Die Herleitung der neuen Formel der resultierenden Kräfte aus zwei Vektoren

Wolf Klemradt

25. Januar 2021

Wenn zwei Beträge gegeben und ein Winkel zwischen den beiden Vektoren vorhanden sind, dann kann man durch die Formel:

$$VB_{KRes} = |\sqrt{(cos(90^\circ - \theta) * VB_2)^2 + (VB_1 + sin(90^\circ - \theta) * VB_2)^2}| \quad (1)$$

bestimmen. Gegeben sind dabei die zwei Beträge der Kräfte VB_1 und VB_2 und der Winkel Θ, der zwischen den beiden Kräften liegt.
Um den Betrag der resultierenden Kraft zu bestimmen, versucht man die Kraft als Hypotenuse in einem rechtwinkligen Dreieck zu konstruieren. Dabei gilt als Grundlage der Formel der Satz des Pythagoras:

$$Ankath^2 + Gegenkath^2 = Hypo^2 \quad (2)$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \quad (3)$$

Der Satz des Pythagoras lässt sich mithilfe der binomischen Formeln beweisen
Die binomischen Formeln lauten:
1. binomische Formel

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \quad (4)$$

2. binomische Formel

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \quad (5)$$

3 binomische Formel

$$a^2 - b^2 = (a + b) * (a - b) \quad (6)$$

Mit diesen Mitteln beweisen wir den Satz des Pythagoras als allgemeingültig. Dabei definiert man diese Variablen.

$$a = x^2 - y^2 \quad (7)$$

$$b = 2xy \quad (8)$$

$$c = x^2 + y^2 \quad (9)$$

Dabei setzten wir alle Variablen ein.

$$a^2 + b^2 = (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 \tag{10}$$

Dies vereinfacht ergibt:

$$a^2 + b^2 = x^4 + 2x^2y^2 + y^2 \tag{11}$$

Dies kann man in eine binomische Formel umformen.

$$a^2 + b^2 = (x^2 + y^2)^2 \tag{12}$$

Und dies ist der Wert, den wir der Variable C zugewiesen haben.

$$(x^2 + y^2)^2 = c^2 \tag{13}$$

Als Gesamtes ergeben sich diese zwei Gleichungen

$$a^2 + b^2 = c^2 \tag{14}$$

$$x^4 + 2x^2y^2 + y^2 = (x^2 + y^2)^2 \tag{15}$$

Diese Gleichungen ergeben das Gleiche und sind deshalb allgemeingültig. Das wird umgeformt, um die folgende Form zu erhalten:

$$\sqrt{a^2 + b^2} = c \tag{16}$$

In diesem Kontext bedeutet das, dass man den Betrag der Hypotenuse mit dieser Formel errechnen kann.
Diese beiden Kräfte setzt man geometrisch in ein Koordinatensystem ein, indem man die eine Kraft als Y-Achse, die durch den Betrag begrenzt ist, und die andere mit dem Winkel $90 - \theta$ zur positiven X-Achse setzt. Dabei entsteht ein neues rechtwinkliges Dreieck, mit dem rechten Winkel zwischen der x-Achse und einer parallelen zur Y-Achse als Gegenkathete, deren Höhe und X-Wert auf der X-Achse durch die maximale Höhe des zweiten Vektors begrenzt wird.
Durch die gegebene Hypotenuse, durch den Betrag des zweiten Vektors und den Winkel zwischen der X-Achse und der Hypotenuse kann man durch die trigonometrischen Funktionen durch Umstellung die Katheten zu bestimmen.
Die Bestimmung der Gegenkathete:

$$sin(\theta) = \frac{Gegenk}{Hypo} \tag{17}$$

Dabei multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit der vorhandenen Hypotenuse.

$$Hypothenuse * sin(\theta) = Gegenkathete \tag{18}$$

Um den Winkel des konstruierten Dreiecks durch den Satz des rechten Winkels zu bestimmen, subtrahiert man den Winkel zwischen den beiden Vektoren von 90°.

$$Hypothenuse * sin(90^\circ - \theta) = Gegenkathete \tag{19}$$

Durch die geometrische Überlegung des Kräfteparallelogramms muss die Höhe der resultierenden Kraft die Höhe der zweiten Kraft, also die Gegenkathete zu dem Betrag der zweiten Kraft addiert werden.

$$VB_1 + Hypothenuse * sin(90^\circ - \theta) = Gegenkathete + VB_1 \tag{20}$$

Da die Hypotenuse der Betrag des zweiten Vektors ist, substituiert man die Variable der Hypotenuse mit dem Betrag des zweiten Vektors.

$$VB_1 + VB_2 * sin(90^\circ - \theta) = Gegenkathete + VB_1 \tag{21}$$

Mit derselben Methode der Winkelsubtraktion kann man die Ankathete bestimmen:

$$cos(90^\circ - \theta) = \frac{Ankath}{Hypo} \tag{22}$$

Durch die Multiplikation mit der Hypotenuse erhält man die Ankathete:

$$Hypo * cos(90^\circ - \theta) = Ankath \tag{23}$$

Man substituiert dann die Hypotenuse mit dem Betrag des zweiten Vektors.

$$VB_2 * cos(90^\circ - \theta) = Ankath \tag{24}$$

Durch die neuen bestimmten geometrischen Strukturen erhält man wieder zwei Katheten, die die resultierende Kraft als Hypotenuse haben. Dadurch erhält man mit dem Satz des Pythagoras die Hypotenuse. Dafür substituiert man die vorhanden Formeln mit den Katheten im Satz des Pythagoras.

$$VB_{KRes} = \sqrt{(VB_2 * cos(90^\circ - \theta))^2 + (VB_1 + VB_2 * sin(90^\circ - \theta))^2} \quad (25)$$

Durch den Anwendungskontext eines Betrages, der nie negativ sein kann, obwohl es beim Wurzelziehen einer quadratischen Funktionen immer zwei Lösungen gibt, die jeweils positiv und negativ sind, muss die Wurzel in Betragsstriche gesetzt werden.

$$VB_{KRes} = |\sqrt{(VB_2 * cos(90^\circ - \theta))^2 + (VB_1 + VB_2 * sin(90^\circ - \theta))^2}| \quad (26)$$

Die Sonderfälle:
Wenn der Winkel Θ zwischen den beiden Vektoren 0 beträgt, dann gilt diese Formel immer noch, da

$$VB_{KRes} = |\sqrt{(VB_2 * cos(90^\circ))^2 + (VB_1 + VB_2 * sin(90^\circ))^2}| \quad (27)$$

Und da der Sinus von 90 ° Eins beträgt und der Kosinus zu 0 wird, gilt diese Formel in einer anderen Form:

$$VB_{KRes} = |\sqrt{(VB_1 + VB_2 * 1)^2}| \quad (28)$$

Durch das Kürzen des Quadrates ergibt sich die Vektoraddition bei einem Winkel $\Theta = 0$ die bekannte Addition der Vektorbeträge.

$$VB_{KRes} = |VB_1 + VB_2| \quad (29)$$