Es gilt zu beweisen, dass diese Identität gilt:

$$\int_0^\infty \frac{x-1}{x^n-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n+1}dx \tag{1}$$

Nun gilt:

$$\int_a^b f_1(x)+f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \tag{2}$$

Durch den Hauptsatz der Integralrechnung gilt:

$$\int_a^b f_1(x)dx = F_1(b) - F_1(a) \tag{3}$$

Nun gilt durch diesen Satz:

$$\int_a^b f_1(x)+f_2(x)dx = (F_1(b)+F_2(b)) - (F_1(a)+F_2(a)) \tag{4}$$

$$\int_a^b f_1(x)+f_2(x)dx = F_1(b)+F_2(b) - F_1(a) - F_2(a) \tag{5}$$

$$\int_a^b f_1(x)+f_2(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx \tag{6}$$

Somit gilt für das obigen Integral:

$$\int_0^\infty \frac{x}{x^n-1}dx - \int_0^\infty \frac{1}{x^n-1}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n+1}dx \tag{7}$$

Nun kann in dm ersten Integral substituiert werden.:

$$u = x^2 \tag{8}$$

Nun gilt für die Substitution:

$$dx = \frac{du}{2x} \tag{9}$$

und die Grenzen bleiben gleich, da:

$$0 = \sqrt{0} \tag{10}$$

und

$$\infty = \sqrt{\infty} \tag{11}$$

Da die Integrationsvariable egal ist, kann das u durch ein x ersetzt werden:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n - 1}dx - \int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n + 1}dx \tag{12}$$

$$-\int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n + 1}dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n - 1}dx \tag{13}$$

$$-\int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n + 1}dx - \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n - 1}dx \tag{14}$$

$$-2\int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx = \int_0^\infty \frac{1}{(\sqrt{x})^n + 1} - \frac{1}{(\sqrt{x})^n - 1}dx \tag{15}$$

$$-2\int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx = \int_0^\infty \frac{((\sqrt{x})^n - 1) - ((\sqrt{x})^n + 1)}{((\sqrt{x})^n + 1) * ((\sqrt{x})^n - 1)}dx \tag{16}$$

Nun wird der Zähler durch das Auflösen der Klammern und der Nenner durch die dritte binomische Formel aufgelöst:

$$-2\int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx = \int_0^\infty \frac{(\sqrt{x})^n - 1 - (\sqrt{x})^n - 1}{(\sqrt{x})^{2n} - 1^2}dx \tag{17}$$

$$-2\int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx = -2\int_0^\infty \frac{1}{x^n - 1}dx \tag{18}$$

$$0 = 0 \tag{19}$$

Somit gilt diese Identität