TD2FA

Exercice n°8 :

Le service d'ophtalmologie d'un hôpital offre des tests de glaucome gratuits chaque mardi. Dans ce service travaillent trois ophtalmologues. Le temps nécessaire pour faire un test de glaucome est exponentiel de moyenne 20 minutes. Les clients arrivent selon un processus de Poisson de taux λ=6 clients/heure et sont servis dans l'ordre premier arrivé-premier servi.

1) Calculer le nombre moyen de clients dans la file $\bar{\mathbf{n}}_{\mathbf{f}}$.

2) Calculer le temps de séjour moyen d'un client dans le système $\bar{\mathbf{t}}_{\mathbf{s}}$.

3) Calculer le pourcentage de temps (moyen) d'inoccupation pour chaque médecin.

4) Calculer la fraction du temps pendant laquelle au moins un médecin est libre.

Solution : Arrivées des clients $PP(\lambda)$ avec $\lambda = 6$ ar/h

Durée de service $\sim Exp(\mu)$ avec $\mu = 1$ ser/20 min $= 3$ ser/h

nbre de serveurs $s = 3$

Système de type $M/M/3$

Intensité globale du trafic $\rho = \dfrac{\lambda}{s\mu} = \dfrac{6}{3 \times 3} = \dfrac{2}{3} < 1$

$\Rightarrow$ Système stable

1) $$\overline{n}_f = \frac{\rho P_s}{(1-\rho)^2} = \frac{\rho P_3}{(1-\rho)^2} = \frac{(2/3) P_3}{(1-\frac{2}{3})^2} = \frac{(2/3) P_3}{(1/3)^2} = 6 P_3$$

$$P_3 = \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 P_0 = \frac{1}{6}\left(\frac{6}{3}\right)^3 P_0 = \frac{8}{6} P_0 = \frac{4}{3} P_0$$

$$\Rightarrow \overline{n}_f = 6 \cdot \frac{4}{3} P_0 = 8 P_0$$

$$P_0 = \left[1 + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right) + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^3 \frac{3\mu}{3\mu - \lambda}\right]^{-1} = \left[1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} \times \frac{9}{9-6}\right]^{-1} = \frac{1}{9}$$

$P_0 = \frac{1}{6} \Rightarrow \boxed{\overline{n_f} = \frac{8}{9} = 0{,}8889 \text{ clts}}$

2) $\overline{t_s} = \overline{t_f} + \frac{1}{\mu} = \frac{\overline{n_f}}{\lambda_e} + \frac{1}{\mu}$ on a $\lambda_e = \lambda$

$\overline{t_s} = \left(\frac{0{,}8889}{6} + \frac{1}{3}\right) h = 8{,}889 \text{ min} + 20 \text{ min} = 28{,}889 \text{ min}$

3) 3 medecins M_1, M_2, M_3

$$P[M_1 \text{ inoccupé}] = \sum_{i=0}^{\infty} P[M_1 \text{ inoccupé} / X = i] \times P[X = i]$$

$$= P[M_1 \text{ inoccupé} / X = 0] P_0 + P[M_1 \text{ inoccupé} / X = 1] P_1 + P[M_1 \text{ inoccupé} / X = 2] P_2 + \underbrace{\sum_{i=3}^{\infty} P[M_1 \text{ inoccupé} / X = i] P_i}_{= 0}$$

$P[M_1 \text{ inoccupé}] = P_0 + \frac{2}{3} P_1 + \frac{1}{3} P_2$

$P_0 = \frac{1}{9}$; $P_1 = \frac{2}{9}$; $P_2 = \frac{2}{9}$

$P[M_1 \text{ inoccupé}] = \frac{1}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2}{27} = \frac{9}{27} = \frac{1}{3} = 0,3333$

$= P[M_2 \text{ inoccupé}] = P[M_3 \text{ inoccupé}]$

Le % du temps d'inoccupation de chaque medecin est de 33,33 %.

4) La fraction du temps pendant laquelle au moins un medecin est libre

$= P_0 + P_1 + P_2 = P[X < 3]$

$= \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9} = \frac{5}{9}$

Sur une periode d'activité T, on a $\frac{5}{9} T$ pendant laquelle au moins un medecin est libre

Exercice n°7 :

Un certain village est servi par deux stations taxis. Les clients arrivent dans chaque station selon un processus de Poisson de taux λ=10 clients/heure. La durée moyenne d'une course est exponentielle de moyenne $\frac{1}{\mu}$=11.5 minutes.

Ces deux stations ont été achetées par un homme d'affaires. A fin de réduire le temps d'attente des clients pour avoir un taxi, la première action qu'il a entreprise était de regrouper les deux stations pour en créer une seule disposant de quatre taxis.

- Vérifier si son action est meilleure que la précédente.

Solution : * Ancienne politique 2 systèmes $M/M/2$

Arrivées des clients à chaque station $PP(\lambda)$ avec $\lambda = 10$ clts/h

durée de service $\sim Exp(\mu)$ avec $\mu = 1$ ser/11,5 min $= 5.2174$ ser/h

Intensité du trafic $\rho = \frac{\lambda}{2\mu} = ?$ vérifier si les systèmes sont stables

Ensuite calculer $\overline{n_f}$ et $\overline{t_f}$ dans chaque système

* Nouvelle politique : système $M/M/4$

taux d'arrivées $\lambda = 20$ clts/h

taux de service $\mu = 5.2174$ ser/h

Intensité globale du trafic : $\rho = \frac{\lambda}{4\mu} = ?$ vérifier la stabilité

puis calculer $\overline{n_f}$ et $\overline{t_f}$ et comparer avec les valeurs de l'ancienne politique

Rappels:

1) Processus de naissance et de mort

$$p_n = p_0 \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \qquad et \qquad \mathbf{p_0} = \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\lambda_i}{\mu_{i+1}} \right]^{-1}$$

2) Système M/M/s

$$p_k = \begin{cases} \dfrac{1}{k!}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 & \text{si } 1 \leq k \leq s \\ \dfrac{1}{s!\, s^{k-s}}\left(\dfrac{\lambda}{\mu}\right)^k p_0 & \text{si } k \geq s \end{cases} \qquad et \qquad \mathbf{p_0} = \left[\sum_{\mathbf{k=0}}^{\mathbf{s-1}} \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{k!}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathbf{k}} + \frac{1}{\mathbf{s!}}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{\mathbf{s}} \left(\frac{\mathbf{s}\mu}{\mathbf{s}\mu - \lambda}\right) \right]^{-1}$$

$$\overline{\mathbf{n}}_{\mathbf{s}} = \frac{\rho \mathbf{p}_{\mathbf{s}}}{(\mathbf{1} - \rho)^2} + \mathbf{s}\rho \qquad \mathbf{ou} \qquad \rho = \frac{\lambda}{\mathbf{s}\mu}$$