Cálculo com funções de uma variável

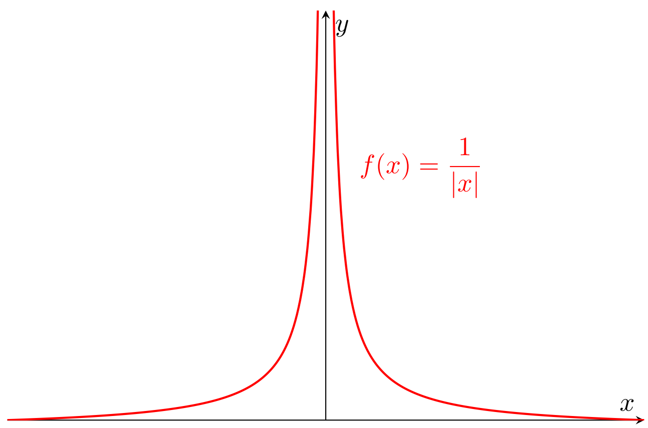
Kayky Moreira Praxedes

Janeiro 2026

1 Limites

1.1 Limite em um ponto

$f(a)$ indica o valor da função $f(x)$ quando $x = a$. $\lim_{x \to a} f(x)$ vê a tendência da função quando x se aproxima de a.

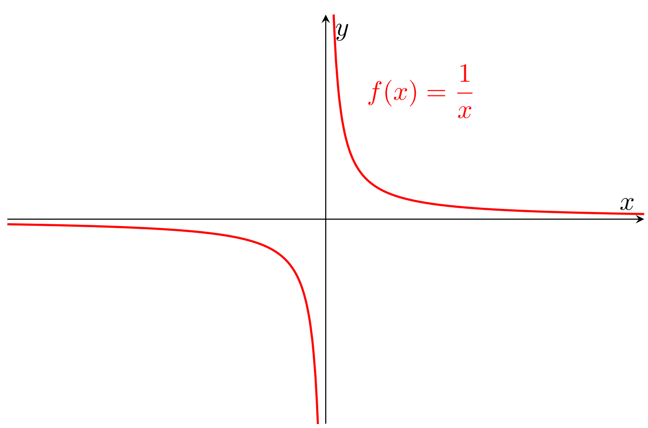


$f(0)$ não existe. $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ (quando x se aproxima de 0, y tende ao infinito).

Limites laterais:

Para um limite existir, os limites laterais devem ser iguais (o mesmo valor se aproximando pela esquerda e direita):

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \to a} f(x) = L$$



$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \to 0} \frac{1}{x}$$

1.2 Propriedades dos limites

Para limites sem indeterminações:

- $\lim\limits_{x\to a} c = c$ como $\lim\limits_{x\to\infty} 2 = 2$
- $\lim\limits_{x\to a} x = a$ como $\lim\limits_{x\to 7} x = 7$
- $\lim\limits_{x\to a} \alpha f(x) = \alpha \lim\limits_{x\to a} f(x)$ como $\lim\limits_{x\to 7} 4\,x = 28 = 4 \lim\limits_{x\to 7} x$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)+g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ como $\lim\limits_{x\to 7} x+2 = 9 = \lim\limits_{x\to 7} x + \lim\limits_{x\to 7} 2$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ como $\lim\limits_{x\to 2}[x^2\cdot(2\,x+1)] = 20 = \left(\lim\limits_{x\to 2} x^2\right)\cdot\left(\lim\limits_{x\to 2}(2\,x+1)\right)$
- $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$ como $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{2\,x+1} = \dfrac{4}{5} = \dfrac{\lim\limits_{x\to 2} x^2}{\lim\limits_{x\to 2}[2\,x+1]}$
- $\lim\limits_{x\to a}[f(g(x))] = f\left(\lim\limits_{x\to a} g(x)\right)$

  Seja $f(x) = x^2$ e $g(x) = 2x+1$ então $\lim\limits_{x\to 2}\left[(2x+1)^2\right] = 25 = \left(\lim\limits_{x\to 2}[2x+1]\right)^2$

No geral, se f é contínua em a: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Limites no infinito:

Quando aplicamos um limite no infinito, ele pode convergir (um número real) (1), divergir para ($\pm\infty$) (2) ou simplesmente não existir (não para em um único valor) (3):

1. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = a,\ a\in\mathbb{R}$ como $\lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{1}{x}\right] 1+0 = 1$
2. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$ como $\lim\limits_{x\to\infty} x^3 = \infty$
3. $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ como $\nexists \lim\limits_{x\to\infty} \sin x$

1.3 Limites indeterminados

Caso f não for contínua no ponto, gerando algumas indeterminações, tais quais:

- $\dfrac{0}{0}$ como $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}$
- $\dfrac{\infty}{\infty}$ como $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2-1}{x^2+4}$
- $\infty-\infty$ como $\lim\limits_{x\to\infty}[x^2-x]$
- $0\cdot\infty$ como $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{1}{x}\cdot e^x\right]$
- 1^∞ como $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x\right]$
- ∞^0 como $\lim\limits_{x\to\infty}\left[(1+x)^{1/x}\right]$

Para resolver essas indeterminações existem algumas ferramentas, essas envolvendo tanto manipulação algébrica quanto análise na relações entre funções. As mais comuns são:

Polinômios em evidência:

Principalmente em polinômios tendendo ao infinito, o crescimento é mais acelerado nos polinômios de maior grau, sendo eles dominantes:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2-1}{x^2+4} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\left(3-\dfrac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1+\dfrac{4}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{3-\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{4}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

Fatoração:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}[x+1] = 2$$

Substituição de variáveis:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1},\ \text{Se } h = x-1,\ \ h\to 0:\ \lim_{h\to 0} \frac{(h+1)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h+1-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+2h}{h} = \lim_{h\to 0}[h+2] = 2$$

Racionalização:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left[\frac{\sqrt{x^2+9}-3}{x^2}\,\frac{\sqrt{x^2+9}+3}{\sqrt{x^2+9}+3}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{x^2+9-9}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+9}+3)} =$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x^2+9}+3} = \frac{1}{\sqrt{9}+3} = \frac{1}{6}$$

O método de racionalização funciona para qualquer expressão que possa ser transformada em um produto notável (não apenas para raízes).

Teorema do confronto (sanduíche):

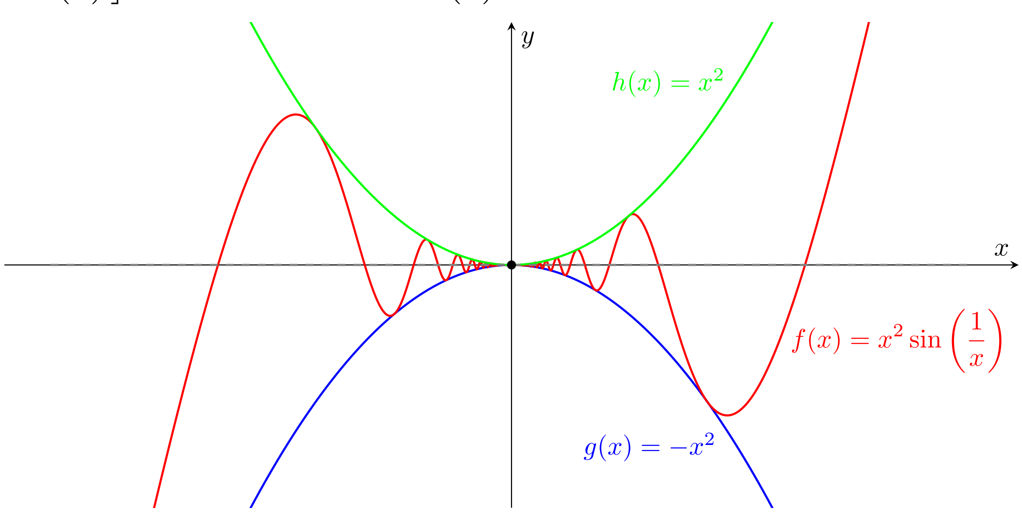
Mesmo que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ seja indefinido ou não exista, se $f(x) \geq g(x)$ e $f(x) \leq h(x)$ para todos os pontos próximos de a, tendo g e h com limites calculáveis, então é possível definir a relação:

$$\lim_{x\to a} g(x) \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq \lim_{x\to a} h(x)$$

Para calcular $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right]$, mesmo que $\lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ não exista, tem-se que:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2 \Rightarrow \lim_{x\to 0} -x^2 \leq \lim_{x\to 0}\left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] \leq \lim_{x\to 0} x^2 \Rightarrow 0 \leq \lim_{x\to 0}\left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] \leq 0$$

Logo, $\lim\limits_{x\to 0}\left[x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$, mesmo que $\nexists \lim\limits_{x\to 0} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.



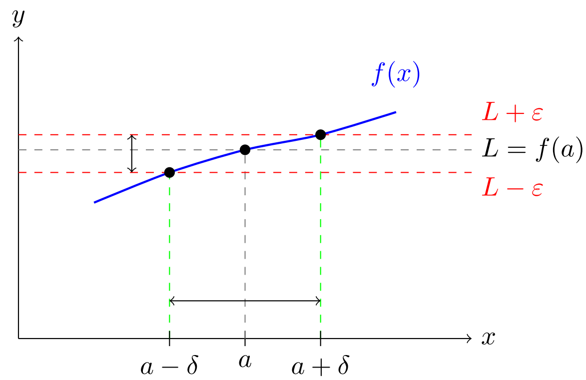
1.4 Teorema do valor intermediário (TVI)

Se f for uma função contínua em um intervalo $[a, b]$, se d está entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe um valor c, tal que $f(c) = d$.

$$\text{Seja } f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ contínua. Se } f(a) \leq d \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b]\text{, tal que: } f(c) = d$$

1.5 Formalizando o conceito de limite

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in D_f\text{: } 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Pode-se tornar o valor de $f(x)$ arbitrariamente próximo de L (diminuindo o módulo de ε) aproximando-se x de a (diminuindo o módulo de δ) sem que ambos tenham de ser necessariamente iguais.

2 Derivadas

2.1 Derivada em um ponto

A taxa de crescimento de uma função qualquer em 2 pontos pode ser obtida por $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, sendo esse o coeficiente angular de uma reta secante à f nos pontos $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$.

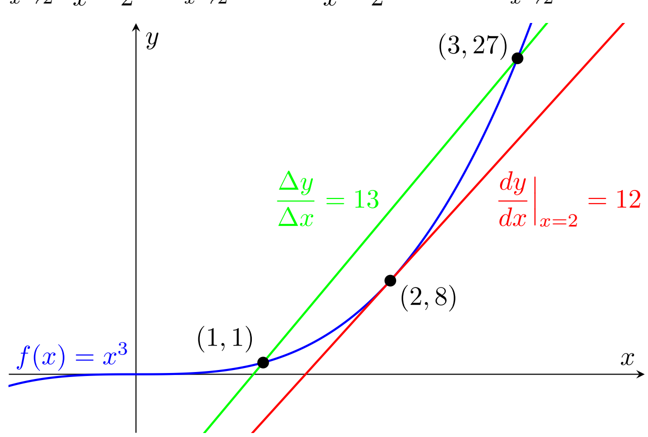
Quanto mais próximos os pontos x_2 e x_1, maior a precisão de modo que quando $x_2 - x_1 \to 0$, encontra-se o coeficiente angular de uma reta tangente à f no ponto $(a, f(a))$, sendo essa a derivada (taxa de variação instantânea).

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx} f(x)\right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}\text{, se } x - a = h,\; h \to 0\text{: } \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para $f(x) = x^3$, a taxa de variação entre $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, e a derivada em $x = 2$ são:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{27 - 1}{3 - 1} = \frac{26}{2} = 13$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \to 2} [x^2 + 2x + 4] = 12$$



Diferenciabilidade:

Uma função f, diferenciável em um ponto a tem as seguintes características:

1. $\exists f(a)$ ($f(a)$ existe).
2. $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (f é contínua nos arredores de a).
3. $f'_-(a) = f'_+(a)$ (f não tenha "quina").

Derivada como uma função:

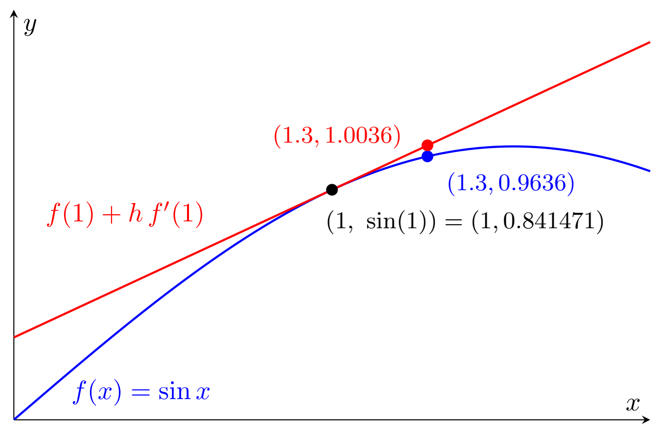
Ao invés de considerar a derivada de uma função em um ponto específico é considerado um ponto qualquer.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{x\to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x\to a} \frac{(x+a)(x-a)}{x-a} = \lim_{x\to a}(x+a) = 2a \Rightarrow f'(x) = 2x,\ x \in \mathbb{R}$$

2.2 Aproximação linear

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h},\ h \approx 0 \Rightarrow f(x+h) \approx f(x) + h\, f'(x),\ h \approx 0$$

Para valores de h pequenos, a variação da função é praticamente igual ao valor correspondente na reta tangente.



A diferença dos valores é aproximadamente 0.04 (muito pequena). Quanto menor o h, mais preciso é a relação.

2.3 Propriedades das derivadas

- $\dfrac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \dfrac{d}{dx} f(x) + \dfrac{d}{dx} g(x)$
- $\dfrac{d}{dx}[\alpha f(x)] = \alpha\, f'(x)$

Regra do produto:

- $\dfrac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$

Regra do quociente:

- $\dfrac{d}{dx} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(x)\, g(x) - f(x)\, g'(x)}{g^2(x)}$

Regra da cadeia:

- $\dfrac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) g'(x)$

A dedução das propriedades no apêndice.

2.4 Derivada de funções inversas

Considerando uma função inversa como $f(g(x)) = g(f(x)) = x$, tais quais x^3 e $\sqrt[3]{x}$, e^x e $\ln x$, $\sin x$ e $\sin^{-1} x$, etc.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} x \Rightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Considerando $f^{-1}(x) = \ln x \Rightarrow f(x) = e^x$, sendo $f'(x) = e^x$: $\dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{e^{\ln x}} = \dfrac{1}{x}$.

2.5 Derivadas importantes

- $\dfrac{d}{dx} c = 0,\ c \in \mathbb{R}$.
- $\dfrac{d}{dx} \sin x = \cos x$.
- $\dfrac{d}{dx} \cos x = -\sin x$.
- $\dfrac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \Rightarrow \dfrac{d}{dx} e^x = e^x$.
- $\dfrac{d}{dx} \log_a x = \dfrac{1}{x \ln a} \Rightarrow \dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$.

Regra do tombo:

- $\dfrac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1},\ n \in \mathbb{R}^*$

A dedução das derivadas está no apêndice.

2.6 Derivada de ordem superior

Trata-se apenas do processo de realizar a derivada de uma função que já tinha sido derivada anteriormente.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} f(x)\right) = \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x) \text{ ou } f^{(2)}(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\cdots\left(\frac{d}{dx} f(x)\right)\right)\right) = \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \sin x = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} \sin x\right)\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx} \cos x\right) = \frac{d}{dx}(-\sin x) = -\cos x$$

2.7 Derivada de uma função implícita

Em uma função explícita, a variável dependente y está expressa diretamente em termos da variável independente x, $y = f(x)$, ao par que em uma função explícita não é necessário ou não é fácil isolar y explicitamente como função de x, tendo-se a relação $F(x, y) = 0$.

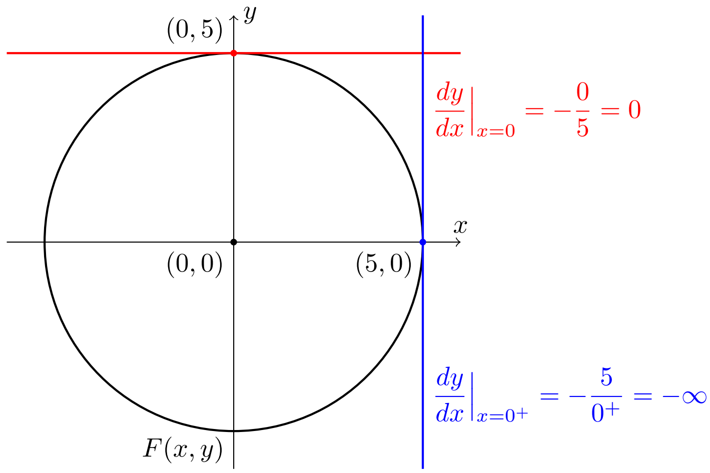
O processo para achar a taxa de variação de uma variável em relação à outra é basicamente derivando tudo e manipulando algebricamente a parte referente à variável de interesse até achar o resultado.

Com $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$, para achar $\dfrac{dy}{dx}$:

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2 + y^2 - 25) = \frac{d}{dx}(0) \Rightarrow \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 + \frac{d}{dx}(25) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{d}{dx} y^2 + 0 = 0$$

Como, algebricamente, $\dfrac{d}{dx} y^2 = \dfrac{dy^2}{dx} = \dfrac{dy^2}{dy}\dfrac{dy}{dx} = 2y\dfrac{dy}{dx}$:

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} - \frac{x}{y}$$



2.8 Derivação logarítmica

Dada uma função muito complexa, tal qual $f(x) = y = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$, para encontrar $f'(x)$ teriam de ser usadas a regra do produto, a regra do quociente e a regra da cadeia, tornando-se um processo extremamente longo.

Uma abordagem interessante pode ser trabalhar com logaritmos, já que, algebricamente:

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{dy}{dx}\frac{d}{dy}\ln y = \frac{dy}{dx}\frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y\,\frac{d}{dx}\ln y$$

$$y = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right) = \ln x^3 + \ln\left(\sqrt{x^2+1}\right) - \ln((3x+2)^5) = 3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx}\ln y = \frac{d}{dx}\left[3\ln x + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) - 5\ln(3x+2)\right] = \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}$$

Como $\frac{dy}{dx} = y\frac{d}{dy}\ln y$:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\right] = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}\left(\frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}\right)$$

2.9 Diferenciais

Relembrando a aproximação linear:

$$f(x+h) - f(x) \approx hf'(x)$$

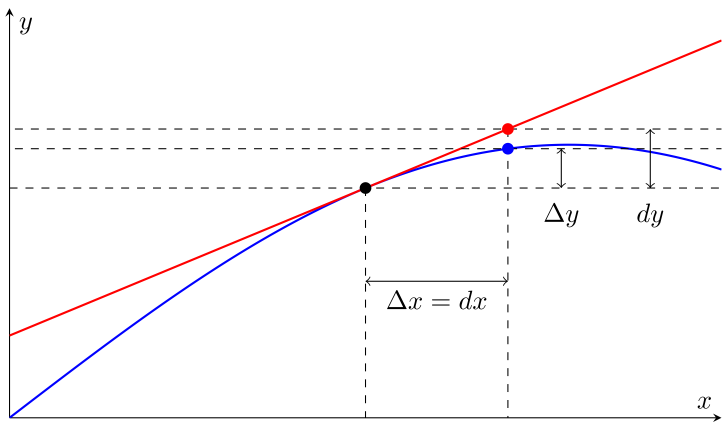
h pode ser substituído por Δx, ficando:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx \Delta x\, f'(x) \Rightarrow \Delta y \approx \frac{dy}{dx}\,\Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Como dx é apenas uma referência à variação de x, de modo que, algebricamente, $\Delta x = dx$, ficando $\Delta y \approx dy$.

Isso faz sentido, já que $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$ para Δx próximo de 0.

Portanto, para encontrar um valor na função, ao invés de seguir o caminho por f, seguimos pela reta tangente à um ponto conhecido ($y + \Delta y \approx y + dy$).



Dessa maneira é possível aproximar funções que seriam complicadas de calcular.

Tendo $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, tem-se, por exemplo, $f(4) = \sqrt{4} = 2$. $f(4.02) = 2.004994\ldots$, sendo difícil de calcular manualmente, ao par que, por diferenciais, $f(4.02) \approx \sqrt{4} + \dfrac{0.02}{2\sqrt{4}} = 2 + \dfrac{0.02}{4} = 2 + 0.005 = 2.005$ (uma ótima aproximação, visto que o erro é menor que 0.000006).

2.10 L'Hôpital

É uma ferramenta que permite resolver limites indeterminados do tipo 0/0, ou ∞/∞ de maneira simples.

Caso de 0/0:

Pode-se utilizar a intuição dada pelos diferenciais, onde $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$, isso sendo uma igualdade para $\Delta x \to 0$.

Como $f(a) = 0$: $f(x) = -(0 - f(x)) = -(f(a) - f(x)) = -\Delta y_f$, e o mesmo para $g(x) = -\Delta y_g$:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{-\Delta y_f}{-\Delta y_g} = \lim_{x\to a} \frac{\Delta y_f}{\Delta y_g} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)\Delta x}{g'(x)\Delta x} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \left(\text{que daria } \frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}\sin x}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

Caso de ∞/∞:

É bastante intuitivo de se pensar que se f cresce mais rápido que g, então $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ e $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = 0$.

Para $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{x}$, com uma análise simples do crescimento das funções:

$$\frac{\ln 10}{10} = 0.230 \quad \frac{\ln 100}{100} = 0.046 \quad \frac{\ln 1000}{1000} = 0.007 \quad \frac{\ln 1000000}{1000000} = 1.38 \cdot 10^{-5}$$

x cresce muito mais rápido que $\ln x$ quando $x \to \infty$, portanto, mesmo que ambas tendam ao infinito, x sempre terá um valor muito maior do que $\ln x$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} \left(\text{que daria } \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\ln x}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Através de manipulação algébrica é possível abranger a regra de L'Hopital para casos diferentes dos explicitados.

$$\lim_{x\to 0} \left[\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right] (\text{caso } \infty - \infty) = \lim_{x\to 0} \frac{-x + \sin x}{x\,\sin x} \left(\text{caso } \frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{d}{dx}[-x + \sin x]}{\frac{d}{dx}x\,\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{-1 + \cos x}{\sin x + x\,\cos x} = 0$$

2.11 Derivadas para análise de uma função

1ª derivada:

Pode-se determinar o sentido de uma função em um ponto a, sendo que se $f'(a) < 0$ ela está **decrescendo**, se $f'(a) = 0$ **sua variação é nula** e se $f'(a) > 0$ ela está **crescendo**.

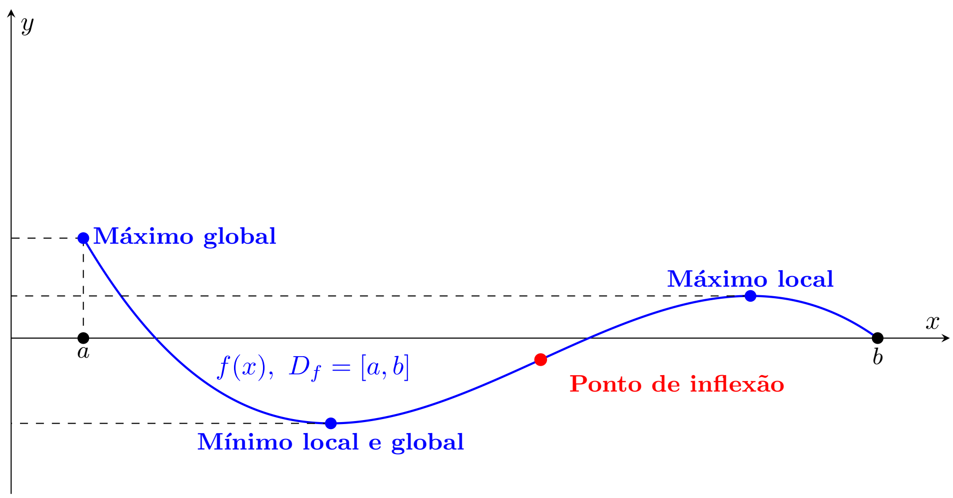
2ª derivada:

Descobre-se a concavidade da função, de modo que se $f''(a) > 0$ a função é **convexa** (concavidade para cima), se $f''(a) = 0$ pode se trata-se de um **ponto de inflexão** ou uma função afim (nem sempre é, como no caso de $f(x) = x^4$, onde $f''(0) = 12(0) = 0$), e se $f''(a) < 0$ trata-se de uma função **côncava** (para baixo).

Máximos e mínimos:

Um **máximo local** possui $f'(a) = 0$ (pois caso contrário a função tem para onde crescer ou decrescer) e $f''(a) < 0$. Já para ser um **mínimo local**, deve possuir $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$.

Para ser um **máximo** ou **mínimo global**, ele tem de ser o maior ou menor ponto da função no domínio respectivamente. Quando o intervalo é fechado $[a, b]$, os máximos e mínimos globais podem ser pontos referentes aos os máximos e mínimos locais ou $f(a)$ ou $f(b)$).



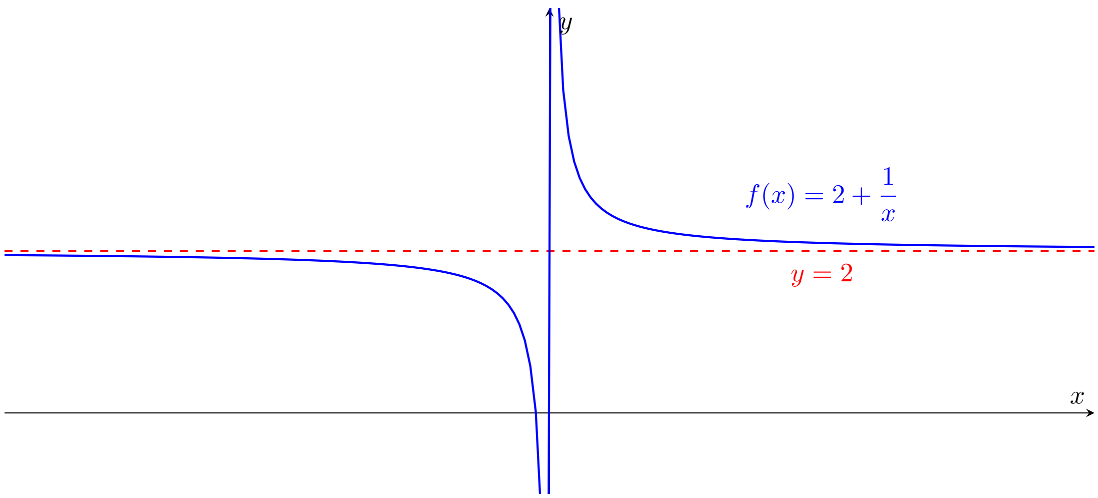
2.12 Assíntotas

Trata-se do comportamento que algumas funções tem de se aproximarem à uma reta para certos valores.

Horizontais:

Se aproximam de uma reta horizontal quando $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = c,\ c \in \mathbb{R}$.

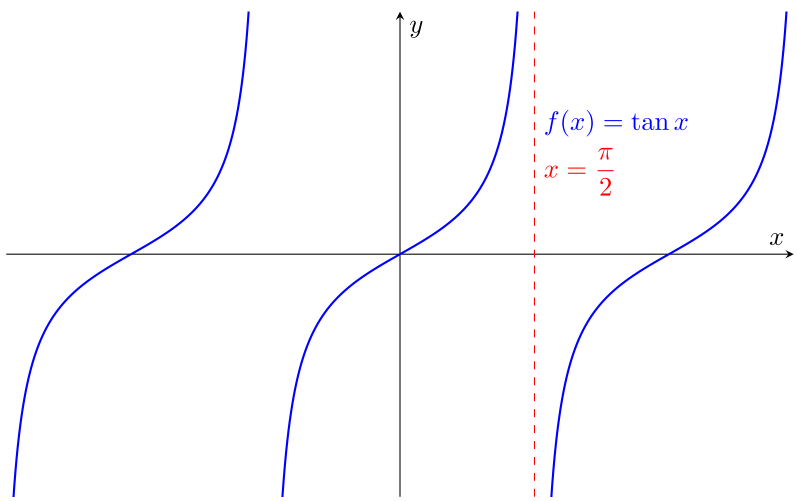
$\lim\limits_{x\to-\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$, logo, f tem uma assíntota horizontal em $y = 2$.



Verticais:

Se aproximam de uma reta vertical quando $\lim_{x \to c^{\pm}} f(x) = \pm\infty,\ c \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to (\pi/2)^-} \tan x = \infty$ e $\lim_{x \to (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$, logo, f tem uma assíntota vertical em $x = \pi/2$.



Oblíquas:

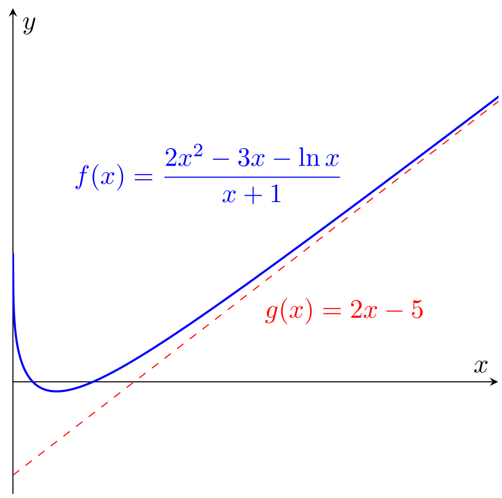
Quando uma função f tende à uma reta $g(x) = a\,x + b$, onde, dessa maneira, $\lim_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$.

Para encontrá-la, pode-se usar a noção de que, se o crescimento de m é maior do que h: $f(x) = m(x) + h(x) \approx m(x)$, quando $x \to \infty$.

Sendo $f(x) = \dfrac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1}$, para valores x muito grandes:

$$\frac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1} = \frac{2x^2 - 3x}{x + 1} - \frac{\ln x}{x + 1} \approx \frac{2x^2 - 3x}{x + 1} = 2x - 5 + \frac{5}{x + 1} \approx 2x - 5$$

Como $\lim_{x \to \infty} \left[\dfrac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1} - (2x - 5) \right] = 0$, então $2x - 5$ é uma assíntota oblíqua de f.



3 Primitivas

São o processo oposto das derivadas, de modo que, F é primitiva de f, se:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c, \text{ em que } c \text{ é constante que é perdida na derivada.}$$

$$\frac{d}{dx}\left[2x+4\right] = 2 \Leftrightarrow \int 2\,dx = 2x + c. \text{ Para a mesma função, basta assumir } c = 4 \Rightarrow 2x+4$$

Toda função contínua em um intervalo possui uma primitiva nesse espaço.

Primitivas comuns:

Realizando o processo inverso do cálculo da derivada:

- $\displaystyle\int a\,dx = a\,x + c.$
- $\displaystyle\int \sin x\,dx = -\cos x + c.$
- $\displaystyle\int \cos x\,dx = \sin x + c.$
- $\displaystyle\int a^x\,dx,\ a > 0,\ a \neq 1 = \frac{a^x}{\ln a} + c \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + c.$
- $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c \Rightarrow \int \frac{1}{x\,\ln a}\,dx,\ a > 0,\ a \neq 1 = \frac{\ln|x|}{\ln a} + c = \log_a|x| + c.$
- $\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1.$

Propriedades:

- $\displaystyle\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$
- $\displaystyle\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Não existe uma regra da cadeia, regra do produto ou regra do quociente para a resolução de primitivas, fazendo-se necessário o uso de métodos mais refinados para resolver integrais de maior complexidade.

Apêndice A

Dedução das propriedades de derivadas

Soma de derivadas:

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)-f(x)]+[g(x+h)-g(x)]}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} + \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} = f'(x)+g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = f'(x)+g'(x)$$

Produto de derivada com escalar:

$$\frac{d}{dx}[\alpha\, f(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha\, f(x+h)-\alpha\, f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\alpha[f(x+h)-f(x)]}{h} = \alpha\left(\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right) = \alpha\, f'(x)$$

Observação!

Para a **regra do produto**, **regra do quociente** e **regra da cadeia**, a noção de aproximação linear ($f(x+h) \approx f(x)+h\,f'(x),\ \ h\approx 0$) é importante.

Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\,g(x+h)-f(x)\,g(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(f(x)+h\,f'(x))(g(x)+h\,g'(x))-f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\,g(x)+h\,f'(x)\,g(x)+h\,f(x)\,g'(x)+h^2 f'(x)\,g'(x)-f(x)\,g(x)}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{hf'(x)\,g(x)+hf(x)\,g'(x)+h^2 f'(x)\,g'(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h(f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)+h\,f'(x)\,g'(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}[f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)+hf'(x)\,g'(x)] = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[f(x)\cdot g(x)] = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$

Regra do quociente:

$$\frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x+h)}{g(x+h)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{f(x)+hf'(x)}{g(x)+h\,g'(x)}-\dfrac{f(x)}{g(x)}}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x)\,g(x)+hf'(x)\,g(x)-(f(x)\,g(x)+hf(x)\,g'(x))}{h(g^2(x)+h\,g'(x)\,g(x))} = \lim_{h\to 0}\frac{h(f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x))}{h(g^2(x)+h\,g'(x)\,g(x))} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)+h\,g'(x)\,g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)} \Rightarrow \frac{d}{dx}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)\,g(x)-f(x)\,g'(x)}{g^2(x)}$$

Regra da cadeia:

$$\frac{d}{dx}[f\circ g] = \frac{d}{dx}f(g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x+h))-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{f(g(x)+h\,g'(x))-f(g(x))}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(g(x))+hf'(g(x))g'(x)-f(g(x))}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{hf'(g(x))g'(x)}{h} = f'(g(x))g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

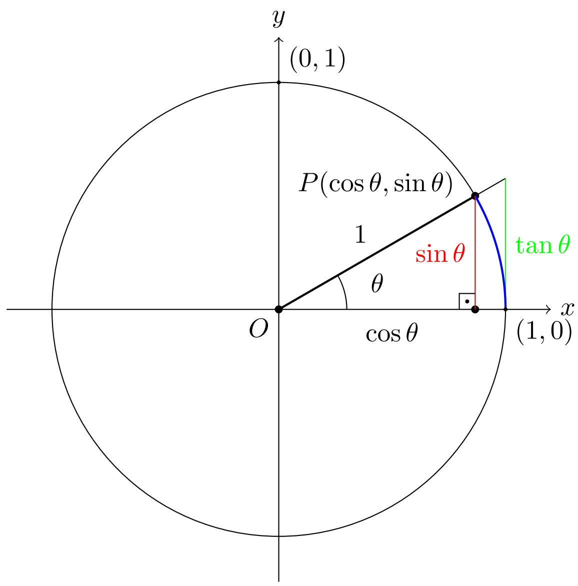
Dedução das derivadas

- $\dfrac{d}{dx}c = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{c-c}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{0}{h} = 0$ para qualquer $c \in \mathbb{R}$.

- $\dfrac{d}{dx}\sin x = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin x\, \cos h + \cos x\, \sin h - \sin x}{h} = \sin x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin h}{h}$

  Apesar de o limite poder ser resolvido por l'hopital, como é necessário previamente definir a derivada de $\sin x$ (problema original), a solução utilizada será através de trigonometria e limites:

  Tendo um círculo de raio 1, considerando uma reta que corte o círculo, formando um arco de ângulo θ, e dessa mesma reta, forma-se um triângulo retângulo, igual ao da imagem:

  Á área da seção circular pode ser calculada por $\dfrac{1}{2}\, r^2\, \theta$, e a área do triângulos menor e maior por $\dfrac{1}{2}\, \cos\theta\, \sin\theta$ e $\dfrac{1}{2}\, r\, \tan\theta$, respectivamente.

  Para definir $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\sin\theta}{\theta}$:

  $\dfrac{1}{2}\, \cos\theta\, \sin\theta \leq \dfrac{1}{2}\, r^2\, \theta \leq \dfrac{1}{2}\, r\, \tan\theta \Rightarrow \cos\theta\, \sin\theta \leq \theta \leq \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} \Rightarrow \cos\theta \leq \dfrac{\theta}{\sin\theta} \leq \dfrac{1}{\cos\theta} \Rightarrow \dfrac{1}{\cos\theta} \geq \dfrac{\sin\theta}{\theta} \geq \cos\theta \Rightarrow$

  $$\lim_{\theta \to 0} \cos\theta \leq \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \to 0} \frac{1}{\cos\theta} \Rightarrow 1 \leq \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \leq 1 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} = 1$$

  Para definir $\lim\limits_{\theta \to 0} \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta}$:

  $\dfrac{\cos\theta - 1}{\theta} = \dfrac{\cos\theta - 1}{\theta} \dfrac{\cos\theta + 1}{\cos\theta + 1} = \dfrac{\cos^2\theta - 1}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\dfrac{\sin^2\theta}{\theta(\cos\theta + 1)} = -\dfrac{\sin\theta}{\theta} \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \Rightarrow \lim\limits_{\theta \to 0} \left[-\dfrac{\sin\theta}{\theta} \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} \right] =$

  $$-\lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\theta} \lim_{\theta \to 0} \frac{\sin\theta}{\cos\theta + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \to 0} \frac{\cos\theta - 1}{\theta} = 0$$

  Logo:

  $$\sin x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \Rightarrow \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

- $\dfrac{d}{dx}\cos x = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos x\, \cos h + \sin x\, \sin h - \cos x}{h} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos x\,(\cos h - 1)}{h} - \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sin x\, \sin h}{h} =$

  $$\cos x \lim_{h \to 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \to 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x \Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

- $\dfrac{d}{dx}a^x = \lim_{h\to 0}\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h} = \lim_{h\to 0}\dfrac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}$

  Sabendo que $a^h = e^{\ln a^h} = e^{h\,\ln a}$. Sabendo que o polinômio de Taylor de e^h é igual à $1+h+\dfrac{h^2}{2!}+\dfrac{h^3}{3!}+\dots$, o de $e^{h\,\ln a}$ sendo então $1+h\,\ln a+\dfrac{(h\,\ln a)^2}{2!}+\dfrac{(h\,\ln a)^3}{3!}+\dots$:

$$a^x\lim_{h\to 0}\frac{\left(1+h\,\ln a+\dfrac{(h\,\ln a)^2}{2!}+\dfrac{(h\,\ln a)^3}{3!}+\dots\right)-1}{h} = a^x\lim_{h\to 0}\frac{h\,\ln a+\dfrac{(h\,\ln a)^2}{2!}+\dfrac{(h\,\ln a)^3}{3!}+\dots}{h} =$$

$$a^x\lim_{h\to 0}\left[\ln a+\frac{h\,\ln^2 a}{2!}+\frac{h^2\ln^3 a}{3!}+\dots\right] = a^x\ln a \Rightarrow \frac{d}{dx}a^x = a^x\ln a.$$

  Muito usada: $\dfrac{d}{dx}e^x = e^x\ln e = e^x\cdot 1 = e^x$.

- $\dfrac{d}{dx}\log_a x$, tendo função inversa igual a $f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x\ln a$: $\dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{a^{\log_a x}\ln a} = \dfrac{1}{x\,\ln a}$.

  Muito usada: $\dfrac{d}{dx}\ln x = \dfrac{1}{x\,\ln e} = \dfrac{1}{x\cdot 1} = \dfrac{1}{x}$.

Regra do tombo:

- $\dfrac{d}{dx}x^n = \lim_{h\to 0}\dfrac{(x+h)^n-x^n}{h}$. A partir da definição de função polinomial, usando Binômio de Newton, que é:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k a^{n-k},\ n\neq 0,\ \text{com}\ \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

  Expandindo:

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\vdots$$

$$\binom{n}{n-2} = \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}$$

$$\binom{n}{n-1} = \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

  Quando aplicado esse conceito na derivada:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\left[\binom{n}{0}x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\dots+\binom{n}{n}h^n\right]-x^n}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{x^n+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\dots+\binom{n}{n}h^n-x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\dots+\binom{n}{n}h^n}{h}$$

$$\lim_{h\to 0}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\dots+\binom{n}{n}h^{n-1}\right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = n\,x^{n-1} \Rightarrow \frac{d}{dx}x^n = n\,x^{n-1},\ n\in\mathbb{R}^*.$$

Fontes

1. STEWART, James. Cálculo - Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
2. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
3. TAKHE. Cálculo 1: Aulas e Exercícios Resolvidos. [YouTube], 2023. Disponível em: https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1apl5ib_uL7UkP4fDwy4m. Acesso em: 10 set. 2025.
4. BARROS, Tatiana Leal. Disciplina: Cálculo com Funções de Uma Variável Real. Curso de graduação em Engenharia de Computação – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2024.
5. CAMARGO JUNIOR, Fausto de. Disciplina: Integração e séries. Curso de graduação em Engenharia de Computação – CEFET-MG, 2024.