

# Cálculo com funções de uma variável

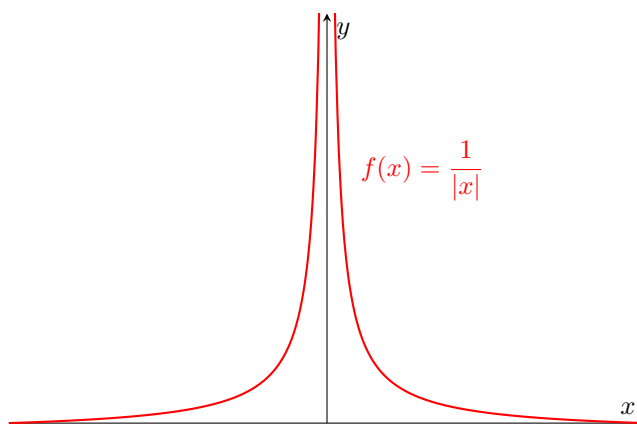
Kayky Moreira Praxedes

Janeiro 2026

## 1 Limites

### 1.1 Limite em um ponto

$f(a)$  indica o valor da função  $f(x)$  quando  $x = a$ .  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  vê a tendência da função quando  $x$  se aproxima de  $a$ .

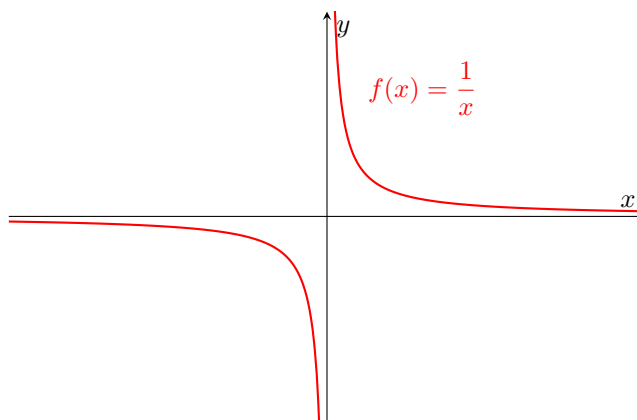


$f(0)$  não existe.  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$  (quando  $x$  se aproxima de 0,  $y$  tende ao infinito).

#### Limites laterais:

Para um limite existir, os limites laterais devem ser iguais (o mesmo valor se aproximando pela esquerda e direita):

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty \quad \Rightarrow \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$$

## 1.2 Propriedades dos limites

Para limites sem indeterminações:

- $\lim_{x \rightarrow a} c = c$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} 2 = 2$
- $\lim_{x \rightarrow a} x = a$  como  $\lim_{x \rightarrow 7} x = 7$
- $\lim_{x \rightarrow a} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow a} f(x)$  como  $\lim_{x \rightarrow 7} 4x = 28 = 4 \lim_{x \rightarrow 7} x$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  como  $\lim_{x \rightarrow 7} x + 2 = 9 = \lim_{x \rightarrow 7} x + \lim_{x \rightarrow 7} 2$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$  como  $\lim_{x \rightarrow 2} [x^2 \cdot (2x + 1)] = 20 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} x^2\right) \cdot \left(\lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1)\right)$
- $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$  como  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{2x + 1} = \frac{4}{5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} x^2}{\lim_{x \rightarrow 2} [2x + 1]}$
- $\lim_{x \rightarrow a} [f(g(x))] = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$

Seja  $f(x) = x^2$  e  $g(x) = 2x + 1$  então  $\lim_{x \rightarrow 2} [(2x + 1)^2] = 25 = \left(\lim_{x \rightarrow 2} [2x + 1]\right)^2$

No geral, se  $f$  é contínua em  $a$ :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

### Limites no infinito:

Quando aplicamos um limite no infinito, ele pode convergir (um número real) (1), divergir para  $(\pm\infty)$  (2) ou simplesmente não existir (não para em um único valor) (3):

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a, a \in \mathbb{R}$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{x}\right] 1 + 0 = 1$
2.  $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$
3.  $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$  como  $\nexists \lim_{x \rightarrow \infty} \sin x$

## 1.3 Limites indeterminados

Caso  $f$  não for contínua no ponto, gerando algumas indeterminações, tais quais:

- $\frac{0}{0}$  como  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$
- $\frac{\infty}{\infty}$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4}$
- $\infty - \infty$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 - x]$
- $0 \cdot \infty$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{x} \cdot e^x\right]$
- $1^\infty$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x\right]$
- $\infty^0$  como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[(1 + x)^{1/x}\right]$

Para resolver essas indeterminações existem algumas ferramentas, essas envolvendo tanto manipulação algébrica quanto análise na relações entre funções. As mais comuns são:

### Polinômios em evidência:

Principalmente em polinômios tendendo ao infinito, o crescimento é mais acelerado nos polinômios de maior grau, sendo eles dominantes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left( 3 - \frac{1}{x^2} \right)}{x^2 \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{3}{1} = 3$$

### Fatoração:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} [x + 1] = 2$$

### Substituição de variáveis:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}, \text{ Se } h = x - 1, \ h \rightarrow 0 : \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(h + 1)^2 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h + 1 - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} [h + 2] = 2$$

### Racionalização:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{x^2} \cdot \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 3}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 9 - 9}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2 + 9} + 3)} =$$
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 9} + 3} = \frac{1}{\sqrt{9} + 3} = \frac{1}{6}$$

O método de racionalização funciona para qualquer expressão que possa ser transformada em um produto notável (não apenas para raízes).

### Teorema do confronto (sanduíche):

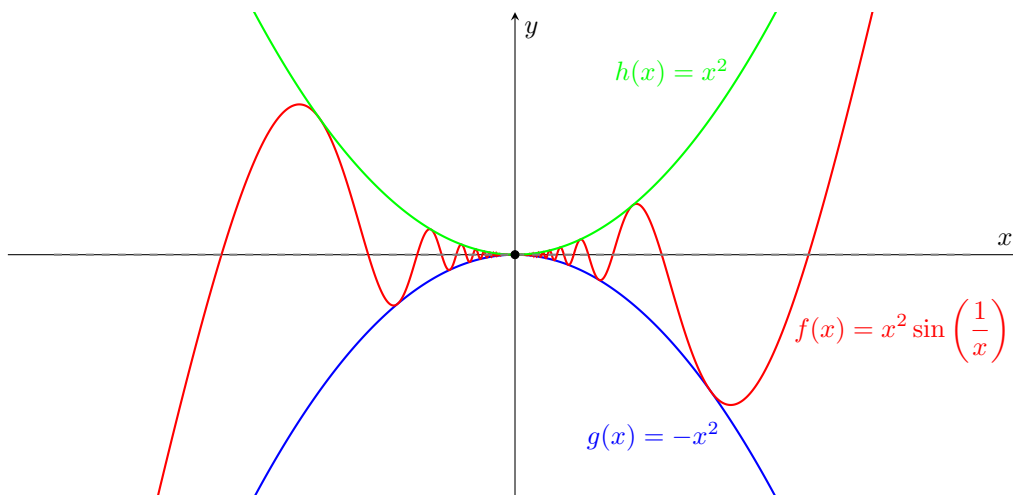
Mesmo que  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  seja indefinido ou não exista, se  $f(x) \geq g(x)$  e  $f(x) \leq h(x)$  para todos os pontos próximos de  $a$ , tendo  $g$  e  $h$  com limites calculáveis, então é possível definir a relação:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} h(x)$$

Para calcular  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right]$ , mesmo que  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{1}{x} \right)$  não exista, tem-se que:

$$-1 \leq \sin \left( \frac{1}{x} \right) \leq 1 \Rightarrow -x^2 \leq x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \leq x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} -x^2 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right] \leq \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \Rightarrow 0 \leq \lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right] \leq 0$$

Logo,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ x^2 \sin \left( \frac{1}{x} \right) \right] = 0$ , mesmo que  $\nexists \lim_{x \rightarrow 0} \sin \left( \frac{1}{x} \right)$ .



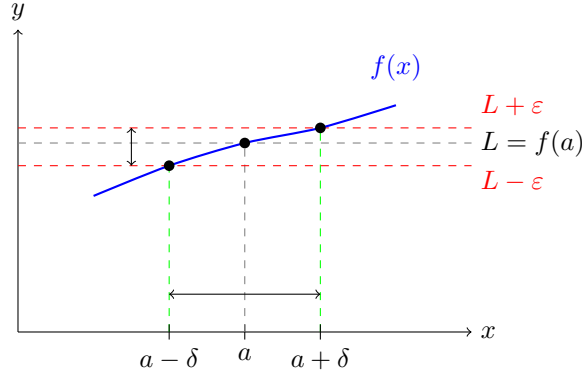
## 1.4 Teorema do valor intermediário (TVI)

Se  $f$  for uma função contínua em um intervalo  $[a, b]$ , se  $d$  está entre  $f(a)$  e  $f(b)$ , então existe um valor  $c$ , tal que  $f(c) = d$ .

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Se  $f(a) \leq d \leq f(b) \Rightarrow \exists c \in [a, b]$ , tal que:  $f(c) = d$

## 1.5 Formalizando o conceito de limite

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que, } \forall x \in D_f: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$



Pode-se tornar o valor de  $f(x)$  arbitrariamente próximo de  $L$  (diminuindo o módulo de  $\varepsilon$ ) aproximando-se  $x$  de  $a$  (diminuindo o módulo de  $\delta$ ) sem que ambos tenham de ser necessariamente iguais.

## 2 Derivadas

### 2.1 Derivada em um ponto

A taxa de crescimento de uma função qualquer em 2 pontos pode ser obtida por  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ , sendo esse o coeficiente angular de uma reta secante à  $f$  nos pontos  $(x_1, f(x_1))$ ,  $(x_2, f(x_2))$ .

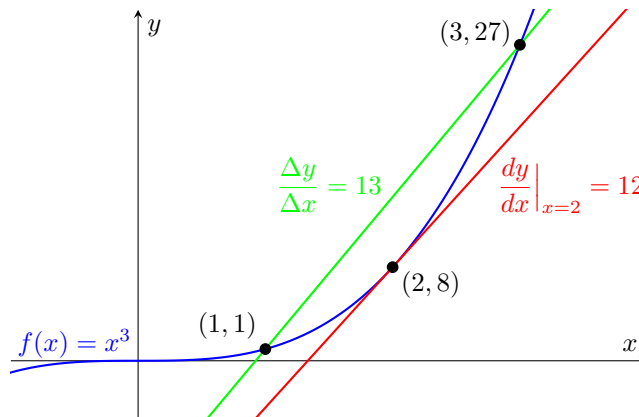
Quanto mais próximos os pontos  $x_2$  e  $x_1$ , maior a precisão de modo que quando  $x_2 - x_1 \rightarrow 0$ , encontra-se o coeficiente angular de uma reta tangente à  $f$  no ponto  $(a, f(a))$ , sendo essa a derivada (taxa de variação instantânea).

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{d}{dx} f(x) \right|_{x=a} = f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \text{ se } x - a = h, h \rightarrow 0: \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Para  $f(x) = x^3$ , a taxa de variação entre  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 3$ , e a derivada em  $x = 2$  são:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{27 - 1}{3 - 1} = \frac{26}{2} = 13$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 4)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} [x^2 + 2x + 4] = 12$$



## Diferenciabilidade:

Uma função  $f$ , diferenciável em um ponto  $a$  tem as seguintes características:

1.  $\exists f(a)$  ( $f(a)$  existe).
2.  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  ( $f$  é contínua nos arredores de  $a$ ).
3.  $f'_-(a) = f'_+(a)$  ( $f$  não tenha “quina”).

## Derivada como uma função:

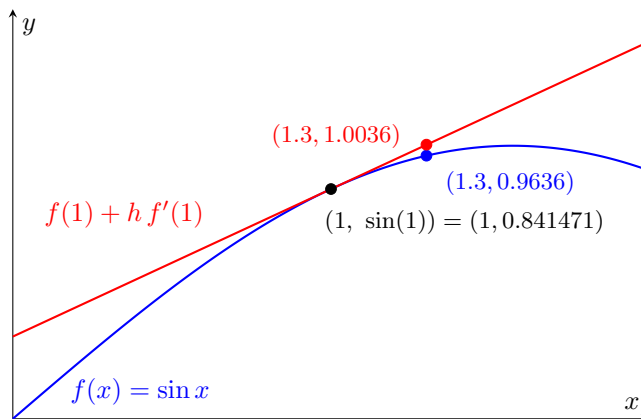
Ao invés de considerar a derivada de uma função em um ponto específico é considerado um ponto qualquer.

$$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x + a)(x - a)}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} (x + a) = 2a \Rightarrow f'(x) = 2x, x \in \mathbb{R}$$

## 2.2 Aproximação linear

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \Rightarrow f'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, h \approx 0 \Rightarrow f(x+h) \approx f(x) + h f'(x), h \approx 0$$

Para valores de  $h$  pequenos, a variação da função é praticamente igual ao valor correspondente na reta tangente.



A diferença dos valores é aproximadamente 0.04 (muito pequena). Quanto menor o  $h$ , mais preciso é a relação.

## 2.3 Propriedades das derivadas

- $\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$
- $\frac{d}{dx}[\alpha f(x)] = \alpha f'(x)$

### Regra do produto:

- $\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

### Regra do quociente:

- $\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

### Regra da cadeia:

- $\frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$

A dedução das propriedades no apêndice.

## 2.4 Derivada de funções inversas

Considerando uma função inversa como  $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ , tais quais  $x^3$  e  $\sqrt[3]{x}$ ,  $e^x$  e  $\ln x$ ,  $\sin x$  e  $\sin^{-1} x$ , etc.

$$f(f^{-1}(x)) = x \Rightarrow \frac{d}{dx} f(f^{-1}(x)) = \frac{d}{dx} x \Rightarrow f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1 \Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Considerando  $f^{-1}(x) = \ln x \Rightarrow f(x) = e^x$ , sendo  $f'(x) = e^x$ :  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x}$ .

## 2.5 Derivadas importantes

- $\frac{d}{dx} c = 0, c \in \mathbb{R}$ .
- $\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$ .
- $\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$ .
- $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \Rightarrow \frac{d}{dx} e^x = e^x$ .
- $\frac{d}{dx} \log_a x = \frac{1}{x \ln a} \Rightarrow \frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$ .

### Regra do tombo:

- $\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}, n \in \mathbb{R}^*$

A dedução das derivadas está no apêndice.

## 2.6 Derivada de ordem superior

Trata-se apenas do processo de realizar a derivada de uma função que já tinha sido derivada anteriormente.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) &= \frac{d^2}{dx^2} f(x) = f''(x) \text{ ou } f^{(2)}(x) \\ \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \dots \left( \frac{d}{dx} f(x) \right) \right) \right) &= \frac{d^n}{dx^n} f(x) = f^{(n)}(x) \\ \frac{d^3}{dx^3} \sin x &= \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \sin x \right) \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{d}{dx} \cos x \right) = \frac{d}{dx} (-\sin x) = -\cos x\end{aligned}$$

## 2.7 Derivada de uma função implícita

Em uma função explícita, a variável dependente  $y$  está expressa diretamente em termos da variável independente  $x$ ,  $y = f(x)$ , ao par que em uma função implícita não é necessário ou não é fácil isolar  $y$  explicitamente como função de  $x$ , tendo-se a relação  $F(x, y) = 0$ .

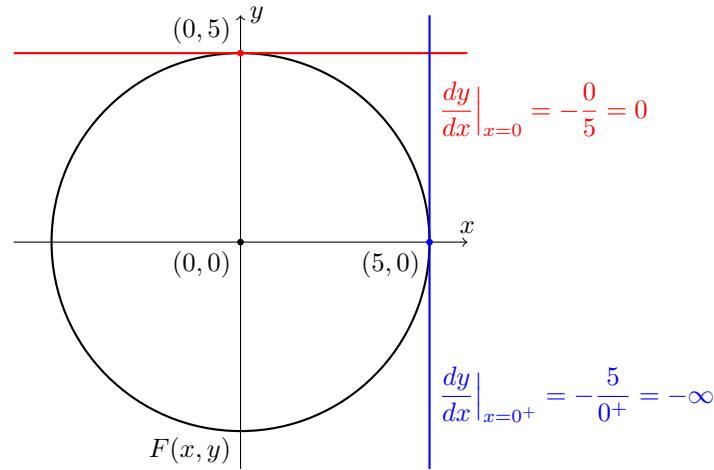
O processo para achar a taxa de variação de uma variável em relação à outra é basicamente derivando tudo e manipulando algebricamente a parte referente à variável de interesse até achar o resultado.

Com  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 25 = 0$ , para achar  $\frac{dy}{dx}$ :

$$\frac{d}{dx} F(x, y) = \frac{d}{dx} (x^2 + y^2 - 25) = \frac{d}{dx} (0) \Rightarrow \frac{d}{dx} x^2 + \frac{d}{dx} y^2 + \frac{d}{dx} (25) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{d}{dx} y^2 + 0 = 0$$

Como, algebricamente,  $\frac{d}{dx} y^2 = \frac{dy^2}{dx} = \frac{dy^2}{dy} \frac{dy}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}$ :

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \Rightarrow 2y \frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$



## 2.8 Derivação logarítmica

Dada uma função muito complexa, tal qual  $f(x) = y = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5}$ , para encontrar  $f'(x)$  teriam de ser usadas a regra do produto, a regra do quociente e a regra da cadeia, tornando-se um processo extremamente longo.

Uma abordagem interessante pode ser trabalhar com logaritmos, já que, algebricamente:

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{dy}{dx} \frac{d}{dy} \ln y = \frac{dy}{dx} \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dx} \ln y$$

$$y = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \Rightarrow \ln y = \ln \left( \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \right) = \ln x^3 + \ln(\sqrt{x^2+1}) - \ln((3x+2)^5) = 3 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 5 \ln(3x+2) \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dx} \ln y = \frac{d}{dx} \left[ 3 \ln x + \frac{1}{2} \ln(x^2+1) - 5 \ln(3x+2) \right] = \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2}$$

Como  $\frac{dy}{dx} = y \frac{d}{dy} \ln y$ :

$$\frac{d}{dx} \left[ \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \right] = \frac{x^3\sqrt{x^2+1}}{(3x+2)^5} \left( \frac{3}{x} + \frac{x}{x^2+1} - \frac{15}{3x+2} \right)$$

## 2.9 Diferenciais

Relembrando a aproximação linear:

$$f(x+h) - f(x) \approx hf'(x)$$

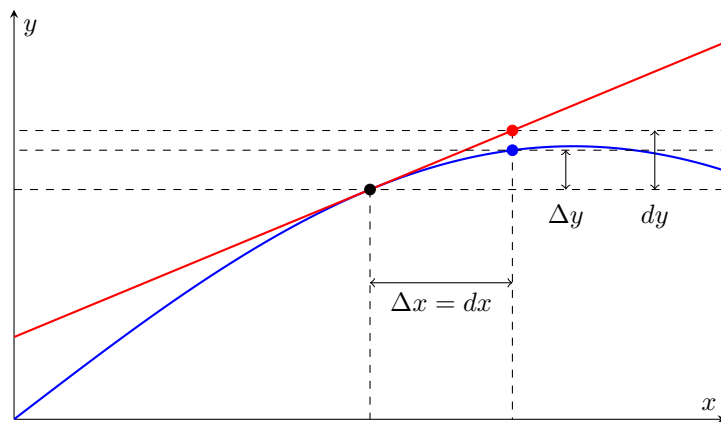
$h$  pode ser substituído por  $\Delta x$ , ficando:

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx \Delta x f'(x) \Rightarrow \Delta y \approx \frac{dy}{dx} \Delta x \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}.$$

Como  $dx$  é apenas uma referência à variação de  $x$ , de modo que, algebricamente,  $\Delta x = dx$ , ficando  $\Delta y \approx dy$ .

Isso faz sentido, já que  $\frac{\Delta y}{\Delta x} \approx \frac{dy}{dx}$  para  $\Delta x$  próximo de 0.

Portanto, para encontrar um valor na função, ao invés de seguir o caminho por  $f$ , seguimos pela reta tangente à um ponto conhecido ( $y + \Delta y \approx y + dy$ ).



Dessa maneira é possível aproximar funções que seriam complicadas de calcular.

Tendo  $f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ , tem-se, por exemplo,  $f(4) = \sqrt{4} = 2$ .  $f(4.02) = 2.004994\dots$ , sendo difícil de calcular manualmente, ao par que, por diferenciais,  $f(4.02) \approx \sqrt{4} + \frac{0.02}{2\sqrt{4}} = 2 + \frac{0.02}{4} = 2 + 0.005 = 2.005$  (uma ótima aproximação, visto que o erro é menor que 0.000006).

## 2.10 L'Hôpital

É uma ferramenta que permite resolver limites indeterminados do tipo  $0/0$ , ou  $\infty/\infty$  de maneira simples.

### Caso de $0/0$ :

Pode-se utilizar a intuição dada pelos diferenciais, onde  $\Delta y \approx f'(x)\Delta x$ , isso sendo uma igualdade para  $\Delta x \rightarrow 0$ .

Como  $f(a) = 0$ :  $f(x) = -(0 - f(x)) = -(f(a) - f(x)) = -\Delta y_f$ , e o mesmo para  $g(x) = -\Delta y_g$ :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{-\Delta y_f}{-\Delta y_g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\Delta y_f}{\Delta y_g} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)\Delta x}{g'(x)\Delta x} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \left( \text{que daria } \frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} \sin x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

### Caso de $\infty/\infty$ :

É bastante intuitivo de se pensar que se  $f$  cresce mais rápido que  $g$ , então  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$ .

Para  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$ , com uma análise simples do crescimento das funções:

$$\frac{\ln 10}{10} = 0.230 \quad \frac{\ln 100}{100} = 0.046 \quad \frac{\ln 1000}{1000} = 0.007 \quad \frac{\ln 1000000}{1000000} = 1.38 \cdot 10^{-5}$$

$x$  cresce muito mais rápido que  $\ln x$  quando  $x \rightarrow \infty$ , portanto, mesmo que ambas tendam ao infinito,  $x$  sempre terá um valor muito maior do que  $\ln x$ .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \left( \text{que daria } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{d}{dx} \ln x}{\frac{d}{dx} x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Através de manipulação algébrica é possível abranger a regra de L'Hopital para casos diferentes dos explicitados.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} \right] (\text{caso } \infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x + \sin x}{x \sin x} \left( \text{caso } \frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dx} [-x + \sin x]}{\frac{d}{dx} x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1 + \cos x}{\sin x + x \cos x} = 0$$



## 2.11 Derivadas para análise de uma função

### 1ª derivada:

Pode-se determinar o sentido de uma função em um ponto  $a$ , sendo que se  $f'(a) < 0$  ela está **decrecendo**, se  $f'(a) = 0$  **sua variação é nula** e se  $f'(a) > 0$  ela está **crescendo**.

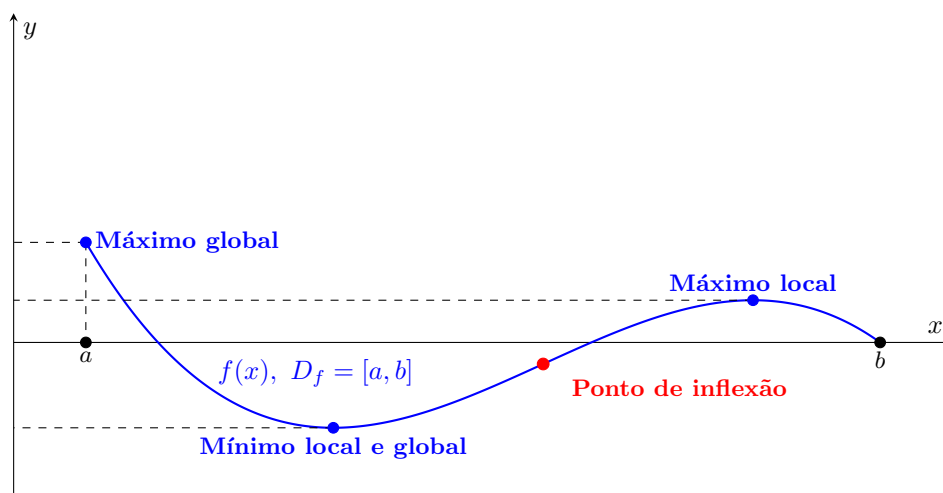
### 2ª derivada:

Descobre-se a concavidade da função, de modo que se  $f''(a) > 0$  a função é **convexa** (concavidade para cima), se  $f''(a) = 0$  pode se trata-se de um **ponto de inflexão** ou uma função afim (nem sempre é, como no caso de  $f(x) = x^4$ , onde  $f''(0) = 12(0) = 0$ ), e se  $f''(a) < 0$  trata-se de uma função **côncava** (para baixo).

### Máximos e mínimos:

Um **máximo local** possui  $f'(a) = 0$  (pois caso contrário a função tem para onde crescer ou decrescer) e  $f''(a) < 0$ . Já para ser um **mínimo local**, deve possuir  $f'(a) = 0$  e  $f''(a) > 0$ .

Para ser um **máximo** ou **mínimo global**, ele tem de ser o maior ou menor ponto da função no domínio respectivamente. Quando o intervalo é fechado  $[a, b]$ , os máximos e mínimos globais podem ser pontos referentes aos os máximos e mínimos locais ou  $f(a)$  ou  $f(b)$ .



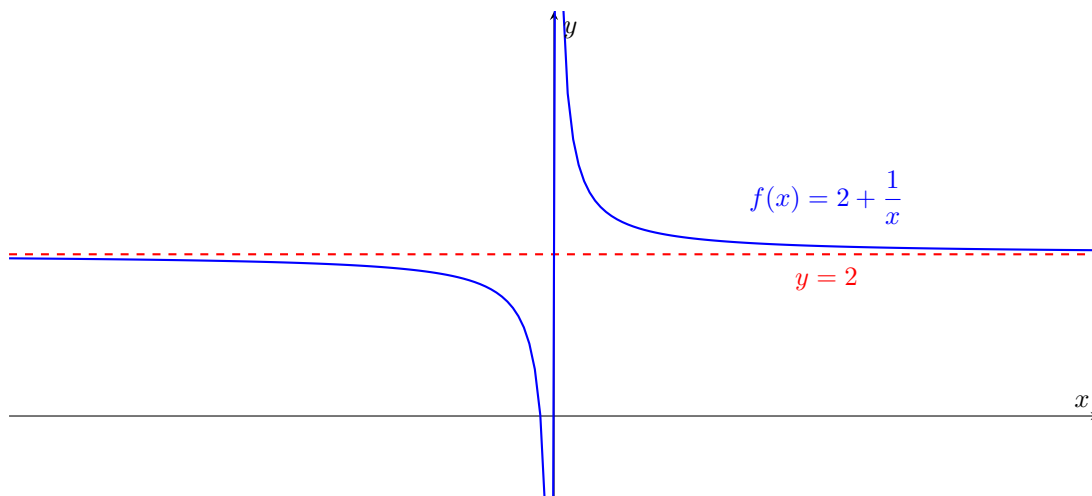
## 2.12 Assíntotas

Trata-se do comportamento que algumas funções tem de se aproximarem à uma reta para certos valores.

### Horizontais:

Se aproximam de uma reta horizontal quando  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = c, c \in \mathbb{R}$ .

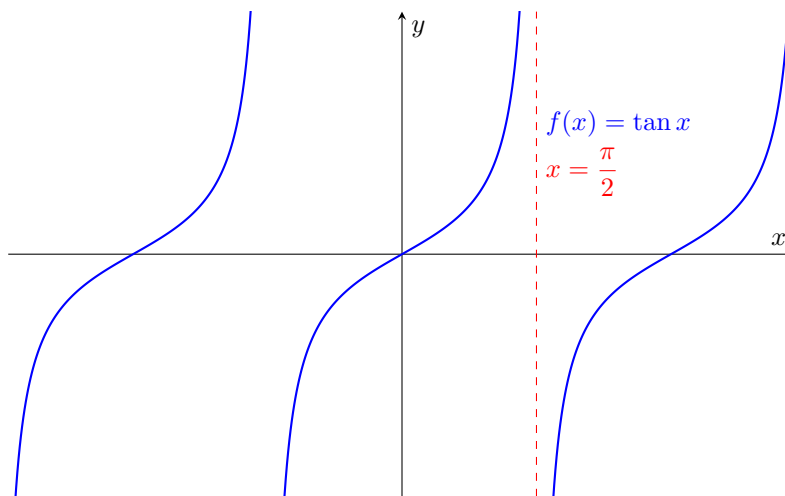
$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2 + \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 + \frac{1}{x} = 2$ , logo,  $f$  tem uma assíntota horizontal em  $y = 2$ .



### Verticais:

Se aproximam de uma reta vertical quando  $\lim_{x \rightarrow c^\pm} f(x) = \pm\infty$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

$\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^-} \tan x = \infty$  e  $\lim_{x \rightarrow (\pi/2)^+} \tan x = -\infty$ , logo,  $f$  tem uma assíntota vertical em  $x = \pi/2$ .



### Oblíquas:

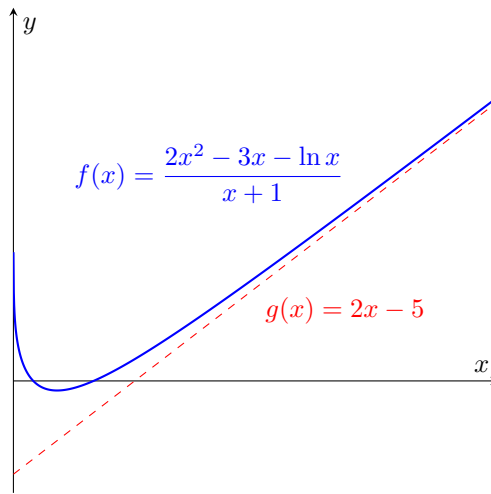
Quando uma função  $f$  tende à uma reta  $g(x) = ax + b$ , onde, dessa maneira,  $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ .

Para encontrá-la, pode-se usar a noção de que, se o crescimento de  $m$  é maior do que  $h$ :  $f(x) = m(x) + h(x) \approx m(x)$ , quando  $x \rightarrow \infty$ .

Sendo  $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1}$ , para valores  $x$  muito grandes:

$$\frac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1} = \frac{2x^2 - 3x}{x + 1} - \frac{\ln x}{x + 1} \approx \frac{2x^2 - 3x}{x + 1} = 2x - 5 + \frac{5}{x + 1} \approx 2x - 5$$

Como  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[ \frac{2x^2 - 3x - \ln x}{x + 1} - (2x - 5) \right] = 0$ , então  $2x - 5$  é uma assíntota oblíqua de  $f$ .



### 3 Primitivas

São o processo oposto das derivadas, de modo que,  $F$  é primitiva de  $f$ , se:

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x) dx = F(x) + c, \text{ em que } c \text{ é constante que é perdida na derivada.}$$

$$\frac{d}{dx} [2x + 4] = 2 \Leftrightarrow \int 2 dx = 2x + c. \text{ Para a mesma função, basta assumir } c = 4 \Rightarrow 2x + 4$$

Toda função contínua em um intervalo possui uma primitiva nesse espaço.

#### Primitivas comuns:

Realizando o processo inverso do cálculo da derivada:

- $\int a dx = ax + c.$
- $\int \sin x dx = -\cos x + c.$
- $\int \cos x dx = \sin x + c.$
- $\int a^x dx, a > 0, a \neq 1 = \frac{a^x}{\ln a} + c \Rightarrow \int e^x dx = e^x + c.$
- $\int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln |x| + c \Rightarrow \int \frac{1}{x \ln a} dx, a > 0, a \neq 1 = \frac{\ln |x|}{\ln a} + c = \log_a |x| + c.$
- $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, n \neq -1.$

#### Propriedades:

- $\int \alpha f(x) dx = \alpha \int f(x) dx.$
- $\int f(x) + g(x) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx.$

Não existe uma regra da cadeia, regra do produto ou regra do quociente para a resolução de primitivas, fazendo-se necessário o uso de métodos mais refinados para resolver integrais de maior complexidade.

## Apêndice A

### Dedução das propriedades de derivadas

Soma de derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)] + [g(x+h) - g(x)]}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)\end{aligned}$$

Produto de derivada com escalar:

$$\frac{d}{dx}[\alpha f(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha f(x+h) - \alpha f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\alpha[f(x+h) - f(x)]}{h} = \alpha \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right) = \alpha f'(x)$$

### Observação!

Para a **regra do produto**, **regra do quociente** e **regra da cadeia**, a noção de aproximação linear ( $f(x+h) \approx f(x) + h f'(x)$ ,  $h \approx 0$ ) é importante.

Regra do produto:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x) + h f'(x))(g(x) + h g'(x)) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x)g(x) + h f'(x)g(x) + h f(x)g'(x) + h^2 f'(x)g'(x) - f(x)g(x)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h f'(x)g(x) + h f(x)g'(x) + h^2 f'(x)g'(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + h f'(x)g'(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} [f'(x)g(x) + f(x)g'(x) + h f'(x)g'(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}[f(x) \cdot g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\end{aligned}$$

Regra do quociente:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x) + h f'(x)}{g(x) + h g'(x)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x)g(x) + h f'(x)g(x) - (f(x)g(x) + h f(x)g'(x))}{h(g(x) + h g'(x))}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(f'(x)g(x) - f(x)g'(x))}{h(g^2(x) + h g'(x)g(x))} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x) + h g'(x)g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \Rightarrow \frac{d}{dx} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}\end{aligned}$$

Regra da cadeia:

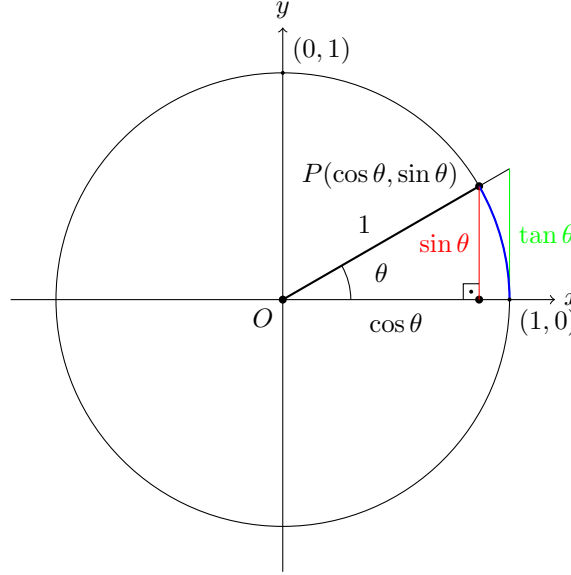
$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}[f \circ g] &= \frac{d}{dx}f(g(x)) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + h g'(x)) - f(g(x))}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x)) + h f'(g(x))g'(x) - f(g(x))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h f'(g(x))g'(x)}{h} = f'(g(x))g'(x) \Rightarrow \frac{d}{dx}f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)\end{aligned}$$

## Dedução das derivadas

- $\frac{d}{dx}c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0$  para qualquer  $c \in \mathbb{R}$ .
- $\frac{d}{dx} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cos h + \cos x \sin h - \sin x}{h} = \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h}$

Apesar de o limite poder ser resolvido por l'hopital, como é necessário previamente definir a derivada de  $\sin x$  (problema original), a solução utilizada será através de trigonometria e limites:

Tendo um círculo de raio 1, considerando uma reta que corte o círculo, formando um arco de ângulo  $\theta$ , e dessa mesma reta, forma-se um triângulo retângulo, igual ao da imagem:



A área da seção circular pode ser calculada por  $\frac{1}{2} r^2 \theta$ , e a área do triângulos menor e maior por  $\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta$  e  $\frac{1}{2} r \tan \theta$ , respectivamente.

Para definir  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta}$ :

$$\frac{1}{2} \cos \theta \sin \theta \leq \frac{1}{2} r^2 \theta \leq \frac{1}{2} r \tan \theta \Rightarrow \cos \theta \sin \theta \leq \theta \leq \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow \cos \theta \leq \frac{\theta}{\sin \theta} \leq \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow \frac{1}{\cos \theta} \geq \frac{\sin \theta}{\theta} \geq \cos \theta \Rightarrow$$

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \cos \theta \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\cos \theta} \Rightarrow 1 \leq \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \leq 1 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$$

Para definir  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} &= \frac{\cos \theta - 1}{\theta} \frac{\cos \theta + 1}{\cos \theta + 1} = \frac{\cos^2 \theta - 1}{\theta(\cos \theta + 1)} = -\frac{\sin^2 \theta}{\theta(\cos \theta + 1)} = -\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \left[ -\frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} \right] = \\ &= -\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\cos \theta + 1} = -1 \cdot \frac{0}{2} = 0 \Rightarrow \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta} = 0 \end{aligned}$$

Logo:

$$\sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \sin x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 = \cos x \Rightarrow \frac{d}{dx} \sin x = \cos x.$$

- $\frac{d}{dx} \cos x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cos h + \sin x \sin h - \cos x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x (\cos h - 1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \sin h}{h} =$   
 $\cos x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = \cos x \cdot 0 - \sin x \cdot 1 = -\sin x \Rightarrow \frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$

- $\frac{d}{dx}a^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x a^h - a^x}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$

Sabendo que  $a^h = e^{\ln a^h} = e^{h \ln a}$ . Sabendo que o polinômio de Taylor de  $e^h$  é igual à  $1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \dots$ , o de  $e^{h \ln a}$  sendo então  $1 + h \ln a + \frac{(h \ln a)^2}{2!} + \frac{(h \ln a)^3}{3!} + \dots$ :

$$a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 + h \ln a + \frac{(h \ln a)^2}{2!} + \frac{(h \ln a)^3}{3!} + \dots\right) - 1}{h} = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h \ln a + \frac{(h \ln a)^2}{2!} + \frac{(h \ln a)^3}{3!} + \dots}{h} =$$

$$a^x \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \ln a + \frac{h \ln^2 a}{2!} + \frac{h^2 \ln^3 a}{3!} + \dots \right] = a^x \ln a \Rightarrow \frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a.$$

**Muito usada:**  $\frac{d}{dx}e^x = e^x \ln e = e^x \cdot 1 = e^x$ .

- $\frac{d}{dx} \log_a x$ , tendo função inversa igual a  $f(x) = a^x \Rightarrow f'(x) = a^x \ln a$ :  $\frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{a^{\log_a x} \ln a} = \frac{1}{x \ln a}$ .

**Muito usada:**  $\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x \ln e} = \frac{1}{x \cdot 1} = \frac{1}{x}$ .

**Regra do tombo:**

- $\frac{d}{dx}x^n = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$ . A partir da definição de função polinomial, usando Binômio de Newton, que é:

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k a^{n-k}, \quad n \neq 0, \text{ com } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Expandindo:

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} &= \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \\ \binom{n}{1} &= \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \\ \binom{n}{2} &= \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \\ &\vdots \\ \binom{n}{n-2} &= \frac{n!}{(n-2)!(n-(n-2))!} = \frac{n(n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} \\ \binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} = \frac{n(n-1)!}{(n-1)!} = n \\ \binom{n}{n} &= \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{n!} = 1 \end{aligned}$$

Quando aplicado esse conceito na derivada:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left[ \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n \right] - x^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n - x^n}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\binom{n}{1}x^{n-1}h + \binom{n}{2}x^{n-2}h^2 + \dots + \binom{n}{n}h^n}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \binom{n}{1}x^{n-1} + \binom{n}{2}x^{n-2}h + \dots + \binom{n}{n}h^{n-1} \right] = \binom{n}{1}x^{n-1} = n x^{n-1} \Rightarrow \frac{d}{dx}x^n = n x^{n-1}, \quad n \in \mathbb{R}^*. \end{aligned}$$

## Fontes

1. STEWART, James. Cálculo - Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
2. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo - Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
3. TAKHE. Cálculo 1: aulas e exercícios resolvidos. [YouTube], 2023. Disponível em: [https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1ap15ib\\_uL7UkP4fDwy4m](https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1ap15ib_uL7UkP4fDwy4m). Acesso em: 10 set. 2025.
4. BARROS, Tatiana Leal. Disciplina: Cálculo com funções de uma variável Real. Curso de graduação em Engenharia de Computação – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2024.
5. CAMARGO JUNIOR, Fausto de. Disciplina: Integração e séries. Curso de graduação em Engenharia de Computação – CEFET-MG, 2024.