1 Die Symmetrien eines regelmäßigen Polygons

Zuerst müssen einige Annahmen über das regelmäßige Polygon getroffen werden.

1. Das regelmäßige Polygon behält seine Symmetrieeigenschaften als Objekt auch nach einer Punkrotation

2. Jedes regelmäßige Polygon hat nach einer Verschiebung im Raum die gleichen Symmetrieeigenschaften

Somit lässt sich nun der Fall des allgemeinen regelmäßigen Polygons auf das eines Spezifischen vereinfachen.

1.1 Definitionen

Man definiere nun eine Menge der Punkte, die die Ecken des Polygons repräsentieren. Für diese Menge und deren Elemente gelten nun einige Axiome:

$$M = \{e^{\frac{2\pi i n}{|M|}} | n \leq |M| \wedge n \in \mathbb{N}\} \tag{1}$$

Nun wird die Punktrotation, mithilfe einer Funktion definiert.

$$\forall E_0 \in M : T(E_0, \theta) = e^{\frac{2\pi i n + i\theta}{|M|}} \wedge M' = T(M, \theta) \wedge \theta \in]0, 2\pi] \tag{2}$$

Es wird nun versucht, alle θ zu finden, für die gilt:

$$M = T(M, \theta) \tag{3}$$

Die Anzahl der θ für die diese Gleichung gilt ist nun die Anzahl aller Punktsymmetrien Die Beschränkung des Winkels auf maximal 2π resultiert aus der Definition einer Symetrie.Wenn ein einzelner Punkt markiert wird, dann hat eine Symeetrie um $2\pi + \theta$ den Effekt von θ. Nun kann die Gleichung umgeschrieben werden.Dabei bezeichnet % die mod-Funktion.

$$T(M, \theta) = T(M, \theta \% 2\pi) \tag{4}$$

Somit können nun die validen Symmetrien bestimmt werden.

2 Der Beweis

Nun nehmen wir die Menge als geordnet an. Das heißt die Punkte sind nach der Größe von n in der Menge M und M‘ geordnet. Nun versuchen wir, die kleinste Punktrotation zu finden, die die Bedingung erfüllt. Nun sind die Punkte, die am nächsten zueinander sind, die Punkte mit der kleinsten Winkeldifferenz. Dabei werden nur positive Winkel addiert und es ergibt sich der Punkt des Punktes der Menge in M‘ durch die Formel

$$(n\%M)+1 \tag{5}$$

Nun ist die Winkeldifferenz zweier benachbarter Punkte

$$\frac{2\pi i(n+1)}{|M|}-\frac{2\pi in}{|M|}=\frac{2\pi i}{|M|} \tag{6}$$

Somit werden die zwei Mengen gegenübergestellt.

$$M=\{e^{\frac{2\pi i}{|M|}},e^{\frac{4\pi i}{|M|}},...e^{2\pi i}\} \tag{7}$$

$$M‘=\{e^{\frac{2\pi i}{|M|}+\frac{2\pi i}{|M|}},e^{\frac{2\pi i}{|M|}+\frac{4\pi i}{|M|}},...,e^{\frac{2\pi i}{|M|}+2\pi i}\} \tag{8}$$

Diese Gegenüberstellung kann durch Arithmetik und die Formel:

$$e^{2\pi in}=1,n\in\mathbb{N}_0 \tag{9}$$

vereinfacht werden. Diese Formel kann durch die eulersche Formel bewiesen werden.

$$e^{\pi i}=-1 \tag{10}$$

$$e^{2\pi i}=(-1)^2 \tag{11}$$

Durch die Eins als neutrales Element der Multiplikation kann diese so oft auf der linken Seite hinzugefügt werden, wie möglich.

$$e^{2\pi in}=1,n\in\mathbb{N} \tag{12}$$

Da diese Identität auch für n = 0 gilt, ist somit die Formel bewiesen. Somit kann nun vereinfacht werden.

$$M=\{e^{\frac{2\pi i}{|M|}},e^{\frac{4\pi i}{|M|}},...e^{2\pi i}\} \tag{13}$$

$$M‘ = \{e^{\frac{4\pi i}{|M|}}, e^{\frac{6\pi i}{|M|}}, ..., e^{\frac{2\pi i}{|M|}}\} \tag{14}$$

Allgemein kann man nun sagen, dass für die Elemente der Menge eine Fallunterscheidung zugrunde liegt. Dabei muss $n \in \mathbb{N}$, da die usprüngliche Rotation die kleinste Einheit, vergleichbar mit dem Atombegriff des alten Griechenlands, immer gannzahlig ausgeführt werden müssen. Wenn nun der Koeffizient der Rotation nicht ganzzahlig ist, gilt die Identität nicht mehr. Für $n \neq |M|$ gilt:

$$e^{\frac{2\pi in}{|M|}+\frac{2\pi i}{|M|}} = e^{\frac{2\pi i(n+1)}{|M|}} \tag{15}$$

Für $n = |M|$ gilt:

$$e^{\frac{2\pi i}{+}\frac{2\pi i}{|M|}} = e^{\frac{2\pi i}{|M|}} \tag{16}$$

$$e^{2\pi i}e^{\frac{2\pi i}{|M|}} = e^{\frac{2\pi i}{|M|}} \tag{17}$$

$$e^{\frac{2\pi i}{|M|}} = e^{\frac{2\pi i}{|M|}} \tag{18}$$

Somit ist jeder Punkt der Menge M einem Punkt der Menge M‘. Damit gilt auch für die kleinste Rotation:

$$T(M, \frac{2\pi i}{|M|}) = M \tag{19}$$

Dabei kann nun jede andere Punktsymmetrie aus der kleinsten Einheit konstruiert werden. Nun kann durch diese Identität diese Transformation mehrfach anwenden.

$$T(T(M, \frac{2\pi i}{|M|}), \frac{2\pi i}{|M|}) = M \tag{20}$$

Zur Vereinfachung der Notation wird nun für die n_1-te Transformation dieser Ausdruck verwendet.

$$T(T(T(...T(M, \frac{2\pi i}{|M|}), \frac{2\pi i}{|M|}) = T_{n_1}(M, \frac{2\pi i}{|M|}) \tag{21}$$

Durch die Definition der Transformation(Gleichung 2) kann man nun diese Identität vereinfachen.

$$T_n(M, \frac{2\pi i}{|M|}) = T(M, \frac{2\pi n_1 i}{|M|}) \tag{22}$$

Nun gilt durch die Begrenzung des Winkels die Gleichung:

$$\theta \in]0, 2\pi] \tag{23}$$

Daraus folgt:

$$\theta \leq 2\pi \tag{24}$$

$$\frac{2\pi n_1}{|M|} \leq 2\pi \tag{25}$$

$$n_1 \leq |M| \tag{26}$$

Mit der Bedingung $n_1 \in \mathbb{N}$ gibt es $|M|$ Rotationssymmetrien. Somit ist diese Aussage bewiesen.
Q. E. D.