Integração e séries

Kayky Moreira Praxedes

Fevereiro 2026

1 Integrais

1.1 Primitivas

São o processo oposto das derivadas, de modo que, F é primitiva de f, se:

$$\frac{d}{dx}F(x) = f(x) \Leftrightarrow \int f(x)\,dx = F(x) + c, \text{ em que } c \text{ é constante que é perdida na derivada.}$$

$$\frac{d}{dx}\left[2x+4\right] = 2 \Leftrightarrow \int 2\,dx = 2x + c. \text{ Para a mesma função, basta assumir } c = 4 \Rightarrow 2x+4$$

Toda função contínua em um intervalo possui uma primitiva nesse espaço.

Primitivas comuns:

Realizando o processo inverso do cálculo da derivada:

- $\int a\,dx = a\,x + c.$
- $\int \sin x\,dx = -\cos x + c.$
- $\int \cos x\,dx = \sin x + c.$
- $\int a^x\,dx,\ a > 0,\ a \neq 1 = \dfrac{a^x}{\ln a} + c \Rightarrow \int e^x\,dx = e^x + c.$
- $\int \dfrac{1}{x}\,dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + c \Rightarrow \int \dfrac{1}{x\,\ln a}\,dx,\ a > 0,\ a \neq 1 = \dfrac{\ln|x|}{\ln a} + c = \log_a|x| + c.$
- $\int x^n\,dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + c,\ n \neq -1.$

Propriedades:

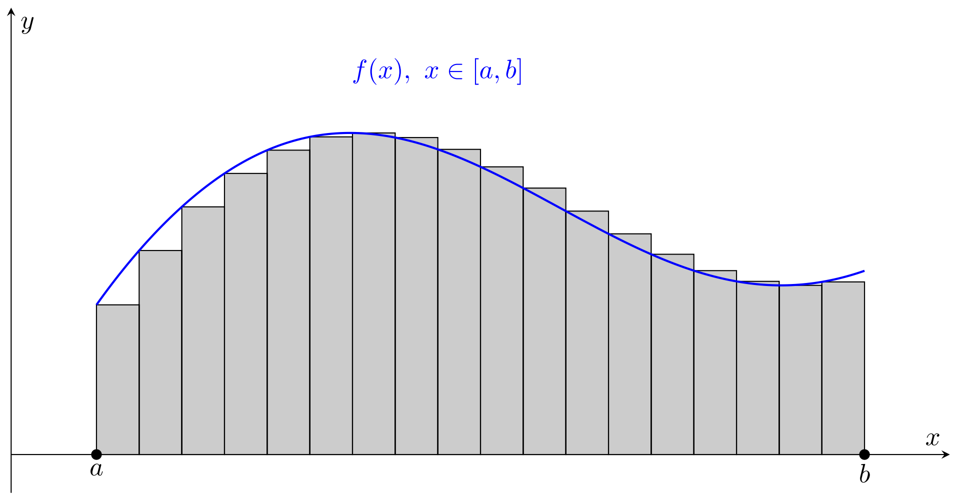
- $\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx.$
- $\int f(x) + g(x)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx.$

Não existe uma regra da cadeia, regra do produto ou regra do quociente para a resolução de primitivas, fazendo-se necessário o uso de métodos mais refinados para resolver integrais de maior complexidade.

1.2 Integrais definidas

As integrais são ferramentas que permitem calcular a área do gráfico acima e abaixo do eixo x no intervalo $a \leq x \leq b$ (áreas positivas e negativas, respectivamente). Essa lógica vem da aproximação da área através da soma de retângulos de lados Δx e altura $f(x_i)$, ficando:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x, \text{ de modo que:} \quad A = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\, dx$$



Teorema fundamental do cálculo:

Relaciona integrais definidas e primitivas $_{[01]}$:

$$\int_a^b f(x)\, dx = F(b) - F(a)$$

Integrais impróprias:

Integrais cujos limites de integração são infinitos:

- $\displaystyle\int_a^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx = \lim_{b \to \infty} F(b) - F(a)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(x)\, dx = F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a)$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \lim_{a \to -\infty} \left[\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)\, dx \right] = \lim_{b \to \infty} F(b) - \lim_{a \to -\infty} F(a)$

Ou integrais de funções descontínuas em certos pontos dentro do intervalo $[a, b]$:

- $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx,\ c \in [a, b] \text{ e } \nexists f(c) = \lim_{k_1 \to c^-} \int_a^{k_1} f(x)\, dx + \lim_{k_2 \to c^+} \int_{k_2}^{b} f(x)\, dx = \lim_{k_1 \to c^1} F(k_1) - F(a) + F(b) - \lim_{k_2 \to c^+} F(k_2)$

1.3 Métodos de integração

Substituição de variáveis:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x) \Rightarrow \int f'(g(x))g'(x)\, dx = f(g(x)) + c$$

$$\int x\sqrt{x^2+1}\, dx, \text{ se } u = x^2 + 1 \text{ e } du = 2x\, dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2x}\text{:} \int x\sqrt{x^2+1}\, dx = \int \frac{x\sqrt{u}}{2x}\, du = \frac{1}{2} \int u^{1/2}\, du =$$

$$\frac{1}{2}\frac{u^{3/2}}{3/2}+c=\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}+c \Rightarrow \int x\sqrt{x^2+1}\,dx=\frac{(x^2+1)^{3/2}}{3}+c$$

Integral por partes:

$$\frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)]=f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x) \Rightarrow \int \frac{d}{dx}[f(x)\,g(x)]\,dx=\int f'(x)\,g(x)\,dx+\int f(x)\,g'(x)\,dx \Rightarrow$$

$$f(x)\,g(x)=\int f'(x)\,g(x)\,dx+\int f(x)\,g'(x)\,dx \Rightarrow \int f(x)\,g'(x)\,dx=f(x)\,g(x)-\int f'(x)\,g(x)\,dx$$

De maneira simplificada, considerando $f(x)=u$, $f'(x)=du$, $g(x)=v$ e $g'(x)=dv$:

$$\int u\,dv=u\,v-\int v\,du$$

$$\int x^3e^x\,dx,\text{ se } u=x^3,\ du=3x^2,\ dv=e^x \text{ e } v=e^x\text{:}\quad \int x^3e^x\,dx=x^3e^x-\int 3x^2e^x\,dx=x^3e^x-3\int x^2e^x\,dx$$

Se $u=x^2$, $du=2x$, $dv=e^x$ e $v=e^x$: $\displaystyle\int x^3e^x\,dx=x^3e^x-3\left(x^2e^x-\int 2x\,e^x\,dx\right)=x^3e^x-3\left(x^2e^x-2\int x\,e^x\,dx\right)$

$$\text{Se } u=x,\ du=1,\ dv=e^x \text{ e } v=e^x\text{:}\quad \int x^3e^x\,dx=x^3e^x-3\left(x^2e^x-2\left(x\,e^x-\int e^x\,dx\right)\right)\Rightarrow$$

$$\int x^3e^x\,dx=x^3e^x-3x^2e^x+6x\,e^x-6e^x+c=e^x(x^3-3x^2+6x-6)+c$$

Um método eficiente de resolver uma integral por partes é montando duas colunas, uma com o valor que vai ser o u e outra o dv, de modo que na linha abaixo são colocados o du e o v. Alterna-se a ligação do u com o v em + e - até $u=0$.

$$\int x^3e^x\,dx$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{u} & & \mathbf{dv} \\
x^3 & & e^x \\
 & \searrow + & \\
3x^2 & & e^x \\
 & \searrow - & \\
6x & & e^x \\
 & \searrow + & \\
6 & & e^x \\
 & \searrow - & \\
0 & \xrightarrow{+} & e^x
\end{array}$$

$$\int x^3e^x\,dx=x^3e^x-3x^2e^x+6xe^x-6e^x+\int 0\cdot e^x\,dx=e^x(x^3-3x^2+6x-6)+c$$

Nesse caso a integral era por partes chegava em uma integral conhecida, mas ela pode ser periódica. Quando obtêm-se um termo repetido, ele é usado para simplificar a equação.

$$\int e^x\sin x\,dx$$

$$\begin{array}{ccc}
\mathbf{u} & & \mathbf{dv} \\
\sin x & & e^x \\
 & \searrow + & \\
\cos x & & e^x \\
 & \searrow - & \\
-\sin x & \xrightarrow{+} & e^x
\end{array}$$

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x \, dx \Rightarrow 2 \int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - e^x \cos x + c \Rightarrow$$

$$\int e^x \sin x \, dx = \frac{e^x(\sin x - \cos x)}{2} + c$$

Integrais trigonométricas:

1. $$\int \sin^m x \cos x \, dx, \text{ ou } \int \cos^m x \sin x \, dx$$

   Substituir: $u = \sin x$ e $du = \cos x \, dx$ ou $u = \cos x$ e $-\sin x \, dx$.

2. $$\int \sin^m x \, dx, \text{ ou } \int \cos^m x \, dx \quad m \,\%\, 2 = 0$$

   Substituir: $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos(2x)}{2}$ ou $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos(2x)}{2}$

3. $$\int \sin^m x \, dx, \text{ ou } \int \cos^m x \, dx \quad m \,\%\, 2 = 1$$

   Usar a propriedade: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, e transformar a integral em uma do caso 1.

4. $$\int \sin^m x \cos^n x \, dx$$

   Usar a propriedade: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, e transformar a integral em uma do caso 1 ou 2.

5. $$\int \sin(ax)\sin(bx) \, dx, \text{ ou } \int \sin(ax)\cos(bx) \, dx, \text{ ou } \int \cos(ax)\cos(bx) \, dx$$

   Usar as propriedades:

   - $\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$
   - $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$
   - $\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$

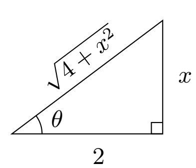
6. $$\int \tan^m(x) \, dx, \text{ ou } \int \sec^n(x) \, dx$$

   Usar a propriedade: $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$, e/ou realizar integral por partes, a depender do caso.

Substituição trigonométrica:

Com $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, e $\tan^2 \theta + 1 = \sec^2 \theta$, utiliza-se um triângulo retângulo com um ângulo θ, tal que $f(x)$ e x são elementos do triângulo.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4 + x^2}}$$



Analisando o triângulo:

$$\tan\theta = \frac{x}{2} \Rightarrow x = 2\tan\theta \quad dx = 2\sec^2\theta\, d\theta \Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \int \frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{4+4\tan^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{4(1+\tan^2\theta)}}\, d\theta =$$

$$\int \frac{2\sec^2\theta}{\sqrt{4\sec^2\theta}}\, d\theta = \int \frac{2\sec^2\theta}{2|\sec\theta|}\, d\theta, \text{ como } \theta = \tan^{-1}\left(\frac{x}{2}\right),\ D_\theta = [-\pi/2,\ \pi/2]$$

Como, nesse intervalo, para todo θ, $\sec\theta \geq 0$, então $|\sec\theta| = \sec\theta$. Logo:

$$\int \frac{\sec^2\theta}{|\sec\theta|}\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta}{\sec\theta}\, d\theta = \int \sec\theta\, d\theta = \int \sec\theta \frac{\sec\theta + \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta = \int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\, \tan\theta}{\sec\theta + \tan\theta}\, d\theta$$

$$\text{Se } u = \sec\theta + \tan\theta \text{ e } du = \sec^2\theta + \sec\theta\, \tan\theta\, d\theta \Rightarrow d\theta = \frac{du}{\sec^2\theta + \sec\theta\, \tan\theta} :$$

$$\int \frac{\sec^2\theta + \sec\theta\, \tan\theta}{u} \frac{1}{\sec^2\theta + \sec\theta\, \tan\theta}\, du = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + c = \ln|\sec\theta + \tan\theta| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c \Rightarrow$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = \ln\left|\frac{\sqrt{4+x^2}}{2} + \frac{x}{2}\right| + c$$

Frações parciais:

Trata-se de separar uma fração com denominador polinomial em uma soma de frações mais simples.

$$\int \frac{5x-3}{x^2-2x-3}\, dx = \int \frac{5x-3}{(x+1)(x-3)}\, dx = \int \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-3}\, dx$$

$$5x - 3 = A(x-3) + B(x+1) \Rightarrow (A+B-5)x + (-3A+B+3) = 0$$

$$\begin{cases} A + B = 5 \\ -3A + B = -3 \end{cases} \Rightarrow A = 2,\ B = 3 \Rightarrow \int \frac{2}{x+1} + \frac{3}{x-3}\, dx = 2\ln|x+1| + 3\ln|x-3| + c$$

Caso o polinômio de $f(x)$ seja de maior grau do que o de $g(x)$, fatora-se:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = m(x) + \frac{h(x)}{g(x)}$$

Caso o denominador seja um quadrado perfeito, como:

$$\frac{2x}{(x+1)^2}, \text{ tem-se que: } \frac{2x}{(x+1)^2} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2}$$

Caso o denominador seja um polinômio irredutível, como:

$$\frac{7x+2}{(x+2)(x^2+5)}, \text{ tem-se que: } \frac{7x+2}{(x+2)(x^2+5)} = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+c}{x^2+5}$$

2 Séries

2.1 Séries finitas

Tendo $a_n = f(n)$, trata-se de uma sequência finita: $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i = S_n$, $S_n \in \mathbb{R}$.

2.2 Séries infinitas

Uma sequência infinita: $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = S$.

Se a série converge, $S \in \mathbb{R}$, se a série diverge, $S \to \pm\infty$.

Propriedades:

Considerando $\sum^{\infty} a_n = A$ e $\sum^{\infty} b_n = B$, A e $B \in \mathbb{R}$:

- $\sum^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum^{\infty} a_n \pm \sum^{\infty} b_n = A \pm B$
- $\sum^{\infty}(k\, a_n) = k \sum^{\infty} a_n = k\, A$
- Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow \sum_{n=k}^{\infty} a_n$ converge $\forall\, k \geq 1$
- $\sum^{\infty}(a_n + b_n)$ pode convergir mesmo quando $\sum^{\infty} a_n$ e $\sum^{\infty} b_n$ divergem:

$$\sum^{\infty} a_n = 1 + 1 + 1 + \dots, \quad \sum^{\infty} b_n = -1 - 1 - 1 - \dots \Rightarrow \sum (a_n + b_n) = (1-1) + (1-1) + (1-1) + \dots = 0$$

2.3 Séries geométricas

São séries no modelo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1} = a + a\, r + a\, r^2 + \dots + a\, r^{n-1} = S$$

Se a série converge, $S = \dfrac{a}{1-r}$, caso contrario, ela pode divergir ($S \to \pm\infty$) ou então S pode não existir [02].

Série telescópica:

Trata-se de uma série cujas somas dos elementos admitem uma simplificação significativa através de cancelamentos sucessivos entre termos consecutivos, como $\sum^{\infty}(a_n - a_{n+k}),\ k \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right] = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) =$$

$$1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Como $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n(n+1)} = 1$.

2.4 Testes de convergência

Testes gerais:

- **Teste do n-ésimo termo** $\left(\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = k\right)$**:**
  - $k \neq 0$: a série **diverge** (já que a soma sempre cresceria).
  - $k = 0$: o teste é **inconclusivo**.

  Sobre as séries $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{n-2}{2\,n+4}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$:

  $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x-2}{2\,x+4} = \dfrac{1}{2}$ **diverge** $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ **inconclusivo** (diverge) $\qquad \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ **inconclusivo** (converge)

- **Séries geométricas** $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a\, r^{n-1}\right)$**:**
  - $|r| < 1$: a série **converge**.
  - $r \geq 1$: a série **diverge**.
  - $r \leq -1$: a soma não para em um valor fixo ($\nexists\, S$).

  Casos explicados na seção de séries geométricas.

- **Séries P** $\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}\right)$**:**
  - $p > 1$: a série **converge**.
  - $p \leq 1$: a série **diverge**.

  Prova pelo teste da integral [03].

Testes para termos com sinais iguais:

- **Teste da integral** $\left(\int_1^{\infty} f(n)\, dn = k\right)$**:**
  - $k \in \mathbb{R}$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
  - $k = \pm\infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge** [03].

- **Teste da comparação:**

  Sejam $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ e $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ séries de modo que $b_n \leq a_n \leq c_n$ para todo $n \geq k$:
  - $\sum_{n=k}^{\infty} c_n$ converge: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **converge**.
  - $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ diverge: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **diverge**.

- **Teste da comparação no limite:**

  Sejam $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ séries de modo que $a_n > 0$ e $b_n > 0$ para todo $n \geq k$, tem-se $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$
  - $c \in \mathbb{R}^*$: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ **tem o mesmo comportamento** (os dois convergem ou divergem).
  - $c = 0$ e $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ converge: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **converge**.
  - $c = \pm\infty$ e $\sum_{n=k}^{\infty} b_n$ diverge: $\sum_{n=k}^{\infty} a_n$ **diverge**.

- **Teste da razão** $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p\right)$**:**
  - $p < 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
  - $p > 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.
  - $p = 1$: o teste é **inconclusivo** $_{[04]}$.
- **Teste da raíz** $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p\right)$**:**
  - $p < 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **converge**.
  - $p > 1$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **diverge**.
  - $p = 1$: o teste é **inconclusivo** $_{[05]}$.

Séries alternadas

Tendo $u_n = |a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = \pm \sum\limits_{n=1}^{\infty} [(-1)^{n-1}\, u_n] = \pm(u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + u_5 - \dots)$.

A série converge se:

- $u_n > u_{n+1}$
- $u_n \to 0$

Isso ocorre pois, pela primeira propriedade, a soma pode ser delimitada:

$$\begin{cases} |S| = u_1 + (u_3 - u_2) + (u_5 - u_4) + (u_7 - u_6) + \dots < u_1 \\ |S| = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + (u_5 - u_6) + \dots > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow 0 < |S| < u_1$$

Além disso, como pela segunda propriedade os valores vão variando cada vez menos à medida que $n \to \infty$, a soma converge em um valor S.

Teste da convergência absoluta de uma série alternada:

Se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ converge, certamente $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ também, já que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \geq \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

3 Séries de potência

São séries no modelo $\sum\limits_{n=0}^{\infty} [c_n\,(x-a)^n] = c_0 + c_1\,(x-a) + c_2\,(x-a)^2 + \dots$, centradas em $x = a$.

Casos comuns envolvem $x = 0$ $\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty} [c_n\, x^n] = c_0 + c_1\, x + c_2\, x^2 + \dots\right)$ por simplificar bastante as contas.

3.1 Convergência

Séries de potência estão sujeitas as mesmas regras e testes de convergência das séries infinitas, mas ao invés de se verificar se a série converge, descobre-se um raio de convergência (se ele existe) $S_n = f(x)$, $x \in [a, b]$.

$$1 - \frac{1}{2}(x-2) + \frac{1}{4}(x-2)^2 - \frac{1}{8}(x-2)^3 + \dots + = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} (x-2)^{n-1}\right]$$

Sendo $r = -\dfrac{x-2}{2}$, onde, para convergir: $|r| < 1$:

$\left|-\dfrac{x-2}{2}\right| < 1 \Rightarrow -1 < \dfrac{x-2}{2} < 1 - 2 < x-2 < 2 \Rightarrow 0 < x < 4 \Rightarrow S = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\left(-\dfrac{x-2}{2}\right)} = \dfrac{2}{2+x-2} = \dfrac{2}{x} \Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}(x-2)^{n-1}\right] = \frac{2}{x},\ 0 < x < 4$$

Teorema da derivação:

Tendo $f(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n\,(x-a)^{n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, n(n-1)(x-a)^{n-2}$$
$$\vdots$$
$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, \frac{n!}{(n-k)!}(x-a)^{n-k},\ 0 \le k \le n$$

Teorema da integração:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n \Rightarrow \int f(x)\,dx = c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

3.2 Séries de Taylor e de Maclaurin

Séries de Taylor:

A definição de uma função através de uma série infinita de suas derivadas, centrada em um ponto $x = a$ $_{[06]}$.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \dots$$

Séries de Maclaurin:

Trata-se apenas de uma série de Taylor centrada em $x = 0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)\,x + \frac{f''(0)\,x^2}{2!} + \frac{f^{(3)}(0)\,x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n = \frac{\sin(0)}{0!}x^0 + \frac{\sin'(0)}{1!}x^1 + \frac{\sin''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\sin^{(n)}(0)}{n!}x^n =$$

$$\sin(0) + \cos(0)\,x - \frac{\sin(0)}{2!}x^2 - \frac{\cos(0)}{3!}x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \Rightarrow \sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}$$

3.3 Aplicações

Cálculo de limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x)^n}{n!}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \dots - \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \dots\right)\right) =$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(2x + \frac{2x^3}{3!} + \frac{2x^5}{5!} + \dots\right) = \lim_{x\to 0}\left(2 + \frac{2x^2}{3!} + \frac{2x^4}{5!} + \dots\right) \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2$$

Aproximações:

O quão boa é a aproximação $\cos(x) \approx 1 - \dfrac{x^2}{2}$ em $|x| < 0,5$?

Como $\cos(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$:

$$|\mathbf{Erro}(x)| < \frac{x^4}{4!} \Rightarrow \mathbf{Erro}(x) < \frac{x^4}{4!} \Rightarrow \mathbf{Erro}(\pm 0,5) < \frac{(\pm 0,5)^4}{24} \Rightarrow \mathbf{Erro}(\pm 0,5) < 0,0026$$

Resolução de integrais:

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ com erro} < 10^{-8}:$$

Os meios convencionais de resolução de integrais não conseguem solucionar a expressão, mas usando a série de Maclaurin de $\sin x$:

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx = \int_0^{0.1} \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} dx =$$

$$\int_0^{0.1} \frac{1}{x} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right) dx = \int_0^{0.1} 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \, dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \right]_0^{0.1} =$$

Primeiro termo (x): $0.1 = 1 \cdot 10^{-1}$

Segundo termo $\left(\dfrac{x^3}{3 \cdot 3!}\right)$: $\dfrac{(0.1)^3}{3 \cdot 3!} = 5.556 \cdot 10^{-5}$

Segundo termo $\left(\dfrac{x^7}{7 \cdot 7!}\right)$: $\dfrac{(0.1)^7}{7 \cdot 7!} = 2.83 \cdot 10^{-12}$

Segundo termo $\left(\dfrac{x^5}{5 \cdot 5!}\right)$: $\dfrac{(0.1)^5}{5 \cdot 5!} = 1.667 \cdot 10^{-8}$

O primeiro erro menor do que 10^{-8} é o quarto termo, portanto, a soma até o terceiro termo gera uma aproximação suficientemente precisa:

$$\int_0^{0.1} \frac{\sin x}{x} dx = \left[x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} \right]_0^{0.1} = 0.0999445$$

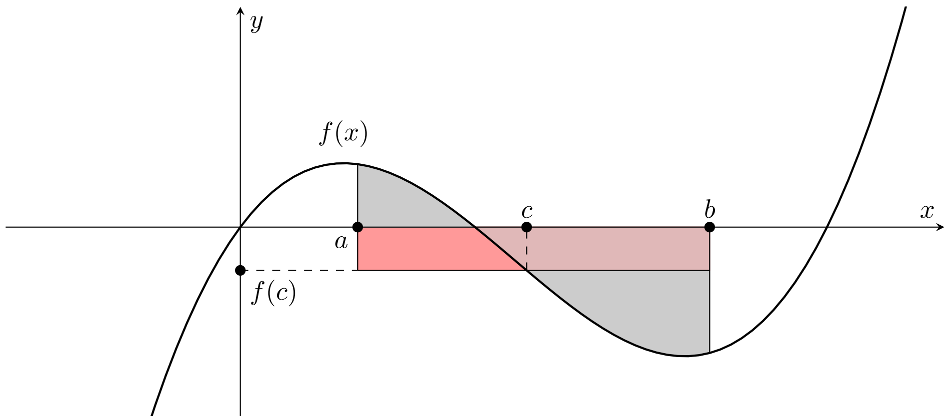
Apêndice A

Integrais definidas

[01] - Dedução do **teorema fundamental do cálculo**:

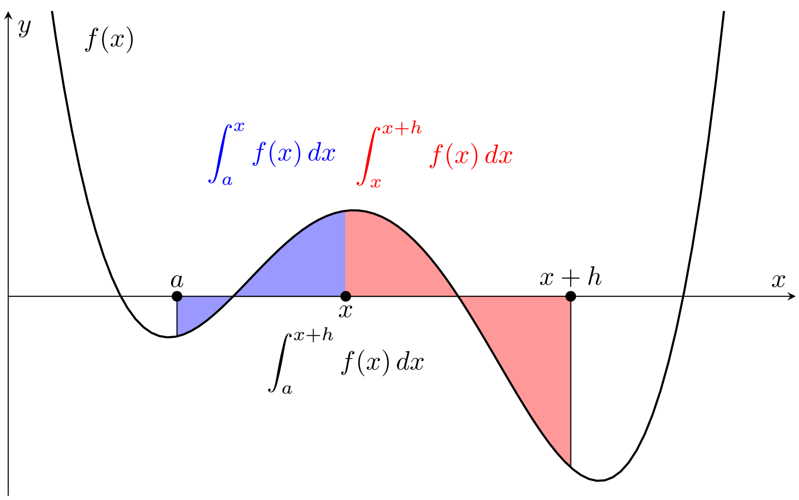
Teorema do valor médio para integrais:

Dada uma integral definida entre dois pontos a e b de uma f contínua, a área calculada pode ser igualada à um retângulo $f(c) \cdot (b-a)$, $c \in [a, b]$.



Definindo $G(x) = \int_a^x f(x)\,dx$ (pode ser entendida como a área a partir de a):

$$G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{G(x+h) - G(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx}{h}$$



Como visto pela imagem:

$$\int_a^{x+h} f(x)\,dx - \int_a^x f(x)\,dx = \int_x^{x+h} f(x)\,dx \Rightarrow G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\int_x^{x+h} f(x)\,dx}{h}$$

De acordo com o **teorema do valor médio para integrais**:

$$\int_x^{x+h} f(x)\,dx = f(c)\,h,\ c \in [x, x+h] \Rightarrow G'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(c)\,h}{h} = \lim_{h\to 0} f(c)$$

Como quando $h \to 0$, o intervalo em que está contido c passa a ser $x \le c \le x \Rightarrow c = x$. Dessa maneira, $G'(x) = f(x)$.

Sendo $F(x)$ a primitiva de $f(x)$, tem-se que:

$$\frac{d}{dx}[F(x) - G(x)] = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow F(x) - G(x) = c \Rightarrow G(x) = F(x) - c$$

Como:

$$G(a) = \int_a^a f(x)\,dx = 0 \Rightarrow G(a) = F(a) - c \Rightarrow F(a) - c = 0 \Rightarrow c = F(a) \Rightarrow G(x) = F(x) - F(a)$$

Definindo um valor b qualquer onde $b \ge a$, tem-se: $G(b) = F(b) - F(a) \Rightarrow \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

Séries geométricas

[02] - Dedução do cálculo do **valor de convergência de uma série geométrica**:

$$\sum_{i=1}^{n} a\,r^{i-1} = a + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^{n-1} = S_n \Rightarrow r\,S_n = a\,r + a\,r + a\,r^2 + \cdots + a\,r^n \Rightarrow$$

$$S_n - r\,S_n = a + (a\,r - a\,r) + (a\,r^2 - a\,r^2) + \cdots + (a\,r^{n-1} - a\,r^{n-1}) - a\,r^n \Rightarrow S_n(1-r) = a - a\,r^n \Rightarrow S_n = a\frac{1-r^n}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\,r^{n-1} = S = \lim_{n\to\infty} \frac{1-r^n}{1-r}$$

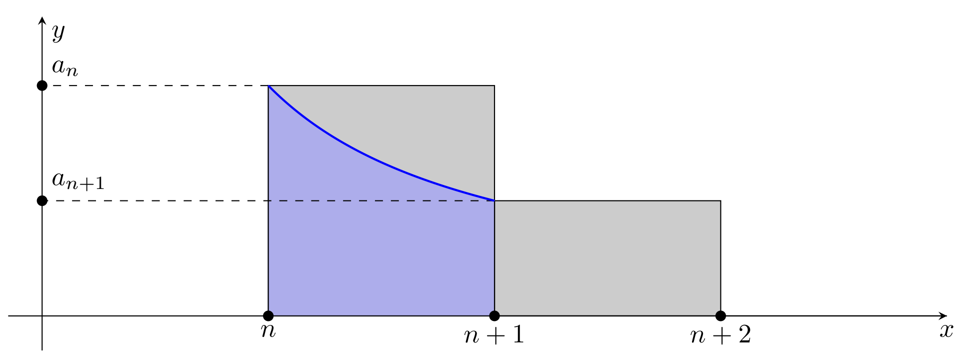
- Se $\le |r| < 1 \Rightarrow r^n \to 0 \Rightarrow S = \dfrac{a}{1-r}$
- Se $r \ge 1 \Rightarrow r^n \to \infty \Rightarrow S_n \to \pm\infty$, a depender do sinal de a.
- Se $r \le -1$, então a série vai se tornar alternada, e como $|a_i| \le |a_{i+1}|$, nunca parando em lugar nenhum.

Testes de convergência

[03] - Prova do **teste da integral**:

Relação entre a área em um somatório e uma integral:

Em uma função decrescente, definida por $f(i) \ge f(i+1)$, com $a_n = f(n)$, tem-se que $a_{n+1} \le \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,dx \le a_n$.



Expandindo essa mesma noção, tendo que vista que:

1. $a_{n+1} \ge \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx,\ a_{n+2} \ge \int_{n+2}^{n+3} f(x)\,dx,\ \cdots \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \ge \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

2. $a_{n+2} \leq \int_{n+1}^{n+2} f(x)\,dx,\ a_{n+3} \leq \int_{n+2}^{n+3} f(x)\,dx,\ \cdots \Rightarrow \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq \int_1^{\infty} f(x)\,dx$

Como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n$:

$$f(1) + \sum_{n=2}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx \Rightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq f(1) + \int_1^{\infty} f(x)\,dx$$

Dessa maneira, vê-se que o somatório segue o mesmo comportamento da integral (sendo um ótimo meio de verificar a conversão ou não da série).

Se a função for crescente ou constante, então ela certamente irá divergir (fato constatado se testado pela integral).

[04] - Prova do **teste da razão**:

Tendo a relação $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p$ nos casos onde:

- **$\mathbf{p < 1}$:**

  A partir de um valor N, tal que, para todo $n \geq N$, existe um valor r, $p \leq r < 1$, onde $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq r \Rightarrow a_{n+1} \leq r\,a_n$.

  Dessa maneira:

$$a_{n+2} \leq r\,a_{n+1} \leq r^2 a_n$$
$$a_{n+3} \leq r\,a_{n+2} \leq r^2 a_{n+1} \leq r^3 a_n$$
$$\vdots$$
$$a_{n+k} \leq r^k a_n$$

  A partir dessas relações, tem-se que:

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots a_{n+k} \leq r\,a_n + r^2 a_n + \cdots + r^k a_n \Rightarrow \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \leq a_n \sum_{i=1}^{k} r^i \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n+1}^{n+k} a_i \leq a_n \lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{k} r^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=n+1}^{\infty} a_i \leq a_n \sum_{i=1}^{\infty} r^i$$

  Como $\sum_{i=1}^{\infty} r^i$ é uma série geométrica com $r < 1$ (converge) e $\sum_{i=1}^{n+1} a_i$ é um valor finito (não altera a convergência ou divergência da série), $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

- **$\mathbf{p > 1}$:**

  $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$ implica que, para algum N, $a_{n+1} > a_n,\ n \geq N$, formando um somatório de termos crescentes (diverge pelo **teste do n-ésimo termo**).

- **$\mathbf{p = 1}$:**

  Como para $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$, mas pelo **teste da integral** a série diverge e $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\dfrac{1}{n^2}}{\dfrac{1}{(n+1)^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)^2}{n^2} = 1$, mas pelo **teste da integral** a série converge, esse teste é inconclusivo quando $p = 1$.

[05] - Prova do **teste da raiz**:

Quando $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p$:

- **p < 1:**

  A partir de um valor N, tal que, para todo $n \geq N$, existe um valor r, $p \leq r < 1$, onde $\sqrt[n]{a_n} \leq r \Rightarrow a_n \leq r^n$:

$$a_{n+1} \leq r^{n+1}$$
$$a_{n+2} \leq r^{n+2}$$
$$a_{n+3} \leq r^{n+3}$$
$$\vdots$$
$$a_{n+k} \leq r^{n+k}$$

  Tendo isso em vista:

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} \leq r^n + r^{n+1} + r^{n+2} + \cdots + r^{n+k} \Rightarrow \sum_{i=n}^{n+k} a_i \leq \sum_{i=n}^{n+k} r^i \Rightarrow \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n}^{n+k} a_i \leq \lim_{k\to\infty} \sum_{i=n}^{n+k} r^i \Rightarrow$$

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} r^i,\ r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

- **p > 1:**

  A partir de um valor N, tal que, para todo $n \geq N$, existe um valor r, $1 < r \leq p$, onde $\sqrt[n]{a_n} \geq r \Rightarrow a_n \geq r^n$.

  Fazendo o mesmo somatório:

$$\sum_{i=n}^{\infty} a_i \geq \sum_{i=n}^{\infty} r^i,\ r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ diverge.}$$

- **p = 1:**

  Como para $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$, mas pelo **teste da integral** a série diverge e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n^2}} = 1$, mas pelo **teste da integral** a série converge, esse teste é inconclusivo quando $p = 1$.

Séries de Taylor e Maclaurin

[06] - Dedução das séries de Taylor:

Tendo $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, existem as relações:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n + \dots \quad \Rightarrow \quad f(a) = a_0$$

$$f'(x) = a_1 + 2\,a_2(x-a) + 3\,a_3(x-a)^2 + \cdots + n\,a_n(x-a)^{n-1} + \dots \quad \Rightarrow \quad f'(a) = a_1$$

$$f''(x) = 2 \cdot 1\, a_2 + 3 \cdot 2\, a_3(x-a) + \cdots + n(n-1)\, a_n(x-a)^{n-2} + \ldots \quad \Rightarrow \quad f''(a) = 2\, a_2$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(a) = n!\, a_n + \ldots \quad \Rightarrow \quad f^{(n)}(a) = n!\, a_n$$

Algebricamente, tem-se que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$, portanto, uma função pode ser representada por:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2} + \frac{f^{(3)}(a)(x-a)^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \text{ (série de Taylor de } f(x))$$

Fontes

1. STEWART, James. Cálculo - Volume 1. 7. ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.
2. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo - Volume 1. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
3. THOMAS, George B.; WEIR, Maurice D.; HASS, Joel. Cálculo - Volume 2. 12. ed. São Paulo: Pearson, 2012.
4. LIMA, Elon Lages. Análise Real volume 1. 8. ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2006.
5. TAKHE. Cálculo 1: aulas e exercícios resolvidos. [YouTube], 2023. Disponível em: https://www.youtube.com/playlist?list=PLmAu9dltGZtp1apl5ib_uL7UkP4fDwy4m. Acesso em: 10 set. 2025.
6. BARROS, Tatiana Leal. Disciplina: Cálculo com funções de uma variável Real. Curso de graduação em Engenharia de Computação – Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais (CEFET-MG), 2024.
7. CAMARGO JUNIOR, Fausto de. Disciplina: Integração e séries. Curso de graduação em Engenharia de Computação – CEFET-MG, 2024.