Die Überlagerung zweier mechanischer harmonischer Wellen mit gleicher Amplitude ist durch die Addition der Weggleichungen gegeben

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t) \tag{1}$$

Nun gilt mit:

$$s_n(t) = \hat{s}\sin(t\omega_n) \tag{2}$$

$$s(t) = \hat{s}\sin(t\omega_1) + \hat{s}\sin(t\omega_2) \tag{3}$$

$$s(t) = \hat{s}(\sin(t\omega_1) + \sin(t\omega_2)) \tag{4}$$

Herleitung der trigonometrischen Beziehung
Es gilt zu beweisen:

$$2\sin(\frac{a+b}{2})\cos(\frac{a-b}{2}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{5}$$

Nun wird die Definition aus den komplexen Zahlen genutzt:

$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) \tag{6}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \tag{7}$$

Einsetzen:

$$\frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia}) + \frac{1}{2i}(e^{ib} - e^{-ib}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{8}$$

$$\frac{1}{2i}(e^{ia} - e^{-ia} + e^{ib} - e^{-ib}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{9}$$

Nun können ia und ib substituiert werden.

$$ia = i(\frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}) \tag{10}$$

$$ib = i(\frac{a+b}{2} + \frac{-a+b}{2}) \tag{11}$$

Nun können diese in die Gleichung eingesetzt werden.

$$\frac{1}{2i}(e^{i(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2})} - e^{-i(\frac{a+b}{2}+\frac{a-b}{2})} + e^{i(\frac{a+b}{2}+\frac{-a+b}{2})} - e^{-i(\frac{a+b}{2}+\frac{-a+b}{2})}) = \sin(a)+\sin(b) \tag{12}$$

Dieses wird nun ausmultipliziert:

$$\frac{1}{2i}(e^{i(\frac{a+b}{2})+i(\frac{a-b}{2})} - e^{-i(\frac{a+b}{2})+-i(\frac{a-b}{2})} + e^{i(\frac{a+b}{2})+i(\frac{-a+b}{2})} - e^{-i(\frac{a+b}{2})+-i(\frac{-a+b}{2})}) \tag{13}$$

Da

$$e^a e^b = e^{a+b} \tag{14}$$

gilt, kann man dies zu:

$$\frac{1}{2i}(e^{i(\frac{a+b}{2})} - e^{-i(\frac{a+b}{2})})(e^{i(\frac{-a+b}{2})} + e^{-i(\frac{-a+b}{2})}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{15}$$

Dies kann zu:

$$\frac{1}{2i}(e^{i(\frac{a+b}{2})} - e^{-i(\frac{a+b}{2})})(e^{-i(\frac{a-b}{2})} + e^{i(\frac{a-b}{2})}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{16}$$

Nun gilt mit der obigen Definition des Sinus:

$$\sin(\frac{a+b}{2})(e^{-i(\frac{a-b}{2})} + e^{i(\frac{a-b}{2})}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{17}$$

Durch Umstellen der Terme und Verwendung der Eins als das neutrale Element der Multiplikation ergibt dies:

$$2\sin(\frac{a+b}{2})\frac{1}{2}(e^{i(\frac{a-b}{2})} + e^{-i(\frac{a-b}{2})}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{18}$$

Nun ergibt dies mit der obigen Definition des Kosinus:

$$\sin(\frac{a+b}{2})2\cos(\frac{a-b}{2}) = \sin(a) + \sin(b) \tag{19}$$

Herleitung der Endgleichung

Nun gilt mit der oben bewiesenen Gleichung:

$$\hat{s}2\sin(\frac{t\omega_1 + t\omega_2}{2})\cos(\frac{t\omega_1 - t\omega_2}{2})) = \hat{s}\sin(t\omega_1) + \hat{s}\sin(t\omega_2) \tag{20}$$

Dies wird zur Endgleichung weiter vereinfacht:

$$2\hat{s}\sin(t\frac{\omega_1 + \omega_2}{2})\cos(t\frac{\omega_1 - \omega_2}{2})) = \hat{s}\sin(t\omega_1) + \hat{s}\sin(t\omega_2) \tag{21}$$