1 Die komplexen Zahlen als Körper

Nun sei $\mathbb{C}$ die Menge der komplexen Zahlen, dann gilt:

$$\mathbb{C} = \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}^2\} \tag{1}$$

Nun sei $\mathbb{C}_k$ ein Körper, oder äquivalent $\mathbb{K}$-Vektorraum, mit

$$\mathbb{C}_k = (\mathbb{C}, +, \cdot) \tag{2}$$

Die binären Vekrnüpfungen sind nun durch folgende Abbildungen gegeben:

$$+ : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (a + bi, c + di) \mapsto (a + c) + (b + d)i \tag{3}$$

$$(a + c), (b + d) \in \mathbb{R} \implies (a + c) + (b + d)i \in \mathbb{C} \tag{4}$$

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}, (a + bi, \lambda) \mapsto (a\lambda + b\lambda i) \tag{5}$$

Die inversen Abbildungen werden wie folgt definiert:

$$- : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, (a + bi, c + di) \mapsto (a - c) + (b - d)i \tag{6}$$

$$(a - c), (b - d) \in \mathbb{R} \implies (a - c) + (b - d)i \in \mathbb{C} \tag{7}$$

$$\cdot^{-1} : \mathbb{C} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, (a + bi, \lambda) \mapsto (\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}i) \tag{8}$$

$$(\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}) \in \mathbb{R} \implies (\frac{a}{\lambda} + \frac{b}{\lambda}i) \in \mathbb{C} \tag{9}$$

Die Multiplikation komplexer Zahlen wird wie folgt definiert:

$$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\} \to \mathbb{C}, (a + bi, c + di) \mapsto (ac - bd) + (cb + ad)i \tag{10}$$

$$\cdot^{-1} : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}, (a + bi, c + di) \mapsto \frac{1}{c^2 + d^2}(a + bi)(c - di) \tag{11}$$

Da diese Eigenschaften aus Skalarmultiplikation und Addition, sowie Subtraktion besteht und diese nicht aus der Menge führen, tuen diese es auch nicht.

Nun gelten folgende Eigenschaften für die Multiplikation der komplexen Zahlen:

$$M_1 : \forall v, u \in \mathbb{C} : vu = uv \tag{12}$$

$$\Leftrightarrow M_1 : \forall v, u \in \mathbb{C} : (v_r u_r - v_I u_I) + (v_r u_I + u_r v_I)i = (v_r u_r - v_I u_I) + (v_r u_I + u_r v_I)i \tag{13}$$

$$M_2 : \forall u, v, w \in \mathbb{C} : u(vw) = (uv)w \tag{14}$$

$$\Leftrightarrow M_2 : \forall v, u \in \mathbb{C} : u(vw) = (u_r + u_I i)((v_r + v_I i)(w_r + w_I i)) = (uv)w \tag{15}$$

$$\Leftrightarrow M_2 : \forall v, u \in \mathbb{C} : u(vw) = (u_r + u_I i)((v_r w_r - v_I w_I + (w_r v_I + v_r w_I)i)) = (uv)w \tag{16}$$

$$\Leftrightarrow M_2 : \forall v, u \in \mathbb{C} : u(vw) = ((v_r u_r - v_I u_I + (u_r v_I + v_r u_I)i))(w_r + w_I i) \tag{17}$$

$$M_3 : \forall u \in \mathbb{C} \exists ! z : uz = u \tag{18}$$

$$\Leftrightarrow M_3 : \forall u \in \mathbb{C} \wedge z = 1 : uz = u \tag{19}$$

$$M_4 : \forall u, v, w \in \mathbb{C} : u(v + w) = uv + uw \tag{20}$$

$$\Leftrightarrow M_4 : \forall u, v, w \in \mathbb{C} : u(v + w) = (u_r + u_I i)(v_r + v_I i) + (u_r + u_I i)(w_r + w_I i) \tag{21}$$

$$\Leftrightarrow M_4 : \forall u, v, w \in \mathbb{C} : u(v + w) = (u_r + u_I i)((v_r + v_I i) + (w_r + w_I i)) \tag{22}$$

Nun gelten folgende Eigenschaften für die Skalarmultiplikation und die Addition, sowie deren Inverse:

$$V_1 : \forall u, v, w \in \mathbb{C} : (u + v) + w = u + (v + w) \tag{23}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v, w \in \mathbb{C} : (u_r + u_I i + v_r + v_I i) + w = u + (v_r + v_I i + w_r + w_I i) \tag{24}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v, w \in \mathbb{C} : ((u_r+v_r)+(u_I+v_I)i)+w = u+((v_r+w_r)+(v_I+w_I)i) \tag{25}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v, w \in \mathbb{C} : ((u_r+v_r+u_I)+(u_I+v_I+u_I)i) = ((u_r+v_r+u_I)+(u_I+v_I+u_I)i) \tag{26}$$

$$V_2 : \exists! v \in \mathbb{C} : u + v = u \tag{27}$$

$$\Leftrightarrow v = 0 : u_r + u_I i + v = u \tag{28}$$

$$\Leftrightarrow v = 0 : (u_r + 0) + (u_I + 0)i = u_r + u_I i \tag{29}$$

$$V_3 : \forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists! v : v + u = 0 \tag{30}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \wedge u = -v : v + u = 0 \tag{31}$$

$$V_4 : u, v \in \mathbb{C} : (u + v) = (v + u) \tag{32}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : (u_r + u_I i + v_r + v_I i) = (u_r + u_I i + v_r + v_I i) \tag{33}$$

$$S_1 : \forall u, v \in \mathbb{C} \wedge \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(u + v) = (\lambda v + \lambda u) \tag{34}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{C} \wedge \lambda \in \mathbb{R} : \lambda(u_r+u_I i+v_r+v_I i) = (\lambda u_r+\lambda u_I i+\lambda v_r+\lambda v_I i) \tag{35}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{C} \wedge \lambda \in \mathbb{R} : ((\lambda(u_r+v_r)+\lambda(v_I+u_I)i) = (\lambda u_r+\lambda u_I i+\lambda v_r+\lambda v_I i) \tag{36}$$

$$\Leftrightarrow \forall u, v \in \mathbb{C} \wedge \lambda \in \mathbb{R} : ((\lambda(u_r+v_r)+\lambda(v_I+u_I)i) = ((\lambda(u_r+v_r)+\lambda(v_I+u_I)i) \tag{37}$$

$$S_2 : \forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists! \lambda \in \mathbb{R} : \lambda v = v \tag{38}$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \exists! \lambda = 1 : (1v_I + 1u_I) = (v_I + u_I) \tag{39}$$

$$S_3 : \forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \rho, \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda + \rho)v = \lambda v + \rho v \tag{40}$$

$$\Leftrightarrow ((\lambda + \rho)v_r + (\lambda + \rho)v_I i) = (\lambda v_r + \rho v_r + \lambda v_I i + \rho v_I i) \tag{41}$$

$$S_4 : \forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \rho, \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda\rho)v = \lambda(\rho v) \tag{42}$$

$$\Leftrightarrow \forall u \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \rho, \lambda \in \mathbb{R} : ((\lambda\rho)v_r + (\lambda\rho)v_I i) = (\lambda(\rho v_r) + \lambda(\rho v_I i)) \tag{43}$$

$\square$

2 Die Abbildung der kartesischen Koordinaten auf die Polarkoordinaten

Die folgende Abbildung P_k ist eine Transformation der kartesischen in die Polarkoordinaten.

$$P_k : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}_{>0} \times [-\pi, \pi], (a,b) \mapsto (\sqrt{a^2+b^2}, \phi(x) = \begin{cases} 2\arctan\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right) & b \neq 0 \vee a \geq 0 \\ \pi & b = 0 \wedge a < 0 \end{cases}) \tag{44}$$

Die neue Abbildung P_r, welche die Transformation der Koordinaten im Zweiten und dritten Quadranten der komplexen Ebene beschreibt, ist eine Teilabbildung der Abbildung P_k:

$$P_r : \mathbb{R}^2_{>0} \backslash \{(0,0)\} \to \mathbb{R}_{>0} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], (a,b) \mapsto (\sqrt{a^2+b^2}, \phi(x) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{b}{a}\right) & b \neq 0 \vee a \geq 0 \\ \pi & b = 0 \wedge a < 0 \end{cases}) \tag{45}$$

2.1 P_k als Teilabbildung von P_k

$$P_r \subseteq P_k : (\mathbb{R}^2_{>0} \backslash \{(0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}) \wedge (\mathbb{R}_{>0} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \subseteq \mathbb{R}_{>0} \times [-\pi, \pi]) \wedge \forall x \in D_r : P_r(x) = P_k(x) \tag{46}$$

$$\Leftrightarrow P_r \subseteq P_k : (\sqrt{a^2+b^2}, f(x) = \begin{cases} \arctan(\frac{b}{a}) & b \neq 0 \vee a \geq 0 \\ \pi & b = 0 \wedge a < 0 \end{cases}) = (\sqrt{a^2+b^2}, f(x) = \begin{cases} 2\arctan(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a} \\ \pi \end{cases} \tag{47}$$

$$\Leftrightarrow P_r = P_k : \arctan(\frac{b}{a}) = 2\arctan(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}+a}) \tag{48}$$

Dies wird durch die Ableitung der beiden Terme des Additionstheorems bewiesen. Es gilt zu beweisen:

$$2\arctan(x) = \arctan(\frac{2x}{1-x^2}) \tag{49}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+x^2} = \frac{1}{1-(\frac{2x}{1-x^2}))^2}(\frac{2x}{1-x^2})' \tag{50}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+x^2} = \frac{4x^2+2-2x^2}{(1-x^2)^2}\frac{(1-x^2)^2}{(1+x^2)^2} \tag{51}$$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1+x^2} = \frac{2}{1+x^2} \tag{52}$$

□

$$x = \frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}} \implies 2\arctan(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}) = \arctan(\frac{2(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}})}{1-(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}})^2}) \tag{53}$$

$$\Leftrightarrow 2\arctan(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}) = \arctan(\frac{2(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}})}{\frac{(1+\sqrt{1+y^2})^2-y^2}{(1+\sqrt{1+y^2})^2}}) \tag{54}$$

$$\Leftrightarrow 2\arctan(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}) = \arctan(\frac{2(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}})}{\frac{(2+2\sqrt{1+y^2})}{(1+\sqrt{1+y^2})^2}}) \tag{55}$$

$$\Leftrightarrow 2\arctan\left(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}\right) = \arctan\left(\frac{2y}{2}\right) \tag{56}$$

$$\Leftrightarrow 2\arctan\left(\frac{y}{1+\sqrt{1+y^2}}\right) = \arctan(y) \tag{57}$$

□

$$y = \frac{b}{a} : 2\arctan\left(\frac{\frac{b}{a}}{1+\sqrt{1+\frac{b}{a}^2}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{58}$$

$$\Leftrightarrow 2\arctan\left(\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \tag{59}$$

□

2.2 Beweis der Injektivität von P_k

P_k ist genau dann injektiv, sobald gilt:

$$P_k((a,b)) = P_k((c,d)) \implies (a,b) = (c,d) \tag{60}$$

$$\Leftrightarrow P_k((a,b)) = P_k((c,d)) \implies (a=c) \wedge (b=d) \tag{61}$$

$$(b \neq 0 \vee a \geq 0) : (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge \left(\frac{b}{a+\sqrt{a^2+b^2}}\right) = \frac{d}{c+\sqrt{c^2+d^2}})) \implies (a=c) \wedge (b=d) \tag{62}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge (bc+b\sqrt{c^2+d^2}) = da+d\sqrt{a^2+b^2})) \implies (a=c) \wedge (b=d) \tag{63}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge ((bc-ad)^2 = (d-b)^2(a^2+b^2)) \implies (a=c) \wedge (b=d) \tag{64}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge ((bc)^2 - 2adbc + (ad)^2 = (d^2-2db+b^2)^2(a^2+b^2)) \implies (a=c) \wedge (b=d) \tag{65}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge b^2(c^2-(a^2+b^2))+d^2(a^2-(c^2+d^2))+2db(a^2+b^2) = 2abcd \implies (a=c) \wedge (b=d) \quad (66)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge -(bd)^2-(db)^2+2db(a^2+b^2) = 2abcd \implies (a=c) \wedge (b=d) \quad (67)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge -2db+2(a^2+b^2) = 2ac \implies (a=c) \wedge (b=d) \quad (68)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge -2db-2ac+(c^2+d^2)+(a^2+b^2) = 0 \implies (a=c) \wedge (b=d) \quad (69)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 = c^2+d^2) \wedge (a-c)^2+(b-d)^2 = 0 \implies (a=c) \wedge (b=d) \quad (70)$$

$\square$

$$(b=0 \wedge a<0) : (a^2 = c^2+d^2) \wedge (\pi = 2\arctan(\frac{d}{c+\sqrt{c^2+d^2}})) \implies (a=c) \wedge (d=0) \quad (71)$$

$$\Leftrightarrow (a^2 = c^2+d^2) \wedge (d=0) \implies (a=c) \wedge (d=0) \quad (72)$$

$$\Leftrightarrow (a=c) \wedge (d=0) \implies (a=c) \wedge (d=0) \quad (73)$$

$\square$

2.3 Der Beweis der Surjektivität von P_k

$$\forall y \in \mathbb{R}_{>0} \exists x : P_k(x) = y \quad (74)$$

$$\Leftrightarrow ((\sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}_{>0}) \implies (a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\})) \wedge ((\phi((a,b)) \in [-\pi,\pi]) \implies (a,b) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}) \quad (75)$$

Nun gilt aber auch:

$$(\sqrt{a^2+b^2} \in \mathbb{R}_{>0}) \implies (a^2+b^2 \in \mathbb{R}_{>0}) \quad (76)$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 \in \mathbb{R}_{>0}) \implies (((a \neq 0)\wedge(b=0))\vee((a=0)\wedge(b \neq 0))\vee((a \neq 0)\wedge(b \neq 0)))\wedge(a,b \in \mathbb{R}) \tag{77}$$

$$\Leftrightarrow (a^2+b^2 \in \mathbb{R}_{>0}) \implies (a,b) \in (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}) \tag{78}$$

Nun gilt ebenfalls:

$$((\phi((a,b)) \in [-\pi,\pi]) \implies (b \neq 0)\wedge(a+\sqrt{a^2+b^2} \neq 0) \implies (a \neq 0)\wedge(b \neq 0)\wedge(a,b \in \mathbb{R}) \tag{79}$$

$$\Leftrightarrow ((\phi((a,b)) \in [-\pi,\pi]) \implies (b \neq 0)\wedge(a+\sqrt{a^2+b^2} \neq 0) \implies (a,b) \in \mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\} \tag{80}$$

$\square$

2.4 Beweis der Bijektivivtät von P_k

$$(\forall y \in \mathbb{R}_{>0} \exists x : P_k(x) = y) \wedge (P_k((a,b)) = P_k((c,d)) \implies (a,b) = (c,d)) \tag{81}$$

$$\Leftrightarrow P_k : \mathbb{R}^2_{>0} \setminus \{(0,0)\} \leftrightarrow \mathbb{R}_{>0} \times [-\pi,\pi], (a,b) \mapsto (\sqrt{a^2+b^2}, \phi((a,b))) \tag{82}$$

3 Die Polarkoordinaten

Um eine weitere Darsstellung zu finden, wird nun die Umkehrfunktion zu der Transformation in Polarkoordinaten bestimmt. Nun gilt:

$$(r^2 = a^2+b^2) \wedge (\phi = 2\arctan(\frac{b}{r+a})) \tag{83}$$

$$\Leftrightarrow (r^2 = a^2+b^2) \wedge (\phi = 2\arctan(\frac{b}{r+\sqrt{(r^2-b^2)}})) \tag{84}$$

$$\Leftrightarrow (\tan(\frac{\phi}{2}) = (\frac{b}{r+\sqrt{(r^2-b^2)}})) \tag{85}$$

$$\Leftrightarrow (\tan(\frac{\phi}{2})(r+\sqrt{(r^2-b^2)}) = b) \tag{86}$$

$$\Leftrightarrow (\tan(\frac{\phi}{2})(r+\sqrt{(r^2-b^2)})=b) \tag{87}$$

$$\Leftrightarrow (\tan(\frac{\phi}{2})\sqrt{(r^2-b^2)}=b-r\tan(\frac{\phi}{2})) \tag{88}$$

$$\Leftrightarrow (\tan^2(\frac{\phi}{2})(r^2-b^2)=(b-r\tan(\frac{\phi}{2}))^2) \tag{89}$$

$$\Leftrightarrow (\tan^2(\frac{\phi}{2})(r^2-b^2)=(b^2-2br\tan(\frac{\phi}{2})+r^2\tan(\frac{\phi}{2}))^2) \tag{90}$$

$$\Leftrightarrow 0=(b^2(1+\tan^2(\frac{\phi}{2}))-2br\tan(\frac{\phi}{2})) \tag{91}$$

$$\Leftrightarrow (b=0)\vee(0=(b(1+\tan^2(\frac{\phi}{2}))-2r\tan(\frac{\phi}{2})) \tag{92}$$

$$\Leftrightarrow (b=0)\vee(2r\tan(\frac{\phi}{2})=(b(1+\tan^2(\frac{\phi}{2}))) \tag{93}$$

$$\Leftrightarrow (b=0)\vee\frac{2r\tan(\frac{\phi}{2})}{1+\tan^2(\frac{\phi}{2})}=b \tag{94}$$

$$\Leftrightarrow (b=0)\vee\frac{2r\tan(\frac{\phi}{2})}{\sec^2(\frac{\phi}{2})}=b \tag{95}$$

$$\Leftrightarrow (b=0)\vee 2r\sin(\frac{\phi}{2})\cos(\frac{\phi}{2})=b \tag{96}$$

$$\Leftrightarrow (b=0)\vee r\sin(\phi)=b \tag{97}$$

$$\Leftrightarrow (b=0)\implies(a=r)\vee r\sin(\phi)=b\implies a^2=r^2(1-\sin(\phi)) \tag{98}$$

$$\Leftrightarrow r\sin(\phi)=b\implies a=r\cos(\phi) \tag{99}$$

$\square$

$$(u=a+bi)\wedge(|u|^2=a^2+b^2):(a=|u|\cos\phi(a,b))\wedge(b=|u|\sin\phi(a,b)) \tag{100}$$

$$\implies |u|^2 = (|u|\cos\phi(a,b))^2 + (|u|\sin\phi(a,b))^2 \Leftrightarrow |u|^2 = |u|^2(\cos\phi(a,b)^2 + \sin\phi(a,b)^2) \tag{101}$$

Dies ist dann eine valide Darstellung der komplexen Zahlen.

$$u = |u|(\cos\phi(a,b) + i\sin\phi(a,b)) \tag{102}$$

$$\Leftrightarrow u = |u|(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\phi(a,b)^{2k} + i\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\phi(a,b)^{2k+1}) \tag{103}$$

$$\Leftrightarrow u = |u|(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(i^2)^k}{(2k)!}\phi(a,b)^{2k} + i\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(i^2)^k}{(2k+1)!}\phi(a,b)^{2k+1}) \tag{104}$$

$$\Leftrightarrow u = |u|(\sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(i)^{2k}}{(2k)!}\phi(a,b)^{2k} + \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{(i)^{2k+1}}{(2k+1)!}\phi(a,b)^{2k+1}) \tag{105}$$

$$\Leftrightarrow u = |u|(\sum_{k\in\mathbb{N}} (\frac{(i)^{2k}}{(2k)!}\phi(a,b)^{2k} + \frac{(i)^{2k+1}}{(2k+1)!}\phi(a,b)^{2k+1})) \tag{106}$$

$$\Leftrightarrow u = |u|(\sum_{k\in\mathbb{N}} (\frac{(i)^k}{(k)!}\phi(a,b)^k)) \tag{107}$$

$$\Leftrightarrow u = |u|(e^{i\phi((a,b))}) \tag{108}$$

$$\implies u = |u|(e^{i\phi((a,b))}) \tag{109}$$

□

Nun gibt es ebenfalls die Abbildung P_e

$$P_e : \mathbb{R}^2_{>0} \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, (a,b) \mapsto \sqrt{a^2+b^2}e^{i\phi((a,b))} \tag{110}$$

$$(\sqrt{a^2+b^2} \neq \phi((a,b)) \implies \phi((a,b))e^{i\sqrt{a^2+b^2}} \neq \sqrt{a^2+b^2}e^{i\phi((a,b))}) \wedge P_k : \mathbb{R}^2_{>0}\setminus\{(0,0)\} \leftrightarrow \mathbb{R}_{>0}\times[-\pi,\pi] \tag{111}$$

$$\Leftrightarrow P_e : \mathbb{R}^2_{>0} \setminus \{(0,0)\} \leftrightarrow \mathbb{C} \setminus \{(0,0)\}, (a,b) \mapsto \sqrt{a^2+b^2}e^{i\phi((a,b))} \tag{112}$$

□

4 Beweis von Identitäten und Formeln

In diesem Abschnitt werden einige Formeln und Identitäten bewiesen. Vorher definieren wir allerdings die komplexe Konjugation:

$$u \in \mathbb{C} : \bar{u} = u_r - u_I i \tag{113}$$

4.1 Real- und Imaginärteil

$$u \in \mathbb{C} : \Re(u) = \frac{u + \bar{u}}{2} \tag{114}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : \Re(u) = \frac{u_r + u_I i + u_r - u_I i}{2} \tag{115}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : \Re(u) = \frac{2u_r}{2} \tag{116}$$

□

$$u \in \mathbb{C} : \Im(u) = \frac{u - \bar{u}}{2i} \tag{117}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : \Im(u) = \frac{2u_I i}{2} \tag{118}$$

□

4.2 Konjugations- und Betragsidentitäten

$$u, v \in \mathbb{C} : u \bar{+} v = \bar{u} + \bar{v} \tag{119}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : u_r + v_r - (u_I + v_I)i = \bar{u} + \bar{v} \tag{120}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : u_r + v_r - u_I i - v_I i = \bar{u} + \bar{v} \tag{121}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : u_r - u_I i + v_r - v_I i = \bar{u} + \bar{v} \tag{122}$$

□

$$u \in \mathbb{C} : |u|^2 = u\bar{u} \tag{123}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : u_r^2 + u_I^2 = u\bar{u} \tag{124}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : (u_r - u_I i)(u_r + u_I i) = u\bar{u} \tag{125}$$

□

$$u, v \in \mathbb{C} : \bar{vu} = \bar{v}\bar{u} \tag{126}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : \bar{vu} = (v_r - v_I i)(u_r - u_I i) \tag{127}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : \bar{vu} = (u_r v_r - u_I v_I) + (-v_r u_I - u_r v_I)i \tag{128}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : \bar{vu} = (u_r v_r - u_I v_I) - (v_r u_I + u_r v_I)i \tag{129}$$

□

$$u \in \mathbb{C} : \bar{\bar{u}} = u \tag{130}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : \overline{u_r - u_I i} = u \tag{131}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : u_r + u_I i = u \tag{132}$$

□

$$u \in \mathbb{C} : \bar{u} = u \implies u \in \mathbb{R} \tag{133}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : u_r - u_I i = u_r + u_I i \implies u \in \mathbb{R} \tag{134}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : 2u_I i = 0 \implies u \in \mathbb{R} \tag{135}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : u_I = 0 \implies u \in \mathbb{R} \tag{136}$$

□

$$u, v \in \mathbb{C} \land v \neq 0 : \overline{(\frac{u}{v})} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \tag{137}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} \land v \neq 0 : \overline{(\frac{(u\bar{v})}{v_r^2 + v_I^2})} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \tag{138}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} \wedge v \neq 0 : \frac{(\bar{u}v)}{v_r^2 + v_I^2} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \tag{139}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} \wedge v \neq 0 : \frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \frac{\bar{u}}{\bar{v}} \tag{140}$$

□

$$u, v \in \mathbb{C} : |u\bar{v}| = |u||v| \tag{141}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : |u\bar{v}| = \sqrt{u\bar{u}v\bar{v}} \tag{142}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : |u\bar{v}| = \sqrt{u\bar{v}v\bar{u}} \tag{143}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : |u\bar{v}| = \sqrt{u\bar{v}\overline{(u\bar{v})}} \tag{144}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : |u\bar{v}| = |u\bar{v}| \tag{145}$$

□

$$u, v \in \mathbb{C} : |u + v| \leq |z| + |u| \tag{146}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : |u + v|^2 \leq (|v| + |u|)^2 \tag{147}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : |u + v|^2 \leq (|v| + |u|)^2 \tag{148}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : (u + v)\overline{u + v} \leq v\bar{v} + u\bar{u} + 2|u||v| \tag{149}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : (u + v)(\bar{u} + \bar{v}) \leq v\bar{v} + u\bar{u} + 2|u||v| \tag{150}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : (v\bar{u} + u\bar{v}) \leq 2|u||v| \tag{151}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : 2\Re(u\bar{v}) \leq 2|u||v| \tag{152}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : \Re(u\bar{v}) \leq |u||v| \tag{153}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : \Re(u\bar{v}) \leq |u\bar{v}| \tag{154}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : \Re(u\bar{v})^2 \leq \Re(u\bar{v})^2 + \Im(u\bar{v})^2 \tag{155}$$

$$\Leftrightarrow u, v \in \mathbb{C} : 0 \leq \Im(u\bar{v})^2 \tag{156}$$

□

4.3 Darstellung trigonometrischer Funktionen durch die komplexen Zahlen

$$u \in \mathbb{C} : u = re^{i\phi} \tag{157}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : r(\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = re^{i\phi} \tag{158}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : (\cos(\phi) + i\sin(\phi)) = e^{i\phi} \tag{159}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : (\cos(-\phi) + i\sin(-\phi)) = e^{-i\phi} \tag{160}$$

$$\Leftrightarrow u \in \mathbb{C} : (\cos(\phi) - i\sin(\phi)) = e^{-i\phi} \tag{161}$$

$$((\cos(\phi)+i\sin(\phi)) = e^{i\phi})\wedge((\cos(\phi)-i\sin(\phi)) = e^{-i\phi}) \implies 2\cos(\phi) = e^{i\phi}+e^{-i\phi} \tag{162}$$

$$\Leftrightarrow \cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2} \tag{163}$$

$$((\cos(\phi)+i\sin(\phi)) = e^{i\phi})\wedge((\cos(\phi)+i\sin(\phi)) = -e^{-i\phi}) \implies 2\sin(\phi) = e^{i\phi}-e^{-i\phi} \tag{164}$$

$$\Leftrightarrow \sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i} \tag{165}$$

□

$$(\sin(\phi) = \frac{e^{i\phi} - e^{-i\phi}}{2i}) \wedge (\cos(\phi) = \frac{e^{i\phi} + e^{-i\phi}}{2}) \implies \frac{\sin(\phi)}{\cos(\phi)} = i\frac{e^{-i\phi} - e^{i\phi}}{e^{i\phi} + e^{-i\phi}} \tag{166}$$

$$\Leftrightarrow \tan(\phi) = i\frac{e^{-i\phi} - e^{i\phi}}{e^{i\phi} + e^{-i\phi}} \tag{167}$$