1 Spielerklärung

Magic the Gathering ist ein Sammelkartenspiel in dem sich zwei Spieler mit Karten aus selbsterstellten Decks solange duellieren, bis eine Siegbedingung erfüllt ist.In jeder Runde ziehen die Spieler abwechselnd Karten aus ihrer Bibliothek,bei Spielbeginn werden sieben Karten gezogen, welche ihr Deck darstellt. Das Deck besteht dabei aus mehreren Arten von Karten. Von elementarer Bedeutung ist hierbei das Mana, welches als Preis für die Kreaturen, die Verzauberungen, die Artefakte, Hexerei und die Spontanzauber dient. Das Mana wird durch Landkarten generiert, welche jede Runde so viel Mana bereitstellen, wie es Landkarten auf dem Spielfeld gibt.

2 Deckoptimierung

Um ein Deck überhaupt zu optimieren werden hier die Optimierungsbedingungen definiert. Ein Deck gilt als optimiert, wenn:
1. Das Deck bei Spielbeginn statistisch sowohl genug Länder als auch restliche Karten enthält um das Spiel zu beginnen.
2. Es die entsprechenden Karten, die im Spielverlauf benötigt werden ausreichend zur Hand hat.
Diese Ziele berücksichtigen dsa Vorhandensein einer Strategie. Nach dieser Strategie sind bereits Kartenvorschläge vorhanden und diese müssen nur noch in die richtige Menge gesetzt werden.

3 Deckdefinition

Ein Deck besteht dabei aus G Karten. Davon sind L Karten Länder. Zuerst wird die Aufteilung in Landkarten andere Karten gemacht. Die Zufallsvariable X ist dabei die Anzahl der gezogenen Landkarten. Zieht man nun k-Landkarten aus der Stichprobe der Größe n gilt füe die Wahrscheinlichkeit

$$P(X = k) = \prod_{c=0}^{k-1} (\frac{L - c}{G - c}) \tag{1}$$

Zieht man nun die restlichen $n - k$ Karten, die aber keine Landkarten sind, so gilt

$$P(X = k) = \prod_{c=0}^{n-(k+1)} (\frac{(G - (c + k) - L)}{G - (c + k)}) \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit dieser beiden Ereignisse gibt multipliziert die Gesamtwahrscheinlichkeit an.

$$P(X=k)=\prod_{c=0}^{k-1}(\frac{L-c}{G-c})\prod_{c=0}^{n-(k+1)}(\frac{(G-(c+k)-L)}{G-(c+k)}) \tag{3}$$

Durch die binäre Einteilung werden verschiedene Permutationen durch den Binomialkoeffizienten angegeben. Damit gilt nun final für die Gesamtwahrscheinlichkeit.

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\prod_{c=0}^{k-1}(\frac{L-c}{G-c})\prod_{c=0}^{n-(k+1)}(\frac{(G-(c+k)-L)}{G-(c+k)}) \tag{4}$$

Nun werden die multiplikativen Ausrücke durch die Fakultät ersetzt.

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\frac{(G-k)!(L)!}{(G)!(L-k)!}\frac{(G-L)!(G-n)!}{(G-L-(n-k))!(G-k)!} \tag{5}$$

Wir erweitern den Bruch und formen dies zu den bekannten Binomialkoeffizienten um.

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\frac{(G-k)!(L)!k!}{(G)!(L-k)!k!}\frac{(G-L)!(G-n)!(n-k)!}{(G-L-(n-k))!(G-k)!(n-k)!} \tag{6}$$

$$P(X=k)=\binom{N}{k}\frac{\binom{L}{k}}{\binom{G}{k}}\frac{\binom{G-L}{n-k}}{\binom{G-k}{n-k}} \tag{7}$$

Nun werden weitere Fäkultäten herausgekürzt und es gilt:

$$P(X=k)=\frac{\binom{L}{k}\binom{G-L}{n-k}}{\binom{G}{n}} \tag{8}$$

Dies ist die hypergeoemtrische Verteilung. Als Nachweis für die Geltung als Wahrscheinlichkeitsfunktion gilt dann:

$$P(X=k)\leq 1 \wedge \sum_{c}^{n}P(X=n)=1 \tag{9}$$

Dies kann nun weiter umformuliert werden, indem die Bedingung ausgeweitet wird. Ist die Summe aller Wahrscheinlichkeiten equivalent zu Eins und jeder Term positiv oder Null, dann ist auch jeder Term kleiner oder equivalent zu Eins.

$$P(X=k) \geq 0 \wedge \sum_{c}^{n} P(X=n) = 1 \tag{10}$$

Die erste Bedingung kann sehr einfach bewiesen werden, da die Binomialkoeffizienten nicht Null werden können. Damit gilt dann automatisch

$$\frac{\binom{L}{k}\binom{G-L}{n-k}}{\binom{G}{n}} \geq 0 \tag{11}$$

Zur Beweis der zweiten Gleichung wird hier die Vandermonde-Identität bewiesen.
Laut dem binomischen Lehrsatz gilt:

$$(1+x)^n = \sum_{c=0}^{n} \binom{n}{c} x^c \tag{12}$$

Also gelten auch folgende Identitäten:

$$(1+x)^{n+m} = \sum_{c=0}^{n} \binom{n+m}{c} x^c \tag{13}$$

$$(1+x)^n (1+x)^m = \sum_{c=0}^{n} \binom{n}{c} x^c \sum_{c=0}^{n} \binom{m}{c} x^c \tag{14}$$

Demnach gilt:

$$\sum_{c=0}^{n+m} \binom{n+m}{c} x^c = \sum_{c_1=0}^{n} \binom{n}{c} x^{c_1} \sum_{c_2=0}^{n} \binom{m}{c} x^{c_2} \tag{15}$$

Nun stellen wir einen Koeffizientenvergleich an. Dafür werden die Reihen auf der linken Seite vereinfacht.
Sind nun $c_1 + c_2 = c$, dann gilt der Koeffizientenvergleich. Es gibt dabei $c+1$ Terme beim c-ten Koeffizienten. Dies wird durch eine Tabelle veranschaulicht.

C_n	$c_1 = 0$	$c_1 = 1$	$c_1 = 2$	$c_1 = ...$
$c_2 = 0$	0	1	2	...
$c_2 = 1$	1	2	3	...
$c_2 = 2$	2	3	4	...
$c_2 = ...$	...	...	...	...

Die Diagonalen sind also die einzigen Diagonalen, die diese Zahlen enthalten. Da bei jeder anderen Zeile die Zahl entweder zu klein oder zu groß ist. Somit gilt die obige Regel durch Induktion. Der 0-Term hat eine Kombination. Der jeweilige Term danach hat immer einen Eintrag mehr in der Diagonale als der vorherige.

$$c_n + 1 = c_{n+1} \tag{16}$$

Somit sind diese beiden Reihen equivalent.

$$\sum_{c=0}^{n+m} \binom{n+m}{c} x^c = \sum_{c=0}^{n+m} x^c \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \binom{m}{c-k} \tag{17}$$

Durch den Koeffizientenvergleich gilt also:

$$\binom{n+m}{c} = \sum_{k=0}^{c} \binom{n}{k} \binom{m}{c-k} \tag{18}$$

Nun lässt sich die obige Bedingung beweisen.
Es gilt also:

$$\sum_{c}^{n} \frac{\binom{L}{c}\binom{G-L}{n-c}}{\binom{G}{n}} = 1 \tag{19}$$

Durch das Ausklammern gilt also:

$$\frac{1}{\binom{G}{n}} \sum_{c}^{n} \binom{L}{c} \binom{G-L}{n-c} = 1 \tag{20}$$

Durch die obige Identität gilt demnach:

$$\frac{1}{\binom{G}{n}} \binom{G}{n} = 1 \tag{21}$$

$$1 = 1 \tag{22}$$

Damit ist dies eine valide Wahrscheinlichkeitsverteilung. Nun gilt also für den Erwartungswert μ:

$$\mu = \sum_{c}^{n} c \frac{\binom{L}{c=0}\binom{G-L}{n-c}}{\binom{G}{n}} \tag{23}$$

Durch die Definition der Fakultät gilt demnach:

$$\mu = \frac{L}{\binom{G}{n}} \sum_{c=0}^{n} \binom{L-1}{c-1} \binom{G-L}{n-c} \tag{24}$$

Da der nullte Term ebenfalls Null ist, gilt:

$$\mu = \frac{L}{\binom{G}{n}} \sum_{c=1}^{n} \binom{L-1}{c-1} \binom{G-L}{n-c} \tag{25}$$

Nach einer Indexveränderung $c - 1 = l$ gilt:

$$\mu = \frac{L}{\binom{G}{n}} \sum_{l=0}^{n-1} \binom{L-1}{l} \binom{G-L}{n-(l+1)} \tag{26}$$

Durch die Verwendung der Vadermonde-Identität gilt demnach:

$$\mu = \frac{L\binom{G-1}{n-1}}{\binom{G}{n}} \tag{27}$$

Durch die Verwendung der Definition des Binomialkoeffizienten gilt demnach:

$$\mu = \frac{Ln}{g} \tag{28}$$

4 Kartenstatistiken

Es gibt 9.034 Karten in MTG:Arena. Diese Karten sind folgendermaßen nach Kartenkosten verteilt.

Mana	Anzahl
0	376
1	927
2	2189
3	2252
4	1566
5	944
6	470
7	215
8	54
9	19
10	12
11	2
12	4
13	1
15	3

Der Erwartungswert dieser Daten berechnet sich zu $\mu = 3.12$. Zieht man also aus allen Karten zufällig eine Karte ist der zu-erwartende Wert der Manakosten also 3. Wollen wir also die höchste Wahrscheinlichkeit beim ersten Zug haben, dass wir eine Karte spielen können, dann müssen wir also drei Landkarten ziehen. Da nun genau drei Karten mit der höchsten Wahrscheinlichkeit gezogen werden sollen, muss also auch der Erwartungswert bei der Kartenanzahl $\mu = 3$ liegen. Damit gilt für die Anzahl der Landkarten im Gesamtdeck:

$$3 = \frac{7L}{G} \tag{29}$$

Also gilt mit der umgestellten Formel:

$$L = \frac{3G}{7} \tag{30}$$

für die klassischen Kartendeckgrößen gilt also:

Spielmodus	Kartengröße	Landkartenanteil (Prozent)
Limited	40	17 (42.5)
Alchemie und Normal	60	25 (41.6)
Commander	100	43 (42.8)

5 Deckzusammensetzung

Die verfügbaren Karten $G-L$ können also frei ausgewählt werden. Hier wird wieder die Startzusammensetzung herangezogen. Nimmt man hier wieder das gleiche Prozedere wie oben, so ergibt sich die Formel:

$$|\,\text{Kartentyp}\,| = \frac{7L}{G} \tag{31}$$

Die Formel eine gewisse Karte beim ersten Ziehen zu bekommen ist, wenn man nun die Karte l mal hat, dann gilt:

$$P(X=1) = \frac{\binom{l}{1}\binom{G-l}{n-1}}{\binom{G}{n}} \tag{32}$$

Die dazugehörige Wertetabelle beträgt:

Kartenanzahl	Wahrscheinlichkeit in Prozent, G=40	Wahrscheinlichkeit in Prozent, G=60
1	17.5	11.6
2	29.6	20.9
3	37.4	28.1
4	41.7	33.6

Die Chance eine Karte aus dem laufenden Spiel das erste mal zu ziehen besteht dann aus:

$$p(x) = \frac{l-k}{G-x} \tag{33}$$

Damit die Wahrscheinlichkeit eine Karte, die l-mal in einem G großen Deck vorhanden ist, diese Karte k- mal gezogen wurde und bereits x Karten gezogen wurden, im laufenden Spiel zu bekommen equivalent oder größer ist als sie bei der Initialziehung zu bekommen, gilt es diese Ungleichung zu lösen.

$$p(x) = \frac{l}{G-x} \geq P(x=1) \tag{34}$$

Dies ergibt als Tabelle:

Kartenanzahl	Bibliotheksgröße, G=40	Bibliotheksgröße, G=60
1	8	9
2	9	10
3	10	11
4	11	11

Diese Bibliotheksgrößen werden eher selten oder erst spät erreicht. Somit kann man daraus formulieren, welche Karten man mehr in sein Deck packen sollte und welche nicht. Somit können nun ein paar Grundregeln aufgestellt werden.

6 Grundregeln eines ausgeglichenen Decks

1. Es müssen genug Landkarten von Anfang an vorhanden sein. Dazu berechnet man den Erwartungswert μ der ausgewählten Karten und setzt dies in die Formel ein. Dabei ist K die Anzahl der Nicht-Landkarten und L die Anzahl der Landkarten.

$$L = \mu \frac{K + L}{7} \tag{35}$$

Nun wird die Menge der Landkarten soweit gerundet und so viele Landkarten herausgenommen, bis die Summe der Landkarten und der Nicht-Landkarten die Deckgröße ist.
Es sit dabei zu empfehlen einen Erwartungswert von etwa 3 Mana zu haben. Dies entspricht nicht nur dem Durchschnitt, sondern ermöglicht ebenfalls eine größere Kartenvielfalt, da weniger Landkarten zu einem erfolgreichen Spielstart benötigt werden. 2. Braucht man Karten sehr früh im Spiel, so ist es sinnvoller diese mehrfach in das Deck zu tuen. Sind diese eher im späteren Spiel von Bedeutung, so lohnt es sich weniger.
3. Bei gemischten Decks kommt es auf die Aufteilung der Landkarten innerhalb der Farben an. Diese wird durch die Errechnung des Erwartungswertes der einzelnen Farben berechnet und die fehlenden Karten bis zur Grenze aufstocken. Dabei wird möglichst mit gemischten Ländern aufgestockt. Die mehrfarbigen Karten werden bei jeder Rechnung berücksichtigt. Zur Berechnung der Landkarten wird die bereits bekannte Formel genutzt.