

# Integração e séries

Kayky Moreira Praxedes

Janeiro 2026

## 1 Integrais

### 1.1 Primitivas

São o processo oposto das derivadas, de modo que,  $F$  é primitiva de  $f$ , se:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + c, \text{ em que } c \text{ é constante que é perdida na derivada.}$$

$$\frac{d}{dx} [2x + 4] = 2 \Leftrightarrow \int 2 dx = 2x + c. \text{ Para a mesma função, basta assumir } c = 4 \Rightarrow 2x + 4$$

Toda função contínua em um intervalo possui uma primitiva nesse espaço.

#### Primitivas comuns:

Realizando o processo inverso do cálculo da derivada:

- $\int a dx = ax + c.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
- $\int \cos x dx = \sin x + c.$
- $\int a^x dx, a > 0, a \neq 1 = \frac{a^x}{\ln a} + c \Rightarrow \int e^x dx = e^x + c.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \Rightarrow \int \frac{1}{x \ln a} dx, a > 0, a \neq 1 = \frac{\ln|x|}{\ln a} + c = \log_a |x| + c.$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$

#### Propriedades:

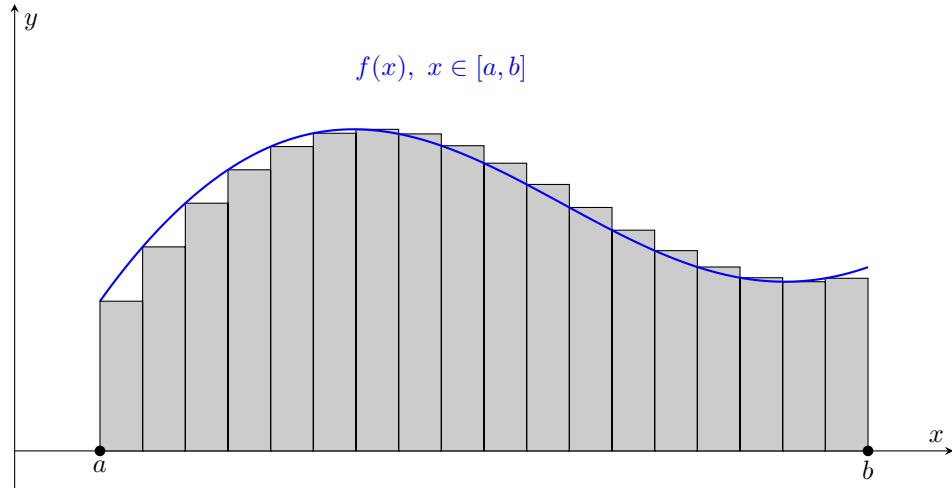
- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$
- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Não existe uma regra da cadeia, regra do produto ou regra do quociente para a resolução de primitivas, fazendo-se necessário o uso de métodos mais refinados para resolver integrais de maior complexidade.

## 1.2 Integrais definidas

As integrais são ferramentas que permitem calcular a área do gráfico acima e abaixo do eixo  $x$  no intervalo  $a \leq x \leq b$  (áreas positivas e negativas, respectivamente). Essa lógica vem da aproximação da área através da soma de retângulos de lados  $\Delta x$  e altura  $f(x_i)$ , ficando:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x, \text{ de modo que: } A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x) dx$$



### Teorema fundamental do cálculo:

Relaciona integrais definidas e primitivas:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

A dedução do teorema encontra-se no apêndice.

### Integrais impróprias:

Integrais cujos limites de integração são infinitos:

- $\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - F(a)$
- $\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$
- $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left[ \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \right] = \lim_{b \rightarrow \infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$

Ou integrais de funções descontínuas em certos pontos dentro do intervalo  $[a, b]$ :

- $\int_a^b f(x) dx, \quad c \in [a, b] \text{ e } f(c) \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$   $= \lim_{k_1 \rightarrow c^-} \int_a^{k_1} f(x) dx + \lim_{k_2 \rightarrow c^+} \int_{k_2}^b f(x) dx = \lim_{k_1 \rightarrow c^1} F(k_1) - F(a) + F(b) - \lim_{k_2 \rightarrow c^+} F(k_2)$

## 1.3 Métodos de integração

### Substituição de variáveis:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \Rightarrow \int f'(g(x))g'(x) dx = f(g(x)) + C$$

$$\int x\sqrt{x^2+1} dx, \text{ se } u = x^2 + 1 \text{ e } du = 2x dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}: \int x\sqrt{x^2+1} dx = \int \frac{x\sqrt{u}}{2x} du = \frac{1}{2} \int u^{1/2} du =$$

$$\frac{1}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + c \Rightarrow \int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{3} + c$$

**Integral por partes:**

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \int \frac{d}{dx}[f(x)g(x)] dx = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \Rightarrow$$

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx \Rightarrow \int f(x)g'(x) dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x) dx$$

De maneira simplificada, considerando  $f(x) = u$ ,  $f'(x) = du$ ,  $g(x) = v$  e  $g'(x) = dv$ :

$$\int u dv = uv - \int v du$$

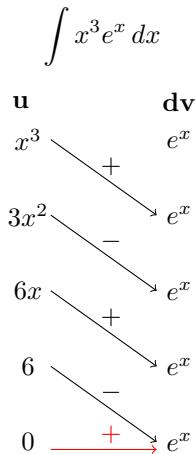
$$\int x^3 e^x dx, \text{ se } u = x^3, du = 3x^2, dv = e^x \text{ e } v = e^x: \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - \int 3x^2 e^x dx = x^3 e^x - 3 \int x^2 e^x dx$$

$$\text{Se } u = x^2, du = 2x, dv = e^x \text{ e } v = e^x: \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left( x^2 e^x - \int 2x e^x dx \right) = x^3 e^x - 3 \left( x^2 e^x - 2 \int x e^x dx \right)$$

$$\text{Se } u = x, du = 1, dv = e^x \text{ e } v = e^x: \int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3 \left( x^2 e^x - 2 \left( x e^x - \int e^x dx \right) \right) \Rightarrow$$

$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + c = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

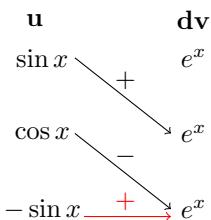
Um método eficiente de resolver uma integral por partes é montando duas colunas, uma com o valor que vai ser o  $u$  e outra o  $dv$ , de modo que na linha abaixo são colocados o  $du$  e o  $v$ . Alterna-se a ligação do  $u$  com o  $v$  em + e - até  $u = 0$ .



$$\int x^3 e^x dx = x^3 e^x - 3x^2 e^x + 6x e^x - 6e^x + \int 0 \cdot e^x dx = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c$$

Nesse caso a integral era por partes chegava em uma integral conhecida, mas ela pode ser periódica. Quando obtém-se um termo repetido, ele é usado para simplificar a equação.

$$\int e^x \sin x dx$$



$$\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \Rightarrow 2 \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$$

### Integrais trigonométricas:

1.

$$\int \sin^m x \cos x dx, \text{ ou } \int \cos^m x \sin x dx$$

Substituir:  $u = \sin x$  e  $du = \cos x dx$  ou  $u = \cos x$  e  $-\sin x dx$ .

2.

$$\int \sin^m x dx, \text{ ou } \int \cos^m x dx \quad m \% 2 = 0$$

$$\text{Substituir: } \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \text{ ou } \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

3.

$$\int \sin^m x dx, \text{ ou } \int \cos^m x dx \quad m \% 2 = 1$$

Usar a propriedade:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , e transformar a integral em uma do caso 1.

4.

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

Usar a propriedade:  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ , e transformar a integral em uma do caso 1 ou 2.

5.

$$\int \sin(ax) \sin(bx) dx, \text{ ou } \int \sin(ax) \cos(bx) dx, \text{ ou } \int \cos(ax) \cos(bx) dx$$

Usar as propriedades:

- $\sin(a) \sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) - \cos(a + b))$
- $\cos(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a - b) + \cos(a + b))$
- $\sin(a) \cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a + b) + \sin(a - b))$

6.

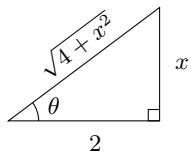
$$\int \tan^m(x) dx, \text{ ou } \int \sec^n(x) dx$$

Usar a propriedade:  $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$ , e/ou realizar integral por partes, a depender do caso.

### Substituição trigonométrica:

Com  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ , e  $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$ , utiliza-se um triângulo retângulo com um ângulo  $\theta$ , tal que  $f(x)$  e  $x$  são elementos do triângulo.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$



Analisando o triângulo:

$$\tan \theta = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2 \tan \theta \quad dx = 2 \sec^2 \theta d\theta \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{\sqrt{4+4 \tan^2 \theta}} d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{\sqrt{4(1+\tan^2 \theta)}} d\theta =$$

$$\int \frac{2 \sec^2 \theta}{\sqrt{4 \sec^2 \theta}} d\theta = \int \frac{2 \sec^2 \theta}{2|\sec \theta|} d\theta, \text{ como } \theta = \tan^{-1} \left( \frac{x}{2} \right), D_\theta = [-\pi/2, \pi/2]$$

Como, nesse intervalo, para todo  $\theta$ ,  $\sec \theta \geq 0$ , então  $|\sec \theta| = \sec \theta$ . Logo:

$$\int \frac{\sec^2 \theta}{|\sec \theta|} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta}{\sec \theta} d\theta = \int \sec \theta d\theta = \int \sec \theta \frac{\sec \theta + \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta = \int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{\sec \theta + \tan \theta} d\theta$$

$$\text{Se } u = \sec \theta + \tan \theta \text{ e } du = \sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta} :$$

$$\int \frac{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta}{u} \frac{1}{\sec^2 \theta + \sec \theta \tan \theta} du = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + c = \ln |\sec \theta + \tan \theta| + c = \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + c \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln \left| \frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2} \right| + c$$

### Frações parciais:

Trata-se de separar uma fração com denominador polinomial em uma soma de frações mais simples.

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3} dx = \int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)} dx = \int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3} dx$$

$$5x-3 = A(x-3) + B(x+1) \Rightarrow (A+B-5)x + (-3A+B+3) = 0$$

$$\begin{cases} A+B=5 \\ -3A+B=-3 \end{cases} \Rightarrow A=2, B=3 \Rightarrow \int \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3} dx = 2 \ln|x+1| + 3 \ln|x-3| + c$$

Caso o polinômio de  $f(x)$  seja de maior grau do que o de  $g(x)$ , fatora-se:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = m(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$

Caso o denominador seja um quadrado perfeito, como:

$$\frac{2x}{(x+1)^2}, \text{ tem-se que: } \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

Caso o denominador seja um polinômio irredutível, como:

$$\frac{7x+2}{(x+2)(x^2+5)}, \text{ tem-se que: } \frac{7x+2}{(x+2)(x^2+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+c}{x^2+5}$$

## 2 Séries

### 2.1 Séries finitas

Tendo  $a_n = f(n)$ , trata-se de uma sequência finita:  $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = S_n$ ,  $S_n \in \mathbb{R}$ .

### 2.2 Séries infinitas

Uma sequência infinita:  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ .

Se a série converge,  $S \in \mathbb{R}$ , se a série diverge,  $S \rightarrow \pm\infty$ .

### Propriedades:

Considerando  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = B$ ,  $A$  e  $B \in \mathbb{R}$ :

- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n = A \pm B$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (k a_n) = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n = k A$
- Se  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge  $\Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n$  converge  $\forall k \geq 1$
- $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$  pode convergir mesmo quando  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$  divergem:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 1 + 1 + 1 + \dots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = -1 - 1 - 1 - \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = (1 - 1) + (1 - 1) + (1 - 1) + \dots = 0$$

## 2.3 Séries geométricas

São séries no modelo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a r^{n-1} = a + a r + a r^2 + \dots + a r^{n-1} = S$$

Se a série converge,  $S = \frac{a}{1-r}$ , caso contrario, ela pode divergir ( $S \rightarrow \pm\infty$ ) ou então  $S$  pode não existir.

A dedução do valor de  $S$  e a explicação dos casos encontra-se no apêndice.

### Série telescópica:

Trata-se de uma série cujas somas dos elementos admitem uma simplificação significativa através de cancelamentos sucessivos entre termos consecutivos, como  $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n - a_{n+k})$ ,  $k \geq 1$ .

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)} &= \sum_{i=1}^n \left[ \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} \right] = \left( 1 - \frac{1}{2} \right) + \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) = \\ &1 + \left( -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) + \left( -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \dots + \left( -\frac{1}{n} + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

Como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ .

## 2.4 Testes de convergência

### Testes gerais:

- **Teste do n-ésimo termo**  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = k \right)$ :

- $k \neq 0$ : a série **diverge** (já que a soma sempre cresceria).
- $k = 0$ : o teste é **inconclusivo**.

Sobre as séries  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-2}{2n+4}$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$  e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-2}{2x+4} = \frac{1}{2} \text{ diverge} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ inconclusivo (diverge)} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0 \text{ inconclusivo (converge)}$$

- Séries geométricas  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}\right)$ :
  - $|r| < 1$ : a série **converge**.
  - $r \geq 1$ : a série **diverge**.
  - $r \leq -1$ : a soma não para em um valor fixo ( $\notin S$ ).

Casos explicados na seção de séries geométricas.

- Séries P  $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right)$ :
  - $p > 1$ : a série **converge**.
  - $p \leq 1$ : a série **diverge**.

Prova pelo teste da integral.

**Testes para termos com sinais iguais:**

- Teste da integral  $\left(\int_1^{\infty} f(n) dn = k\right)$ :
  - $k \in \mathbb{R}$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **converge**.
  - $k = \pm\infty$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  **diverge**.

A prova do teste da integral encontra-se no apêndice.

- Teste da comparação:

- Sejam  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ ,  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  e  $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$  séries de modo que  $b_n \leq a_n \leq c_n$  para todo  $n \geq k$ :
- $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$  converge:  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  **converge**.
  - $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  diverge:  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  **diverge**.

- Teste da comparação no limite:

- Sejam  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  séries de modo que  $a_n > 0$  e  $b_n > 0$  para todo  $n \geq k$ , tem-se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$
- $c \in \mathbb{R}^*$ :  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  e  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  **tem o mesmo comportamento** (os dois convergem ou divergem).
  - $c = 0$  e  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  converge:  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  **converge**.
  - $c = \pm\infty$  e  $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$  diverge:  $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$  **diverge**.

- **Teste da razão**  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p \right)$ :

–  $p < 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

–  $p > 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

–  $p = 1$ : o teste é inconclusivo.

A prova do teste da razão encontra-se no apêndice.

- **Teste da raiz**  $\left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p \right)$ :

–  $p < 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

–  $p > 1$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  diverge.

–  $p = 1$ : o teste é inconclusivo.

A prova do teste da raiz encontra-se no apêndice.

## Séries alternadas

Tendo  $u_n = |a_n|$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \pm \sum_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1} u_n] = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \dots)$ .

A série converge se:

- $u_n > u_{n+1}$
- $u_n \rightarrow 0$

Isso ocorre pois, pela primeira propriedade, a soma pode ser delimitada:

$$\begin{cases} |S| = u_1 + (u_3 - u_2) + (u_5 - u_4) + (u_7 - u_6) + \dots < u_1 \\ |S| = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \dots > 0 \end{cases} \Rightarrow 0 < |S| < u_1$$

Além disso, como pela segunda propriedade os valores vão variando cada vez menos à medida que  $n \rightarrow \infty$ , a soma converge em um valor  $S$ .

## Teste da convergência absoluta de uma série alternada:

Se  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$  converge, certamente  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  também, já que  $\sum_{n=1}^{\infty} u_n \geq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ .

## 3 Séries de potência

São séries no modelo  $\sum_{n=0}^{\infty} [c_n (x - a)^n] = c_0 + c_1 (x - a) + c_2 (x - a)^2 + \dots$ , centradas em  $x = a$ .

Casos comuns envolvem  $x = 0$   $\left( \sum_{n=0}^{\infty} [c_n x^n] = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \right)$  por simplificar bastante as contas.

### 3.1 Convergência

Séries de potência estão sujeitas as mesmas regras e testes de convergência das séries infinitas, mas ao invés de se verificar se a série converge, descobre-se um raio de convergência (se ele existe)  $S_n = f(x)$ ,  $x \in [a, b]$ .

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} (x-2)^{n-1} \right]$$

Sendo  $r = -\frac{x-2}{2}$ , onde, para convergir:  $|r| < 1$ :

$$\left| -\frac{x-2}{2} \right| < 1 \Rightarrow -1 < \frac{x-2}{2} < 1-2 < x-2 < 2 \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow S = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1 - \left( -\frac{x-2}{2} \right)} = \frac{2}{2+x-2} = \frac{2}{x} \Rightarrow$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[ \left( -\frac{1}{2} \right)^{n-1} (x-2)^{n-1} \right] = \frac{2}{x}, \quad 0 < x < 4$$

**Teorema da derivação:**

Tendo  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n (x-a)^{n-1} \\ f''(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n n(n-1)(x-a)^{n-2} \\ &\vdots \\ f^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{n!}{(n-k)!} (x-a)^{n-k}, \quad 0 \leq k \leq n \end{aligned}$$

**Teorema da integração:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \Rightarrow \int f(x) dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n (x-a)^{n+1}}{n+1}$$

### 3.2 Séries de Taylor e de Maclaurin

**Séries de Taylor:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

**Séries de Maclaurin:**

Trata-se apenas de uma série de Taylor centrada em  $x = 0$ :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)x^3}{3!} + \dots$$

A dedução das séries de Taylor encontram-se no apêndice.

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \frac{\sin(0)}{0!} x^0 + \frac{\sin'(0)}{1!} x^1 + \frac{\sin''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!} x^n = \\ \sin(0) + \cos(0)x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \end{aligned}$$

### 3.3 Aplicações

Cálculo de limites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x)^n}{n!} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( 1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots - \left( 1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots \right) \right) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left( 2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left( 2 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{5!} + \dots \right) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$$

Aproximações:

O quanto boa é a aproximação  $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2}$  em  $|x| < 0,5$ ?

Como  $\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$ :

$$|\text{Erro}(x)| < \frac{x^4}{4!} \Rightarrow \text{Erro}(x) < \frac{x^4}{4!} \Rightarrow \text{Erro}(\pm 0,5) < \frac{(\pm 0,5)^4}{24} \Rightarrow \text{Erro}(\pm 0,5) < 0,0026$$

Resolução de integrais:

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ com erro} < 10^{-8} :$$

Os meios convencionais de resolução de integrais não conseguem solucionar a expressão, mas usando a série de Maclaurin de  $\sin x$ :

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{0.1} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx =$$

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{x} \left( x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^{0.1} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots dx = \left[ x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right]_0^{0.1} =$$

Primeiro termo ( $x$ ):  $0.1 = 1 \cdot 10^{-1}$

$$\text{Segundo termo } \left( \frac{x^3}{3 \cdot 3!} \right): \quad \frac{(0.1)^3}{3 \cdot 3!} = 5.556 \cdot 10^{-5}$$

$$\text{Terceiro termo } \left( \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right): \quad \frac{(0.1)^5}{5 \cdot 5!} = 1.667 \cdot 10^{-8}$$

$$\text{Quarto termo } \left( \frac{x^7}{7 \cdot 7!} \right): \quad \frac{(0.1)^7}{7 \cdot 7!} = 2.83 \cdot 10^{-12}$$

$$\text{Quinto termo } \left( \frac{x^9}{9 \cdot 9!} \right): \quad \frac{(0.1)^9}{9 \cdot 9!} = 5.556 \cdot 10^{-16}$$

$$\text{Sexto termo } \left( \frac{x^{11}}{11 \cdot 11!} \right): \quad \frac{(0.1)^{11}}{11 \cdot 11!} = 1.667 \cdot 10^{-20}$$

O primeiro erro menor do que  $10^{-8}$  é o quarto termo, portanto, a soma até o terceiro termo gera uma aproximação suficientemente precisa:

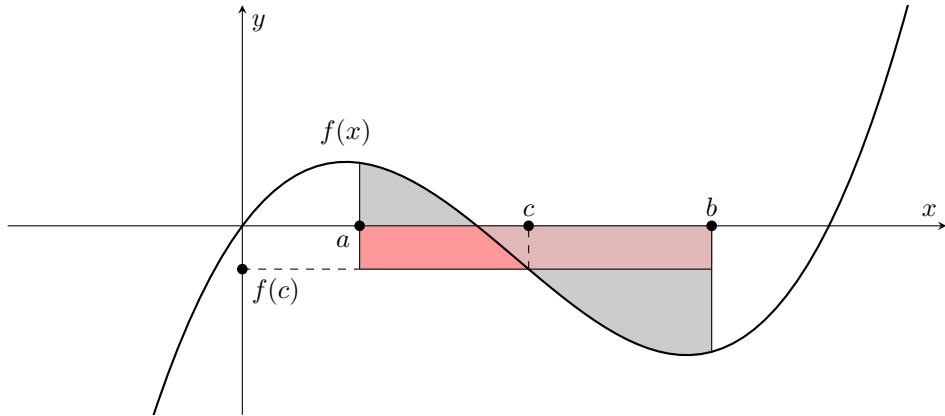
$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx = \left[ x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right]_0^{0.1} = 0.0999445$$

## Apêndice A

### Dedução do teorema fundamental do cálculo

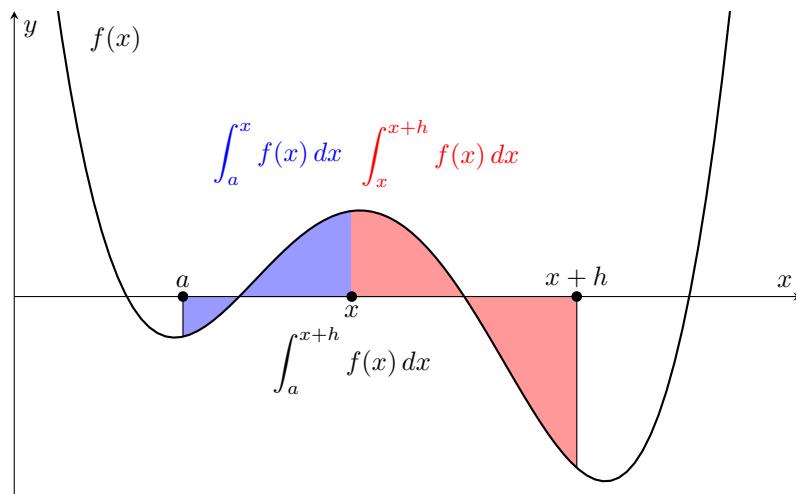
#### Teorema do valor médio para integrais:

Dada uma integral definida entre dois pontos  $a$  e  $b$  de uma  $f$  contínua, a área calculada pode ser igualada à um retângulo  $f(c) \cdot (b - a)$ ,  $c \in [a, b]$ .



Definindo  $G(x) = \int_a^x f(x) dx$  (pode ser entendida como a área a partir de  $a$ ):

$$G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx}{h}$$



Como visto pela imagem:

$$\int_a^{x+h} f(x) dx - \int_a^x f(x) dx = \int_x^{x+h} f(x) dx \Rightarrow G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x) dx}{h}$$

De acordo com o **teorema do valor médio para integrais**:

$$\int_x^{x+h} f(x) dx = f(c) h, \quad c \in [x, x+h] \Rightarrow G'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c) h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(c)$$

Como quando  $h \rightarrow 0$ , o intervalo em que está contido  $c$  passa a ser  $x \leq c \leq x \Rightarrow c = x$ . Dessa maneira,  $G'(x) = f(x)$ .

Sendo  $F(x)$  a primitiva de  $f(x)$ , tem-se que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) - G(x)] = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F(x) - G(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) - c$$

Como:

$$G(a) = \int_a^a f(x) dx = 0 \Rightarrow G(a) = F(a) - c \Rightarrow F(a) - c = 0 \Rightarrow c = F(a) \Rightarrow G(x) = F(x) - F(a)$$

Definindo um valor  $b$  qualquer onde  $b \geq a$ , tem-se:  $G(b) = F(b) - F(a) \Rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

### Soma de uma série geométrica

$$\sum_{i=1}^n ar^{i-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} = S_n \Rightarrow rS_n = ar + ar + ar^2 + \cdots + ar^n \Rightarrow S_n - rS_n = a + (ar - ar) + (ar^2 - ar^2) + \cdots + (ar^{n-1} - ar^{n-1}) - ar^n \Rightarrow S_n(1 - r) = a - ar^n \Rightarrow S_n = a \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

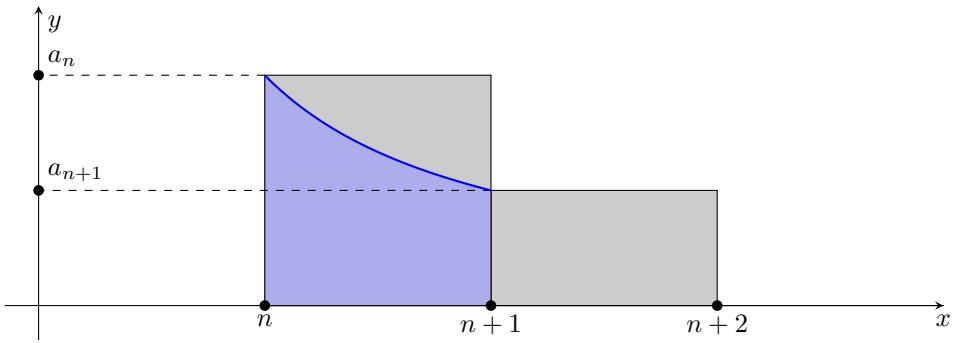
$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = S = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^n}{1 - r}$$

- Se  $|r| < 1 \Rightarrow r^n \rightarrow 0 \Rightarrow S = \frac{a}{1 - r}$
- Se  $r \geq 1 \Rightarrow r^n \rightarrow \infty \Rightarrow S_n \rightarrow \pm\infty$ , a depender do sinal de  $a$ .
- Se  $r \leq -1$ , então a série vai se tornar alternada, e como  $|a_i| \leq |a_{i+1}|$ , nunca parando em lugar nenhum.

### Prova do teste da integral

**Relação entre a área em um somatório e uma integral:**

Em uma função decrescente, definida por  $f(i) \geq f(i+1)$ , com  $a_n = f(n)$ , tem-se que  $a_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq a_n$ .



Expandindo essa mesma noção, tendo que vista que:

$$1. \quad a_{n+1} \geq \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx, \quad a_{n+2} \geq \int_{n+2}^{n+3} f(x) dx, \quad \dots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq \int_1^{\infty} f(x) dx$$

$$2. \quad a_{n+2} \leq \int_{n+1}^{n+2} f(x) dx, \quad a_{n+3} \leq \int_{n+2}^{n+3} f(x) dx, \quad \dots \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Como  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$ :

$$f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x) dx$$

Dessa maneira, vê-se que o somatório segue o mesmo comportamento da integral (sendo um ótimo meio de verificar a convergência ou não da série).

Se a função for crescente ou constante, então ela certamente irá divergir (fato constatado se testado pela integral).

### Prova do teste da razão

Tendo a relação  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$  nos casos onde:

- $p < 1$ :

A partir de um valor  $N$ , tal que, para todo  $n \geq N$ , existe um valor  $r$ ,  $p \leq r < 1$ , onde  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \Rightarrow a_{n+1} \leq r a_n$ .

Dessa maneira:

$$\begin{aligned} a_{n+2} &\leq r a_{n+1} \leq r^2 a_n \\ a_{n+3} &\leq r a_{n+2} \leq r^2 a_{n+1} \leq r^3 a_n \\ &\vdots \\ a_{n+k} &\leq r^k a_n \end{aligned}$$

A partir dessas relações, tem-se que:

$$\begin{aligned} a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+k} &\leq r a_n + r^2 a_n + \dots + r^k a_n \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \leq a_n \sum_{i=1}^k r^i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \leq a_n \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k r^i \Rightarrow \\ &\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leq a_n \sum_{i=1}^{\infty} r^i \end{aligned}$$

Como  $\sum_{i=1}^{\infty} r^i$  é uma série geométrica com  $r < 1$  (converge) e  $\sum_{i=1}^{n+1} a_i$  é um valor finito (não altera a convergência ou divergência da série),  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  converge.

- $p > 1$ :

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$  implica que, para algum  $N$ ,  $a_{n+1} > a_n$ ,  $n \geq N$ , formando um somatório de termos crescentes (diverge pelo **teste do n-ésimo termo**).

- $p = 1$ :

Como para  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = 1$ , mas pelo **teste da integral** a série diverge e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2}{n^2} = 1$ , mas pelo **teste da integral** a série converge, esse teste é inconclusivo quando  $p = 1$ .

## Prova do teste da raiz

Quando  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = p$ :

- $p < 1$ :

A partir de um valor  $N$ , tal que, para todo  $n \geq N$ , existe um valor  $r$ ,  $p \leq r < 1$ , onde  $\sqrt[n]{a_n} \leq r \Rightarrow a_n \leq r^n$ :

$$a_{n+1} \leq r^{n+1}$$

$$a_{n+2} \leq r^{n+2}$$

$$a_{n+3} \leq r^{n+3}$$

⋮

$$a_{n+k} \leq r^{n+k}$$

Tendo isso em vista:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} \leq r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \cdots + r^{n+k} \Rightarrow \sum_{i=n}^{n+k} a_i \leq \sum_{i=n}^{n+k} r^i \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{n+k} a_i \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{i=n}^{n+k} r^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} r^i, \quad r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

- $p > 1$ :

A partir de um valor  $N$ , tal que, para todo  $n \geq N$ , existe um valor  $r$ ,  $1 < r \leq p$ , onde  $\sqrt[n]{a_n} \geq r \Rightarrow a_n \geq r^n$ .

Fazendo o mesmo somatório:

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \geq \sum_{i=n}^{\infty} r^i, \quad r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

- $p = 1$ :

Como para  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$ , mas pelo **teste da integral** a série diverge e  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$   $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$ , mas pelo **teste da integral** a série converge, esse teste é inconclusivo quando  $p = 1$ .

## Dedução das séries de Taylor

Tendo  $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ , existem as relações:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \dots \Rightarrow f(a) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + \cdots + n a_n(x-a)^{n-1} + \dots \Rightarrow f'(a) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1 a_2 + 3 \cdot 2 a_3(x-a) + \cdots + n(n-1) a_n(x-a)^{n-2} + \dots \Rightarrow f''(a) = 2 a_2$$

⋮

$$f^{(n)}(a) = n! a_n + \dots \Rightarrow f^{(n)}(a) = n! a_n$$

Algebraicamente, tem-se que  $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ , portanto, uma função pode ser representada por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \text{ (série de Taylor de } f(x))$$

## Fontes

1. STEWART, James. Cálculo - Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
2. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
3. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo Volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
4. LIMA, Elon Lages. Análise Real volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
5. TAKHE. Cálculo 1: Aulas e Exercícios Resolvidos. [YouTube], 2023. Disponível em:  
[https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1apl5ib\\_uL7UkP4fDwy4m](https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1apl5ib_uL7UkP4fDwy4m). Acesso em: 10 set. 2025.
6. BARROS, Tatiana Leal. Disciplina: Cálculo com Funções de Uma Variável Real. Curso de graduação em Engenharia de Computação – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2024.
7. CAMARGO JUNIOR, Fausto de. Disciplina: Integração e séries. Curso de graduação em Engenharia de Computação – CEFET-MG, 2024.