、

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} \{r_i\} = \Omega$$

とすることができる。しかし、

$$\mathbb{P}(\Omega) = 1 \neq 0 = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(r_i)$$

事象の独立

- 事象 A, B が独立とは、

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

が成り立つこと。

事象の独立

- 事象 A, B が独立とは、

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

が成り立つこと。

- 事象の集まり $A_1, \cdots, A_n$ のうちどの二つをとっても

$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$

となるとき、組ごとに独立という。

事象の独立

- 事象 A, B が独立とは、
$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$
が成り立つこと。
- 事象の集まり $A_1, \cdots, A_n$ のうちどの二つをとっても
$$\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$$
となるとき、組ごとに独立という。
- 事象の集まり $A_1, \cdots, A_n$ のうち、どの有限個をとっても
$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_n}) = \mathbb{P}(A_{i_1}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_n})$$
が成り立つとき、独立という。

確率変数

確率変数

確率空間上のヤバくない実数値関数 X を確率変数という。

ちゃんと言うと

X が確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ 上の実数値可測関数のとき、X を確率変数という。

確率変数の例

a,b,c,d,e,f が書かれた 6 面ダイスがある。一回振ってみよう。

$$X = \begin{cases} 1 & (\text{a がでたとき}) \\ 2 & (\text{b がでたとき}) \\ 3 & (\text{c がでたとき}) \\ 4 & (\text{d がでたとき}) \\ 5 & (\text{e がでたとき}) \\ 6 & (\text{f がでたとき}) \end{cases}$$

このとき、X は確率変数。

確率変数が独立 (1/2)

- 二つの確率変数 X, Y が独立とは、

$$\mathbb{P}(X = x \text{ かつ } Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$$

がなりたつこと。
- $X_1, \cdots, X_n$ が組ごとに独立、独立であることも、事象のときと同様に定義できる。

確率変数が独立 (2/2)

もっと一般に。
$B_1, B_2 \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ とする。X, Y を確率変数とする。X, Y が独立とは

$$\mathbb{P}(X \in B_1 \text{かつ } Y \in B_2) = \mathbb{P}(X \in B_1)\mathbb{P}(Y \in B_2)$$

組ごとに独立、独立も同様に定義する。

独立とは結局なんぞ？

ざっくりいうと？
何個選んだって

$$\mathbb{P}(A \text{ かつ } B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

という式が成り立つこと！

組ごとに独立ならば独立？

それぞれ"112","121","211","222" という数字が書かれた 4 枚のカードが箱に入っている。ここから箱の中身を見ないでカードを一枚引いてみる。次のような事象を考える。

$$A_1 = \{\text{一文字目が } 1\}$$
$$A_2 = \{\text{二文字目が } 1\}$$
$$A_3 = \{\text{三文字目が } 1\}$$

これは組ごとに独立だが、独立はない。

$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ だが…(1/2)

8 面ダイスを振ろう。つまり、$\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ で同様に確からしいとする。

$$A = \{1,2,3,4\}$$
$$B = C = \{1,5,6,7\}$$

とすると、$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ となるが、

$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C)$ だが…(2/2)

$$\mathbb{P}(B)\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

となるが、

$$\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{2}$$

なので、組ごとに独立ではない。したがって、事象 A, B, C は独立でない。

組ごとに独立だが独立ではない確率変数

(X, Y, Z) はそれぞれ $\frac{1}{4}$ ずつの確率で
$(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (1,1,1)$ の値を取る。このとき、
X, Y, Z は組ごとに独立だが独立ではない。

$$\mathbb{P}(X = 1, Z = 0) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Z = 0)$$

しかし、

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1, Z = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)\mathbb{P}(Z = 1)$$

X, Y が独立なら $g(X), g(Y)$ も独立 (1/2)

定理

任意の連続関数 g について、もし X, Y が独立な確率変数なら、$g(X), g(Y)$ も独立な確率変数になる。
もし g が全単射なら逆も成立する。

g が全単射という条件をぬくと $g(X), (Y)$ は独立だが X, Y は独立でない例が作れる。

X, Y が独立なら $g(X), g(Y)$ も独立 (2/2)

(X, Y) は

$$\mathbb{P}(X = i, Y = j) = p_{i,j}, \quad i, j = -1, 0, 1$$

である確率変数である。ここで

$$p_{1,1} = p_{-1,1} = \frac{1}{32},$$
$$p_{-1,-1} = p_{1,-1} = p_{1,0} = p_{0,1} = \frac{3}{32},$$
$$p_{-1,0} = p_{0,-1} = \frac{5}{32}, \ p_{0,0} = \frac{8}{32}$$

X, Y が独立なら $g(X), g(Y)$ も独立 (3/4)

X, Y は独立ではない。

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) &= \left(\frac{1}{32}+2\times\frac{3}{32}\right)\times\left(2\times\frac{1}{32}+\frac{3}{32}\right) \\
&= \frac{35}{32^2} \\
\mathbb{P}(X=1, Y=1) &= \frac{1}{32}
\end{aligned}
$$

ゆえに、

$$
\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1) \neq \mathbb{P}(X=1, Y=1)
$$

X, Y が独立なら $g(X), g(Y)$ も独立 (4/4)

X^2, Y^2 は独立になる。
この二つの確率変数はともに $0, 1$ のどちらかを取る。それぞれの変数がどの値を取るかの確率は

$$\mathbb{P}(X^2 = 0) = p_{0,1} + p_{0,-1} + p_{0,0} = \frac{1}{2}$$
$$\mathbb{P}(Y^2 = 0) = p_{1,0} + p_{-1,0} + p_{0,0} = \frac{1}{2}$$

となる。よって独立がわかる。

注意

注意

ここからは測度論や確率論に触れたことがない人は置いてけぼりになりそう......
そんなはなしがあるのか～くらいでどうか

平均と分散の定義 (離散)

定義

X を離散値確率変数とする。

- X の平均を $\mathbf{E}[X]$ と書き、

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{x \in \mathrm{Im} X} x \mathbb{P}(X = x)$$

- X の分散を $\mathbf{Var}(X)$ もしくは σ^2 と書き

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

平均と分散の定義 (連続)

定義

X を連続値確率変数とする。

- X の平均を $\mathbf{E}[X]$ と書き、

$$\mathbf{E}[X] = \int_{\Omega} X \mathbb{P}(d\omega)$$

- X の分散を $\mathbf{Var}(X)$ もしくは σ^2 と書き

$$\mathbf{Var}(X) = \mathbf{E}[(X - \mathbf{E}[X])^2]$$

大数の強法則

定義

$\{X_n \mid n \geq 1\}$ を同じ確率空間上の確率変数の列とする。

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n$$
$$a_n := \mathbf{E}[X_n]$$
$$A_n := \mathbf{E}[S_n] = a_1 + \cdots + a_n$$

とする。$\{X_n\}$ が大数の強法則に従うとは、確率 1 で、

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{A_n}{n}\right) = 0$$

がなりたつこと。

直観的な例

- 6 面サイコロを一回投げるとき、その期待値は 3.5。実際にたくさんサイコロを投げて、出た目の平均を取ればそれは 3.5 に近づいていく。
- コイントスをして表が出たら 1 点、裏が出たら 0 点。同様に確からしい。このとき、得点の期待値は $\frac{1}{2}$ 点。実際にいっぱい恋んトスをして得点の平均を取ってみるとそれは $\frac{1}{2}$ 点に近づいていく。

便利な道具:ボレル・カンテリの補題

ボレル・カンテリの補題

$(E_n \mid n \geq 1)$ を独立な事象の集まりとする。このとき、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup E_n) = 1$$

ことばについて

$\limsup E_n$ は E_n *i.o.* と書くこともある。"E_n happens infinitely often" の意味。$\limsup E_n = \bigcap_n \bigcup_{m \geq n} E_n$ なので、「無限回」起きる感はあるよね……?

強法則が成り立つための十分条件

コルモゴロフの条件

$\{X_n \mid n \geq 1\}$ を独立な確率変数の列とする。$\sigma_n^2 = \mathbf{Var}(X_n)$ とおく。次の条件が成立しているとき、$\{X_n \mid n \geq 1\}$ は大数の強法則をみたす。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

コルモゴロフの条件が満たされないとき (1/4)

数列 $\{\sigma_n^2\}$ を

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty$$

を満たす数列とする。独立確率変数 Y_n を次のように定める。
(次ページ)

コルモゴロフの条件が満たされないとき (2/4)

$\frac{\sigma_n^2}{n^2} \leq 1$ のとき、

$$Y_n = \begin{cases} -n & [\mathbb{P}(Y_n = -n) = \frac{\sigma_n^2}{2n^2}] \\ 0 & [\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{\sigma_n^2}{n^2}] \\ n & [\mathbb{P}(Y_n = n) = \frac{\sigma_n^2}{2n^2}] \end{cases}$$

$\frac{\sigma_n^2}{n^2} > 1$ のとき、

$$Y_n = \begin{cases} \sigma_n & [\mathbb{P}(Y_n = \sigma_n) = \frac{1}{2}] \\ -\sigma_n & [\mathbb{P}(Y_n = -\sigma_n) = \frac{1}{2}] \end{cases}$$

コルモゴロフの条件が満たされないとき (3/4)

(Y_n) は強法則を満たさない！
$\mathbf{E}[Y_n] = 0, \mathbf{Var}[Y_n] = \sigma_n^2$ であり、任意の $\varepsilon > 0$ について、

$$\mathbb{P}\left(\frac{|Y_n|}{n} > \varepsilon\right) = \mathbb{P}(Y_n \neq 0) = \begin{cases} \frac{\sigma_n^2}{n^2}, & [\frac{\sigma_n^2}{n^2} \leq 1] \\ 1, & [\frac{\sigma_n^2}{n^2} > 1] \end{cases}$$

よって、

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(|Y_n| > n\varepsilon) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} = \infty$$

コルモゴロフの条件が満たされないとき (4/4)

ボレル・カンテリの補題より、

$$\{|Y_n| > n\varepsilon\}$$

という事象が「無限回」発生してしまう。よって、

$$\frac{Y_n}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \to \infty) \quad (a.s.)$$

は起こりえない。
したがって、$\{Y_n\}$ は大数の強法則を満たさない。

似てる列でも強法則がブレる (1/4)

$\{X_n \mid n \geq 2\}, \{Y_n \mid n \geq 2\}$ は、

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{n}{\log n}\right) = \mathbb{P}\left(X_n = -\frac{n}{\log n}\right) = \frac{\log n}{2n}$$

$$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{logn}{n}$$

$$\mathbb{P}(Y_n = \beta n) = \mathbb{P}(Y_n = -\beta n) = \frac{1}{2\beta^2 n \log n}$$

$$\mathbb{P}(Y_n = 0) = 1 - \frac{1}{\beta^2 n \log n}$$

とする。$(0 < \beta < 1)$

似てる列でも強法則がブレる (2/4)

$$
\begin{aligned}
&\mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[Y_n] = 0 \\
&\mathbf{Var}[X_n] = \mathbf{Var}[Y_n] = \frac{n}{\log n} \\
&|X_n| < n, |Y_n| < n \quad (a.s.) \quad n = 3, 4, \cdots
\end{aligned}
$$

という意味で、X_n, Y_n は対称的。
しかし、$\{X_n\}$ は強法則を満たすが、$\{Y_n\}$ は強法則を満たさない！

似てる列でも強法則がブレる (3/4)

$\{Y_n\}$ が強法則を満たすとすると、

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{n} \to 0\right) = 1$$

を満たす必要があるが、$\{Y_n\}$ の定義より、

$$\sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P}\left(\frac{|Y_n|}{n} = \beta\right) = \infty$$

がわかるので、

似てる列でも強法則がブレる (4/4)

ボレル・カンテリの補題から、

$$\{|Y_n| = n\beta\}$$

という事象は「無限回」起きる。
よって、

$$\frac{Y_n}{n} \to 0 \quad (n \to \infty) \quad (a.s.)$$

が成り立たない。

おわりに

独立性がヤバイ分野が確率論です