

Integração e séries

Kayky Moreira Praxedes

Janeiro 2026

1 Integrais

1.1 Primitivas

São o processo oposto das derivadas, de modo que, F é primitiva de f , se:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + c, \text{ em que } c \text{ é constante que é perdida na derivada.}$$

$$\frac{d}{dx} [2x + 4] = 2 \Leftrightarrow \int 2 dx = 2x + c. \text{ Para a mesma função, basta assumir } c = 4 \Rightarrow 2x + 4$$

Toda função contínua em um intervalo possui uma primitiva nesse espaço.

Primitivas comuns:

Realizando o processo inverso do cálculo da derivada:

- $\int a dx = ax + c.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
- $\int \cos x dx = \sin x + c.$
- $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c \Rightarrow \int e^x dx = e^x + c.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \Rightarrow \int \frac{1}{x \ln a} dx = \frac{\ln|x|}{\ln a} + c = \log_a |x| + c.$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$

Propriedades:

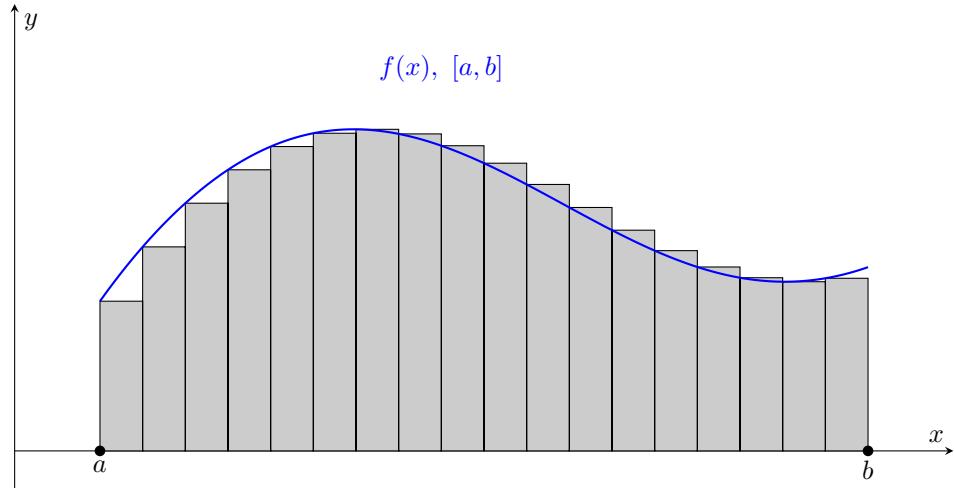
- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$
- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Não existe uma regra da cadeia, regra do produto ou regra do quociente para a resolução de primitivas, fazendo-se necessário o uso de métodos mais refinados para resolver integrais de maior complexidade.

1.2 Integrais definidas

As integrais são ferramentas que permitem calcular a área do gráfico acima e abaixo do eixo x no intervalo $a \leq x \leq b$ (áreas positivas e negativas, respectivamente). Essa lógica vem da aproximação da área através da soma de retângulos de lados Δx e altura $f(x_i)$, ficando:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x, \text{ de modo que: } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$



Teorema fundamental do cálculo:

Relaciona integrais definidas e primitivas:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

A dedução do teorema encontra-se no apêndice.

Integrais impróprias:

Integrais cujos limites de integração são infinitos:

- $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a)$
- $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[\lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$

Ou integrais de funções descontínuas em certos pontos dentro do intervalo $[a, b]$:

- $\int_a^b f(x) dx, \quad c \in [a, b] \text{ e } f(c) \neq \text{definido} = \lim_{k_1 \rightarrow c^-} \int_a^{k_1} f(x) dx + \lim_{k_2 \rightarrow c^+} \int_{k_2}^b f(x) dx = \lim_{k_1 \rightarrow c^1} F(k_1) - F(a) + F(b) - \lim_{k_2 \rightarrow c^+} F(k_2)$

1.3 Métodos de integração

Substituição de variáveis:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \Rightarrow \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx, \text{ se } u = x^2 + 1 \text{ e } du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}: \int x\sqrt{x^2+1} dx = \int \frac{x\sqrt{u}}{2x} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du =$$

$$\frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + c \Rightarrow \int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + c$$

Integral por partes:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \Rightarrow$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \Rightarrow \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

De maneira simplificada, considerando $f(x) = u$, $f'(x) = du$, $g(x) = v$ e $g'(x) = dv$:

$$\int u dv = uv - \int v du$$

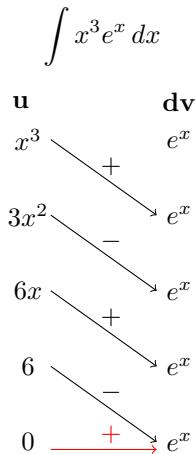
$$\int x^3 e^x dx, \text{ se } u = x^3, du = 3x^2, dv = e^x \text{ e } v = e^x: \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

$$\text{Se } u = x^2, du = 2x, dv = e^x \text{ e } v = e^x: \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left(x^2 e^x - \int 2x e^x dx \right) = x^3 e^x - 3 \left(x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right)$$

$$\text{Se } u = x, du = 1, dv = e^x \text{ e } v = e^x: \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left(x^2 e^x - 2 \left(x e^x - \int e^x dx \right) \right) \Rightarrow$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

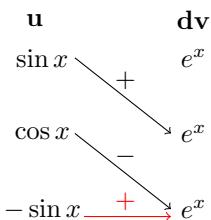
Um método eficiente de resolver uma integral por partes é montando duas colunas, uma com o valor que vai ser o u e outra o dv , de modo que na linha abaixo são colocados o du e o v . Alterna-se a ligação do u com o v em + e - até $u = 0$.



$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + \int 0 \cdot e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

Nesse caso a integral era por partes chegava em uma integral conhecida, mas ela pode ser periódica. Quando obtém-se um termo repetido, ele é usado para simplificar a equação.

$$\int e^x \sin x dx$$



$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$$

Integrais trigonométricas:

1.

$$\int \sin^m x \cos x \, dx, \text{ ou } \int \cos^m x \sin x \, dx$$

Substituir: $u = \sin x$ e $du = \cos x \, dx$ ou $u = \cos x$ e $-\sin x \, dx$.

2.

$$\int \sin^m x \, dx, \text{ ou } \int \cos^m x \, dx \quad m \% 2 = 0$$

Substituir: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$ ou $\cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$

3.

$$\int \sin^m x \, dx, \text{ ou } \int \cos^m x \, dx \quad m \% 2 = 1$$

Usar a propriedade: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, e transformar a integral em uma do caso 1.

4.

$$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

Usar a propriedade: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, e transformar a integral em uma do caso 1 ou 2.

5.

$$\int \sin(ax) \sin(bx) \, dx, \text{ ou } \int \sin(ax) \cos(bx) \, dx, \text{ ou } \int \cos(ax) \cos(bx) \, dx$$

Usar as propriedades:

- $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$
- $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$

6.

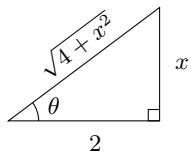
$$\int \tan^m(x) \, dx, \text{ ou } \int \sec^n(x) \, dx$$

Usar a propriedade: $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$, e/ou realizar integral por partes, a depender do caso.

Substituição trigonométrica:

Com $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, e $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$, utiliza-se um triângulo retângulo com um ângulo θ , tal que $f(x)$ e x são elementos do triângulo.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$



Analisando o triângulo:

$$\tan \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \tan \theta \quad dx = 2 \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{\sqrt{4+4 \tan^2 \theta}} d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{\sqrt{4(1+\tan^2 \theta)}} d\theta =$$

$$\int \frac{2 \sec^2 \theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta}} d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{2|\sec \theta|} d\theta, \text{ como } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right), D_\theta = [-\pi/2, \pi/2]$$

Como, nesse intervalo, para todo θ , $\sec \theta \geq 0$, então $|\sec \theta| = \sec \theta$. Logo:

$$\int \frac{\sec^2 \theta}{|\sec \theta|} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \int \sec \theta \frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

$$\text{Se } u = \sec \theta + \tan \theta \text{ e } du = \sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta} :$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{u} \frac{1}{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta} du = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + c \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + c$$

Frações parciais:

Trata-se de separar uma fração com denominador polinomial em uma soma de frações mais simples.

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx = \int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} dx$$

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) \Rightarrow (A+B-5)x + (-3A+B+3) = 0$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ -3A+B=-3 \end{cases} \Rightarrow A=2, B=3 \Rightarrow \int \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} dx = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-3| + c$$

Caso o polinômio de $f(x)$ seja de maior grau do que o de $g(x)$, fatora-se:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = m(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$

Caso o denominador seja um quadrado perfeito, como:

$$\frac{2x}{(x+1)^2}, \text{ tem-se que: } \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

Caso o denominador seja um polinômio irredutível, como:

$$\frac{7x+2}{(x+2)(x^2+5)}, \text{ tem-se que: } \frac{7x+2}{(x+2)(x^2+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+c}{x^2+5}$$

2 Séries infinitas

Uma sequência infinita $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S_n$

Se a série converge, $S_n \rightarrow L$, $L \in \mathbb{R}$, se a série diverge, $S_n \rightarrow \pm\infty$.

Propriedades:

Considerando $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$, A e $B \in \mathbb{R}$:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (k a_n) = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k A$
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge $\forall k \geq 1$
- $\sum (a_n + b_n)$ pode convergir mesmo quando $\sum a_n$ e $\sum b_n$ divergem:

$$\sum a_n = 1 + 1 + 1 + \dots, \sum b_n = -1 - 1 - 1 - \dots \Rightarrow \sum (a_n + b_n) = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

2.1 Séries geométricas

São séries no modelo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^{n-1} = S_n$$

Se a série converge, $S_n \rightarrow \frac{a}{1-r}$, caso contrario, ela pode divergir ($S_n \rightarrow \pm\infty$) ou então S_n pode não existir.

A dedução do valor de S_n e a explicação dos casos encontra-se no apêndice.

Série telescópica:

Trata-se de uma série cujas somas dos elementos admitem uma simplificação significativa através de cancelamentos sucessivos entre termos consecutivos, como $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+k})$, $k \geq 1$.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right] = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Como $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1$.

2.2 Testes de convergência

Testes gerais:

- **Teste do n-ésimo termo** ($\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = k$):
 - $k \neq 0$: a série **diverge** (já que a soma sempre cresceria).
 - $k = 0$: o teste é **inconclusivo**.

Sobre as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2n+4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x+4} = \frac{1}{2} \text{ diverge} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ inconclusivo (diverge)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ inconclusivo (converge)}$$

- **Séries geométricas** $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} \right)$:

- $|r| < 1$: a série **converge**.
- $r \geq 1$: a série **diverge**.
- $r \leq -1$: a soma não para em um valor fixo ($\#S_n$).

Casos explicados na seção de séries geométricas.

- **Séries P** $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \right)$:

- $p > 1$: a série **converge**.
- $p \leq 1$: a série **diverge**.

Prova pelo teste da integral.

Testes para termos com sinais iguais:

- **Teste da integral** $\left(\int_1^{\infty} a_n dn = k \right)$:

- $k \neq \pm\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
- $k = \pm\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

A prova do teste da integral encontra-se no apêndice.

- **Teste da comparação:**

Sejam $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ séries de modo que $b_n \leq a_n \leq c_n$ para todo $n > k$:

- $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ converge: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
- $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

- **Teste da comparação no limite:**

Sejam $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ séries de modo que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n > k$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$

- $c \in \mathbb{R}^*$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **tem o mesmo comportamento** (os dois convergem ou divergem).
- $c = 0$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
- $c = \pm\infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.

- **Teste da razão** $\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p \right)$:

- $p < 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.

- $p > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.
- $p = 1$: o teste é **inconclusivo**.

A prova do teste da razão encontra-se no apêndice.

- **Teste da raiz** ($\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$):

- $p < 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
- $p > 1$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.
- $p = 1$: o teste é **inconclusivo**.

A prova do teste da raiz encontra-se no apêndice.

Séries alternadas

$$u_n = |a_n| \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} u_n] = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \dots).$$

A série converge se:

- $u_n > u_{n+1}$
- $u_n \rightarrow 0$

Isso ocorre pois, pela primeira propriedade, a soma pode ser delimitada:

$$\begin{cases} |S_n| = u_1 + (u_3 - u_2) + (u_5 - u_4) + (u_7 - u_6) + \dots < u_1 \\ |S_n| = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \dots > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < |S_n| < u_1$$

Além disso, como pela segunda propriedade os valores vão variando cada vez menos à medida que $n \rightarrow \infty$, $\exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$.

Teste da convergência absoluta de uma série alternada:

Se $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, certamente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ também, já que $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

3 Séries de potência

São séries no modelo $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + (c_1(x-a)) + (c_2(x-a)^2) + \dots$, centradas em $x = a$ (casos comuns envolvem $x = 0$ por simplificar bastante as contas).

3.1 Convergência

Séries de potência estão sujeitas as mesmas regras e testes de convergência das séries infinitas, mas ao invés de se verificar se a série converge, descobre-se um raio de convergência (se ele existe) $S_n = f(x)$, $x \in [a, b]$.

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} (x-2)^{n-1} \right]$$

Sendo $r = -\frac{x-2}{2}$, onde, para convergir: $|r| < 1$:

$$\left| -\frac{x-2}{2} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x-2}{2} < 1-2 < x-2 < 2 \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow S_n = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{x-2}{2} \right)} = \frac{2}{2+x-2} = \frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^{n-1} (x-2)^{n-1} \right] = \frac{2}{x}, \quad 0 < x < 4$$

Teorema da derivação:

Tendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)(x-a)^{n-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

Teorema da integração:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \Rightarrow \int f(x) dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

3.2 Séries de Taylor e de Maclaurin

Séries de Taylor:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

Séries de Maclaurin:

Trata-se apenas de uma série de Taylor centrada em $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \dots$$

A dedução das séries de Taylor encontram-se no apêndice.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{\sin(0)}{0!} x^0 + \frac{\sin'(0)}{1!} x^1 + \frac{\sin''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \\ \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

3.3 Aplicações

Cálculo de limites:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots \right) \right) = \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(2 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{5!} + \dots \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2 \end{aligned}$$

Aproximações:

O quanto boa é a aproximação $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$ em $|x| < 0,5$?

Como $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$:

$$|\text{Erro}(x)| < \frac{x^4}{4!} \Rightarrow \text{Erro}(x) < \frac{x^4}{4!} \Rightarrow \text{Erro}(\pm 0,5) < \frac{(\pm 0,5)^4}{24} \Rightarrow \text{Erro}(\pm 0,5) < 0,0026$$

Resolução de integrais:

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ com erro} < 10^{-8} :$$

Os meios convencionais de resolução de integrais não conseguem solucionar a expressão, mas usando a série de Maclaurin de $\sin x$:

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{0.1} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx =$$

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^{0.1} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right]_0^{0.1} =$$

Primeiro termo (x): $0.1 = 1 \cdot 10^{-1}$

Segundo termo $\left(\frac{x^3}{3 \cdot 3!} \right)$: $\frac{(0.1)^3}{3 \cdot 3!} = 5.556 \cdot 10^{-5}$

Terceiro termo $\left(\frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right)$: $\frac{(0.1)^5}{5 \cdot 5!} = 1.667 \cdot 10^{-8}$

Quarto termo $\left(\frac{x^7}{7 \cdot 7!} \right)$: $\frac{(0.1)^7}{7 \cdot 7!} = 2.83 \cdot 10^{-12}$

O primeiro erro menor do que 10^{-8} é o quarto termo, portanto, a soma até o terceiro termo gera uma aproximação suficientemente precisa:

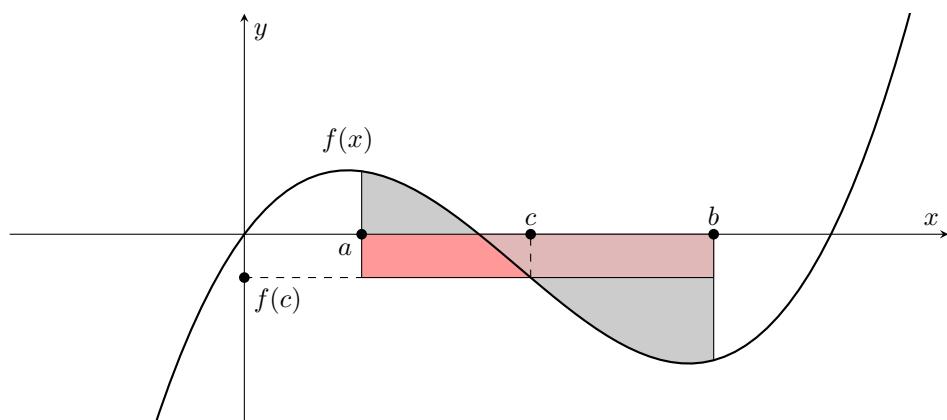
$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right]_0^{0.1} = 0.0999445$$

Apêndice A

Dedução do teorema fundamental do cálculo

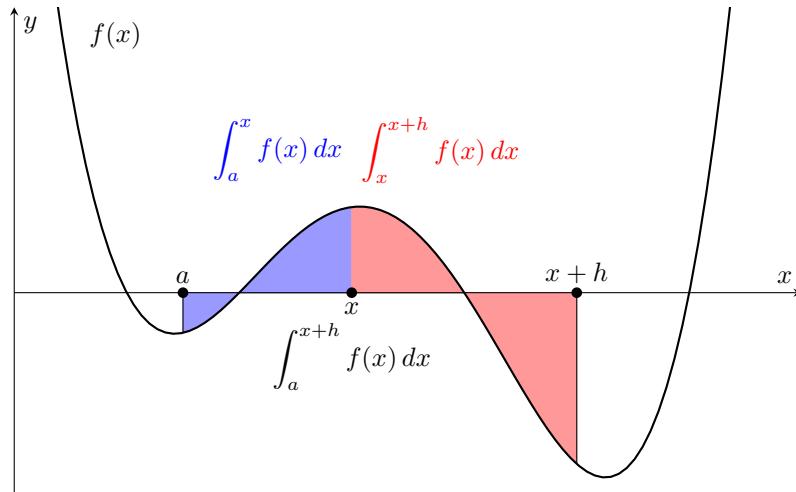
Teorema do valor médio para integrais:

Dada uma integral definida entre dois pontos a e b de uma f contínua, a área calculada pode ser igualada à um retângulo $f(c) \cdot (b - a)$, $c \in [a, b]$.



Definindo $G(x) = \int_a^x f(x) dx$ (pode ser entendida como a área a partir de a):

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx}{h}$$



Como visto pela imagem:

$$\int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+h} f(x) dx \Rightarrow G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x) dx}{h}$$

De acordo com o **teorema do valor médio para integrais**:

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = f(c) h, \quad c \in [x, x+h] \Rightarrow G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

Como quando $h \rightarrow 0$, o intervalo em que está contido c passa a ser $x \leq c \leq x \Rightarrow c = x$. Dessa maneira, $G'(x) = f(x)$.

Sendo $F(x)$ a primitiva de $f(x)$, tem-se que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) - G(x)] = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F(x) - G(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) - c$$

Como:

$$G(a) = \int_a^a f(x) dx = 0 \Rightarrow G(a) = F(a) - c \Rightarrow F(a) - c = 0 \Rightarrow c = F(a) \Rightarrow G(x) = F(x) - F(a)$$

Definindo um valor b qualquer onde $b \geq a$, tem-se: $G(b) = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

Soma de uma série geométrica

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = S_n \Rightarrow rS_n = ar + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \Rightarrow$$

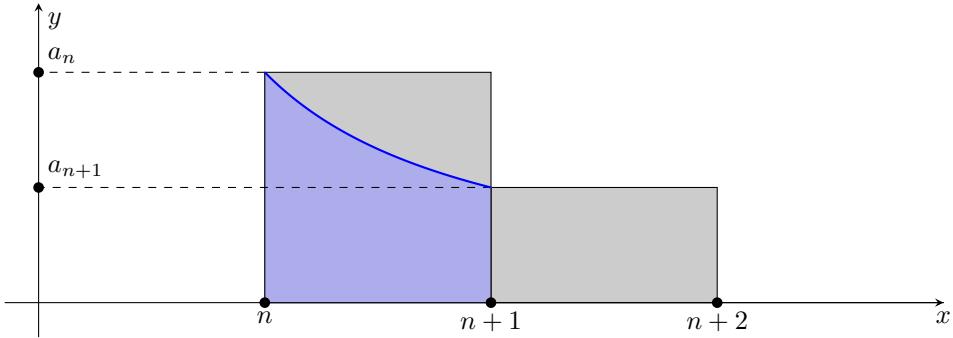
$$S_n - rS_n = a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + \cdots + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n \Rightarrow S_n(1-r) = a - ar^n \Rightarrow S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

- Se $|r| < 1 \Rightarrow r^n \rightarrow 0 \Rightarrow S_n = a \frac{1-r^n}{1-r} \Rightarrow S_n = \frac{a}{1-r}$
- Se $r \geq 1 \Rightarrow r^n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n \rightarrow \pm\infty$, a depender do sinal de a .
- Se $r \leq 1$, então a série vai se tornar periodicamente alternada, com $|a_i| \leq |a_{i+1}|$, tornando a soma indeterminada.

Prova do teste da integral

Relação entre a área em um somatório e uma integral:

Em uma função decrescente, definida por $f(i) \geq f(i+1)$, com $a_n = f(n)$, tem-se que $a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n$.



Expandindo essa mesma noção, tendo que vista que:

1. $a_{n+1} \geq \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx, a_{n+2} \geq \int_{n+2}^{n+3} f(x) dx, \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \int_1^{\infty} f(x) dx$
2. $a_{n+2} \leq \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx, a_{n+3} \leq \int_{n+2}^{n+3} f(x) dx, \dots \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} f(x) dx$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$:

$$f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Dessa maneira, vê-se que o somatório segue o mesmo comportamento da integral (sendo um ótimo meio de verificar a convergência ou não da série).

Se a função for crescente ou constante, então ela certamente irá divergir (fato constatado se testado pela integral).

Prova do teste da razão

Tendo a relação $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$ nos casos onde:

- $p < 1$:

A partir de um valor N , tal que, para todo $n \geq N$, existe um valor r , $p \leq r < 1$, onde $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \Rightarrow a_{n+1} \leq r a_n$.

Dessa maneira:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq r a_{n+1} \leq r^2 a_n \\ a_{n+3} &\leq r a_{n+2} \leq r^2 a_{n+1} \leq r^3 a_n \\ &\vdots \\ a_{n+k} &\leq r^k a_n \end{aligned}$$

A partir dessas relações, tem-se que:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} \leq r a_n + r^2 a_n + \dots + r^k a_n \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \leq a_n \sum_{i=1}^k r^i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \leq a_n \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k r^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leq a_n \sum_{i=1}^{\infty} r^i$$

Como $\sum_{i=1}^{\infty} r^i$ é uma série geométrica com $r < 1$ (converge) e $\sum_{i=1}^{n+1} a_i$ é um valor finito (não altera a convergência ou divergência da série), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

- $p > 1$:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ implica que, para algum N , $a_{n+1} > a_n$, $n \geq N$, formando um somatório de termos crescentes (diverge pelo **teste do n-ésimo termo**).

- $p = 1$:

Como para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$, mas pelo **teste da integral** a série diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ quando $p = 1$.

Prova do teste da raiz

Quando $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$:

- $p < 1$:

A partir de um valor N , tal que, para todo $n \geq N$, existe um valor r , $p \leq r < 1$, onde $\sqrt[n]{a_n} \leq r \Rightarrow a_n \leq r^n$:

$$a_{n+1} \leq r^{n+1}$$

$$a_{n+2} \leq r^{n+2}$$

$$a_{n+3} \leq r^{n+3}$$

⋮

$$a_{n+k} \leq r^{n+k}$$

Tendo isso em vista:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} \leq r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \dots + r^{n+k} \Rightarrow \sum_{i=n}^{n+k} a_i \leq \sum_{i=n}^{n+k} r^i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{n+k} a_i \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{n+k} r^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} r^i, \quad r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

- $p > 1$:

A partir de um valor N , tal que, para todo $n \geq N$, existe um valor r , $1 < r \leq p$, onde $\sqrt[n]{a_n} \geq r \Rightarrow a_n \geq r^n$.

Fazendo o mesmo somatório:

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \geq \sum_{i=n}^{\infty} r^i, \quad r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

- $p = 1$:

Como para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, mas pelo **teste da integral** a série diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$, mas pelo **teste da integral** a série converge, esse teste é inconclusivo quando $p = 1$.

Dedução das séries de Taylor

Tendo $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - a)^n$, como:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n + \dots \Rightarrow f(a) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - a) + 3a_3(x - a)^2 + \cdots + n a_n(x - a)^{n-1} + \dots \Rightarrow f'(a) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x - a) + \cdots + n(n - 1) a_n(x - a)^{n-2} + \dots \Rightarrow f''(a) = 2 a_2$$

⋮

$$f^{(n)}(x) = n! a_n + \dots \Rightarrow f^{(n)}(a) = n! a_n$$

Algebricamente, tem-se que $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$, portanto, uma função pode ser representada por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)(x - a)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(a)(x - a)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (\text{série de Taylor de } f(x))$$

Fontes

1. STEWART, James. Cálculo - Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
2. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
3. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo Volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
4. LIMA, Elon Lages. Análise Real volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
5. TAKHE. Cálculo 1: Aulas e Exercícios Resolvidos. [YouTube], 2023. Disponível em: https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1apl5ib_uL7UkP4fDwy4m. Acesso em: 10 set. 2025.
6. BARROS, Tatiana Leal. Disciplina: Cálculo com Funções de Uma Variável Real. Curso de graduação em Engenharia de Computação – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2024.
7. CAMARGO JUNIOR, Fausto de. Disciplina: Integração e séries. Curso de graduação em Engenharia de Computação – CEFET-MG, 2024.