Herleitung des Umfangs eines Kreises aus einer geometrischen Figur mit unendlich vielen Ecken

Die Idee hinter dieser Herleitung ist das Approximieren des Umfangs eines Kreises durch Berechnung des Umfangs eines n-Ecks. Für diese Idee müssen erst einige Begriffe definiert werden.

Definition eines n-Ecks:
Dies ist eine regelmäßige geometrische Figur, deren Winkel und Seiten alle gleich groß sind. Dabei sind alle Ecken gleich weit voneinander und vom Mittelpunkt entfernt. Dabei ist das kleinste Vieleck ein Dreieck, weshalb gelten muss:

$$n \geq 3 \tag{1}$$

Definition eines Kreises
Alle Punkte eines Kreises haben den gleichen Abstand zum Mittelpunkt.
Definition einer Ecke:
Eine Ecke ist ein Winkelverhältnis zwischen Zwei Seiten, bei dem der Winkel der beiden Seiten nicht π beträgt.
Die eben gesuchte Gleichung sieht also so aus. Dabei brauchen wir den Betrag des Vektors $\vec{v}$, der die beiden Punkte E1 und E2 auf dem Kreis verbindet.

$$E1 + \vec{v} = E2 \tag{2}$$

$$E1 - E2 = -\vec{v} \tag{3}$$

Dabei definieren wir uns einen Kreis , der den Radius r hat. Diesen spannen wir über der komplexen Ebene, mit dem Mittelpunkt des Kreises auf dem Nullpunkt, auf und können so nun einen Punnkt auf dem Kreis mit der Polarform in Abhängigkeit von Winkeln bestimmen. Dabei legen wir das n-Eck in den Kreis, wobei eine Ecke immer am höchsten Punkt des Kreises platziert wird. Somit ist der erste Punkt, also die erste Ecke des n-Ecks:

$$E1 = re^{i\pi/2} \tag{4}$$

Da das regelmäßige n-Eck immer drei gleiche Winkel hat, haben die Ecken auf dem Kreis auch den gleichen Winkelabstand. Für diesen teilt man einfach den Winkel des Kreises durch die Anzahl der Ecken.

$$w = \frac{2\pi}{n} \tag{5}$$

Der gewählte Punkt, der einer der zwei Punkte ist, der am Nächsten zum Mittelpunkt des ersten Eckpunktes ist, liegt dabei links von dem Originalpunkt, weshalb für den Zweiten Kreispunkt der Winkel subtrahiert werden muss.

$$E2 = re^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n})} \tag{6}$$

Nun setzen wir die oben bestimmten Gleichungen für die Eckpunkte in die Gleichung ein.

$$-r(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n})}) = a + bi \tag{7}$$

Nun können wir die Identität:

$$r(e^{iz}) = r(\cos(z) + i\sin(z)) \tag{8}$$

Verwenden und setzen diese in die Formel ein.

$$-r(\cos(\frac{\pi}{2}) + i\sin(\frac{\pi}{2}) - (\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}) + i\sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))) = a + bi \tag{9}$$

Dies kann weiter aufgelöst werden:

$$-r(-\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}) + i(1 - sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))) = a + bi \tag{10}$$

Um den Betrag der komplexen Zahl zu bestimmen braucht man die Formel:

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2} \tag{11}$$

Dort wird nun die folgende Formel eingesetzt:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-r\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))^2 + -r(1 - sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))^2} \tag{12}$$

$$|\vec{v}| = r\sqrt{(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))^2 + (1 - sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))^2} \tag{13}$$

$$|\vec{v}| = r\sqrt{(\cos(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))^2 + 1 - 2sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}) + (sin(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{n}))^2} \tag{14}$$

Durch die Identitäten:

$$1 = \cos(z)^2 + \sin(z)^2 \tag{15}$$

$$2 * \sin(z)^2 = 1 - \cos(2 * z) \tag{16}$$

und

$$\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\sin(a) \tag{17}$$

gilt für die Strecke zwischen den zwei Ecken des n-Ecks:

$$|\vec{v}(n)| = 2r\sin(\frac{\pi}{n}) \tag{18}$$

Da das n-Eck auch n Seiten hat, gilt für den Umfang:

$$U(n) = 2rn\sin(\frac{\pi}{n}) \tag{19}$$

Da $|v|$ für unendlich viele Ecken eine Nullfolge ist:

$$|\vec{v}(\infty)| = 2r\sin(0) = 0 \tag{20}$$

geht der Abstand zwischen den beiden Punkten gegen null. Im unendlichen wird dieses n-Eck zu einem Kreis, da der gesamte Umfang nur aus Ecken besteht, die alle den gleichen Abstand zum Mittelpunkit des Kreises haben. Nun gilt also für den Umfang des Kreises:

$$U(n) = 2r\lim_{n\to\infty}(n\sin(\frac{\pi}{n})) \tag{21}$$

Dies kann umgeschrieben werden:

$$U(n) = 2r\lim_{n\to\infty}(\frac{\sin(\frac{\pi}{n})}{\frac{1}{n}}) \tag{22}$$

Nun kann für den Grenzwert eine Substitution vorgenommen werden.

$$\lim_{n\to 0}(n) = \lim_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) \tag{23}$$

$$Uk = 2r\lim_{n\to 0}(\frac{\sin(n\pi)}{n}) \tag{24}$$

Hier kann die Regel von L'Hospital angewandt werden.

$$Uk = 2r * \pi(\cos(0)) = 2r\pi \tag{25}$$

Q. E. D