

Projet MEF: CHAUFFAGE D'UNE HABITATION

AYIVI Kevin
ABDULLATIF Abdou-Rahamane
Encadrant: François LEFEVRE

07 Mai 2018

Table des matières

1	MODELISATION ET MAILLAGE	2
1.1	Modélisation	2
1.2	Plan-Maillage	3
2	SOLVEUR EF	5
2.1	Formulation Variationnelle	5
2.1.1	Multiplication de l'EDP par v	5
2.1.2	Formule de Green	5
2.1.3	Conditons limites	5
2.1.4	Termes bilinéaires et linéaires	6
2.2	Simulation freefem++	6
2.3	simulation sous Octave	7
2.4	Exploitation du code freefem : réglage des radiateurs	8
3	Condition de Neumann non-homogène	9
3.1	Formulation variationnelle	9
3.2	simulation	10

Chapitre 1

MODELISATION ET MAILLAGE

1.1 Modélisation

Dans cette partie nous allons faire la modélisation de l'équation de la chaleur et poser les conditions aux limites sur les différentes parties de notre domaine Ω .

$$(P) \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla u(x)) &= f(x), & \text{dans } \Omega \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= 0, & \text{sur } \Gamma_N \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \alpha[u(x) - u_E(x)], & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad (1.1)$$

où :

- $f(x)$ est la fonction source de chaleur,
- $\kappa(x)$ est la fonction de conductivité thermique,
- α est le facteur du transfert thermique,
- u_E est la température extérieure,
- $u(x)$ est la diffusion de la température observée.

hypothèses :

- Conductivité thermique $\kappa(x)$ est constante sur chaque milieu, $\kappa(x) = \kappa$
- Fonction source de chaleur $f(x)$ est constante pour chacun des radiateurs, $f(x) = f_i$; avec f_i la puissance du $i^{\text{ème}}$ radiateur.

1.2 Plan-Maillage

Pour notre projet, on va prendre le plan de l'habitation suivant :

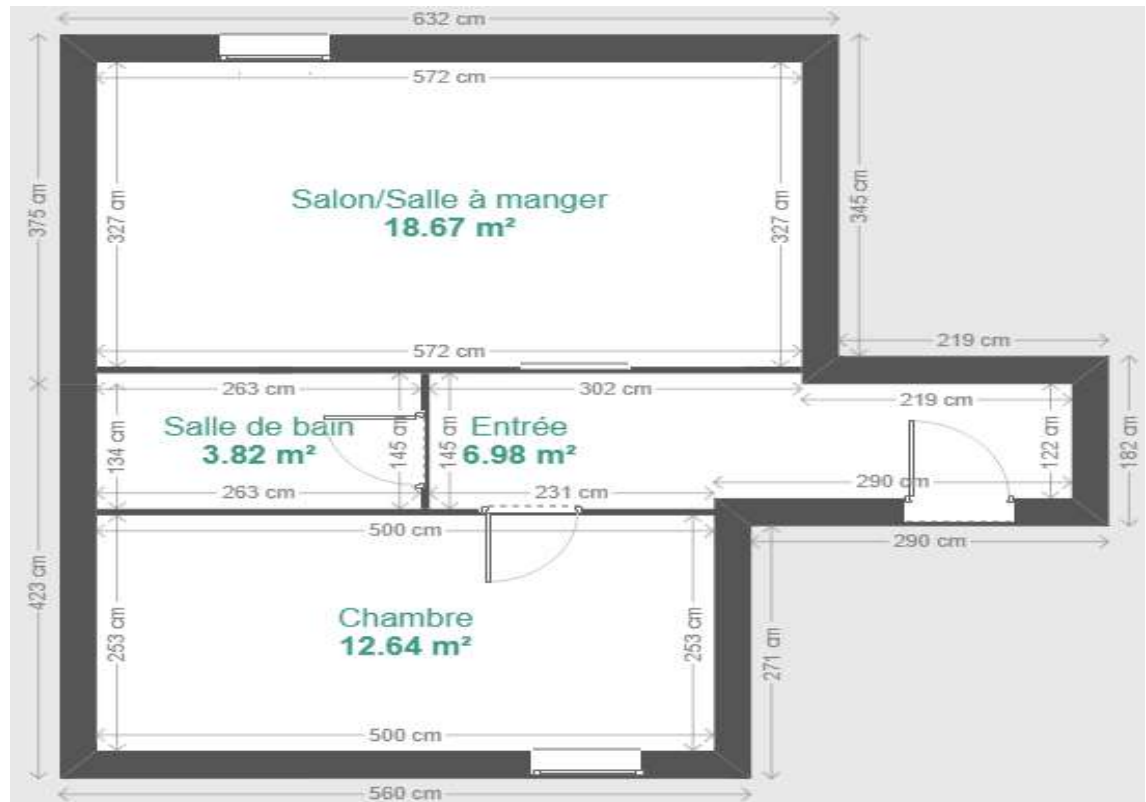


FIGURE 1.1 – Plan Maison

Sous FreeFem++, on génère ce plan en plaçant les différents radiateurs et ensuite on effectue le maillage du domaine.

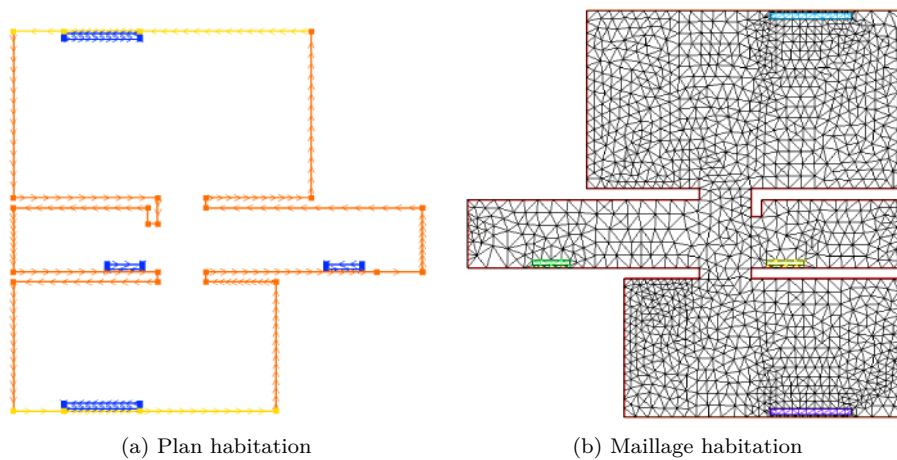


FIGURE 1.2 – Plan et Maillage de la maison

Avec ce maillage, on obtient un qualité $Q_h = 2,9761$ et un pas $h = 0,49034$.
 Le maillage contient :

- nombre de nœuds (nb_n) = 1533,
- nombre d'éléments (nb_e) = 2809,
- nombre d'arrêtes (nb_a) = 327.

Chapitre 2

SOLVEUR EF

2.1 Formulation Variationnelle

Soient $V = H^1(\Omega) = \{v \in L^2(\Omega) / \partial_i v \in L^2(\Omega)\}$ l'espace des fonctions test et $S = V = H^1(\Omega)$ l'ensemble des solutions admissibles.

Soit v une fonction test, $v \in V$.

2.1.1 Multiplication de l'EDP par v

On multiplie l'équation aux dérivées partielles du problème (1.1) par la fonction v et on intègre sur Ω .

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (\kappa \nabla u) * v dx = \int_{\Omega} f * v dx$$

2.1.2 Formule de Green

On applique la *formule de Green*

$$\begin{aligned} -\left[\int_{\partial\Omega} \kappa \nabla u \cdot \vec{\nu} v - \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx \right] &= \int_{\Omega} f v dx \\ \Leftrightarrow \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx - \int_{\partial\Omega} \kappa \nabla u \cdot \vec{\nu} v &= \int_{\Omega} f v dx \end{aligned}$$

2.1.3 Conditions limites

On applique les conditions aux limites sur le bord $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_F$,

$$\begin{aligned} -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= 0, & \text{sur } \Gamma_N \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \alpha[u(x) - u_E(x)], & \text{sur } \Gamma_F. \end{aligned}$$

2.1.4 Termes bilinéaires et linéaires

En regroupant les termes bilinéaires à gauche et les termes linéaires à droite du signe égal, on obtient la formulation variationnelle du problème (1.1) :

$$\boxed{\int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_F} \alpha u v ds = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_F} \alpha u_E v ds} \quad (2.1)$$

Le problème (1.1) s'écrit donc :

$$\text{Trouver } u \in S \text{ / } a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad (2.2)$$

où " $a(u, v) = \int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_F} \alpha u v ds$ " correspond aux termes bilinéaires et " $l(v) = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_F} \alpha u_E v ds$ " correspond aux termes linéaires.

En admettant les affirmations suivantes :

1. V est un espace de Hilbert,
2. $l(\cdot)$ une forme linéaire et continue sur V ,
3. $a(\cdot, \cdot)$ une forme bilinéaire, continue sur $V \times V$ et coercitive sur V .

On peut appliquer le théorème de *Lax-Milgram* et dire qu'il existe une solution et une seule au problème (2.2).

2.2 Simulation freefem++

Nous allons à présent calculer la solution du problème (2.1) sous freefem++. On remarque que le problème (1.1) de l'habitation ressemble à celui fait en TP.

$$(P) = \begin{cases} -\text{div}(\kappa \nabla u(x)) = f(x), & \text{dans } \Omega \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = 0, & \text{sur } \Gamma_N \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) = \alpha[u(x) - u_E(x)], & \text{sur } \Gamma_F \end{cases}, (PbTP) = \begin{cases} \Delta u(x) = f(x), & \text{dans } \Omega =]0, 4[\times]0, 2[\\ u(x) = u_E, & \text{sur } \Gamma_D = \{0, 4\} \times]0, 2[\\ \nabla u(x) \cdot \vec{n} = 0, & \text{sur } \Gamma_N =]0, 4[\times \{0, 2\} \end{cases}$$

Il y a tout de même quelques différences notables :

1. Pour le problème de TP (PbTP), on a une condition limite de type Dirichlet non-homogène sur Γ_D et une autre de type Neumann homogène sur Γ_F . Pour le projet (P), il y a une condition type Fourier-Robin non-homogène sur Γ_F et une autre de type Neumann homogène sur Γ_F .
2. Lors du TP on a considéré un κ constante égal à un sur tout Ω . Ici, on le prend constante sur chaque matériau considéré.
3. On avait un domaine rectangulaire en TP. Le domaine étudié est assez complexe.

e La formulation variationnelle du (PbTP) s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx = \int_{\Omega} f v dx.$$

Pour la résolution de notre problème, on prend donc le même code qu'on a fait en TP, tout en faisant attention à rajouter les 2 intégrales manquantes, qui viennent de la condition limite de type Fourier-Robin.

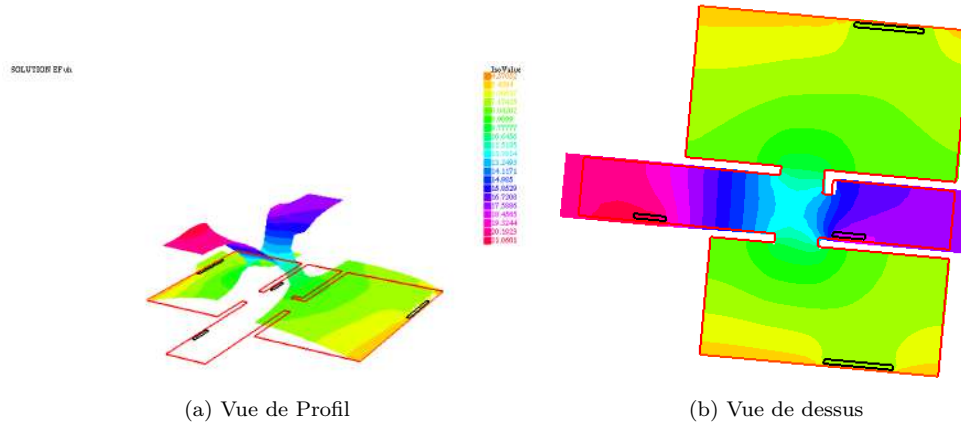


FIGURE 2.1 – Diffusion de la température

2.3 simulation sous Octave

Sous octave on utilise la méthode du gradient conjugué préconditionné (GCP), pour le calcul de la solution. On génère le maillage à l'aide des programmes réalisés lors des travaux pratiques.

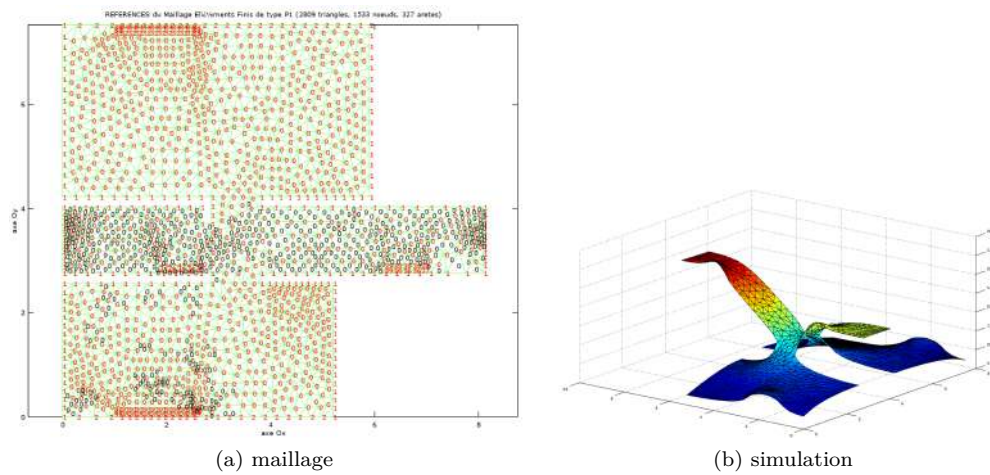


FIGURE 2.2 – Maillage et Simulation sous octave

Bien que les courbes aient la même allure sous Freefem et sous Octave, les minimas, observés, diffèrent. En effet, on obtient une température minimale de 5.0193° , maximale de 5.3091° et moyenne de 5.0901° sous Octave, alors que sous Freefem (avec les 4 radiateurs allumés) on obtient une température minimale de 5.00672° , maximale de 26.1835° et moyenne de 5.01288° .

On a dû faire une erreur lors de la mise en place du programme Octave.

2.4 Exploitation du code freefem : réglage des radiateurs

Pour chaque radiateur R_i , on fixe une puissance $2 \leq f_i \leq 8$ de sorte à ce que la température maximale du domaine, lorsque R_i est allumé tout seul, tourne autour de 20° .

Radiateur(s) allumé(s)	température minimale	température maximale	température moyenne
R1 ($f_1 = 8$)	4.99836	6.42706	5.00549
R2 ($f_2 = 8$)	5.00015	6.87206	5.00015
R3 ($f_3 = 2$)	5.00192	20.4038	5.00195
R4 ($f_4 = 4.5$)	5.00383	20.6293	5.00528
R1,R2	4.9986	6.87395	5.00564
R1,R3	5.00138	20.6132	5.00744
R1,R4	5.00394	20.8746	5.01077
R2,R3	5.00207	20.6749	5.0021
R2,R4	5.00534	20.8672	5.00543
R3,R4	5.00574	25.703	5.00723
R1,R2,R3	5.00153	20.8843	5.00759
R1,R2,R4	5.0048	21.1125	5.01093
R1,R3,R4	5.00586	25.9124	5.01272
R2,R3,R4	5.00726	25.9741	5.00739
R1,R2,R3,R4	5.00672	26.1835	5.01288

On constate que pour les radiateurs R1 et R2, il faut mettre une puissance assez importante pour avoir une température moyenne optimale. Tandis que R3 et R4 doivent être maintenu à faible puissance pour ne pas que la température explose.

On peut expliquer cela par le fait que R1 et R2 sont positionnés sur les bords ayant des conditions limites de type Fourier/Robin, ceux qui fait qu'il y a une perte de chaleur. Les radiateurs R3 et R4 sont situés au niveau des murs avec conditions aux limites de type Neumann, donc pas d'échange de chaleur avec l'extérieure.

Chapitre 3

Condition de Neumann non-homogène

Dans cette partie on va reprendre le même problème (1.1), mais on va prendre une condition de Neumann non-homogène sur Γ_N . Le problème (P) devient alors :

$$(P2) \begin{cases} -\operatorname{div}(\kappa \nabla u(x)) &= f(x), & \text{dans } \Omega \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= g(x), & \text{sur } \Gamma_N \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \alpha[u(x) - u_E(x)], & \text{sur } \Gamma_F \end{cases} \quad (3.1)$$

3.1 Formulation variationnelle

On reprend exactement les mêmes étapes que pour le premier problème la seule différence réside dans la prise en compte des conditions limites.

Condition limite

$$\begin{aligned} -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= g(x), & \text{sur } \Gamma_N \\ -\kappa \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x) &= \alpha[u(x) - u_E(x)], & \text{sur } \Gamma_F. \end{aligned}$$

De même en regroupant les termes bilinéaires d'une part de l'égalité et de l'autre les termes linéaires, on obtient la formulation variationnelle suivante :

$$\boxed{\int_{\Omega} \kappa \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Gamma_F} \alpha u v ds = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v dx + \int_{\Gamma_F} \alpha u_E v ds} \quad (3.2)$$

Sous les mêmes hypothèses que pour le premier problème, on applique le théorème de Lax-Milgran pour montrer que (P2) admet une unique solution.

3.2 simulation

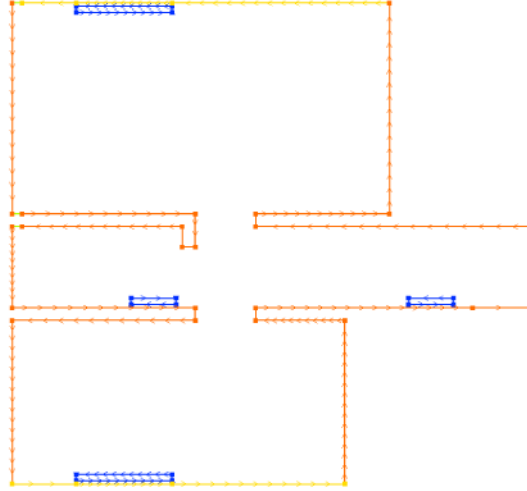


FIGURE 3.1 – Domaine avec 3 VMC

On pose $g(x) \geq 0$, ça va jouer le rôle d'une VMC (les 3 VMC sont placées côté gauche de la structure).

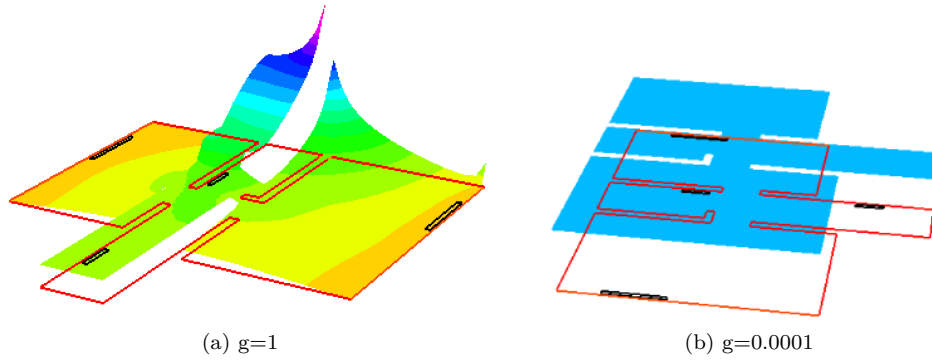


FIGURE 3.2 – radiateurs éteints

Avec tous les radiateurs éteints, on constate que la température reste stationnaire pour un $0 \leq g(x) < 1$, mais à partir de 1 les VMC ont tendance à aspirer la chaleur de la pièce vers elles.

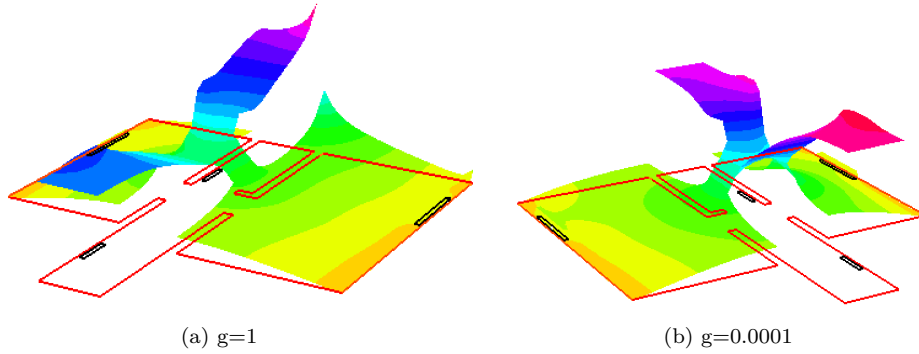


FIGURE 3.3 – radiateurs allumés

Lorsqu'on change la valeur de g et que les radiateurs sont allumés, les températures maximales et moyennes ont tendance à augmenter. Avec les VMC la température est mieux répartie dans l'appartement. On peut en déduire qu'un placement efficace de ceux-ci peut aider à un chauffage efficient du logement.

Tableau représentant la température avec des valeurs de g différents (radiateurs en marche).

$g(x) = \dots$	température minimale	température maximale	température moyenne
10^{-4}	5.00479	26.1402	5.01246
10^{-3}	5.00479	26.1431	5.01277
10^{-2}	5.00482	26.1719	5.01279
10^{-1}	5.00507	26.4601	5.01305
1	4.92159	45.7177	5.0156

Table des figures

1.1	paysage	3
1.2	Plan et Maillage de la maison	4
2.1	Diffusion de la température	7
2.2	Maillage et Simulation sous octave	7
3.1	Domaine avec 3 VMC	10
3.2	radiateurs éteints	10
3.3	radiateurs allumés	11