যোগাশ্রয়ী প্রোগ্রাম

Kawshik_BUET_CSE17

উদাহরণ 2. জনৈক ভদ্রলোক সর্বোচ্চ 100 টাকা ব্যয় করে কিছু সংখ্যক কলম ও পেন্সিল কিনতে চান। প্রতিটি কলম ও পেন্সিলের মূল্য যথাক্রমে 12 টাকা ও 8 টাকা। তিনি অন্তত একটি কলম কিনবেন কিন্তু 8 টির অধিক পেন্সিল কিনবেন না। ঐ ভদ্রলোক কোন্ প্রকারের কতগুলি জিনিস কিনলে একত্রে সর্বাধিক সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন?

$x \longrightarrow$ কলম

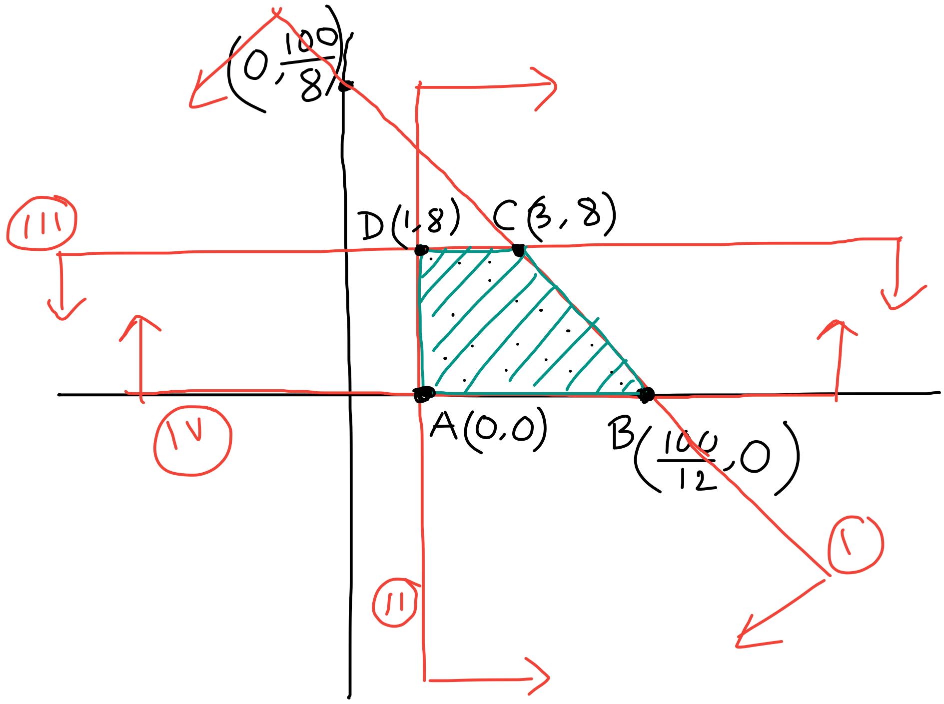
$y \longrightarrow$ পেন্সিল

$12x + 8y \leq 100$ —— (I)

$x \geq 1$ —— (II)

$y \leq 8$ —— (III)

$y \geq 0$ —— (IV)



shortcut: less than হলে (0,0) এর দিকে হবে। greater than হলে (0,0) এর উল্টা দিকে।

$12x + 8y \leq 100$

$\Rightarrow \frac{x}{\frac{100}{12}} + \frac{y}{\frac{100}{8}} \leq 1$

প্রশ্নে চেয়েছে

জিনিস সর্বাধিক।
$x+y$ সর্বাধিক।

$z = x+y$

z কে সর্বাধিক করতে হবে।

$A \longrightarrow z = 0+0 = 0$

$B \longrightarrow z = \frac{100}{12} + 0 = \frac{100}{12} \doteq 8.33$

$\boxed{C \longrightarrow z = 3+8 = 11}$

$D \longrightarrow z = 1+8 = 9$

$x = 3 \longrightarrow$ কলম

$y = 8 \longrightarrow$ পেন্সিল

total $= x+y = 3+8 = 11$

Ans.

4(e) একজন ব্যবসায়ী তার দোকানের জন্য রেডিও ও টিলিভিশন মিলে 100 টি সেট কিনতে পারেন। রেডিও সেট ও টেলিভিশন সেট প্রতিটির ক্রয়মূল্য যথাক্রমে 40 ও 120 ডলার । প্রতি রেডিও ও টেলিভিশন সেটে লাভ যথাক্রমে 16 ও 32 ডলার। সর্বোচ্চ 10400 ডলার বিনিয়োগ করে তিনি সর্বোচ্চ কত লাভ করতে পারেন?

[রা.'০৪;ব.'০৭,'১১; কু.'১০; সি.'১২; ঢা.'১৩; দি.'১৪; চুয়েট,'০৭-০৮; কুয়েট'০৮-০৯]

সমাধান: মনে করি, সর্বোচ্চ লাভ করার জন্য x সংখ্যক রেডিও এবং y সংখ্যক টিলিভিশন সেট কিনতে হবে।

তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = 16x + 32y$.

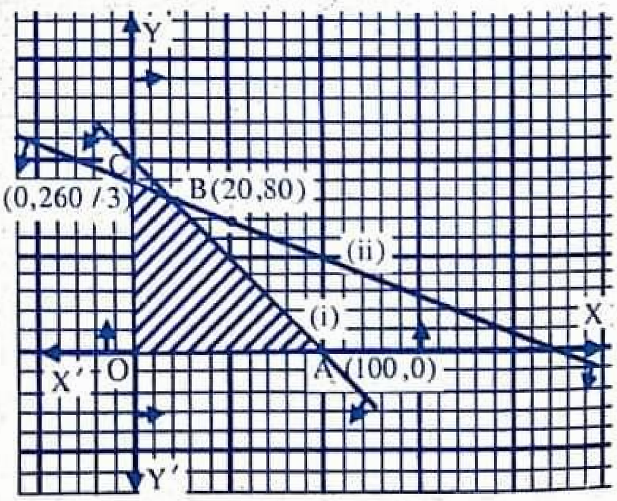
শর্ত ঃ (মোট সেট) $x + y \le 100$, (মোট খরচ) $40x + 120y \le 10400 \Rightarrow x + 3y \le 260$ এবং $x \ge 0,\ y \ge 0$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $x + y = 100 \Rightarrow \frac{x}{100} + \frac{y}{100} = 1 \cdots$(i),

$x + 3y = 260 \cdots\cdots$(ii), যা (20,80), (50, 70) বিন্দুগামী, এবং $x = 0,\ y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 10 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

OABC চতুর্ভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, A(100,0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(20,80) এবং C(0, 260/3)।

O(0,0) বিন্দুতে $z = 16\times0 + 32\times0 = 0$,

A(100,0) বিন্দুতে $z = 16\times100 + 32\times0 = 1600$,

B(20,80) বিন্দুতে $z = 16\times20 + 32\times80 = 2880$,

$C(0, \frac{260}{3})$ বিন্দুতে $z = 16\times0 + 32\times\frac{260}{3} = 2773\frac{1}{3}$

$\therefore$ B(20,80) বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান = 2880 .

$\therefore$ ঐ ব্যবসায়ী সর্বোচ্চ 2880 ডলার লাভ করতে পারেন।

5. (a) X ও Y প্রকারের খাদ্যের প্রতি কেজিতে প্রোটিন ও শ্বেতসার এর পরিমাণ ও তাদের মূল্য নিম্নের চার্টে দেওয়া হল। সবচেয়ে কম খরচে কিরূপে দৈনিক ন্যূনতম খাদ্যের প্রয়োজন মেটানো সম্ভব? [কু.'০৩,'১৩; দি.'১১]

খাদ্যের নাম	প্রতি কেজিতে প্রোটিন	প্রতি কেজিতে শ্বেতসার	প্রতি কেজির মূল্য
X	8	10	70 টাকা
Y	12	6	90 টাকা
দৈনিক ন্যূনতম প্রয়োজন	32	22	

সমাধান : মনে করি, x কেজি X খাদ্য এবং y কেজি Y খাদ্য প্রয়োজন। তাহলে, মোট খরচ $z = 70x + 90y$

সীমাবদ্ধতা ঃ (প্রোটিন) $8x + 12y \ge 32$, (শ্বেতসার)

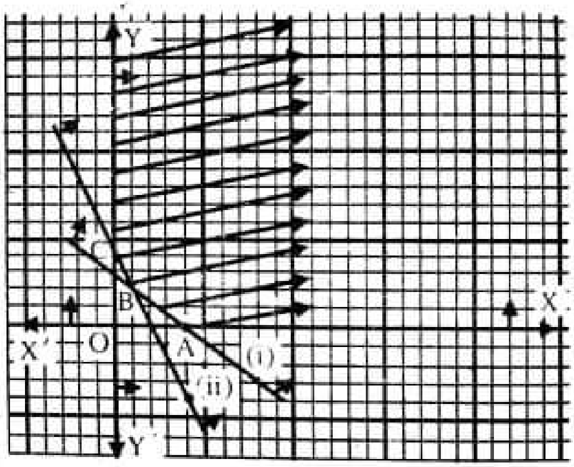
$10x + 6y \ge 22$ এবং $x \ge 0,\ y \ge 0$.

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $8x + 12y = 32 \cdots\cdots$ (i), যা (4, 0) , (1, 2) বিন্দুগামী,

$10x + 6y = 22 \cdots \cdots$ (ii), যা (1,2) ও (4, −3) বিন্দুগামী এবং $x = 0,\ y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i) ও (ii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

AB ও BC রেখাংশদ্বয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, A(4,0), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু B(1,2) এবং C(0 , 11/3) ।

এখন, A(4,0) বিন্দুতে $z = 70\times4 + 90\times0 = 280$,

B(1, 2) বিন্দুতে $z = 70\times 1 + 90\times2 = 250$,

$C(0, \frac{11}{3})$ বিন্দুতে $z = 70\times0 + 90\times\frac{11}{3} = 330$

$\therefore$ সবচেয়ে কম খরচ 250 টাকা। সুতরাং 1 কেজি X খাদ্য এবং 2 কেজি Y খাদ্য প্রয়োজন।

5(c) নিম্নের প্রদত্ত তালিকা থেকে সমাধান বের কর এবং সর্বনিম্ন ব্যয়ে প্রয়োজনীয় পুষ্টি সমন্বিত খাদ্যের সর্বোৎকৃষ্ট সমন্বয় কর: [কু.'০১]

খাদ্যের প্রকৃতি	N_1	N_2	N_3	প্রতি এককের মূল্য
খাদ্য I	20	10	4	1.00 টাকা
খাদ্য II	8	10	12	2.00 টাকা
ন্যূনতম প্রয়োজন	40	40	24	

সমাধান : মনে করি, x একক খাদ্য I এবং y একক খাদ্য II প্রয়োজন। তাহলে, মোট খরচ $z = x + 2y$

সীমাবদ্ধতা ঃ (পুষ্টি N_1) $20x + 8y \geq 40 \Rightarrow 5x + 2y \geq 10$,

(পুষ্টি N_2) $10x + 10y \geq 40 \Rightarrow x + y \geq 4$,

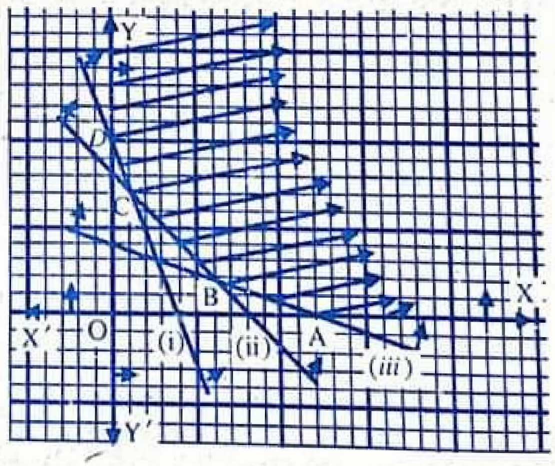
(পুষ্টি N_3) $4x + 12y \geq 24 \Rightarrow x + 3y \geq 6$ এবং $x \geq 0, y \geq 0$.

অসমতাগুলির অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $5x + 2y = 10 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1 \cdots\cdots$ (i),

$x + y = 4 \Rightarrow \frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1 \cdots\cdots$ (ii), $x + 3y = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{2} = 1 \cdots\cdots$(iii) এবং $x = 0$, $y = 0$.

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা X'OX ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 2 বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i),(ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।

AB, BC ও CD রেখাংশত্রয়ের উপরস্থ ও তাদের ডানপার্শ্বস্থ বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে বিধায় ঐ অঞ্চলটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।



এখানে, A(6,0), (ii) ও (iii) এর ছেদবিন্দু B(3,1), (i) ও (ii) এর ছেদবিন্দু C(2/3 , 10/3) এবং D(0 , 5) ।

এখন, A(6,0) বিন্দুতে $z = 6 + 2\times0 = 6$,

B(3, 1) বিন্দুতে $z = 3 + 2\times1 = 5$,

$C(\frac{2}{3}, \frac{10}{3})$ বিন্দুতে $z = \frac{2}{3} + 2\times\frac{10}{3} = 7\frac{1}{3}$

B(3, 1) বিন্দুতে সবচেয়ে কম খরচ 5 টাকা।

$\therefore$ 3 একক খাদ্য I, 1 খাদ্য II প্রয়োজন।

4(h) এক ব্যক্তি 500 টাকার মধ্যে কমপক্ষে 6 খানা গামছা এবং 4 খানা তোয়ালে কিনতে চান। প্রতিখানা গামছার দাম 30 টাকা এবং প্রতিখানা তোয়ালের দাম 40 টাকা। প্রত্যেক প্রকারের কতখানা জিনিস কিনলে সে প্রদত্ত শর্তাধীনে সর্বাপেক্ষা বেশি সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন?

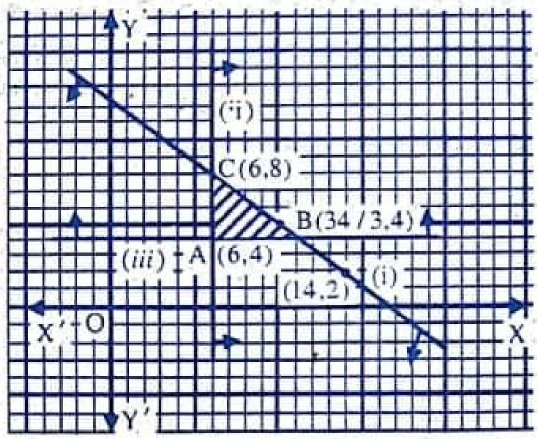
[কু.'০২,'১০,'১২,'১৪; চ.'০২,'০৮; সি.'০৪,'০৭,'১০; দি.'১০,'১৩; য.'১২; রা.'০৬,'১৪]

সমাধান : মনে করি, ঐ ব্যক্তি x খানা গামছা এবং y খানা তোয়ালে কিনলে সর্বাপেক্ষা বেশি সংখ্যক জিনিস কিনতে পারবেন । তাহলে, অভিষ্ট ফাংশন $z = x + y$.

শর্ত ঃ (মোট খরচ) $30x + 40y \leq 500 \Rightarrow 3x + 4y \leq 50$, (গামছা) $x \geq 6$, (তোয়ালে) $y \geq 4$.

অসমতাগুলোর অনুরূপ রৈখিক সমীকরণ, $3x + 4y = 50 \cdots$(i), যা (14,2), (10, 5) বিন্দুগামী, $x = 6 \cdots \cdots$(ii) এবং $y = 4 \cdots \cdots$(iii).

একটি ছক কাগজে স্থানাঙ্কের অক্ষরেখা $X'OX$ ও YOY' অঙ্কন করি। x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর ছোট 1 বর্গের বাহু দৈর্ঘ্য = 1 একক ধরে (i), (ii) ও (iii) রেখার লেখচিত্র অঙ্কন করি।



ABC ত্রিভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ এলাকার বিন্দুসমূহের সেট প্রদত্ত সকল শর্তকে সিদ্ধ করে। অতএব, এই ক্ষেত্রটিই সমাধানের অনুকূল এলাকা।

এখানে, $x = 6$ ও $y = 4$ এর ছেদবিন্দু A(6,4), $y = 4$ ও $3x + 4y = 50$ এর ছেদবিন্দু B(34/3, 4) এবং $x = 6$ ও $3x + 4y = 50$ এর ছেদবিন্দু C(6, 8)।

A(6,4) বিন্দুতে $z = 6 + 4 = 10$, B$(\frac{34}{3},4)$ বিন্দুতে $z = \frac{34}{3} + 4 = 15\frac{1}{3}$,

C(6, 8) বিন্দুতে $z = 6 + 8 = 14$

$\therefore$ B$(\frac{34}{3},4)$ বিন্দুতে z এর সর্বোচ্চ মান $= 15\frac{1}{3}$, যা একটি ভগ্নাংশ। কিন্তু জিনিসের সংখ্যা ভগ্নাংশ হতে পারেনা।

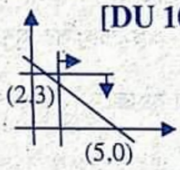
তবে (i) রেখাংস্থ (10, 5) এবং (iii) রেখাংস্থ (11, 4) বিন্দুদ্বয় প্রদত্ত শর্তসমূহকে সিদ্ধ করে এবং বিন্দুদ্বয়ে z এর দ্বিতীয় সর্বোচ্চ মান = 15.

$\therefore$ ঐ ব্যক্তি 10 খানা গামছা ও 5 খানা তোয়ালে অথবা সর্বোচ্চ 11 খানা গামছা ও 4 খানা তোয়ালে কিনতে পারেন।

ভর্তি পরীক্ষার MCQ:

1. $x \geq 0, y \geq 0$, $x + y = 5$, $x \geq 2$, $y \leq 4$ শর্তসমূহের সাপেক্ষে গরিষ্ঠকরণ করলে $z = 6x + 2y$ রাশিটির সর্বোচ্চ মান–

[DU 10-11]

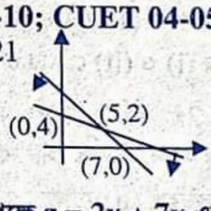


Sol^n : (2, 3) বিন্দুতে $z = 18$ এবং (5,0) বিন্দুতে $z = 30$

$\therefore$ $z_{max} = 18$

2. সমাধান কর: গরিষ্ঠকরণ কর, $z = 3x + 4y$ শর্ত হচ্ছে $x + y \leq 7$, $2x + 5y \leq 20$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

[DU 09-10; KU 09-10; CUET 04-05; Textile 13-14]



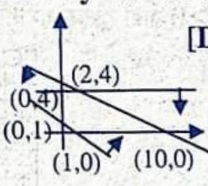
Sol^n : $z(0,4) = 3\times0 + 4\times4 = 16$, $z(7,0) = 3\times7 + 4\times0 = 21$

$z(5,2) = 3\times5 + 4\times2 = 23$

$\therefore$ সমাধানঃ (5, 2)

3. $5x + 10y \leq 50$, $x + y \geq 1$, $y \leq 4$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ শর্তাবলী সাপেক্ষে $z = 2x + 7y$ এর লঘিষ্ঠমান–

[DU 08-09]



Sol^n : $z(1,0) = 2$, $z(0,1) = 7$, $z(10, 0) = 20$, $z(2,4) = 32$

$z(0,4) = 28$. $\therefore$ $z_{min} = 2$