1 Die Spielregeln

Das Spielfeld ist ein Quadrat der Länge n. Dabei gibt es also auch n^2 Felder. Dieses Feld kann also entweder infiziert oder gesund sein. Ein Feld startet entweder als infiziert oder wird dann infiziert, wenn zwei ihrer direkten Nachbarn, also keine diagonalen Nachbarn, ebenfalls infiziert sind. Ein infiziertes Feld bleibt infiziert. Besteht die Möglichkeit ein neues Feld zu infizieren, dann geschieht dies solange, bis keine legalen Züge mehr vorhanden sind, also kein Feld mehr infiziert werden kann. In diesem PDF wird sich also mit der Frage auseinandergesetzt, was die minimale Menge an Infizierten im Startzustand ist, um jedes Feld zu infizieren.

2 Die beiden Trivialfälle

Es gibt nun zwei Trivialfälle, die sich als Beispiel nutzen lassen, um verschiedene Aspekte zu verdeutlichen. Dafür wird als Repräsentation eine $n \times n$ Matrix mit den jeweiligen Infizierten als 1 und den gesunden Feldern als 0 repräsentiert. Die Funktion $Min()$ definiere ich als Funktion, die bei gegebener Matrix die minimale Anzahl von infizierten Feldern angibt.

2.1 Trivialfall: $n = 1$

$$M_{1\times 1} = 0- > 1 \tag{1}$$

Hier muss also mit einem Infizerten gestartet werden, damit das gesamte Feld infiziert ist. Damit gilt:

$$Min(M_{1\times 1}) = 1 \tag{2}$$

2.2 Trivialfall: $n = 2$

$$M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

Um hier nun am meisten neue Infizierte Felder im nächsten Spielzyklus zu haben, wird das diagonale Feld gewählt. Die beiden anderen Felder führen zu einem Rechteck.

$$M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \vee M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Das beste Feld für ein infiziertes Feld ist also:

$$M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} -> M_{2\times 2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{5}$$

zu

$$Min(M_{2\times 2}) = 2 \tag{6}$$

Findet sich nun ein Weg aus diesem 2×2-Quadrat ein größeres Quadrat in einem Zug zu machen, dann ist dieser Weg am effizientesten, da bei jeder anderen Startposition der dritte Zug zum Vervollständigen des 2×2-Quadrates genutzt werden muss. Aus diesem Umstand lässt sich also eine Induktion mit dem Induktionsanker $n = 2$ machen.

3 Die Induktion

Die Induktion lautet also, wie folgt.

$$\forall n : Min(M_{n\times n}) = n \rightarrow Min(M_{(n+1)\times(n+1)}) = n + 1 \tag{7}$$

Der Beweis erfolgt durch eine Betrachtung der Ausgangssituationen einer $(n-1)\times(n-1)$-Quadrates in einer $n\times n$-Matrix. Das $n-1\times n-1$-Quadrat ist dabei die ausgeführte Startkombination, die aus der Startkonfiguration von $n-1$ folgt. Diese Hintereinanderausführung ist erlaubt, weil die betreffenden Felder ebenfalls ab einem gewissen Punkt dort infziert sind und das Spiel eben solange läuft, wie Züge vorhanden sind. Bildet sich also aus diesen Zügen irgendwann, wie vom Induktionsanker angenommen, dieses Quadrat, dann sind diese Züge am Ende des Spiels genau so valide, wie mitten im Spiel. Somit gilt:

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Dabei teilen wir die Felder, die den Wert 0 haben in drei Bereiche ein. Der drei Bereiche sind im Folgenden durch $2, 3, 4$ markiert.

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 4 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Setzt man nun in 2 oder 4 ein infiziertes Feld ein, dann wird das Feld das Quadrat zu einem $(n-1) \times n$ Rechteck oder einem $n \times (n-1)$-Rechteck. Dies passiert, da alle Felder in der untersten Zeile bereits ein angrenzendes Feld, das über sich, haben. Das neue infizierte Feld infiziert also beide Felder neben sich, bis auf das n, n-Feld, da dort kein oberes infizertes Feld existiert.

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} -> M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$-> \dots -> M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Dies gilt ebenfalls für die Spalte, dort gibt es, bis auf das n,n-Feld immer ein rechts-angrenzendes Feld und durch das neue infizierte Feld darüber oder darunter neue infizierte Felder.

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} -> M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} -> \tag{12}$$

$$\dots -> M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Setzt man nun als letzte verbleibende Möglichkeit das infizierte Feld auf das n, n-Feld, dann haben die n-1, n- und n, n-1-Felder jeweils zwei angrenzende infizierte Felder.

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} -> M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{14}$$

$$-> \dots -> M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix} \tag{15}$$

Diese Möglichkeit führt also mit einem verwendeten Kreuz mehr von einem $(n-1) \times (n-1)$-Quadrat zu einem $n \times n$-Quadrat. Damit ist der Induktionschritt bewiesen und mit dem Induktionsanker $n = 2$ gilt nun allgemein:

$$\forall n : Min(M_{n\times n}) = n \tag{16}$$

Damit lässt sich auch die kleinste Startkonfiguration der infizierten Felder angeben, mit der sich ein $n \times n$-Feld füllen lässt. Dafür muss die gesamte Diagonale aus infizierten Feldern bestehen.

$$M_{n\times n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

Mit weniger infizierten Startfeldern ist dies also nicht möglich.