Beweise verschiedener Gleichungen der Riemann-Zeta-Funktion

Die Riemannsche Zeta-Funktion ist definiert als:

$$\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \tag{1}$$

Das Eulerprodukt

Die Riemannsche Zetafunktion enthält in ihrem Nenner alle natürlichen Zahlen. Wollen wir nun alle Terme, die Vielfache dieser Zahl sind aussortieren, dann gilt:

$$\zeta(s)(1 - p^{-s}) = \zeta(s) - \sum_{n \geq 1} p^{-sn} \tag{2}$$

Wendet man dieses Verfahren auf alle Primzahlen an, dann bleibt auf der linken Seite nur noch die 1 übrig. Dies führt dann zum Eulerprodukt mit $\mathbb{P}$ als die Menge aller Primzahlen:

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{(1 - p^{-s})} \tag{3}$$

Zusammenhang zwischen Gamma- und Zetafunktion

Die Gammafunktion ist definiert als:

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \tag{4}$$

Nun wird das Produkt der Beiden gebildet:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s} \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx \tag{5}$$

Das Integral und die Summe sind nur dann vertauschbar, wenn beide einzelne Ausdrücke konvergieren. Dies gilt nur, wenn $s > 1$:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \sum_{n \geq 1} n^{-s} x^{s-1} e^{-x} dx \tag{6}$$

Nun wird eine Integralsubstitution durchgeführt:

$$nu = x \tag{7}$$

mit der Ableitung:

$$\frac{dx}{du} = n \tag{8}$$

Mit dieser Substitution gilt:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \sum_{n\geq 1} n^{-s}(nu)^{s-1}e^{-nu}ndu \tag{9}$$

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} \sum_{n\geq 1} e^{-nu}du \tag{10}$$

Mit der Definition der geometrischen Reihe:

$$\sum_{n\geq 0} z^n = \frac{1}{1-z} \tag{11}$$

Kann man den folgenden Ausdruck umformen:

$$\sum_{n\geq 1} e^{-nu} = \sum_{n\geq 0} e^{-nu} - 1 \tag{12}$$

$$\sum_{n\geq 1} e^{-nu} = \frac{1}{1-e^{-u}} - 1 \tag{13}$$

$$\sum_{n\geq 1} e^{-nu} = \frac{1}{e^u - 1} \tag{14}$$

Damit gilt für das Produkt:

$$\zeta(s)\Gamma(s) = \int_0^\infty \frac{u^{s-1}}{e^u - 1}du \tag{15}$$

Zusammenhang zwischen Theta-, Gamma- und Zetafunktion

Es gilt den Zusammenhang zu beweisen:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(0, it) - 1)t^{\frac{s}{2}-1}dt = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{16}$$

Mit der Thetafunktion:

$$\Theta(0,it) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-\pi n^2 t} \tag{17}$$

Demnach gilt:

$$\Theta(0,it) = 2\sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} + 1 \tag{18}$$

Somit gilt eingesetzt:

$$\int_0^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{19}$$

Nun wird die Substitution

$$x = \pi n^2 t \tag{20}$$

Nach der Substitution gilt nun:

$$\int_0^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-x} (\frac{x}{\pi n^2})^{\frac{s}{2}-1} \frac{dx}{\pi n^2} = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{21}$$

Unter der Vorraussetzung, dass beide Ausdrücke konvergieren:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \int_0^\infty \sum_{n\geq 1} n^{-s} e^{-x} (x)^{\frac{s}{2}-1} dx = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{22}$$

Durch das Einsetzen der Ausdrücke für die einzelnen Funktionen gilt:

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{23}$$

Damit gilt diese Gleichung

Die Reflektionsformel der Gammafunktion

Die Gammafunktion ist definiert als:

$$\Gamma(s) = \lim_{n->\infty} \frac{n^s}{s} \Pi_{k=1}^{n} \frac{k}{s+k} \tag{24}$$

Nun gilt als Reflektionsformel:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \lim_{n->\infty} \frac{n^s}{s} \Pi_{k=1}^{n} \frac{k}{s+k} \frac{n^{1-s}}{1-s} \Pi_{k=1}^{n} \frac{k}{1-s+k} \tag{25}$$

Nun gilt durch die Umordnung der Terme, indem der $k$te und $k-1$te Term immer miteinander multipliziert werden. Damit vereinfacht sich das Termschema zu:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \lim_{n->\infty} \frac{n}{s(n+1-s)} \Pi_{k=1}^{n} \frac{k^2}{k^2-s^2} \tag{26}$$

Weiteres vereinfachen führt zu folgender Formel:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \lim_{n->\infty} \frac{n\pi}{\pi s(n-s)} \Pi_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{s^2}{k^2}} \tag{27}$$

Durch die Regeln von L'Hospital gilt für den ersten Bruch:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \lim_{n->\infty} \frac{\pi}{\pi s} \Pi_{k=1}^{n} \frac{1}{1-\frac{(s\pi)^2}{(k\pi)^2}} \tag{28}$$

Durch die Definition des Sinus als Eulerprodukt gilt nun:

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)} \tag{29}$$

Die Legendrerelation

Zum Beweis der Legendrerelation wird hier die Betafunktion verwendet. Diese ist definiert als:

$$B(z,y) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(y)}{\Gamma(z+y)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{y-1}dx \tag{30}$$

Mit $x = z$ gilt hier:

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = \int_0^1 x^{z-1}(1-x)^{z-1}dx \tag{31}$$

Nun wird die Integralsubstitution

$$x = \frac{1+t}{2} \tag{32}$$

Diese Substitution ergibt sich zu:

$$\frac{\Gamma(z)^2}{\Gamma(2z)} = 2^{1-2z} \int_{-1}^1 (1-t^2)^{z-1}dt \tag{33}$$

Ebenfalls folgt aus der Definition der Betafunktion

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = \int_0^1 \frac{x^{z-1}}{\sqrt{1-x}} dx \tag{34}$$

Mit einer weiteren Integralsubstitution

$$x = 1 - t^2 \tag{35}$$

gilt:

$$\frac{\Gamma(z)\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = \int_1^0 -2t \frac{(1-t^2)^{z-1}}{\sqrt{t^2}} dt \tag{36}$$

Mit weiteren Vereinfachung und dem Einsetzen des gaußschen Integrals gilt:

$$\frac{\Gamma(z)\sqrt{\pi}}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = \int_0^1 2(1-t^2)^{z-1} dt \tag{37}$$

Durch

$$1 - x^2 = 1 - (-x)^2 \tag{38}$$

gilt:

$$\frac{\Gamma(z)\sqrt{\pi}}{\Gamma(z+\frac{1}{2})} = \int_{-1}^1 (1-t^2)^{z-1} dt \tag{39}$$

Dies wird in die obere Gleichung eingesetzt:

$$\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2}) = 2^{1-2z}\sqrt{\pi}\Gamma(2z) \tag{40}$$

Dies ergibt die Legendrerelation

Die Funktionalgleichung der Zetafunktion

Zum Beweis der Funktionalgleichung wird nun Gleichung (16) benutzt.

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty (\Theta(0,it)-1)t^{\frac{s}{2}-1} dt = \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{41}$$

Die Grenzenaufspaltung des Integrals zerlegt das Integral:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(0,it)-1)t^{\frac{s}{2}-1} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 (\Theta(0,it)-1)t^{\frac{s}{2}-1} dt \tag{42}$$

Durch Einsetzen der Zetafunktion gilt:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt + \frac{1}{2}\int_0^1 (\Theta(0,it)-1)t^{\frac{s}{2}-1}dt \tag{43}$$

Das rechte Integral wird nun durch eine Substitution vereinfacht:

$$t = x^{-1} \tag{44}$$

Mit der Ableitung:

$$t = -x^{-2} \tag{45}$$

Damit vereinfacht sich das Integral zu:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt - \frac{1}{2}\int_\infty^1 (\Theta(0,i\frac{1}{x})-1)x^{-(\frac{s}{2}-1)-2}dx \tag{46}$$

Dies vereinfacht sich weiter zu:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt + \frac{1}{2}\int_1^\infty (\Theta(0,i\frac{1}{x})-1)x^{-(\frac{s+1}{2})}dx \tag{47}$$

Durch die Identität nach der Poissonschen Summenformel gilt:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} t^{\frac{s}{2}-1} dt + \int_1^\infty (\sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 x} + \frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2})x^{-(\frac{s+1}{2})}dx \tag{48}$$

Durch Umordnen der Terme ergibt sich daraus:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} (t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-(\frac{s+1}{2})}) dt + \int_1^\infty (\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{2})x^{-(\frac{s+1}{2})}dx \tag{49}$$

Das Lösen des linken Integrals ergibt sich zur Endformel:

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) = \int_1^\infty \sum_{n\geq 1} e^{-\pi n^2 t} (t^{\frac{s}{2}-1} + t^{-(\frac{s+1}{2})}) dt - \frac{1}{s(1-s)} \tag{50}$$

Nun wird diese Formel genutzt und es wird für s jetzt $1-s$ eingesetzt.

$$\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)=\int_1^\infty\sum_{n\geq1}e^{-\pi n^2 t}(t^{\frac{1-s}{2}-1}+t^{-(\frac{1-s+1}{2})})dt-\frac{1}{(1-s)(1-(1-s))} \tag{51}$$

Weitere Vereinfachung ergibt:

$$\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)=\int_1^\infty\sum_{n\geq1}e^{-\pi n^2 t}(t^{\frac{s}{2}-1}+t^{-(\frac{s+1}{2})})dt-\frac{1}{s(1-s)} \tag{52}$$

Durch diese Symmetrie des Integrals ergibt sich die Funktionalgleichung zu:

$$\pi^{\frac{s-1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\zeta(1-s)=\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s) \tag{53}$$

Dies ist die symmetrische Variante der Funktionalgleichung. Nun kann man, mit den oben-hergeleiteteten Relationen die Funktionalgleichung in die bekannte Form umwandeln. Mit der Legendre-Relation ergibt sich:

$$\Gamma(1-\frac{s}{2})\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma(\frac{s}{2})\zeta(s)=\pi^{\frac{s-1}{2}}2^{1-(1-s)}\sqrt{\pi}\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{54}$$

Mit der Reflektionsformel:

$$\frac{\pi}{\sin(\frac{\pi s}{2})}\pi^{-\frac{s}{2}}\zeta(s)=\pi^{\frac{s-1}{2}}2^{s}\sqrt{\pi}\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{55}$$

Dies ergibt sich zu:

$$\zeta(s)=\sin(\frac{\pi s}{2})\pi^{s-1}2^{s}\Gamma(1-s)\zeta(1-s) \tag{56}$$

Aus dieser Darstellung ergeben sich automatisch die trivialen Nullstellen der Zetafunktion bei den negativen geraden Zahlen, da dort die Sinusfunktion den ganzen Term auf Null setzt.