Lista 1 Cálculo Numérico A2

Arthur Mesquita Rocha
11201920999

Guilherme Augusto Lima Bailoni
11201721593

Kayque Gonçalves Paiva Da Silva
11201921239

Renan Carvalho Faustino
11201720892

July 2021

Exercícios

1.1)

Temos que $p = 10$, $q = 0$ e $h = 0.1$, a partir disso temos que $\phi(x)$ é dado por:

$$\phi(x) = 2 + 0.1^2 \times 0 - \frac{[1 - \frac{0.1^2}{4} \times 10^2]}{x} =$$

$$= 2 - \frac{\frac{3}{4}}{x}$$

Calculando a derivada $\phi'(x)$, temos que:

$$\phi'(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x^2}$$

Igualando a zero, $\phi'(x) = 0$, para podermos descobrir os pontos de possíveis máximos e mínimos, claramente isso só ocorre quando $\lim_{x\to\infty}$, assim como $x \in [1, \infty[$, temos que calcular o valor de $phi(x)$ no extremo 1.

$$\phi(1) = 2 - \frac{3}{4} = \frac{5}{4} \in [1, \infty[$$

$$\lim_{x\to\infty} \phi(x) = 2 - 0 = 2 \in [1, \infty[$$

Temos que o mínimo e o máximo para $\phi(x)$ são $\frac{5}{4}$ e 2 respectivamente. Assim com $x \in [1, \infty[$, $\phi(x) \in [1, \infty[$.

Como os elementos da diagonal de A_h^* são dados por $\mu_{i+1} = \phi(\mu_i)$ e $\mu_1 = 2 + 0 = 2$, temos que como $\mu_1 \in [1, \infty[$, como todos elementos da diagonal são obtidos por sucessivas aplicações de $phi(x)$, assim $\mu_i \in [1, \infty[$ para $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Assim como claramente $(A_h^*)_{i,i} \in [1, \infty[$, temos que $(A_h^*)_{i,i} \geq 1$.

1.2)

Utilizando de $\phi'(x) = \frac{\frac{3}{4}}{x^2}$, obtido no item 1.1), vamos calcular a segunda derivada $\phi''(x)$:

$$\phi''(x) = -\frac{\frac{6}{4}}{x^3}$$

Claramente temos $\phi''(x) = 0$, com $\lim_{x \to \infty}$, assim vamos calcular o valor de $\phi'(x)$ nos extremos para $x \in [1, \infty[$:

$$\phi'(1) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \to \infty} \phi'(x) = 0$$

Temos que o mínimo e o máximo para $\phi'(x)$ são 0 e $\frac{3}{4}$ respectivamente. O que satisfaz $max_{x \in [1,\infty[} |\phi'(x)| \leq \frac{3}{4}$

1.3)

Com $I = [1, \infty[$.

(a)

$$f(1) = \phi(1) - 1 = \frac{5}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$
$$f(2) = \phi(2) - 2 = \frac{13}{8} - 2 = -\frac{3}{8}$$

Como os sinais de $f(1)$ e $f(2)$ tem sinais diferentes, significa que $\alpha \in [1, 2]$, pelo teorema visto em aula, sabemos que α_k converge para o valor de α para $k \geq 0$, pela definição de α, $\phi(\alpha) = \alpha$, assim $f(\alpha) = \alpha - \alpha = 0$, temos que:

$$1 < \phi(1) = \frac{5}{4} \leq \alpha \leq \phi(2) = \frac{13}{8} < 2$$

(b)

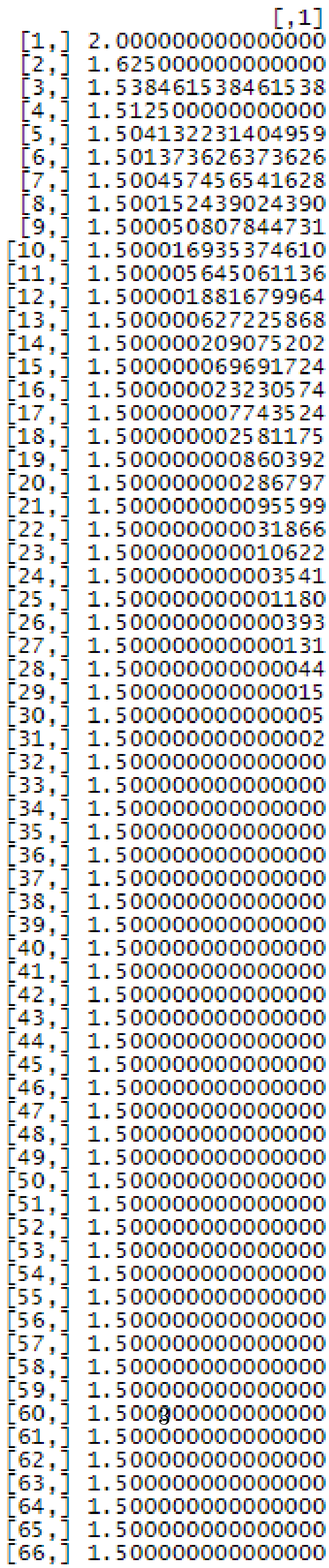
Temos que $k \geq \frac{log(\epsilon)}{log(\frac{3}{4})}$, o enunciado nos dá que $\epsilon = 10^{-8}$, assim:

$$k \geq log_{\frac{3}{4}} 10^{-8} \approx 64.031$$

Como $k \in \mathbf{N}$, temos que $k = 65$.

(c)

Código em anexo(13c.txt). Saída na figura 1.



```
                  [,1]
 [1,] 2.000000000000000
 [2,] 1.625000000000000
 [3,] 1.538461538461538
 [4,] 1.512500000000000
 [5,] 1.504132231404959
 [6,] 1.501373626373626
 [7,] 1.500457456541628
 [8,] 1.500152439024390
 [9,] 1.500050807844731
[10,] 1.500016935374610
[11,] 1.500005645061136
[12,] 1.500001881679964
[13,] 1.500000627225868
[14,] 1.500000209075202
[15,] 1.500000069691724
[16,] 1.500000023230574
[17,] 1.500000007743524
[18,] 1.500000002581175
[19,] 1.500000000860392
[20,] 1.500000000286797
[21,] 1.500000000095599
[22,] 1.500000000031866
[23,] 1.500000000010622
[24,] 1.500000000003541
[25,] 1.500000000001180
[26,] 1.500000000000393
[27,] 1.500000000000131
[28,] 1.500000000000044
[29,] 1.500000000000015
[30,] 1.500000000000005
[31,] 1.500000000000002
[32,] 1.500000000000000
[33,] 1.500000000000000
[34,] 1.500000000000000
[35,] 1.500000000000000
[36,] 1.500000000000000
[37,] 1.500000000000000
[38,] 1.500000000000000
[39,] 1.500000000000000
[40,] 1.500000000000000
[41,] 1.500000000000000
[42,] 1.500000000000000
[43,] 1.500000000000000
[44,] 1.500000000000000
[45,] 1.500000000000000
[46,] 1.500000000000000
[47,] 1.500000000000000
[48,] 1.500000000000000
[49,] 1.500000000000000
[50,] 1.500000000000000
[51,] 1.500000000000000
[52,] 1.500000000000000
[53,] 1.500000000000000
[54,] 1.500000000000000
[55,] 1.500000000000000
[56,] 1.500000000000000
[57,] 1.500000000000000
[58,] 1.500000000000000
[59,] 1.500000000000000
[60,] 1.500000000000000
[61,] 1.500000000000000
[62,] 1.500000000000000
[63,] 1.500000000000000
[64,] 1.500000000000000
[65,] 1.500000000000000
[66,] 1.500000000000000
```

Figure 1: Saída do Código 13c.txt em R

(d)

Com $\phi(x) = 2 - \frac{\frac{3}{4}}{x}$, igualando $\phi(x) = x$, obtemos:

$$\phi(x) = 2 - \frac{\frac{3}{4}}{x} = x \rightarrow x^2 - 2x + \frac{3}{4} = 0$$

Utilizando Bháskara, com $a = 1$, $b = -2$ e $c = \frac{3}{4}$:

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times \frac{3}{4} = 1$$

As duas raízes x_1 e x_2 serão:

$$x_1 = \frac{2 + \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{2 - \sqrt{1}}{2 \times 1} = \frac{1}{2}$$

Como $x \in [1, \infty[$, temos que $\alpha = x_1 = 1.5$, o mesmo valor obtido para α_{65} no item 1.3)(c), assim $|\alpha_{65} - \alpha| = 0 < 10^{-8}$.

2.1)

Código em anexo(ex2lista1.txt). Utilizando o código ex2lista1.txt, e executando a seção "Exercício 2.1" temos:

p/q	mindiag(q)
-10	-0.179150823019887
-9	0.485512432446793
-8	0.699706671288196
-7	0.808794313514776
-6	0.876852010300157
-5	0.924605103546851
-4	0.960790776148577
-3	0.989734213026507
-2	1.01382361594318
-1	1.03448694110139
0	1.05263157894737

2.2)

Plotando o gráfico da função minDiag(q) no intervalo [-10,0] por meio do comando presente na seção "Exercicio 2.2" do código ex2lista1.txt temos na figura 2:

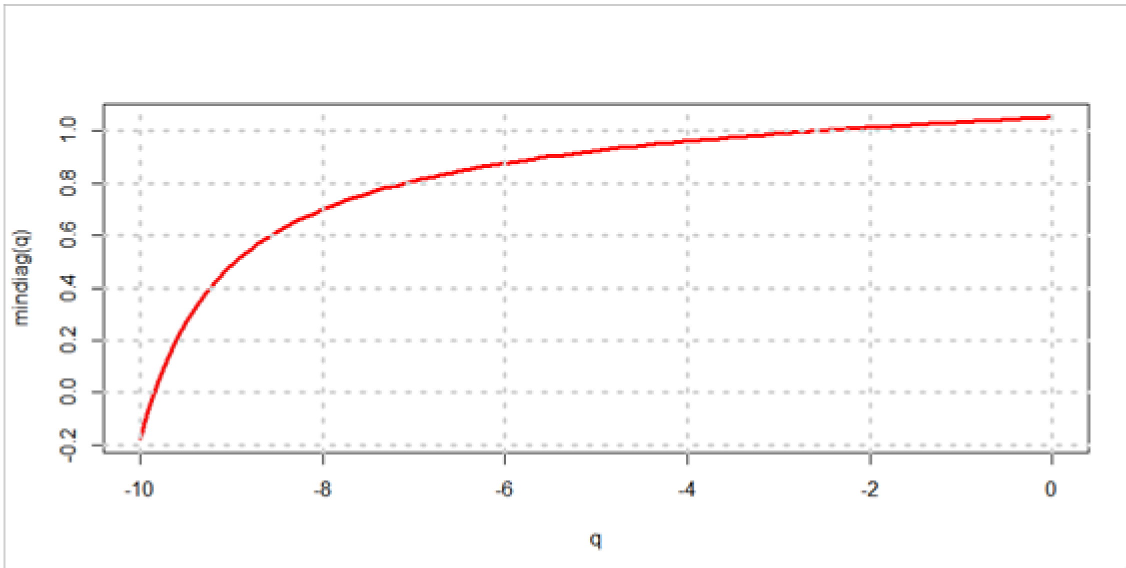


Figure 2: Saída do Código ex2lista1.txt em R

2.3)

A partir da última seção do código ex2lista1.txt, com 6 iterações temos:

iter	valor
1	-9.85646525508457
2	-9.84966526270265
3	-9.84932977400879
4	-9.84932752459909
5	-9.84932752388983
6	-9.84932752388978

Ou seja, com 6 iterações podemos afirmar que q* é dado por -9.84932752388978.

3.1)

Após rodarmos o código presente em ex3.1lista1.txt em R, obtemos a seguinte saída, que podemos observar na figura 3.

3.2)

Código em anexo(32.txt). Saída na figura 4.

Podemos ver que o erro vai convergindo para 0, a medida que aumentamos a quantidade de amostras.

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]	[,7]
[1,]	0.02906448	0.06200529	0.09423883	0.1241726	0.1512208	0.1752421	0.1963141
[2,]	0.06913275	0.13678115	0.19960305	0.2563689	0.3067824	0.3510061	0.3894335
[3,]	0.10903261	0.20864314	0.29784372	0.3765980	0.4453889	0.5049642	0.5562416
[4,]	0.14140382	0.26578684	0.37430233	0.4682600	0.5490668	0.6182550	0.6766884
[5,]	0.16143162	0.29997206	0.41840636	0.5192043	0.6048341	0.6761907	0.7352171
[6,]	0.16637124	0.30641336	0.42399997	0.5229040	0.6034716	0.6689167	0.7221733
[7,]	0.15536542	0.28370966	0.39048127	0.4739383	0.5399311	0.5926742	0.6351613
[8,]	0.12931343	0.23580799	0.31205480	0.3699862	0.4152327	0.4511437	0.4799438
[9,]	0.09515547	0.14840275	0.18652616	0.2154919	0.2381151	0.2560706	0.2704706

Figure 3: Saída do Código ex3.1lista1.txt em R

	[,1]	[,2]
[1,]	100	4.112368987541082e-05
[2,]	200	1.028085906162879e-05
[3,]	300	4.569264566933740e-06
[4,]	400	2.570210785979299e-06
[5,]	500	1.644935003097814e-06
[6,]	600	1.142314761226615e-06
[7,]	700	8.392488362041206e-07
[8,]	800	6.425489182948496e-07
[9,]	900	5.076927243052864e-07
[10,]	1000	4.112226492658522e-07

Figure 4: Saída do Código 32.txt em R