**Beschreibung der Sudokuvariante**

Ein Sudoku ist eine quadratische nicht ausgefüllte Matrix, deren Ziel es ist sie auszufüllen. Dabei darf in jeder Spalte, jeder Zeile und jeder Diagonale, sowie in den kleineren Quadraten eine bestimmte Zahl nur einmal vorkommen. Leere Felder werden durch eine Null signalisiert. Die Regeln dieser Sudokuvariante sind leicht abgeändert. Die einzigen Unterschiede sind die fehlende Regel, dass auf einer Diagonale die Zahl jedesmal nur einmal vorkommen darf und die Regel, dass in jedem Block eine bestimmte Zahl nur einmal vorkommen darf. Sonst sind die Regeln alle identisch.

**Die eindeutige Lösbarkeit eines Sudokus bestimmen:**

Dieser Algorithmus wird an einem Beispiel erläutert. Das zu lösende Sudoku sieht so aus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{1}$$

Die Herleitung:

Wir bilden dabei das zu lösende Sudoku nach, indem wir iterativ eine Möglichkeitsmatrix herstellen. Diese wird durch eckige Klammern gekennzeichnet. Dazu nutzen wir ein leeres Sudokufeld:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeitsmatrix sieht dann für dieses leere Sudoku so aus. Dies gilt allerdings nur für diesen Moment. Sobald eine Zahl eingesetzt wird, ändern sich diese Wahrscheinlichkeiten:

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \tag{3}$$

Bei einer leeren $n * n$ Matrix ist die zugehörige Wahrscheinlichkeitsmatrix ebenalls eine $n * n$ Matrix, an der an jeder Stelle $n$ steht.

Nun wird ein neuer Operator $O(M)$, wobei $M$ für eine Matrix steht, definiert. Dieser Operator setzt eine Zahl in das Sudoku ein und dezimiert die Möglichkeiten in der Wahrscheinlichkeitsmatrix. Die Dezimierung der Wahrscheinlichkeitsmatrix erfolgt durch den folgenden Algorithmus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4}$$

Nun werden alle Felder, die in derselben Spalte oder Zeile sind, angeschaut und jedes Feld einzeln auf diese Bedingung überprüft. Das Feld, das mit der Zahl belegt wird wird in der Wahrscheinlichkeitsmatrix auf Null gesetzt.Es wird zuerst geschaut, ob die Zahl bereits in der Reihe oder in der Zeile des Feldes in der die Möglichkeit eliminiert werden soll schon vorhanden ist. Wenn das der Fall ist, dann wird in der Wahrscheinlichkeitsmatrix nichts auf dem dazugehörigen Feld abgezogen. Wenn diese Bedingung nicht zutrifft, dann wird von dem Wert des dazugehörigen Feld eins abgezogen.
Iterationen:1

$$O(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$O(\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Iterationen: 2

$$O(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{7}$$

$$O(\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix} \tag{8}$$

Iterationen: 3

$$O(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$O(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \tag{10}$$

Da in diesem Kontext eine Möglichkeit für ein Feld bedeutet, dass es nur noch eine Möglichkeit gibt, die dort zur korrekten Lösung eingesetzt werden muss, wird für jede Eins dasselbe in der Wahrscheinlichkeitsmatrix wiederholt.

Iterationen: 4

$$O(\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{11}$$

Iterationen: 5

$$O(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Iterationen: 6

$$O(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

Iterationen: 7

$$O(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{14}$$

Die eindeutige Lösung dieses Sudokus ist:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \tag{15}$$

**Die eindeutige Lösbarkeit**:

Wenn nach der Anwendung des Algorithmus keine Zahl, die größer ist als Null in der Wahrscheinlichkeitsmatrix befindet, dann ist das Sudoku eindeutig lösbar. Wenn dieser Fall nicht zutrifft, dann hat das Sudoku mehrere Lösungen.Die Anzahl der möglichen Lösungen wird durch die Formel, wobei $Mi$ die Werte der Wahrscheinlichkeitsmatrixplätze und $l$ die Anzahl der schon vorhandenen Buchstaben sind:

$$S = \prod_{i=0}^{n-l} Mi \tag{16}$$

angegeben. Dies wird an dem Beispiel des Sudokus:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

gezeigt.

Wendet man den Algorithmus auf dieses Sudoku an, entsteht die Wahrscheinlichkeitsmatrix:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

Wir setzen nun durch weitere Belegung der Matrix jeden Wert der Wahrscheinlichkeitsmatrix auf Null. Egal welches genommen wird , die Wahrscheinlichkeitsmatrix wird aufgelöst und somit lautet die Formel:

$$S = 2 * 1 \tag{19}$$

Durch das Festlegen auf eine Zahl bei einer Matrixstelle eliminiert man die anderen Möglichkeiten bei dieser Stelle und damit diesen Pfad, den man gehen muss, um diese Lösung zu erreichen. Die Zahl in der Wahrscheinlichkeitsmatrix gibt dann die Anzahl der Wege an. Wenn man diese möglichen Wege miteinander multipliziert, bekommt man als Ergebnis die Anzahl aller Lösungen heraus.

**Die effizienteste Lösung**:

Zum Finden des effektivsten Lösungsweges iteriert man durch jeden einzelnen Punkt der Wahrscheinlichkeitsmatrix und setzt jede andere Zahl in dieser Zeile und Reihe in diese Gleichung ein, wenn es eine Zwei in der Reihe gibt:

$$G = \frac{k+1}{(\sum_{i=3}^{n}(\sum_{l=1}^{pi} i))} \tag{20}$$

$pi$ ist dabei die Anzahl der jeweiligen Zahl in der Matrix und $k$ ist die Anzahl an Zweien in der Matrix. Umso größer die Zahl ist, umso besser ist diese Stelle zur Wahl der Eliminierung. Die Formel ist so formuliert, dass umso mehr Zweien es gibt, umso größer wird die Zahl, da aus einer zwei eine Eins und daraus eine Null resultiert, was weitere Zeilen und Spalten beinflusst.

Wenn es keine Zwei gibt, dann gilt diese Formel, da dann die meisten Möglichkeiten eliminiert werden.

$$G = (\sum_{i=3}^{n}(\sum_{l=1}^{pi} i)) \tag{21}$$