Die Problemstellung ist das Finden einer Gleichung für die Anzahl der Stellen einer Zahl $p \in \mathbb{R}$ im Dezimalsystem. Dafür wird die Zahl in mehrere Komponenten zerlegt. Mit $k \in \mathbb{N}$

$$|p| = \sum_{i=0}^{k} c_i 10^i + \mod(|p|, 1) \tag{1}$$

mit

$$c = \{c_i | c_i \in \mathbb{N}_{\nvdash} \wedge c_i < 10\} \tag{2}$$

und

$$c_k \neq 0 \tag{3}$$

Dabei sind $\mod(|p|, 1)$ die Nachkommastellen der Zahl und c_i die jeweiligen Koeffizienten des Tupels der Deziamldarstellung. Dabei ist 10^k, mit $c_k \neq 0$ die erste Zahl und gibt damit die Stellen vor. Nun kann die Reihe umgeformt werden.

$$|p| = \sum_{i=0}^{k} c_i \frac{10^k}{10^{k-i}} + \mod(|p|, 1) \tag{4}$$

$$|p| = 10^k (\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\mod(|p|, 1)}{10^k}) \tag{5}$$

Nun gilt:

$$10 > \sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\mod(|p|, 1)}{10^k} \tag{6}$$

damit k die Anzahl der Stellen der Zahl sein kann. Dies gilt nun, da jede Zahl eine Nachkommastelle darstellt. Durch die Dezimaldarstellung in Gleichung (1) gilt, wie auch in der Menge c definiert, dass $c_i < 10$. Somit kann durch Addition der einzelnen Stellen, da diese durch die gleichmäßige Stellenverschiebung durch die Division mit einer Zehnerpotenz alle gleichmäßig verschoben werden, niemals die Nachkommastelle überschritten werden und jede Zahl ist somit unter 10. Somit kann der Koeffizient niemals der Zehnerstelle etwas hinzufügen. Somit wird nun nach k aufgelöst. Nun gilt

$\log_{10}(x) = \log(x)$

$$\log(|p|) = \log(10^k(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|,1)}{10^k})) \tag{7}$$

Nach dem Logarithmusgesetz

$$\log(xy) = \log(x) + \log(y) \tag{8}$$

gilt nun:

$$\log(|p|) = \log(10^k) + \log(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|,1)}{10^k}) \tag{9}$$

Durch die Zehn als lässt sich dieser Ausdruck vereinfachen:

$$\log(|p|) = k + \log(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|,1)}{10^k}) \tag{10}$$

Da gilt $\log_{10} 10^k = k$ fällt durch die Zehn allerdings eine Stelle weg, die die ursprüngliche Zehn enthält. Ein Beispiel ist die Zahl 100. Laut der Überlegung gilt $\log(100) = 2$. Da Hundert aber drei Stellen hat, muss noch eine Stelle hinzugefüht werden. Somit ist $k + 1$ die endgültige Anzahl der Stellen.

$$\log(|p|) + 1 = k + 1 + \log(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|,1)}{10^k}) \tag{11}$$

Die verbleibenden Terme der rechten Seite sind nicht relevant, da diese keine ganzen Stellen sind. Dies gilt wegen Gleichung (6):

$$1 > \log(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|,1)}{10^k}) \tag{12}$$

Nun können auf beide Seiten der Gleichung die Floor-Funktion($\lfloor x \rfloor$) angewandt werden.

$$\lfloor(\log(|p|) + 1)\rfloor = \lfloor k + 1 + \log(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|,1)}{10^k})\rfloor \tag{13}$$

Nun gilt :

$$\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \tag{14}$$

Dies kann durch die Fallunterscheidung bewiesen werden.
Jede Zahl kann in einen reellen und einen natürlichen Part umverteilt werden. Damit entstehen nur zwei Fälle. Für $x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N}$ gilt nun $y + x \in \mathbb{N}$ Somt kann man den Ausdruck vereinfachen, da $\lfloor a \rfloor = a$ für $a \in \mathbb{N}$ gilt:

$$x + y = x + y \tag{15}$$

Für $x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{R} \wedge 0 < y < 1$ gilt nun $\lfloor y \rfloor = 0$:

$$\lfloor x \rfloor = \lfloor x \rfloor + 0 \tag{16}$$

Mit diesen Identitäten kann man die Terme vereinfachen:

$$\lfloor \log(|p|) + 1 \rfloor = \lfloor k+1 \rfloor + \lfloor \log(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|, 1)}{10^k}) \rfloor \tag{17}$$

Nun gilt aus Gleichung

$$0 = \lfloor \log(\sum_{i=0}^{k} c_i \frac{1}{10^{k-i}} + \frac{\bmod (|p|, 1)}{10^k}) \rfloor \tag{18}$$

$$\lfloor \log(|p|) + 1 \rfloor = \lfloor k+1 \rfloor \tag{19}$$

Da $k \in \mathbb{N}$ ist nun auch $(k+1) \in \mathbb{N}$. Somit gilt auch:

$$\lfloor k+1 \rfloor = k+1 \tag{20}$$

Dies gilt, da die Floorfunktion bei natürlichen Zahlen als Input eben diese Zahl wieder als Ausgabe hat. Damit gilt für die Anzahl der Stellen S einer reellen Zahl $p \neq 0$:

$$S = \lfloor \log(|p|) + 1 \rfloor \tag{21}$$

Q. E. D