Zahlensysteme

Jede Zahl ist in einem Stellenwertsystem steht, hat dort eine bestimmte Darstellung.

$$\forall a_b : ((C_{m-1}C_{m-2}...C_1C_0)_b)_{10} := \sum_{n=0}^{m-1} C_n b^n \tag{1}$$

Damit b ein gültiges Stellenwertsystem ist, gilt:

$$(M = \{a_b | a_b \leq k_b\} : k_b + 1 = |M|) \wedge (a, b \in (\mathbb{N}/1)) \tag{2}$$

$$\forall a_b \in M : \nexists \sum_{n=0}^{k-1} C_n b^n \tag{3}$$

Beweis für (2)

$$k_b = \sum_{n=0}^{m-1} (b-1) b^n \tag{4}$$

$$k_b = (b-1) \sum_{n=0}^{m-1} b^n \tag{5}$$

Mit der Definiton der geometrischen Reihe:

$$k_b = (b-1) \frac{1-b^m}{1-b} \tag{6}$$

$$k_b = b^m - 1 \tag{7}$$

Damit gilt:

$$|M| = b^m \tag{8}$$

Die Mächtigkeit der Menge lässt sich durch die möglichen Koeffizienten bestimmen. Für jeden Koeffizienten gibt es also b Möglichkeiten. Für eine Zahl mit m Koeffizienten gilt nun:

$$|M| = b^m \tag{9}$$

Damit ist das erste Axiom erfüllt.

Beweis für (3)

Nimmt man das Gegenteil an:

$$(\exists a_b \wedge \exists c_b) : (a_b = c_b) \wedge ((a_b)_{10} \neq (c_b)_{10}) \tag{10}$$

$$((a_b)_{10} \neq (c_b)_{10}) \implies \exists C_{na} \neq C_{nb} \implies (a_b \neq c_b) \tag{11}$$