

Cálculo com funções de uma variável

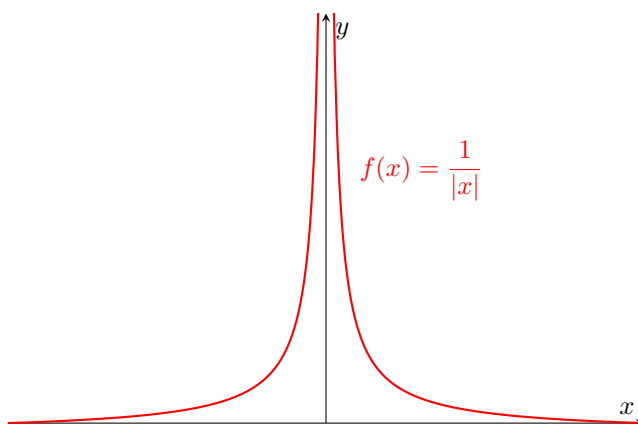
Kayky Moreira Praxedes

Janeiro 2026

1 Limites

1.1 Limite em um ponto

$f(a)$ indica o valor da função $f(x)$ quando $x = a$. $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ vê a tendência da função quando x se aproxima de a .

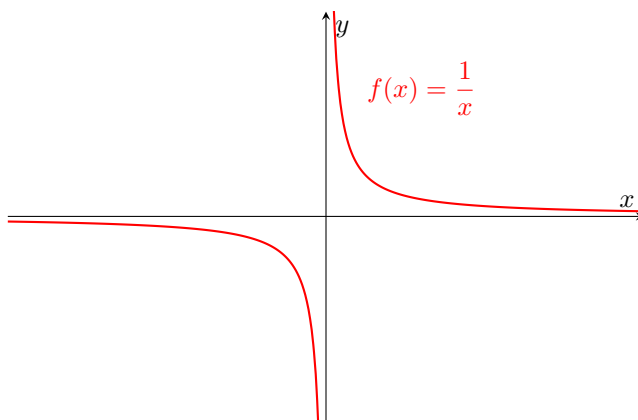


$f(0)$ não existe. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$ (quando x se aproxima de 0, y tende ao infinito).

Limites laterais:

Para um limite existir, os limites laterais devem ser iguais (o mesmo valor se aproximando pela esquerda e direita):

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

1.2 Propriedades dos limites

Para limites sem indeterminações:

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$ como $\lim_{x \rightarrow 7} x = 7$
- $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ como $\lim_{x \rightarrow 7} 4x = 28 = 4 \lim_{x \rightarrow 7} x$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ como $\lim_{x \rightarrow 7} x + 2 = 9 = \lim_{x \rightarrow 7} x + \lim_{x \rightarrow 7} 2$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ como $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 \cdot (2x + 1)] = 20 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x^2\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)\right)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$ como $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2x + 1} = \frac{4}{5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2}{\lim_{x \rightarrow 2} [2x + 1]}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(g(x))] = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$

Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x + 1$ então $\lim_{x \rightarrow 2} [(2x + 1)^2] = 25 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} [2x + 1]\right)^2$

No geral, se f é contínua em a : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

Limites no infinito:

Quando aplicamos um limite no infinito, ele pode convergir (um número real) (1), divergir para $(\pm\infty)$ (2) ou simplesmente não existir (não para em um único valor) (3):

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, a \in \mathbb{R}$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{x}\right] 1 + 0 = 1$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$
3. $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ como $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$

1.3 Limites indeterminados

Caso f não for contínua no ponto, gerando algumas indeterminações, tais quais:

- $\frac{0}{0}$ como $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- $\frac{\infty}{\infty}$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4}$
- $\infty - \infty$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 - x]$
- $0 \cdot \infty$ como $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \cdot e^x\right]$
- 1^∞ como $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$
- ∞^0 como $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + x)^{1/x}\right]$

Para resolver essas indeterminações existem algumas ferramentas, essas envolvendo tanto manipulação algébrica quanto análise na relações entre funções. As mais comuns são:

Polinômios em evidência:

Principalmente em polinômios tendendo ao infinito, o crescimento é mais acelerado nos polinômios de maior grau, sendo eles dominantes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(3 - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{4}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

Fatoração:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [x + 1] = 2$$

Substituição de variáveis:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ Se } h = x - 1, h \rightarrow 0 : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h + 1)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [h + 2] = 2$$

Racionalização:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$$

O método de racionalização funciona para qualquer expressão que possa ser transformada em um produto notável (não apenas para raízes).

Teorema do confronto (sanduíche):

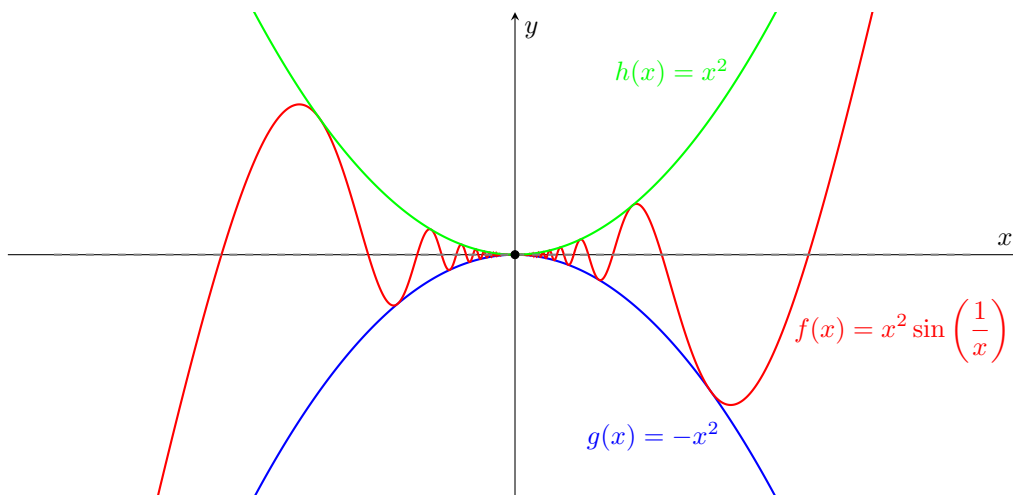
Mesmo que $\exists \lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou ele seja indefinido, mas $f(x) \geq g(x)$ e $f(x) \leq h(x)$ para todos os pontos próximos de a , tendo g e h com limites calculáveis, então é possível definir a relação:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right]$, mesmo que $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$ não exista, tem-se que:

$$-1 \leq \sin \left(\frac{1}{x} \right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \leq x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right] \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right] \leq 0$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right] = 0$, mesmo que $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left(\frac{1}{x} \right)$.



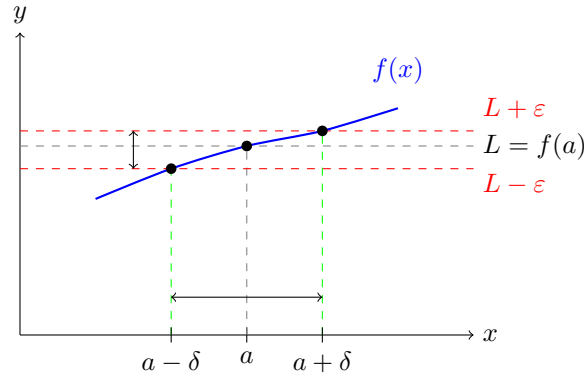
1.4 Teorema do valor intermediário (TVI)

Se f for uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, se d está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um valor c , tal que $f(c) = d$.

Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua. Se $f(a) \leq d \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b]$, tal que: $f(c) = d$

1.5 Formalizando o conceito de limite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in D_f: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Pode-se tornar o valor de $f(x)$ arbitrariamente próximo de L (diminuindo o módulo de ε) aproximando-se x de a (diminuindo o módulo de δ) sem que ambos tenham de ser necessariamente iguais.

2 Derivadas

2.1 Derivada em um ponto

A taxa de crescimento de uma função qualquer em 2 pontos pode ser obtida por $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, sendo esse o coeficiente angular de uma reta secante à f nos pontos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

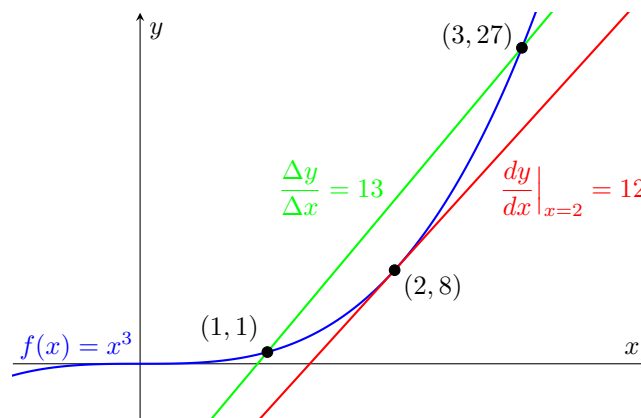
Quanto mais próximos os pontos x_2 e x_1 , maior a precisão de modo que quando $x_2 - x_1 \rightarrow 0$, encontra-se o coeficiente angular de uma reta tangente à f no ponto $(a, f(a))$, sendo essa a derivada (taxa de variação instantânea).

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ se } x - a = h, h \rightarrow 0: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para $f(x) = x^3$, a taxa de variação entre $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, e a derivada em $x = 2$ são:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{27 - 1}{3 - 1} = \frac{26}{2} = 13$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + 2x + 4] = 12$$



Diferenciabilidade:

Uma função f é diferenciável em um ponto a se:

1. $\exists f'(a)$ ($f'(a)$ existe).
2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ (f é contínua nos arredores de a).
3. $f'_-(a) = f'_+(a)$ (f não tenha “quina”).

Derivada como uma função:

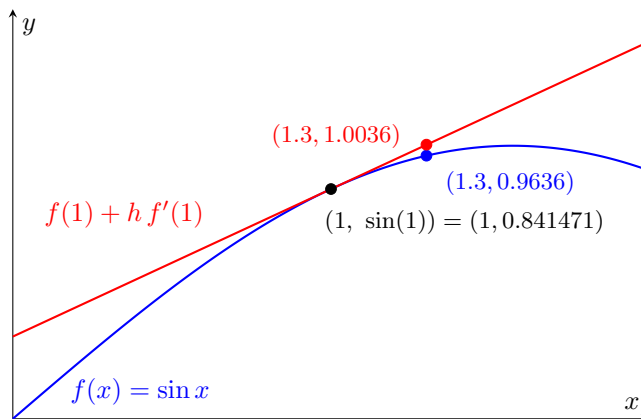
Ao invés de considerar a derivada de uma função em um ponto específico é considerado um ponto qualquer.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a \Rightarrow f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$$

2.2 Aproximação linear

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \approx 0 \Rightarrow f(x+h) \approx f(x) + h f'(x), h \approx 0$$

Para valores de h pequenos, a variação da função é praticamente igual ao valor correspondente na reta tangente.



A diferença dos valores é aproximadamente 0.04 (muito pequena). Quanto menor o h , mais preciso é a relação.

2.3 Propriedades das derivadas

- $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}[\alpha f(x)] = \alpha f'(x)$

Regra do produto:

- $\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

Regra do quociente:

- $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

Regra da cadeia:

- $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

A dedução das propriedades no apêndice.

2.4 Derivada de funções inversas

Considerando uma função inversa como $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, tais quais x^3 e $\sqrt[3]{x}$, e^x e $\ln x$, $\sin x$ e $\sin^{-1} x$, etc.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} x \Rightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Considerando $f^{-1}(x) = \ln x \Rightarrow f(x) = e^x$, sendo $f'(x) = e^x$: $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$.

2.5 Derivadas importantes

- $\frac{d}{dx} c = 0, c \in \mathbb{R}$.
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$.
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \Rightarrow \frac{d}{dx} e^x = e^x$.
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$.

Regra do tombo:

- $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}, n \in \mathbb{R}^*$

A dedução das derivadas está no apêndice.

2.6 Derivada de ordem superior

Trata-se apenas do processo de realizar a derivada de uma função que já tinha sido derivada anteriormente.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) &= \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x) \text{ ou } f^{(2)}(x) \\ \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\dots \left(\frac{d}{dx} f(x) \right) \right) \right) &= \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) \\ \frac{d^3}{dx^3} \sin x &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \sin x \right) \right) = \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \cos x \right) = \frac{d}{dx} (-\sin x) = -\cos x\end{aligned}$$

2.7 Derivada de uma função implícita

Em uma função explícita, a variável dependente y está expressa diretamente em termos da variável independente x , $y = f(x)$, ao par que em uma função implícita não é necessário ou não é fácil isolar y explicitamente como função de x , tendo-se a relação $F(x, y) = 0$.

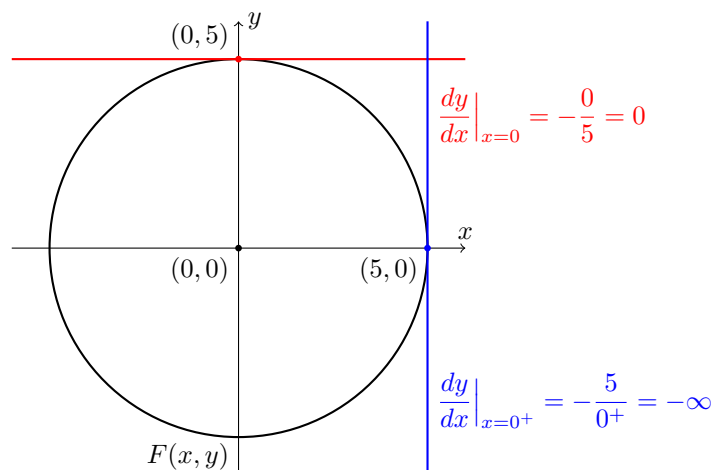
O processo para achar a taxa de variação de uma variável em relação à outra é basicamente derivando tudo e manipulando algebricamente a parte referente à variável de interesse até achar o resultado.

Com $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$, para achar $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = \frac{d}{dx} (x^2 + y^2 - 25) = \frac{d}{dx} (0) \Rightarrow \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 + \frac{d}{dx} (25) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{d}{dx} y^2 + 0 = 0$$

Como, algebricamente, $\frac{d}{dx} y^2 = \frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$:

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$



2.8 Derivação logarítmica

Dada uma função muito complexa, tal qual $f(x) = y = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$, para encontrar $f'(x)$ teriam de ser usadas a regra do produto, a regra do quociente e a regra da cadeia, tornando-se um processo extremamente longo.

Uma abordagem interessante pode ser trabalhar com logaritmos, já que, algebricamente:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \ln y = \frac{dy}{dx} \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx} \ln y$$

$$y = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \Rightarrow \ln y = \ln \left(\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \right) = \ln x^3 + \ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln((3x+2)^5) = 3 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 5 \ln(3x+2) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \left[3 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 5 \ln(3x+2) \right] = \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}$$

Como $\frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx} \ln y$:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \right] = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \left(\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right)$$

2.9 Diferenciais

Relembrando a aproximação linear:

$$f(x+h) - f(x) \approx hf'(x)$$

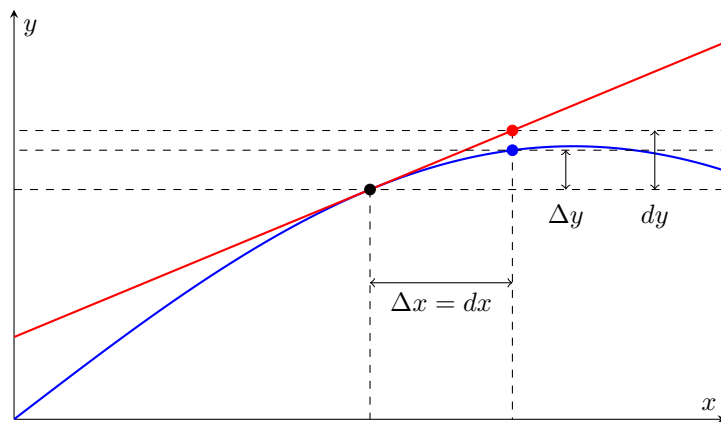
h pode ser substituído por Δx , ficando:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx \Delta x f'(x) \Rightarrow \Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Como dx é apenas uma referência à variação de x , de modo que, algebricamente, $\Delta x = dx$, ficando $\Delta y \approx dy$.

Isso faz sentido, já que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$ para Δx próximo de 0.

Portanto, para encontrar um valor na função, ao invés de seguir o caminho por f , seguimos pela reta tangente à um ponto conhecido ($y + \Delta y \approx y + dy$).



Dessa maneira é possível aproximar funções que seriam complicadas de calcular.

Tendo $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, tem-se, por exemplo, $f(4) = \sqrt{4} = 2$. $f(4.02) = 2.004994\dots$, sendo difícil de calcular manualmente, ao par que, por diferenciais, $f(4.02) \approx \sqrt{4} + \frac{0.02}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{0.02}{4} = 2 + 0.005 = 2.005$ (uma ótima aproximação, visto que o erro é menor que 0.000006).

2.10 L'Hôpital

É uma ferramenta que permite resolver limites indeterminados do tipo $0/0$, ou ∞/∞ de maneira simples.

Caso de $0/0$:

Pode-se utilizar a intuição dada pelos diferenciais, onde $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, isso sendo uma igualdade para $\Delta x \rightarrow 0$.

Como $f(a) = 0$: $f(x) = -(0 - f(x)) = -(f(a) - f(x)) = -\Delta y_f$, e o mesmo para $g(x) = -\Delta y_g$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\Delta y_f}{-\Delta y_g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y_f}{\Delta y_g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)\Delta x}{g'(x)\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left(\text{que daria } \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Caso de ∞/∞ :

É bastante intuitivo de se pensar que se f cresce mais rápido que g , então $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Para $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$, com uma análise simples do crescimento das funções:

$$\frac{\ln 10}{10} = 0.230 \quad \frac{\ln 100}{100} = 0.046 \quad \frac{\ln 1000}{1000} = 0.007 \quad \frac{\ln 1000000}{1000000} = 1.38 \cdot 10^{-5}$$

x cresce muito mais rápido que $\ln x$ quando $x \rightarrow \infty$, portanto, mesmo que ambas tendam ao infinito, x sempre terá um valor muito maior do que $\ln x$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left(\text{que daria } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Através de manipulação algébrica é possível abranger a regra de L'Hopital para casos diferentes dos explicitados.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] (\text{caso } \infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \sin x}{x \sin x} \left(\text{caso } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} [-x + \sin x]}{\frac{d}{dx} x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{\sin x + x \cos x} = 0$$

2.11 Derivadas para análise de uma função

1ª derivada:

Pode-se determinar o sentido de uma função em um ponto a , sendo que se $f'(a) < 0$ ela está **decrecendo**, se $f'(a) = 0$ **sua variação é nula** e se $f'(a) > 0$ ela está **crescendo**.

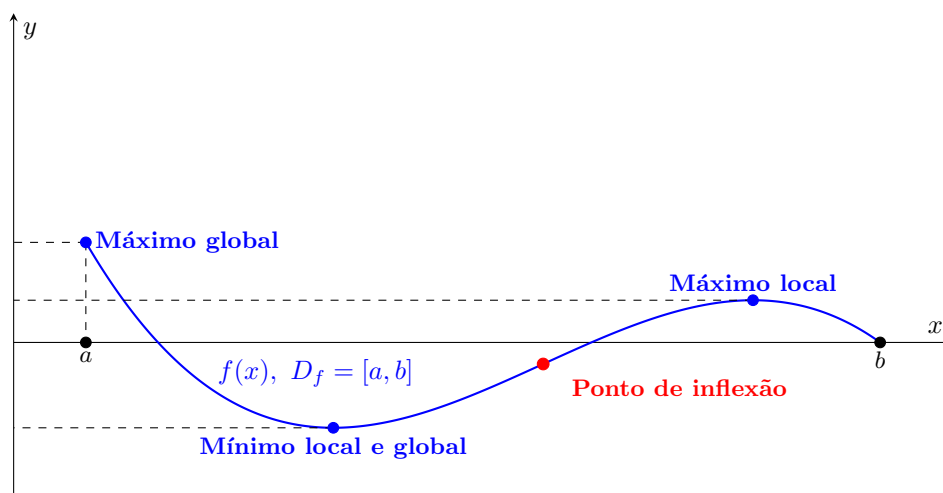
2ª derivada:

Descobre-se a concavidade da função, de modo que se $f''(a) > 0$ a função é **convexa** (concavidade para cima), se $f''(a) = 0$ pode se trata-se de um **ponto de inflexão** ou uma função afim (nem sempre é, como no caso de $f(x) = x^4$, onde $f''(0) = 12(0) = 0$), e se $f''(a) < 0$ trata-se de uma função **côncava** (para baixo).

Máximos e mínimos:

Um **máximo local** possui $f'(a) = 0$ (pois caso contrário a função tem para onde crescer ou decrescer) e $f''(a) < 0$. Já para ser um **mínimo local**, deve possuir $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$.

Para ser um **máximo** ou **mínimo global**, ele tem de ser o maior ou menor ponto da função no domínio respectivamente. Quando o intervalo é fechado $[a, b]$, os máximos e mínimos globais podem ser pontos referentes aos os máximos e mínimos locais ou $f(a)$ ou $f(b)$.



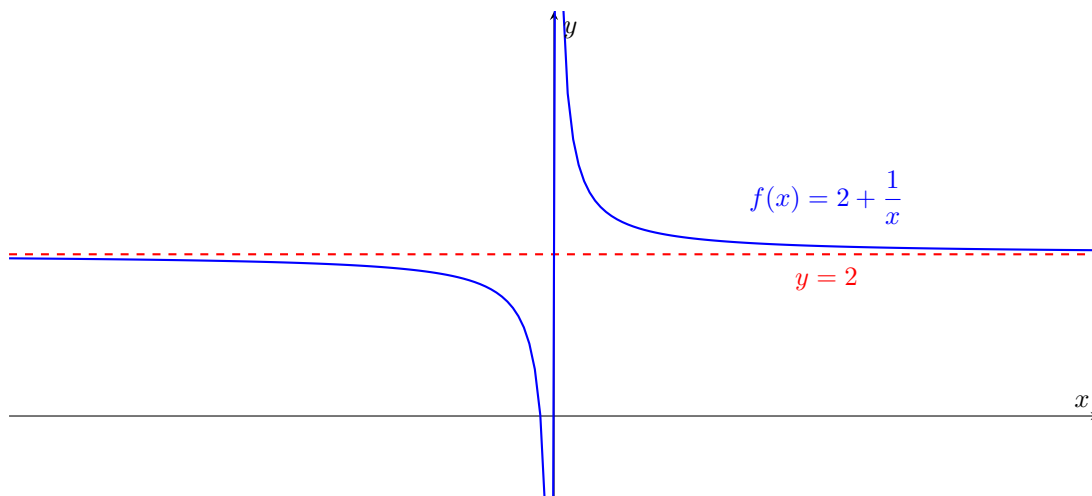
2.12 Assíntotas

Trata-se do comportamento que algumas funções tem de se aproximarem à uma reta para certos valores.

Horizontais:

Se aproximam de uma reta horizontal quando $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c$, $c \in \mathbb{R}$.

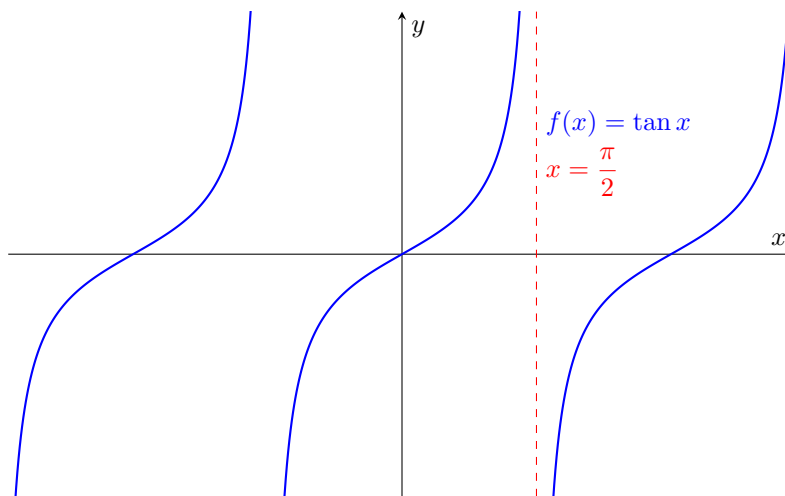
$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$, logo, f tem uma assíntota horizontal em $y = 2$.



Verticais:

Se aproximam de uma reta vertical quando $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$, $c \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \infty$ e $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$, logo, f tem uma assíntota vertical em $x = \pi/2$.



Oblíquas:

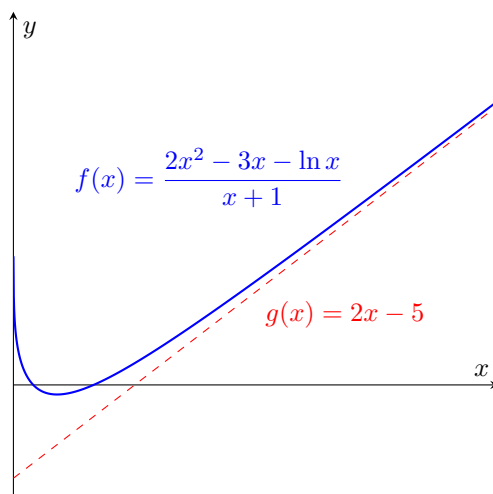
Quando uma função f tende à uma reta $g(x) = ax + b$, onde, dessa maneira, $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Para encontrá-la, pode-se usar a noção de que, se o crescimento de m é maior do que h : $f(x) = m(x) + h(x) \approx m(x)$, quando $x \rightarrow \infty$.

Sendo $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1}$, para valores x muito grandes:

$$\frac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1} = \frac{2x^2 - 3x}{x + 1} - \frac{\ln x}{x + 1} \approx \frac{2x^2 - 3x}{x + 1} = 2x - 5 + \frac{5}{x + 1} \approx 2x - 5$$

Como $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1} - (2x - 5) \right] = 0$, então $2x - 5$ é uma assíntota oblíqua de f .



3 Primitivas

São o processo oposto das derivadas, de modo que, F é primitiva de f , se:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + c, \text{ em que } c \text{ é constante que é perdida na derivada.}$$

$$\frac{d}{dx} [2x + 4] = 2 \Leftrightarrow \int 2 dx = 2x + c. \text{ Para a mesma função, basta assumir } c = 4 \Rightarrow 2x + 4$$

Toda função contínua em um intervalo possui uma primitiva nesse espaço.

Primitivas comuns:

Realizando o processo inverso do cálculo da derivada:

- $\int a dx = ax + c.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
- $\int \cos x dx = \sin x + c.$
- $\int a^x dx, a > 0, a \neq 1 = \frac{a^x}{\ln a} + c \Rightarrow \int e^x dx = e^x + c.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \Rightarrow \int \frac{1}{x \ln a} dx, a > 0, a \neq 1 = \frac{\ln |x|}{\ln a} + c = \log_a |x| + c.$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$

Propriedades:

- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$
- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Não existe uma regra da cadeia, regra do produto ou regra do quociente para a resolução de primitivas, fazendo-se necessário o uso de métodos mais refinados para resolver integrais de maior complexidade.

Apêndice A

Dedução das propriedades de derivadas

Soma de derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

Produto de derivada com escalar:

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha[f(x+h) - f(x)]}{h} = \alpha \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \alpha f'(x)$$

Observação!

Para a **regra do produto**, **regra do quociente** e **regra da cadeia**, a noção de aproximação linear ($f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$, $h \approx 0$) é importante.

Regra do produto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x) + h f'(x))(g(x) + h g'(x)) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) + h f'(x)g(x) + h f(x)g'(x) + h^2 f'(x)g'(x) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h f'(x)g(x) + h f(x)g'(x) + h^2 f'(x)g'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + h f'(x)g'(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + h f'(x)g'(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Regra do quociente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + h f'(x)}{g(x) + h g'(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)g(x) + h f'(x)g(x) - (f(x)g(x) + h f(x)g'(x))}{h(g(x) + h g'(x))g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))}{h(g^2(x) + h g'(x)g(x))} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x) + h g'(x)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

Regra da cadeia:

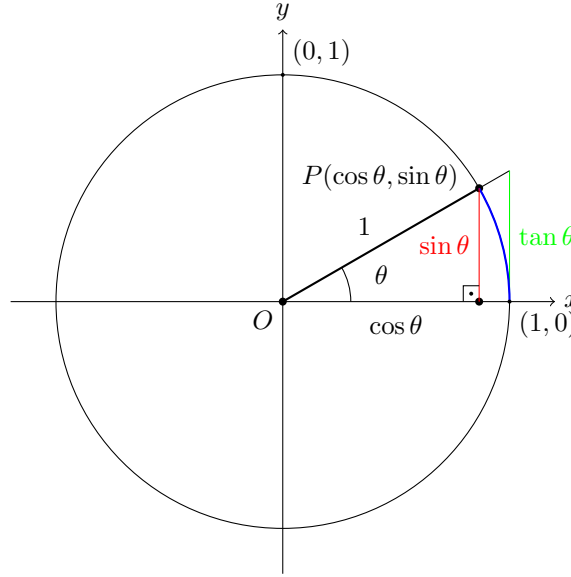
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f \circ g] &= \frac{d}{dx}f(g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + h g'(x)) - f(g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) + h f'(g(x))g'(x) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h f'(g(x))g'(x)}{h} = f'(g(x))g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

Dedução das derivadas

- $\frac{d}{dx}c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.
- $\frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$

Apesar de o limite poder ser resolvido por l'hopital, como é necessário previamente definir a derivada de $\sin x$ (problema original), a solução utilizada será através de trigonometria e limites:

Tendo um círculo de raio 1, considerando uma reta que corte o círculo, formando um arco de ângulo θ , e dessa mesma reta, forma-se um triângulo retângulo, igual ao da imagem:



A área da seção circular pode ser calculada por $\frac{1}{2} r^2 \theta$, e a área do triângulos menor e maior por $\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta$ e $\frac{1}{2} r \tan \theta$, respectivamente.

Para definir $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$:

$$\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta \leq \frac{1}{2} r^2 \theta \leq \frac{1}{2} r \tan \theta \Rightarrow \cos \theta \sin \theta \leq \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} \geq \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \cos \theta \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow 1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

Para definir $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta}$:

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \frac{\cos \theta - 1}{\theta} \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta(\cos \theta + 1)} = -\frac{\sin^2 \theta}{\theta(\cos \theta + 1)} = -\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[-\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \right] = \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \Rightarrow \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

- $\frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h + \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin h}{h} =$
 $\cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x \Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

- $\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$

Sabendo que $a^h = e^{\ln a^h} = e^{h \ln a}$. Sabendo que o polinômio de Taylor de e^h é igual à $1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$, o de $e^{h \ln a}$ sendo então $1 + h \ln a + \frac{(h \ln a)^2}{2!} + \frac{(h \ln a)^3}{3!} + \dots$:

$$a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + h \ln a + \frac{(h \ln a)^2}{2!} + \frac{(h \ln a)^3}{3!} + \dots\right) - 1}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \ln a + \frac{(h \ln a)^2}{2!} + \frac{(h \ln a)^3}{3!} + \dots}{h} =$$

$$a^x \lim_{h \rightarrow 0} \left[\ln a + \frac{h \ln^2 a}{2!} + \frac{h^2 \ln^3 a}{3!} + \dots \right] = a^x \ln a \Rightarrow \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a.$$

Muito usada: $\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$.

- $\frac{d}{dx} \log_a x$, tendo função inversa igual a $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$: $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$.

Muito usada: $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x \cdot 1} = \frac{1}{x}$.

Regra do tombo:

- $\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$. A partir da definição de função polinomial, usando Binômio de Newton, que é:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}, \quad n \neq 0, \text{ com } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Expandindo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \\ \binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \\ \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \\ &\vdots \\ \binom{n}{n-2} &= \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \end{aligned}$$

Quando aplicado esse conceito na derivada:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[\binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[\binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1} \right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d}{dx}x^n = n x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

Fontes

1. STEWART, James. Cálculo - Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
2. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
3. TAKHE. Cálculo 1: Aulas e Exercícios Resolvidos. [YouTube], 2023. Disponível em: https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1ap15ib_uL7UkP4fDwy4m. Acesso em: 10 set. 2025.
4. BARROS, Tatiana Leal. Disciplina: Cálculo com Funções de Uma Variável Real. Curso de graduação em Engenharia de Computação – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2024.
5. CAMARGO JUNIOR, Fausto de. Disciplina: Integração e séries. Curso de graduação em Engenharia de Computação – CEFET-MG, 2024.