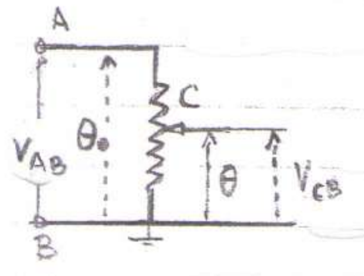
Cap. 1 Soluções

Prob. 1



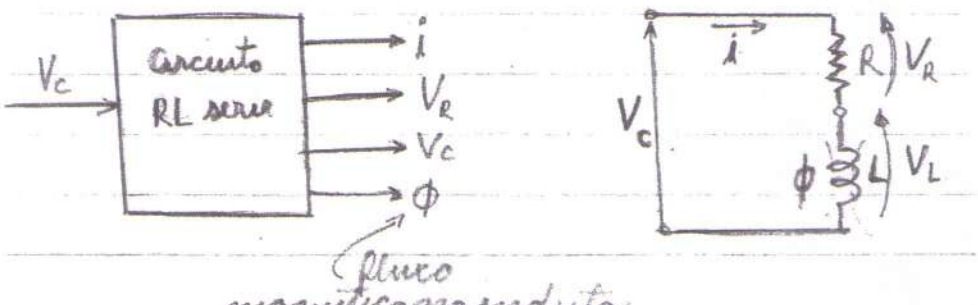
$$V_{CB} = k_p \theta$$

$$V_{AB} = k_p \theta_0$$

$$V_{CB} = \frac{V_{AB}}{\theta_0}\,\theta = \alpha_p \theta$$

Sistema linear. Não possui memória. Modelo matemático algébrico.

Prob. 2



Prob. 3

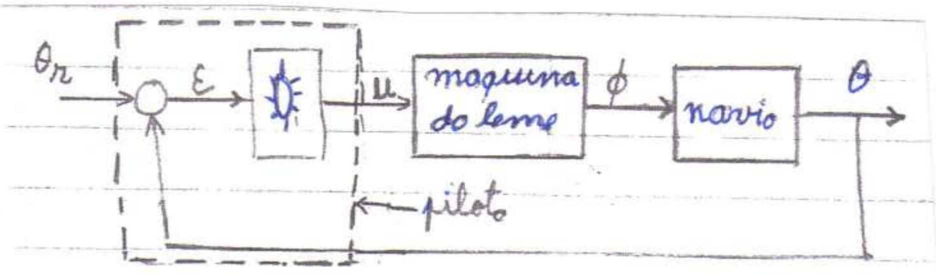
A variável de entrada é o rumo a seguir dado pelo piloto (resposta d).

Prob. 4

Sim, o sistema é dotado de realimentação. O erro é detectado pelo piloto que compara o rumo a seguir, com o indicado pela bússola. Há amplificação do erro, feita pelo próprio piloto que tenta fazer a correção atuando sobre a roda do leme.

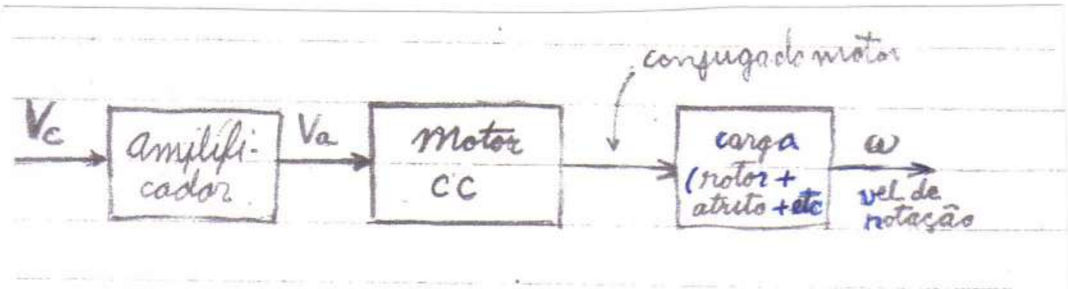
Cap. 1. Soluções

Prob. 5



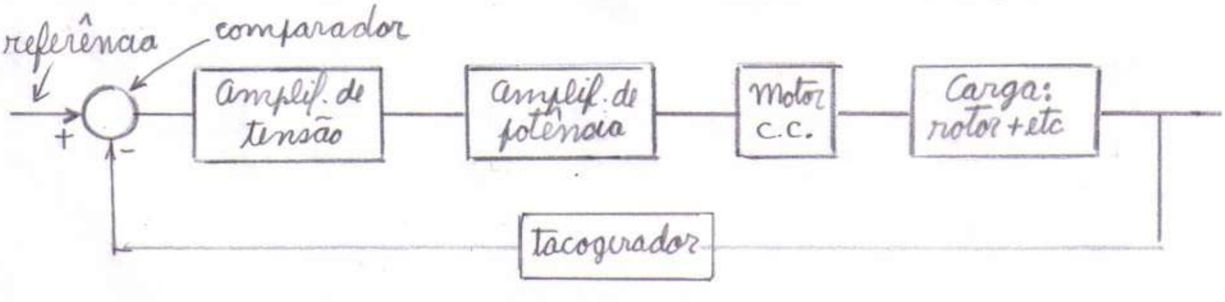
Prob. 6

Controle de velocidade sem realimentação

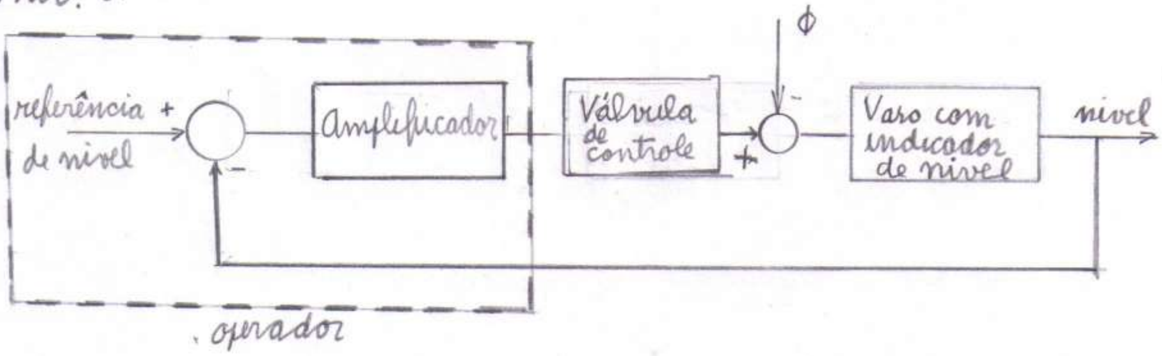


Prob. 7

Sistema de controle com realimentação

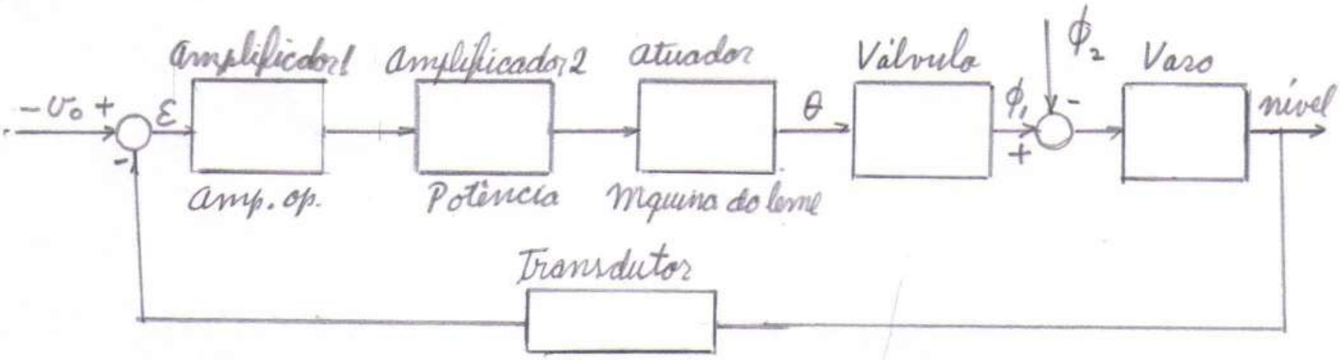


Prob. 8.

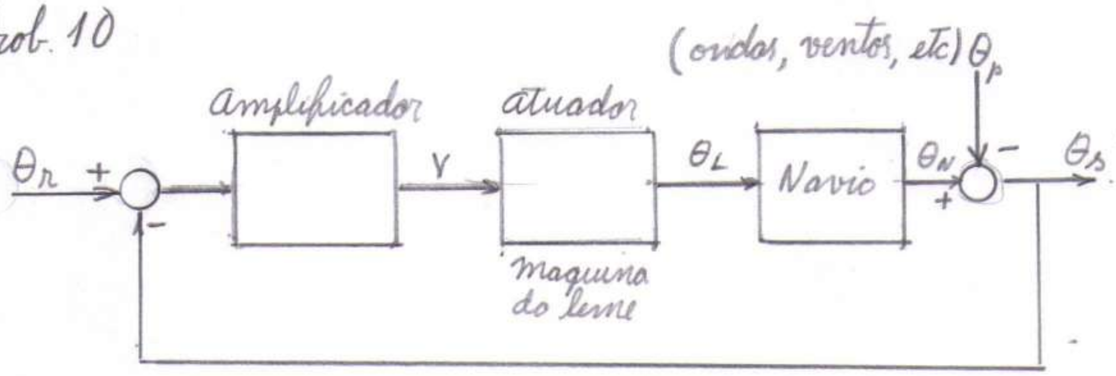


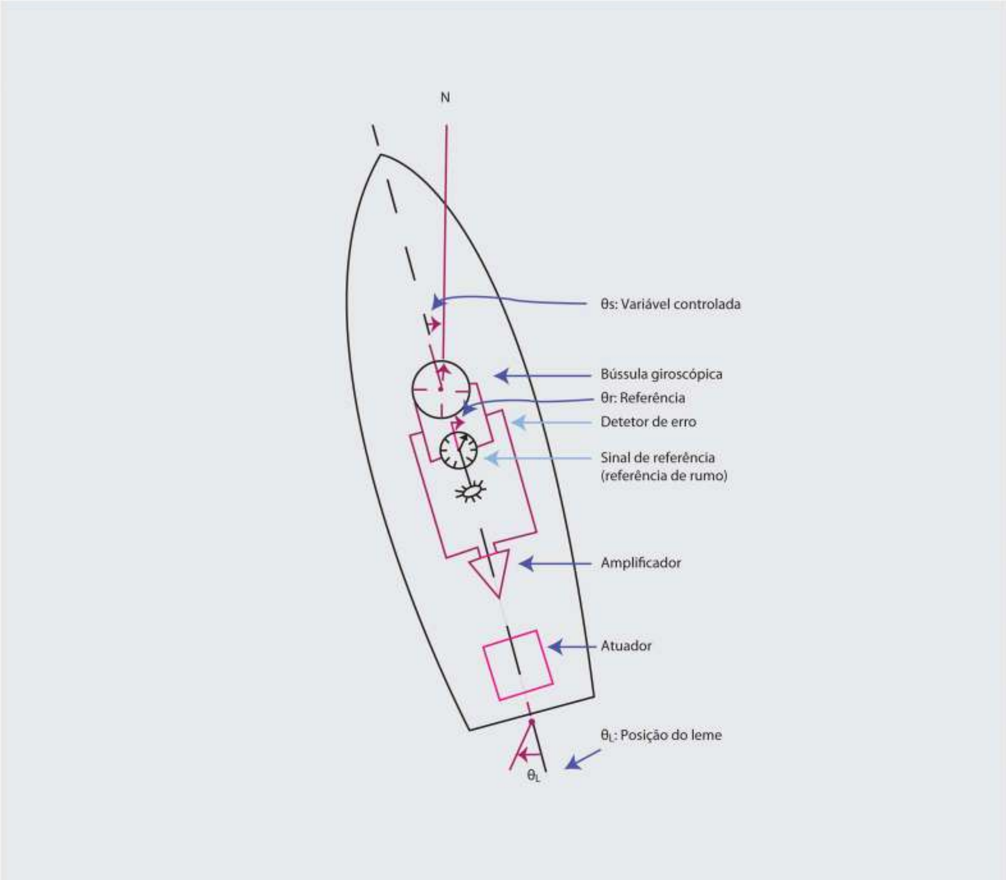
Cap. 1 Soluções

Prob. 9



Prob. 10

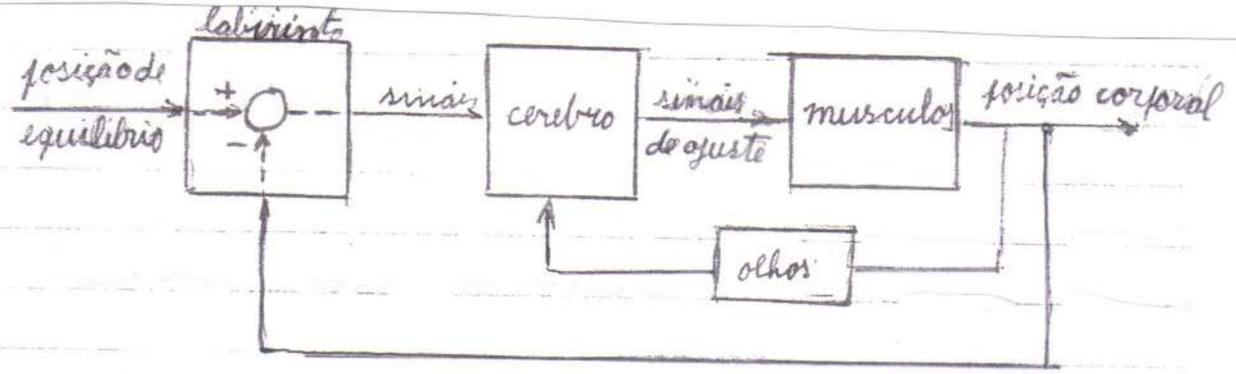




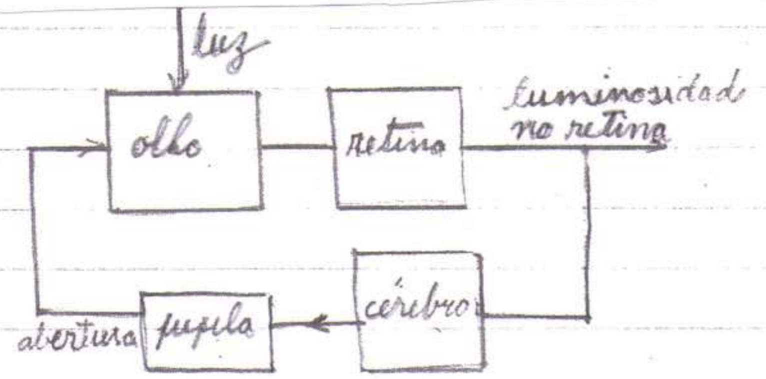
Cap. 1 Soluções

Prob. 11

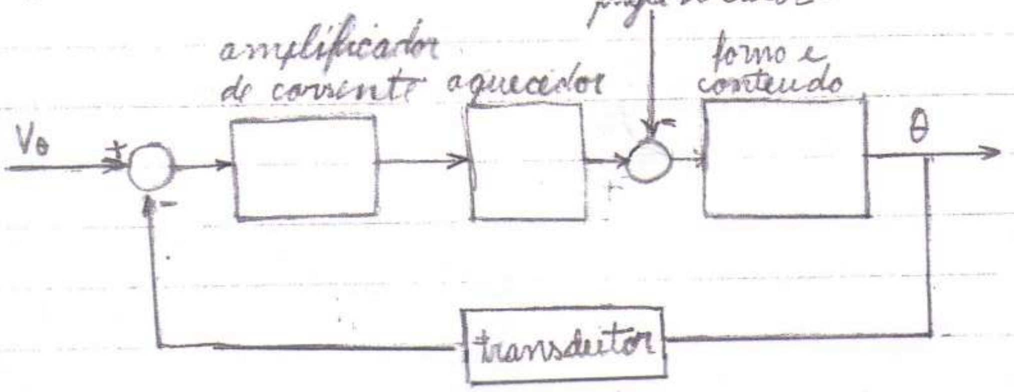
E.1 Sistema de equilíbrio humano (modelo muito simplificado)



E.2 Sistema de ajuste na retina por meio da abertura da pupila.



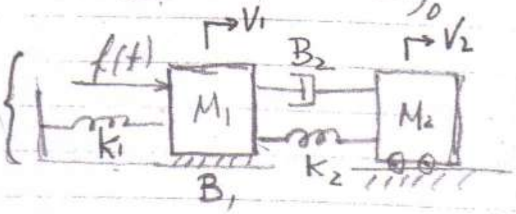
Prob. 12



Cap. 2 Prob. 4 Sol

DATA/FECHA

$$\begin{cases} C_1 \dfrac{dv_1}{dt} + \left(\dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2}\right) v_1 + \left(\dfrac{1}{L_1} + \dfrac{1}{L_2}\right)\displaystyle\int_0^t v_1\, dt - \dfrac{1}{R_2} v_2 - \dfrac{1}{L_2}\displaystyle\int_0^t v_2\, dt = f(t) \quad \checkmark \\[2ex] C_2 \dfrac{dv_2}{dt} + \dfrac{1}{R_2} v_2 + \dfrac{1}{L_2}\displaystyle\int_0^t v_2\, dt - \dfrac{1}{R_2} v_1 - \dfrac{1}{L_2}\displaystyle\int_0^t v_1\, dt = 0 \end{cases}$$

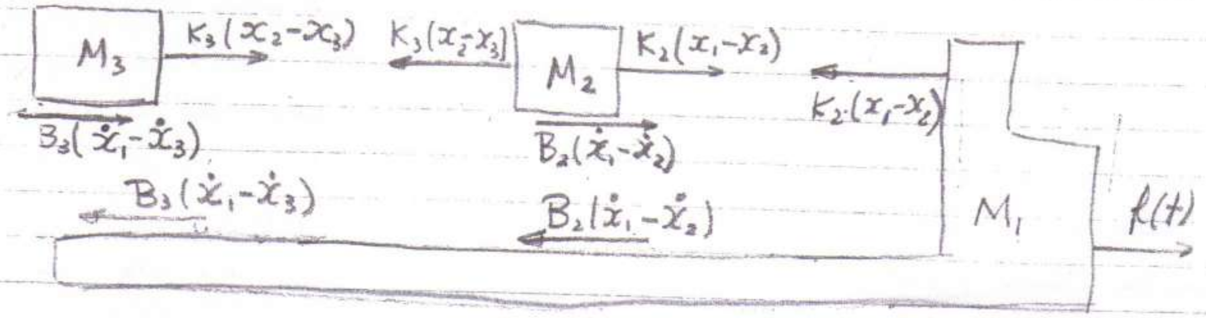


$$\begin{cases} M_1 \dfrac{dV_1}{dt} + (B_1 + B_2) V_1 + (K_1 + K_2)\displaystyle\int_0^t V_1\, dt + \\ - B_2 V_2 - K_2 \displaystyle\int_0^t V_2\, dt = f(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_2 \dfrac{dV_2}{dt} + B_2 V_2 + K_2 \displaystyle\int_0^t V_2\, dt - B_2 V_1 - K_2 \displaystyle\int_0^t V_1\, dt = 0 \end{cases}$$

DATA/FECHA

Cap. 2 Prob 7 Sol.



$$M_1\ddot{x}_1 + B_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + B_3(\dot{x}_1-\dot{x}_3) + K_2(x_1-x_2) = f(t)$$

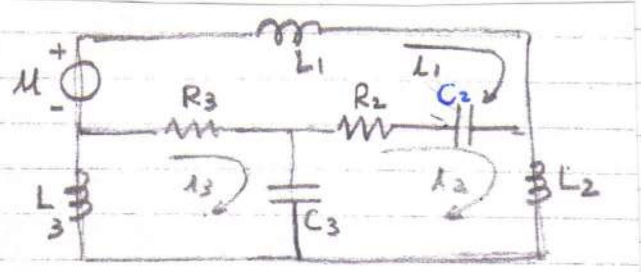
$$M_2\ddot{x}_2 + K_3(x_2-x_3) = B_2(\dot{x}_1-\dot{x}_2) + K_2(x_1-x_2)$$

$$M_3\ddot{x}_3 = B_3(\dot{x}_1-\dot{x}_3) + K_3(x_2-x_3)$$

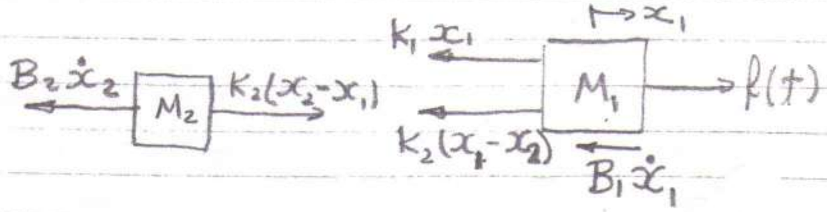
ou

$$\begin{cases} M_1\ddot{x}_1 + (B_2+B_3)\dot{x}_1 + K_1x_1 - B_2\dot{x}_2 - K_2x_2 - B_3\dot{x}_3 = f(t) \\ M_2\ddot{x}_2 + B_2\dot{x}_2 + (K_2+K_3)x_2 - B_2\dot{x}_1 + K_2x_1 - K_3x_3 = 0 \\ M_3\ddot{x}_3 + B_3\dot{x}_3 + K_3x_3 - B_3\dot{x}_1 - K_3x_2 = 0 \end{cases}$$

(c)



Cap. 2 Prob. 9 Sol.

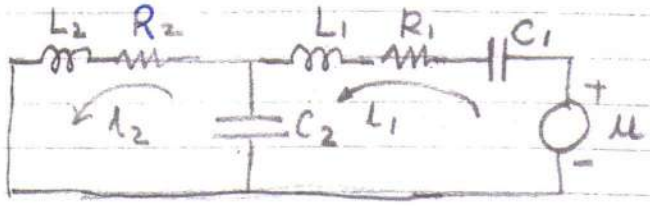


$$M_2\ddot{x}_2+B_2\dot{x}_2=K_2(x_2-x_1)$$

ou $M_2\ddot{x}_2+B_2\dot{x}_2+K_2x_2-K_2x_1=0$

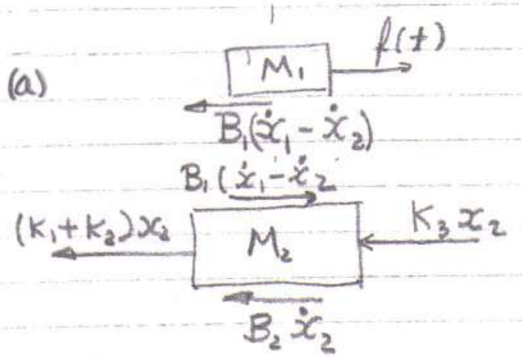
$$M_1\ddot{x}_1+B_1\dot{x}_1+K_1x_1+K_2(x_1-x_2)=f(t)$$

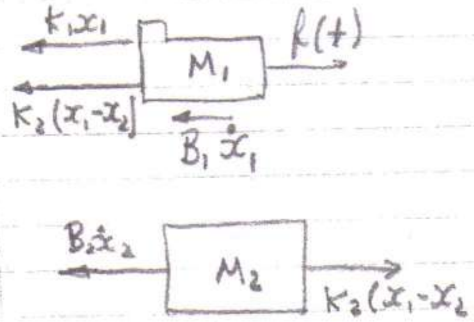
ou $M_1\ddot{x}_1+B_1\dot{x}_1+(K_1+K_2)x_1-K_2x_2=f(t)$



Sol 11 cap. 2

(a)





(b)

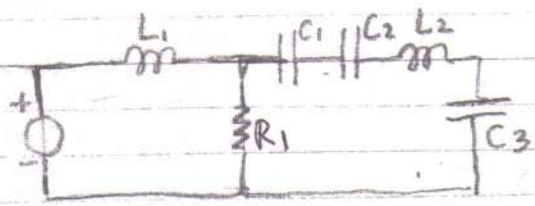
$$M_1\ddot{x}_1+B_1\dot{x}_1-B_1\dot{x}_2=f(t)$$

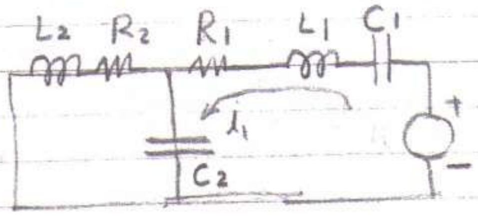
$$M_2\ddot{x}_2+(B_1+B_2)\dot{x}_2+(K_1+K_2+K_3)x_2-B_1\dot{x}_1=0$$

$$M_1\ddot{x}_1+B_1\dot{x}_1+(K_1+K_2)x_1-K_2x_2=f(t)$$

$$M_2\ddot{x}_2+B_2\dot{x}_2+K_2x_2-K_2x_1=0$$

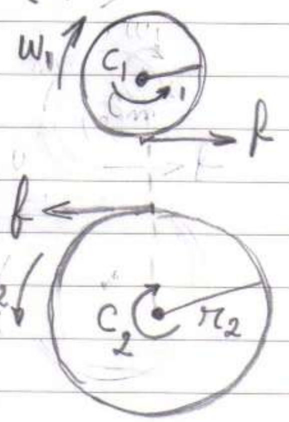
(c)



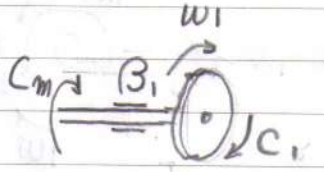


Cap. 2 Prob. 14 Sol.

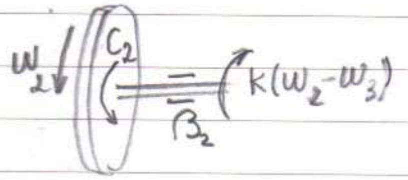
(a)



$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_1}{r_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}$$



$$C_m = \beta_1 \omega_1 + C_1$$

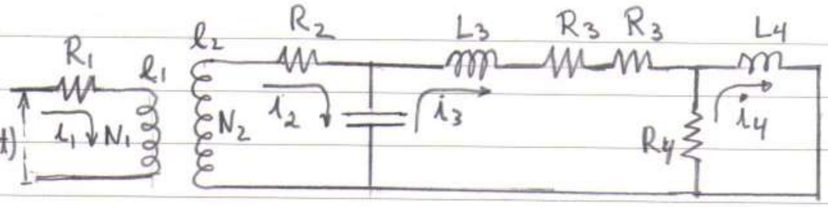


$$C_2 = \beta_2 \omega_2 + K_2 \int_0^t (\omega_2 - \omega_3)\, dt$$

$$J_3 \dot{\omega}_3 + 2\beta_3 \omega_3 + \beta_4(\omega_3 - \omega_4) = K_2 \int_0^t (\omega_2 - \omega_3)\, dt$$

$$J_4 \dot{\omega}_4 = \beta_3 (\omega_3 - \omega_4)$$

(b)



DATA/FECHA

Cap. 2 Prob. 15 Sol.

$$(J_0+J_1)\,\dot{\omega}_1 + (B_0+B_1)\,\omega_1 + C_1 = C_m(t)$$

$$(J_2+J_3)\,\dot{\omega}_2 + (B_2+2B_3)\,\omega_2 = C_2$$

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \gamma < 1 \qquad C_1 = \gamma C_2$$

C_1 e C_2 são os conjugados resistentes nos eixos das engrenagens 1 e 2 respectivamente.

Sol. 16 Cap 2

$$V_a = R_a i_a + e$$

$$e = K_m \omega$$

$$C_m = K_m i_a$$

$$C_m = J\dot{\omega} + B\omega$$

Em regime permanente: $\dot{\omega} = 0$

$$\therefore \quad V_a = 1\, i_a + 0,25\,\omega$$

$$0,25\, i_a = 0,25\,\omega$$

Resulta $\quad V_a = 1,25\,\omega$

Para $V_a = 20$ volt $\quad \omega = \dfrac{20}{1,25} = 16$ rd/s

DATA/FECHA

Cap. 2 Prob 18 Sol.

Modelo do amp. op. 1

(a) $$\frac{dv'}{dt} + 1,25\,v' = -0,4\,v_1$$

(b) Modelo do amp. op. 2

$$\frac{dv_2}{dt} = -2,5\,v'$$

(c) Eliminando v' entre (a) e (b):

$$v' = -0,4\,\frac{dv_2}{dt}$$

Levando esse resultado em (a) resulta

$$-0,4\,\frac{d^2v_2}{dt^2} - 0,5\,\frac{dv_2}{dt} = -0,4\,v_1$$

$$\therefore \quad \frac{d^2v_2}{dt^2} + 1,25\,\frac{dv_2}{dt} = v_1$$

DATA/FECHA

Cap. 2. Prob. 19 Sol.

amp. op. 1

$$\frac{v_1}{25\times10^4} - \frac{v_2}{10^4} = -10^{-5}\frac{dv'}{dt} - \frac{1}{8\times10^4}v'$$

ou

$$v_1 - 25v_2 = -2{,}5\frac{dv'}{dt} - 3{,}125\,v' \qquad (1)$$

amp. op. 2

$$\frac{v'}{10^5} = -4\times10^{-6}\frac{dv_2}{dt}$$

ou

$$v' = -0{,}4\frac{dv_2}{dt} \qquad (2)$$

Eliminando v' entre as equações (1) e (2)

$$v_1 - 25v_2 = -\frac{d^2v_2}{dt^2} - 1{,}25\frac{dv_2}{dt}$$

Finalmente

$$\frac{d^2v_2}{dt^2} + 1{,}25\frac{dv_2}{dt} + 25v_2 = v_1$$

DATA/FECHA

Cap. 2. Prob 20 Sol.

Sistema mecânico

$$M\frac{dV}{dt} + BV = f(t) \rightarrow \quad \dot{V} + 0{,}5V = f(t)$$

Circuito elétrico

$$\frac{v_1}{R_1} = -C\frac{dv_2}{dt} - \frac{1}{R}v_2$$

ou

$$\frac{dv_2}{dt} + \frac{1}{RC}v_2 = \frac{1}{R_1C}v_1$$

Numericamente devemos ter

$$\frac{1}{RC} = 0{,}5 \quad \frac{1}{R_1C} = 1 \quad \therefore \frac{R}{R_1} = 2$$

Escolhendo $C = 10\mu F$ resulta

$$R = \frac{1}{0{,}5C} = 200\,k\Omega \quad e \quad R_1 = 100\,k\Omega$$

É necessário ainda um inversor de sinal para que a analogia fique completa

DATA/FECHA

Soluções cap. 3

2) $f(t) = 2e^{-0,5t}$ $\quad F(s) = 2\dfrac{1}{s+0,5} = \dfrac{4}{2s+1}$

4) $f(t) = 6e^{-(0,2+3t)} = 6e^{-0,2} \cdot e^{-3t}$ $\quad F(s) = 4,912\dfrac{1}{s+3}$

5) $f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$ $\quad F(s) = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2} = \dfrac{1}{s^2+3s+2}$

11) $f(t) = te^{-2t}$ $\quad F(s) = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s+2}\right) = \dfrac{1}{(s+2)^2}$

14) $f(t) = t^3 e^{-3t}$ $\quad \mathcal{L}\{te^{-3t}\} = -\dfrac{d}{ds}\left(\dfrac{1}{s+3}\right) = \dfrac{1}{(s+3)^2}$

$$\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{(s+3)^2}\right) = \frac{2(s+3)}{(s+3)^4} = \frac{2}{(s+3)^3}$$

Finalmente

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^3 e^{-3t}\} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{(s+3)^3}\right) = \frac{2\times 3(s+3)^2}{(s+3)^6} = \frac{6}{(s+3)^4}$$

16) $f(t) = e^{-t}\cos 3t$ $\quad F(s) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+9} = \dfrac{s+1}{s^2+2s+10}$

20) $f(t) = \cos(100t + 30°) = 0,866\cos 100t - 0,5\,\text{sen}\,100t$

$$F(s) = \frac{0,866s - 0,5\times 100}{s^2+10^4} = \frac{0,866(s-57,737)}{s^2+10^4}$$

26) $p(t) = h(t) - 2h(t-2) + h(t-4)$

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{2e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-4s}}{s} = \frac{1-2e^{-2s}+e^{-4s}}{s}$$

DATA/FECHA

Soluções Cap. 3

30) $F(s) = \dfrac{5}{s(s+2)} = \dfrac{2,5}{s} - \dfrac{2,5}{s+2} \qquad f(t) = 2,5(1-e^{-2t})$

35) $F(s) = \dfrac{4}{s^2+5s+80} = \dfrac{4}{(s+2,5)^2+73,59} = 0,466\dfrac{8,588}{(s+2,5)^2+8,588^2}$

$f(t) = 0,466\, e^{-2,5t}\, \text{sen}(8,588t)$

39) Decomponha $F(s)$ em frações parciais:

$F(s) = \dfrac{s+1}{s^3(s+2)} = \dfrac{A}{s^3} + \dfrac{B}{s^2} + \dfrac{C}{s} + \dfrac{D}{s+2}$

$s+2 - s+1$

$A = \left.\dfrac{s+1}{s+2}\right]_{s=0} = \dfrac{1}{2} \qquad B = \left.\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{s+1}{s+2}\right)\right]_{s=0} = \left.\dfrac{1}{(s+2)^2}\right]_{s=0} = \dfrac{1}{4}$

$2C = \left.\dfrac{\partial}{\partial s}\left(\dfrac{1}{(s+2)^2}\right)\right]_{s=0} = \left.\dfrac{-2}{(s+2)^3}\right]_{s=0} = -\dfrac{1}{4} \quad \therefore \quad C = -\dfrac{1}{8}$

$D = \left.\dfrac{s+1}{s^3}\right]_{s=-2} = \dfrac{-1}{-8} = \dfrac{1}{8}$

$F(s) = \dfrac{1}{2s^3} + \dfrac{1}{4s^2} - \dfrac{1}{8s} + \dfrac{1}{8(s+2)}$

40) $\dfrac{d^2y(t)}{dt^2} + 10\dfrac{dy}{dt} + 24y(t) = 4x(t)$

$(s^2+10s+24)Y(s) = 4\dfrac{1}{s}$

$Y(s) = \dfrac{4}{s(s^2+10s+24)} = \dfrac{4}{s(s+4)(s+6)}$

DATA/FECHA

Soluções Cap. 3

$$Y(s) = \frac{1/6}{s} - \frac{1/2}{(s+4)} + \frac{1/3}{(s+6)^2}$$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-6t} \quad \text{para } t \geq 0$$

---

42)
$$2\frac{d^2y}{dt^2} + 20\frac{dy}{dt} + 32y(t) = 2x(t)$$

Condições iniciais $y(0) = 1 \quad \left.\frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = 0$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = sY(s) - y(0) = sY(s) - 1$$

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^2y}{dt^2}\right\} = s^2Y(s) - y(0)s - \left.\frac{dy}{dt}\right]_{t=0} = s^2Y^2 - s$$

$$2\left(s^2Y(s) - s\right) + 20\left(sY(s) - 1\right) + 32Y(s) = \frac{2}{s}$$

$$\left(2s^2 + 20s + 32\right)Y(s) = \frac{2}{s} + 20 + 2s = \frac{2s^2 + 20s + 2}{s}$$

ou
$$Y(s) = \frac{s^2 + 10s + 1}{s(s^2 + 10s + 16)} = \frac{s^2 + 10s + 1}{s(s+2)(s+8)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{16} + \frac{5/4}{s+2} - \frac{5/16}{s+8}$$

$$y(t) = \frac{1}{16} + \frac{5}{4}e^{-2t} - \frac{5}{16}e^{-8t}$$

Soluções Cap. 4 Função de transferência

Prob 1

1a $(s^2+5s+3)Y(s)=U(s)$ $\quad \dfrac{Y(s)}{U(s)}=\dfrac{1}{s^2+5s+3}$

1c $\left(s^2+2s+5+\dfrac{10}{s}\right)Y(s)=25U(s)$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{25s}{s^3+2s^2+5s+10}$$

1e) $(s^4+18s^3+192s^2+640s)X(s)=U(s)$

$$Y(s)=160(s+4)X(s)$$

$$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{160(s+4)}{s(s^3+18s^2+192s+640)}$$

Prob 3

$$(s^3+5s^2+20s)X(s)=U(s)$$
$$Y(s)=K(s+1)X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K(s+1)}{s(s^2+5s+20)}$$

Pólos $s=0$ $\quad s^2+5s+20=0 \rightarrow -2{,}5\pm j3{,}71$
Zero $s+1=0 \rightarrow -1$

Prob 5

$$(s^3+6s^2+25s)X(s)=U(s)$$
$$Y(s)=K(s+5)X(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{K(s+5)}{s(s^2+6s+25)}$$

Polos $s=0$ $\quad s^2+6s+25=0 \longrightarrow -3\pm j4$
Zero $s+5=0 \rightarrow -5$

Soluções Cap. 4

Prob. 7

(b) $\begin{cases} (s^3+3s^2+4s+2)X(s) = U(s) \\ Y(s) = (7{,}2s+36)X(s) \end{cases}$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{7{,}2(s+5)}{s^3+3s^2+4s+2}$$ 1ª forma normal $K = 7{,}2$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{18(0{,}2s+1)}{(0{,}5s^3+1{,}5s^2+2s+1)}$$ 2ª forma normal $K_g = 18$

Prob. 9

$$\left(2s^2+6s+16+\frac{12}{s}\right)Y(s) = \left(5+\frac{1}{s}\right)U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{5s+1}{2s^3+6s^2+16s+12} = \frac{2{,}5(s+0{,}2)}{s^3+3s^2+8s+6}$$

Polos: $\begin{cases} s^3+3s^2+8s+6 = (s+1)(s^2+2s+6) = 0 \\ -1 \text{ e } -1 \pm j\sqrt{5} \end{cases}$

Zero: $-0{,}2$

Prob. 11 Pólos $0 \quad -1 \quad -3$

Zeros $-2 \pm j2$

(a) polinômio característico

$s(s+1)(s+3) = s^3+4s^2+3s$; 3ª ordem

(b) $$G(s) = \frac{K((s+2)^2+4)}{s(s^2+4s+3)} = \frac{K(s^2+4s+8)}{s(s^2+4s+3)}$$

$K_g = \frac{8K}{3} = \frac{16}{3} \therefore K = 2$

$$\therefore G(s) = \frac{2(s^2+4s+8)}{s(s+1)(s+3)}$$

Soluções Cap. 4

Prob 13 $$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{32}{s^3+12s^2+32s}$$

$$\dddot{y} + 12\ddot{y} + 32\dot{y} = 32u(t)$$

Prob 15

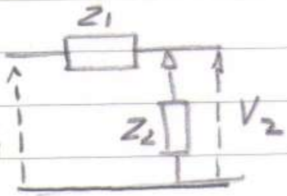
$$M\ddot{x} + (B+B_1)\dot{x} + Kx = f(t)$$

$$\left(Ms^2 + (B+B_1)s + K\right)X(s) = F(s)$$

$$G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2+(B+B_1)s+K}$$

Prob 17

$$Z_1 = R + \frac{1}{Cs} = \frac{RCs+1}{Cs}$$



$$Z_2 = \frac{R\frac{1}{Cs}}{R+\frac{1}{Cs}} = \frac{R}{RCs+1}$$

$$Z_1+Z_2 = \frac{RCs+1}{Cs} + \frac{R}{RCs+1} = \frac{R^2C^2s^2+3RCs+1}{Cs(RCs+1)}$$

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{Z_2}{Z_1+Z_2} = \frac{RCs\cancel{(RCs+1)}}{\cancel{(RCs+1)}(R^2C^2s^2+3RCs+1)}$$

$$G(s) = \frac{RCs}{R^2C^2s^2+3RCs+1}$$

Sendo $RC = 0,1$, vem

$$G(s) = \frac{0,1s}{0,01s^2+0,3s+1}$$

ou $$G(s) = \frac{10s}{s^2+30s+100}$$

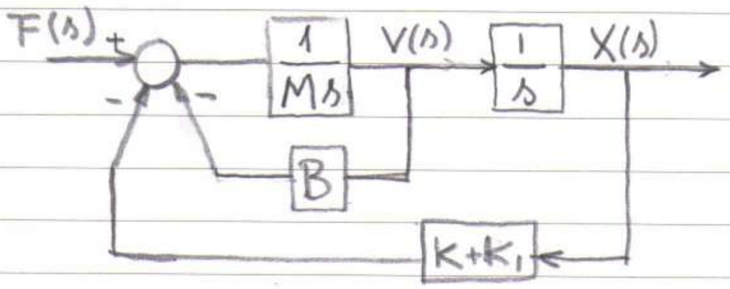
DATA/FECHA

Soluções Cap. 5

Prob 1

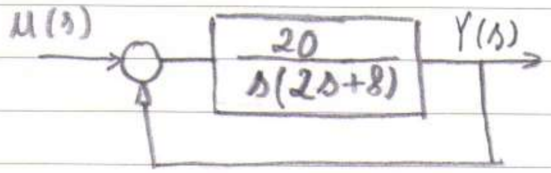
$$V(s) = sX(s) \longrightarrow X(s) = \frac{1}{s}V(s)$$

$$MsV(s) = F(s) - BV(s) - (K+K_1)X(s)$$



Prob 3

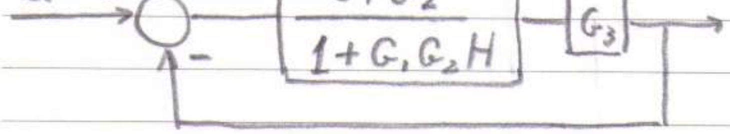
Malha interna:
$$\frac{\frac{1}{s+5}}{1+\frac{s+3}{s+5}} = \frac{1}{2s+8}$$



$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20}{2s^2+8s+20} = \frac{10}{s^2+4s+10}$$

Prob 5

Malha interna
$$\frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H}$$



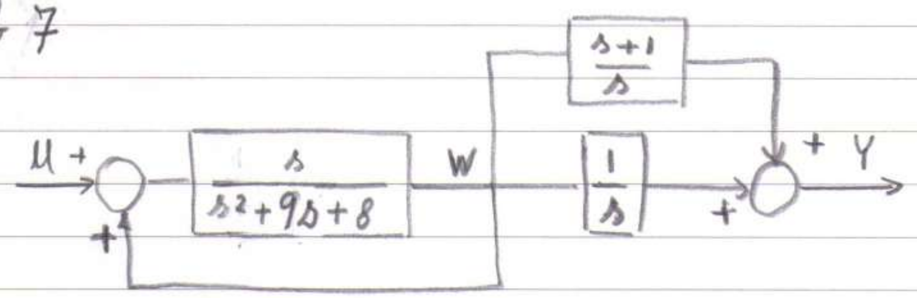
$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2G_3+G_1G_2H} = \frac{G_1G_2G_3}{1+G_1G_2(G_3+H)}$$

tilibra

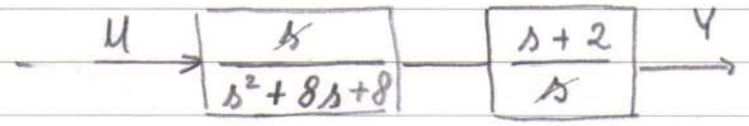
DATA/FECHA

Soluções Cap. 5

Prob 7

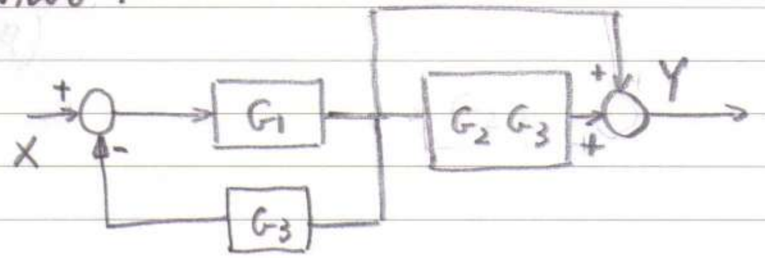


$s+1+1$



$$G(s) = \frac{Y}{U} = \frac{s+2}{s^2+8s+8}$$

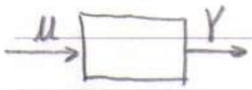
Prob 9

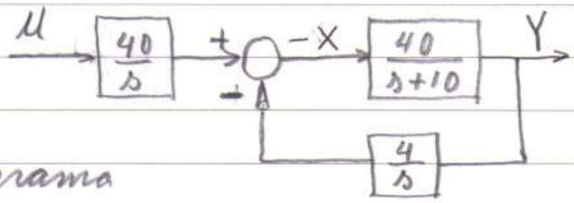


$$\frac{Y}{X} = \frac{G_1}{1+G_1G_3}(G_2G_3+1) = \frac{G_1(G_2G_3+1)}{1+G_1G_3}$$

Prob 11

$$X = \frac{-40}{s}U + \frac{4}{s}Y \qquad Y = -\frac{40}{s+10}X$$





Reduzindo o diagrama

$$\frac{Y}{U} = \frac{40}{s}\left\{\frac{\frac{40}{s+10}}{1+\frac{40}{(s+10)}\frac{4}{s}}\right\} = \frac{40}{s}\,\frac{40s}{s^2+10s+160} = \frac{1600}{s^2+10s+160}$$

DATA/FECHA

Soluções Cap 5

Prob. 13

Redução pela fórmula de Mason (p. 59)

$$F(s) = \frac{\sum \overline{G}_k \Delta_k}{\Delta} \qquad \Delta = 1 + \sum L_i + \sum L_i L_j + \cdots$$

Prob. 13.5 $\overline{G}_1 = G_1 G_2 G_3$ $\qquad \Delta_1 = 1$

$L_1 = G_1 G_2 H \qquad L_2 = G_1 G_2 G_3$

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 H}$$

Prob. 13.7

$$\overline{G}_1 = \frac{s}{s(s+8)(s+1)} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\overline{G}_2 = \frac{1}{s+8} \qquad \Delta_2 = 1$$

$$\Delta = 1 + \frac{s}{(s+1)(s+8)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{\cancel{s}}{\cancel{s}(s+1)(s+8)} + \frac{1}{s+8}}{1 + \frac{s}{(s+1)(s+8)}} = \frac{s+2}{s^2+8s+8}$$ ✓

Prob. 13.9 $\overline{G}_1 = G_1 G_2 G_3 \qquad \overline{G}_2 = G_1$

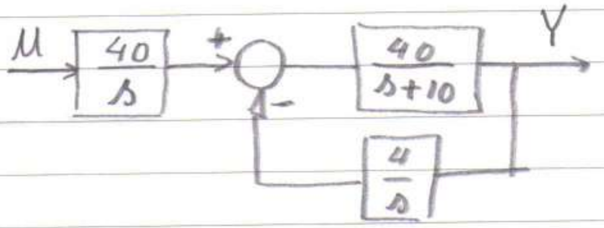
$\Delta = 1 + G_1 G_3 \qquad \Delta_1 = 1$

$$G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3 + G_1}{1 + G_1 G_3}$$

DATA/FECHA

Soluções Cap. 5

Prob 13.11



$$\bar{G}_1 = \frac{1600}{s(s+10)} \qquad \Delta_1 = 1$$

$$\Delta = 1 + \frac{160}{s(s+10)}$$

$$G(s) = \frac{\frac{1600}{s(s+10)}}{1+\frac{160}{s(s+10)}} = \frac{1600}{s^2+10s+160}$$

DATA/FECHA

Soluções Cap. 6

Problemas propostos. Sistemas de 1ª ordem

2. Pelos dados do problema, o motor sendo um sistema de primeira ordem, sua constante de tempo (intervalo de tempo para que atinja 63,2% da velocidade final) é $\tau = 25s$. Logo

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V(s)} = \frac{K}{s+\frac{1}{25}} = \frac{K}{s+0,04}$$

Sendo $V(s) = \frac{20}{s}$ resulta

$$\Omega(s) = \frac{20K}{s(s+0,04)}$$

Pelo teorema do valor final

$$\lim_{t\to\infty}(\omega(t)) = \lim_{s\to 0}(s\,\Omega(s)) = \frac{20K}{0,04} = 500$$

Resulta $K=1$ e $G(s) = \frac{1}{s+0,04}$

$$\Omega(s) = \frac{20}{s(s+0,04)} = \frac{500}{s} - \frac{500}{s+0,04}$$

e $\omega(t) = 500(1-e^{-0,04t})$ rad/s

3. Equação dinâmica do motor

$$\dot{\omega}(t) + 0,04\,\omega(t) = v(t)$$

Havendo condição inicial $\omega(0) = \omega_0$ a transformada de Laplace da equação acima é

$$\Omega(s) - \omega_0 + 0,04\,\Omega_0 = V(s)$$

Então sendo o motor desligado para $t \geq 0$ resulta, para $\omega_0 = 500$ r.p.m.,

v. verso

DATA/FECHA . .

$$\Omega(s) = \frac{500}{s+0{,}04}$$

e

$$\omega(t) = 500e^{-0{,}04t}$$

Tempo de parada, para $T = 5\tau = \frac{5}{0{,}04} = 125\ s$

tilibra

Soluções. Cap. 6 Sistemas de 1ª ordem

5) Reduzindo o diagrama de blocos

$$G(s)=\frac{\Omega(s)}{V_a(s)}=\frac{\frac{5}{s}}{1+\frac{0,9}{s}}=\frac{5}{s+0,9}$$

(a) $\tau=\frac{1}{0,9}=1,11$

(b) $\Omega(s)=\frac{100}{s(s+0,9)}=\frac{111,1}{s}-\frac{111,1}{s+0,9}$

$$\omega(t)=111,1(1+e^{-0,9t})$$

(d) $\text{Vel. final}=\lim_{t\to\infty}\omega(t)=111,1\ rad/s$

ou 1061 rpm

6) Uma fôrça de impacto de 10.000 N e duração 0,01 segundos pode ser considerada como um impulso de valor

$10^4 \times 0,01 = 100\ Ns$ $\therefore f(t)=100\,\delta(t)$

No caso a função de transferência é

$$\frac{V(s)}{F(s)}=\frac{1}{s+0,1} \quad \text{com } F(s)=\mathcal{L}\{100\,\delta(t)\}=100$$

$$\therefore v(t)=100\,e^{-0,1t}$$

A velocidade inicial do bloco é 100 m/s

DATA/FECHA

Cap. 6 Soluções

8) Redução do diagrama de blocos:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{15/s}{1+\frac{15}{s}+\frac{6}{s}} = \frac{15}{s+21} = \frac{K}{s+a}$$

Utilizando a expressão que dá a resposta de um sistema de 1ª ordem a uma rampa unitária vem

$$y(t) = \frac{15}{21}\left\{t - \frac{1}{21}(1-e^{-21t})\right\} = 0{,}714(t - 0{,}047(1-e^{-21t}$$

ou $y(t) = 0{,}714(t - 0{,}0476(1-e^{-21t}))$

10) Equação do movimento do bloco

$$2\frac{dv}{dt} + 0{,}5v = f(t)$$

sendo a força um impulso: $f(t) = 10\,\delta(t)$.

Usando a transformada de Laplace, obtemos

$$V(s) = \frac{10}{2s+0{,}5} = \frac{5}{s+0{,}25}$$

ou, distância percorrida

$$X(s) = \frac{V(s)}{s} = \frac{5}{s(s+0{,}25)} = 20\left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s+0{,}25}\right)$$

Portanto

$$x(t) = 20(1-e^{-0{,}25t})$$

Para $t = 5\tau = \frac{5}{0{,}25} = 20$, resulta

$$x(t)\Big]_{t=20} = 20(1-e^{-5}) = 19{,}86\ m$$

DATA/FECHA

Cap 6 Soluções - Sist de 1ª ordem

11)

$$J\left(s\Omega(s)-\Omega_0\right)+(B_0+B_1)\,\Omega(s)=0$$

$$\Omega(s)=\frac{J\Omega_0}{Js+B_0+B_1}=\frac{\Omega_0}{s+\frac{B_0+B_1}{J}}$$

$$\Omega(s)=\frac{1200}{s+0{,}4} \qquad \tau=\frac{1}{0{,}4}=2{,}5\,s$$

$$\omega(t)=1200\,e^{-0{,}4t}$$

Cap 6 Soluções Sist de 2ª ordem

13) $$G(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{20(s+1)}{(s+4)(s+5)} \qquad U(s)=\frac{1}{s}$$

$$Y(s)=\frac{20(s+1)}{s(s+4)(s+5)}=\frac{1}{s}+\frac{15}{s+4}-\frac{16}{s+5}$$

$$y(t)=1+15e^{-4t}-16e^{-5t}$$

14) a resposta do sistema dado à um degrau, no domínio da frequencia, é

$$V(s)=\mathcal{L}\left\{10e^{-t}\,\text{sen}(2t)\right\}=\frac{20}{(s+1)^2+4}$$

ou

$$V(s)=G(s)\frac{1}{s}=\frac{20}{s^2+2s+5}$$

Essa é a expressão que se encontra na folha de resposta.

DATA/FECHA

Cap. 6 Soluções

14) Cont.

A função de transferência G(s), resulta

$$G(s) = \frac{20s}{s^2+2s+5}$$

15) A resposta do sistema dado a um degrau unitário, no domínio da frequência, é

$$V(s) = \mathcal{L}\{10e^{-t}\cos 2t\} = \frac{10(s+1)}{(s+1)^2+4}$$

ou

$$V(s) = G(s)\frac{1}{s} = \frac{10(s+1)}{s^2+2s+5}$$

Essa é a expressão que se encontra na folha de respostas.

A função de transferência G(s) do sistema dado, resulta

$$G(s) = \frac{10s(s+1)}{s^2+2s+5}$$

tilibra

Cap. 6 Soluções Sist. de 2ª ordem

16)

$$Y(s) = \frac{100}{s(s^2+6s+25)} = \frac{4}{s} - \frac{4s+24}{(s+3)^2+16}$$

ou

$$Y(s) = 4\left[\frac{1}{s} - \left(\frac{s+3}{(s+3)^2+16} + \frac{3}{4}\frac{4}{(s+3)^2+16}\right)\right.$$

Pela transformada inversa

$$y(t) = 4\left(1 - e^{-3t}\left(\cos 4t + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 4t\right)\right)$$

ou

$$y(t) = 4\left(1 - 1{,}25\, e^{-3t} \operatorname{sen}(3t + 53{,}13°)\right)$$

Esse resultado pode ser obtido mais rapidamente usando a fórmula conhecida (p. 78):

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2}\left\{1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)\right\}$$

com $\phi = \arctan \frac{\omega_d}{\alpha}$

No presente caso:

$K = 100$ $\omega_n = 5$ $\alpha = 3$ $\omega_d = 4$ $\phi = 53{,}13°$

$$y(t) = 4\left\{1 - \frac{5}{4} e^{-3t} \operatorname{sen}(4t + 53{,}13°)\right\}$$

Cap. 6 Soluções Sist. 2ª ordem

18)

$$G(s) = \frac{12s+40}{(s+4)(s+6)} = \frac{-4}{s+4} + \frac{16}{s+6}$$

Resposta ao impulso unitário

$$g(t) = 4(-e^{-4t} + 4e^{-6t})$$

Resposta ao degrau unitário

$$Y(s) = \frac{12s+40}{s(s+4)(s+6)} = \frac{\frac{5}{3}}{s} + \frac{1}{s+4} - \frac{\frac{8}{3}}{s+6}$$

$$y(t) = \frac{5}{3}\left(1 + 0{,}6e^{-4t} - 1{,}6e^{-6t}\right)$$

19) $R_1C_1 = 0{,}1 \qquad R_2C_2 = 1$

$$V_{c1} = \frac{1}{R_1C_1s+1}V_1 = \frac{10}{s+10}V_1$$

$$V_2 = \frac{R_f}{R}\,\frac{R_2C_2s}{R_2C_2s+1}V_{c1} = \frac{5s}{s+1}$$

$$\therefore\ V_2 = \frac{50s}{(s+1)(s+10)}V_1$$

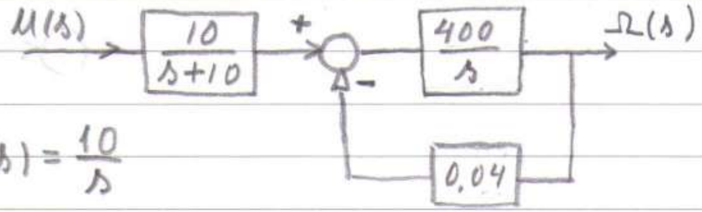
Resposta ao degrau unitário

$$V_2(s) = \frac{50}{(s+1)(s+10)} = \frac{50}{9}\left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+10}\right)$$

$$v_2(t) = \frac{50}{9}\left(e^{-t} - e^{-10t}\right)$$

Cap. 6 Soluções Sist 2º ordem

22) $RC = 0,1 \qquad \dfrac{K_m}{R_a J} = 400 \qquad K_m = 0,04$



$U(s) = \dfrac{10}{s}$

$$\frac{\Omega(s)}{U(s)} = \frac{10}{s+10} \cdot \frac{400}{s+16} = \frac{4000}{(s+10)(s+16)}$$

$$\Omega(s) = \frac{40000}{s(s+10)(s+16)} = 250\left(1 - \frac{8/3}{s+10} + \frac{5/3}{s+16}\right)$$

ou

$$\omega(t) = 250\left(1 - \frac{8}{3}e^{-10t} + \frac{5}{3}e^{-16t}\right)$$

24)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{16s}{s^2+6s+8} = \frac{16s}{(s+2)(s+4)}$$

Resposta ao degrau unitario: $U(s) = \dfrac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{16}{(s+2)(s+4)} = \frac{8}{s+2} - \frac{8}{s+4}$$

$$y(t) = 8\left(e^{-2t} - e^{-4t}\right)$$

Resposta à rampa unitária $U(s) = \dfrac{1}{s^2}$

$$Y(s) = \frac{16}{s(s+2)(s+4)} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s+4}$$

$$y(t) = 2\left(1 - 2e^{-2t} + e^{-4t}\right)$$

DATA/FECHA

Cap. 6 Soluções Sist. de 2ª ordem

26) $F(s) = \dfrac{\omega_n^2}{s^2+2\alpha s+\omega_n^2} = \dfrac{169}{s^2+10s+169}$

$\alpha = 5 \quad \omega_n^2 = 169 \quad \omega_n = 13 \quad \omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 12$

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{5}{13} = 0{,}385$$

tempo de subida $t_s = \dfrac{\pi - \phi}{\omega_d}$ (p. 79)

$\phi = \arctan\left(\dfrac{\omega_d}{\alpha}\right) = \arctan 2{,}4 = 1{,}176$ rad

$t_s = \dfrac{3{,}142 - 1{,}176}{12} = 0{,}164$ s

constante de tempo: $\tau = \dfrac{1}{\alpha} = 0{,}2$ s

tempo de acomodação: $t_{ac} = 4\tau = 0{,}8$ s

tempo de pico $t_p = \dfrac{\pi}{\omega_d} = \dfrac{3{,}14}{12} = 0{,}262$ s

sobressinal $M_p = e^{-\frac{\alpha\pi}{\omega_d}} = e^{-\frac{5\pi}{12}} = e^{-1{,}03} = 0{,}270$

ou $M_p\% = 27\%$

DATA/FECHA

28)

(a) $G_1(s) = \dfrac{s+25}{s^2+8s+25}$

polos $-4 \pm \sqrt{16-25} = -4 \pm j3$

$$G_1(s) = \frac{s+25}{(s+4-j3)(s+4+j3)} = \frac{s+4+21}{(s+4)^2+9}$$

$$G_1(s) = \frac{s+4}{(s+4)^2+9} + \frac{21}{(s+4)^2+9}$$

(b) Resposta ao impulso:

$$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}\{G_1(s)\} = e^{-4t}(\cos 3t + 7 \operatorname{sen} 3t)$$

(c) Considere a expressão

$$\varphi(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

Multiplicando e dividindo o 2º membro por $\sqrt{A^2+B^2}$, temos

$$\varphi(t) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \cos \omega t + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \operatorname{sen} \omega t\right)$$

Sempre é possível definir um ângulo ϕ, tal que

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad e \quad \cos \phi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Note que $\operatorname{sen}^2 \phi + \cos^2 \phi = 1$ e $\phi = \arctan\left(\frac{A}{B}\right)$

Temos então

$$\varphi(t) = \sqrt{A^2+B^2}(\operatorname{sen} \phi \cos \omega t + \cos \phi \operatorname{sen} \omega t)$$

ou ainda

$$\varphi(t) = \sqrt{A^2+B^2} \cdot \text{sen}(\omega t + \phi)$$

Retomando a expressão do item (b), e fazendo

$A = 1$, $B = 7$, $\omega = 3$ $\phi = \arctan\left(\frac{1}{7}\right) = 8{,}13°$

e $\sqrt{A^2+B^2} = \sqrt{8} = 7{,}07$, resulta

$$g_1(t) = 7{,}07 e^{-4t} \text{sen}(3t + 8{,}13°)$$

30) $$Y(s) = \frac{25(s+1)}{s(s^2+8s+25)} = \frac{1}{s} - \frac{s-17}{(s+4)^2+9}$$

ou

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+4}{(s+4)^2+9} + 7\,\frac{3}{(s+4)^2+9}$$

$$y(t) = 1 - e^{-4t}(\cos 3t - 7\,\text{sen}\,3t)$$

$$y(t) = 1 - \sqrt{50}\, e^{-4t}\left(\frac{1}{\sqrt{50}}\cos 3t - \frac{7}{\sqrt{50}}\text{sen}\,3t\right)$$

$$y(t) = 1 + 7{,}07 e^{-4t} \text{sen}(3t - 18{,}13°)$$

Podemos obter o mesmo resultado utilizando a formula

$$y(t) = \frac{ka}{\omega_n^2}\left\{1 - \frac{p_a \omega_n}{a\,\omega_d} e^{-\alpha t} \text{sen}(\omega_d t + \phi)\right\}$$

sendo $\phi = \theta_a - \theta_1 + 90$

Continua

DATA/FECHA

neste exemplo

$\alpha = 4 \qquad \omega_n = 5 \qquad \omega_d = 3 \qquad K = 25$

$$\rho_a = \sqrt{(a-\alpha)^2 + \omega_d^2} = \sqrt{18} = 4{,}24$$

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{\omega_d}{a-\alpha}\right) = \arctan(-1) = -45^\circ$$

$$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right) = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53^\circ 13$$

$$\phi = \theta_a - \theta_1 + 90^\circ = 135^\circ - 53^\circ 13 + 90^\circ = 171{,}87$$

aplicando a fórmula

$$y(t) = \frac{25}{25 \times 1}\left\{1 - \frac{4{,}24 \times 5}{1 \times 3} e^{-4t} \operatorname{sen}(3t + 171{,}87)\right\}$$

ou

$$y(t) = 1 + 7{,}07 e^{-4t} \operatorname{sen}(3t - 8{,}13^\circ)$$

DATA/FECHA

Cap. 6 Soluções Sistemas de 3ª ordem.

32)

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3}{s^3 + 4{,}5s^2 + 5s + 1{,}5} = \frac{3}{(s+0{,}5)(s+1)(s+3)}$$

com $U(s) = \frac{1}{s}$ resulta

$$Y(s) = \frac{3}{s(s+0{,}5)(s+1)(s+3)} = \frac{2}{s} - \frac{4{,}8}{s+0{,}5} + \frac{3}{s+1} - \frac{0{,}2}{s+3}$$

Pela transformada inversa de Laplace, obtemos

$$y(t) = 2\left(1 - 2{,}4e^{-0{,}5t} + 1{,}5e^{-t} - 0{,}1e^{-3t}\right)$$

Usando a fórmula geral para esse caso:

$$y(t) = \frac{K}{abc}\left\{1 + \frac{bc(c-b)e^{-at} + ca(a-c)e^{-bt} + ab(b-a)e^{-ct}}{(b-a)(c-b)(a-c)}\right\}$$

No exemplo temos

$K = 3 \quad a = 0{,}5 \quad b = 1 \quad c = 3 \quad abc = 1{,}5$

$c - b = 2 \quad a - c = -2{,}5 \quad b - a = 0{,}5$

Substituindo na formula:

$$y(t) = \frac{3}{1{,}5}\left\{1 + \frac{6e^{-0{,}5t} - 3{,}75e^{-t} + 0{,}25e^{-3t}}{-2{,}5}\right\}$$

$$y(t) = 2\left\{1 - 2{,}4e^{-0{,}5t} + 1{,}5e^{-t} - 0{,}1e^{-3t}\right\}$$

tilibra

Cap. 6 Soluções

34)
$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{400}{(s+10)(s^2+1{,}256s+40)}$$

Trata-se de um sistema isento de zeros, com dois pólos complexos e um pólo real, da forma

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(s+a)(s^2+2\alpha s+\omega_n^2} = \frac{K}{(s+a)((s+\alpha)^2+\omega_d^2)}$$

A formula geral da resposta desse sistema a um degrau unitário é

$$y = \frac{K}{a\omega_n^2}\left\{1 - \frac{\omega_n^2}{\rho_a^2}e^{-at} - \frac{a\omega_n}{\rho_a\omega_d}e^{-\alpha t}\operatorname{sen}(\omega_d t - \theta_a - \theta_1 + 90)\right\}$$

com $\rho_a = \sqrt{(a-\alpha)^2+\omega_d}$ $\qquad \omega_d = \sqrt{\omega_n^2-\alpha^2}$

$\theta_1 = \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right) \qquad \theta_2 = \arctan\left(\frac{\omega_d}{a-\alpha}\right)$

No exemplo numérico temos

$K = 400 \qquad a = 10 \qquad \alpha = 0{,}628 \qquad \omega_n = \sqrt{40} = 6{,}325$

$\omega_d = \sqrt{40-0{,}628^2} = 6{,}293 \qquad \rho_a = \sqrt{9{,}372^2+6{,}293^2} = 11{,}289$

$\theta_1 = \arctan\left(\frac{0{,}628}{6{,}293}\right) = \arctan(0{,}100) = 5{,}699°$

$\theta_a = \arctan\left(\frac{6{,}293}{9{,}372}\right) = \arctan(0{,}671) = 33{,}880°$

$\phi = -\theta_a - \theta_1 + 90 = -33{,}880° - 5{,}699° + 90° = 50{,}421°$

Substituindo os valores numéricos obtidos, na fórmula dada, obtemos:

DATA/FECHA

$$y(t) = 1 - 0{,}314e^{-10t} - 0{,}890e^{-0{,}628t}\,\mathrm{sen}(6{,}293t + 50{,}42°)$$

Para $t = 0$

$$y(0) = 1 - 0{,}314 - 0{,}890 \times 0{,}771 = 0$$

36) Sistema original:

$$G(s) = \frac{500}{(s+10)(s^2+6s+25)}$$

Pólo real: -10 Polos complexos dominantes: $-3 \pm j4$

Mantendo apenas os polos dominantes e mantendo inalterada a constante de ganho obtemos a forma reduzida

$$\bar{G}(s) = \frac{50}{s^2+6s+25}$$

Resposta ao degrau unitário

$$Y(s) = \frac{50}{s(s^2+6s+25)} = \frac{2}{s} - \frac{2s+12}{s^2+6s+25}$$

$$Y(s) = 2\left\{\frac{1}{s} - \frac{s+3}{(s+3)^2+16} - \frac{3}{4}\,\frac{4}{(s+3)^2+16}\right.$$

$$y(t) = 2\left(1 - e^{-3t}\left(\cos 4t + \frac{3}{4}\,\mathrm{sen}\,4t\right)\right)$$

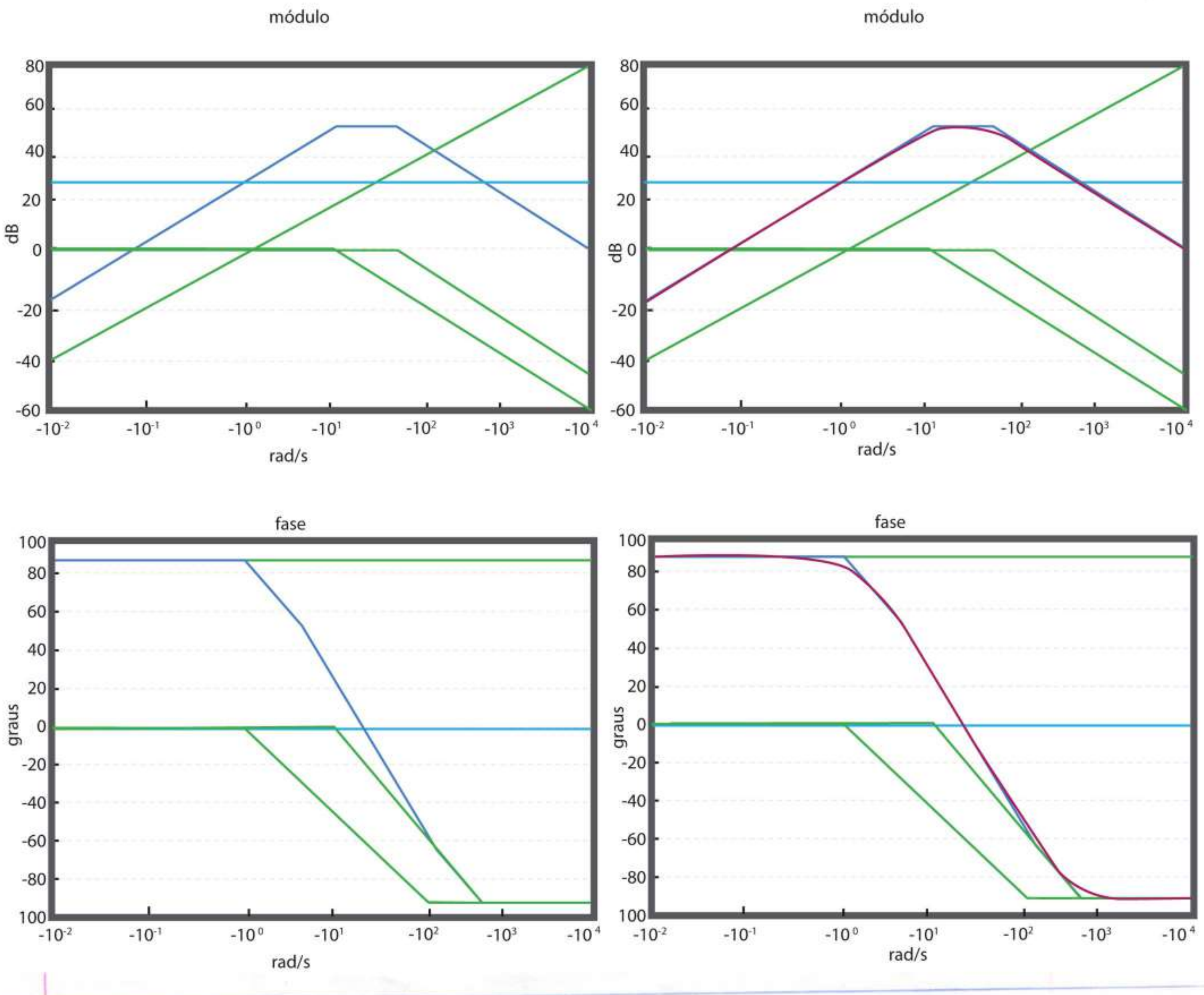
ou $$y(t) = 2(1 - 1{,}25\,e^{-3t}\,\mathrm{sen}(4t + 53{,}13°))$$

tilibra

Capitulo 7 Solução. Prob. 2a

$$G_a(s) = \frac{10.000s}{(s+10)(s+50)} = \frac{10000s}{s^2+60s+500}$$

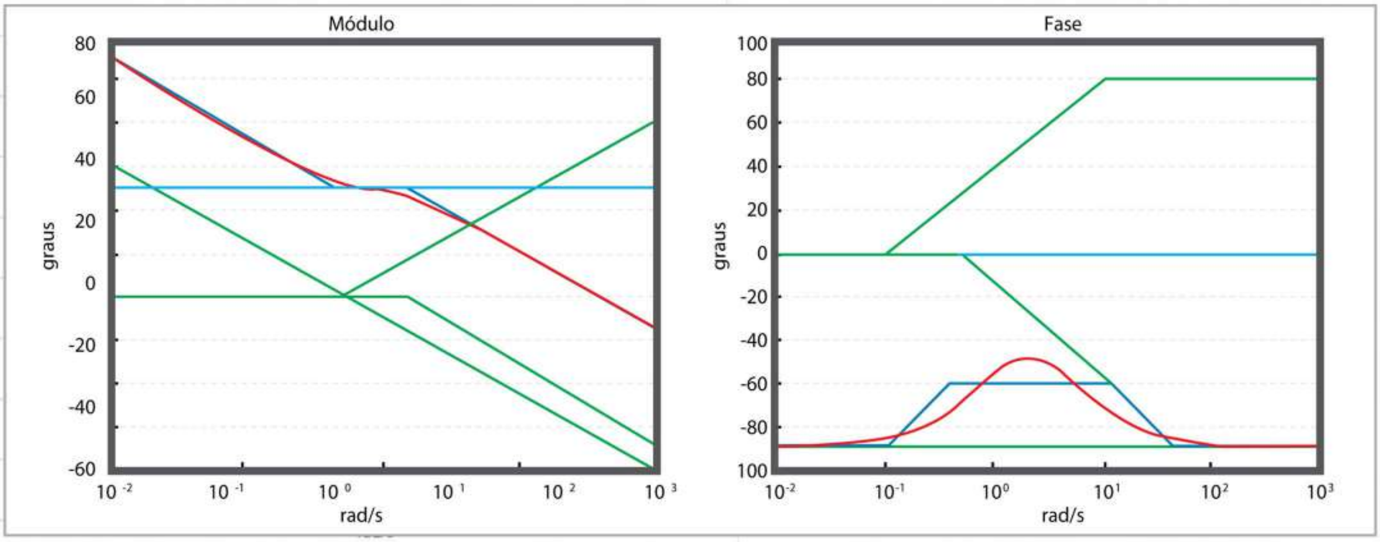
$$K_g = \frac{10000}{500} = 20 \quad \text{ou} \quad K_g(dB) = 26$$



Cap. 7 Problema 26

$$G_b(s) = \frac{200(s+1)}{s(s+5)}$$

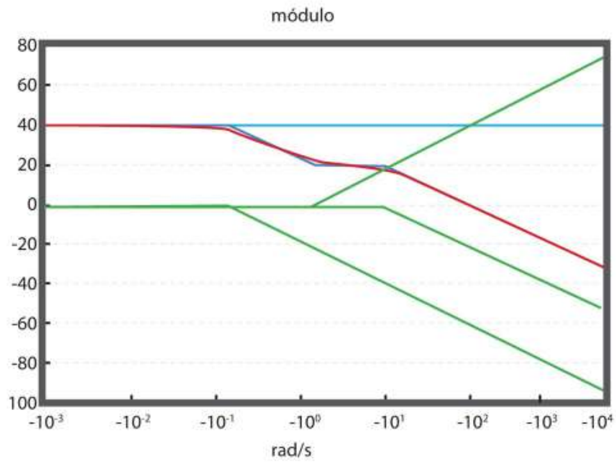
$K_g = \frac{200}{5} = 40$ $\quad$ $K_g(dB) = 32dB$

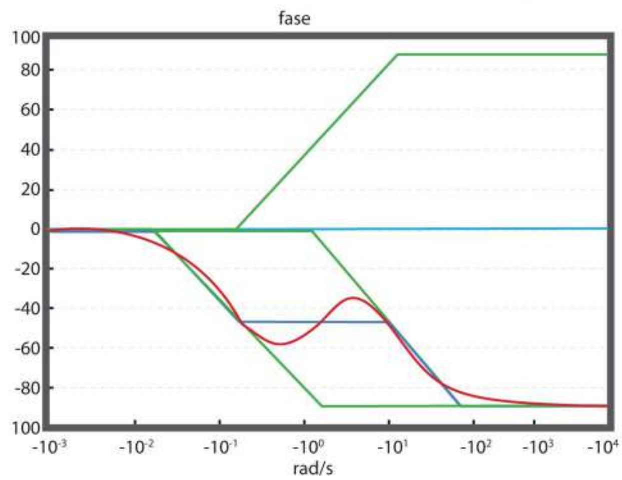


Cap. 7 Prob. 2c

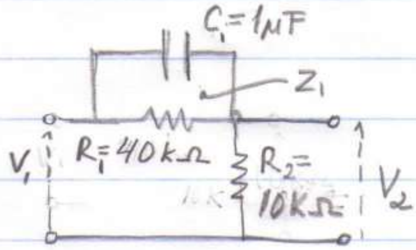
$$G_c(s) = \frac{200(s+2)}{(s+0{,}2)(s+20)} = \frac{200(s+2)}{s^2+20{,}2s+4}$$

$$K_g = \frac{400}{4} = 100 \qquad K_g(dB) = 40\,dB$$





Cap 7 Prob. 4

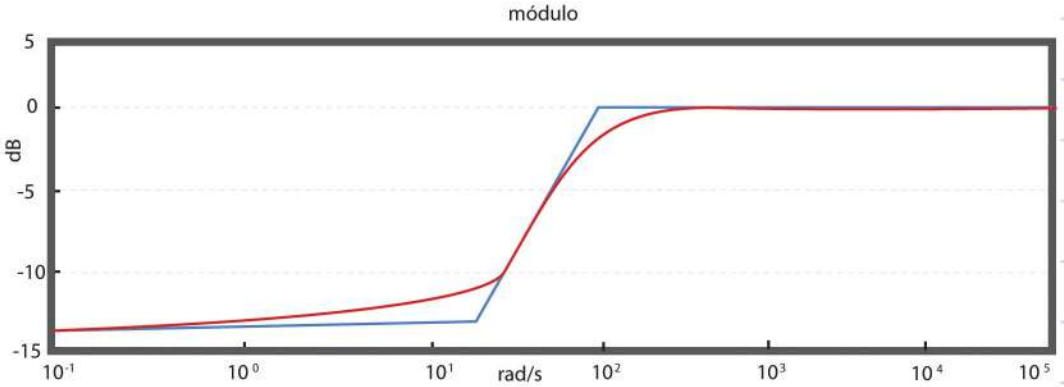


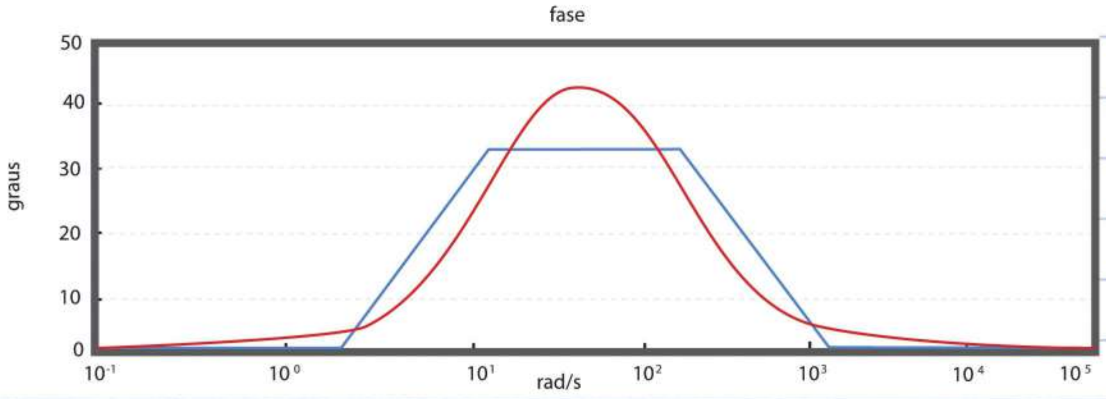
$$Z_1 = \frac{R_1 \frac{1}{sC_1}}{R_1 + \frac{1}{sC_1}} = \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1} = \frac{4 \times 10^4}{0{,}04 s + 1}$$

ou $Z_1 = \dfrac{10^6}{s+25}$

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R_2}{Z_1 + R_2} = \frac{1}{\frac{100}{s+25} + 1} = \frac{s+25}{s+125}$$

ou $K_g = \dfrac{1}{5}$ ou $K_g(dB) = -14\,dB$





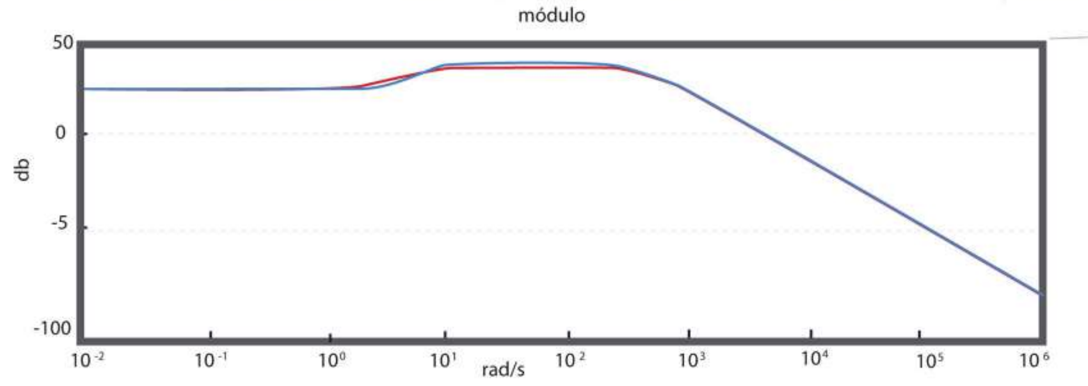
Cap. 7 Prob 6

$$G(s) = \frac{3{,}75\times10^{7}(s+2)}{(s+10)(s+300)(s+1250)} =$$

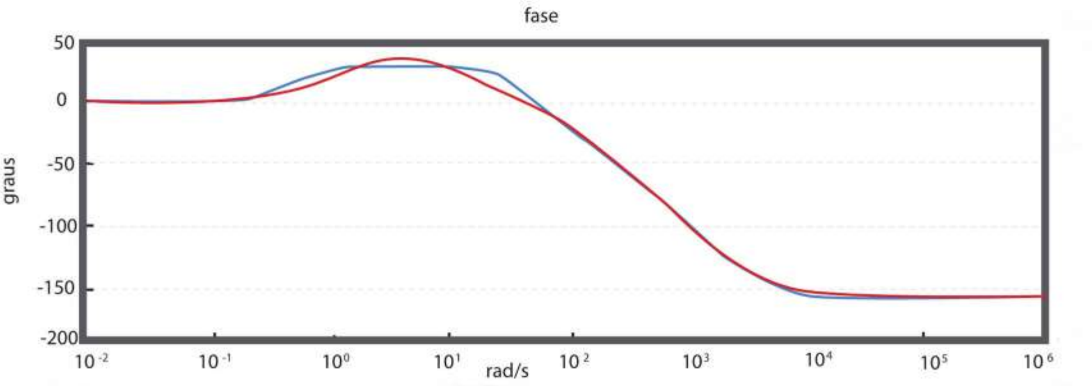
$$= \frac{3{,}75\times10^{7}(s+2)}{s^3+1560s^2+390500s+3.750.000}$$

$K_g = 20$ ou $K_g(dB) = 26\,dB$

(a)



(b)



(c) Função senoidal de transferência ($s = j\omega$):

$$G(j\omega) = \frac{3{,}75\times10^{7}(2+j\omega)}{3.750.000-1560\omega^2+j\omega(390500-\omega^2)}$$

Para $\omega = j300$:

$G(j300) = 68{,}7\angle{-57^\circ}$ Ganho em dB: $36.7\,dB$

Cap. 7. Prob-8 Solução

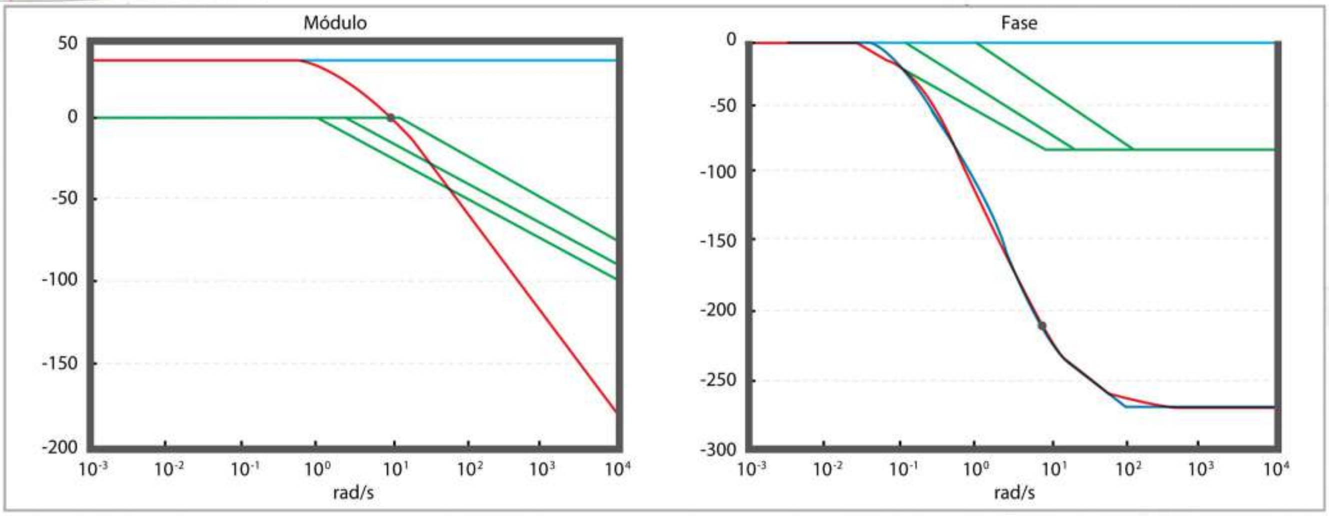
$$G(s) = \frac{1800}{s(s+3)(s+12)} = \frac{1800}{s^3+15s^2+36s}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1800}{s^3+15s^2+36s+20}$$

Pólos de $F(s)$: $-0{,}82$; $-2{,}0$; $-12{,}18$

$K_g = 90$ $\quad K_g(dB) = 39\,dB$

(a) Poligonais assintóticas de ganho e fase



(c) Resposta forçada à entrada $u(t) = 20\,\mathrm{sen}(10t)$

Função senoidal de transferência

$$F(j\omega) = \frac{1800}{(20-15\omega^2)+j(35\omega-\omega^3)}$$

Para $\omega = 10\,rad/s$: $F(j10) = 1{,}116 \angle 156{,}6^\circ$

ou $F(j10) = 1{,}116 \angle -203{,}4^\circ$

ganho em dB: $0{,}953\,dB$

Valores compatíveis com os diagramas.

Cont prob. 8 cont

(b) Resposta forçada

$$u(t) = 20 \times 1{,}116 \, sen(10t - 203{,}4°)$$
$$= 22{,}32 \, sen(10t - 203{,}4°)$$

Cap. 7. Prob. 10 Solução

$$G(s) = \frac{2{,}5 \times 10^4 (s+0{,}5)}{s(s+5)(s+50)} = \frac{25000\,(s+0{,}5)}{s(s^2+55s+250)}$$

(a) $K_g = \frac{25000 \times 0{,}5}{250} = 50$; em dB: $K_g(dB) = 34 dB$

$$G(j\omega) = \frac{25000(0{,}5+j\omega)}{-55\omega^2 + j\omega(250-\omega^2)}$$

(b) $$G(j\omega)\Big]_{\omega=20} = \frac{25000(0{,}5+j20)}{-22000-j3000} = 22{,}5 \angle -99{,}2°$$

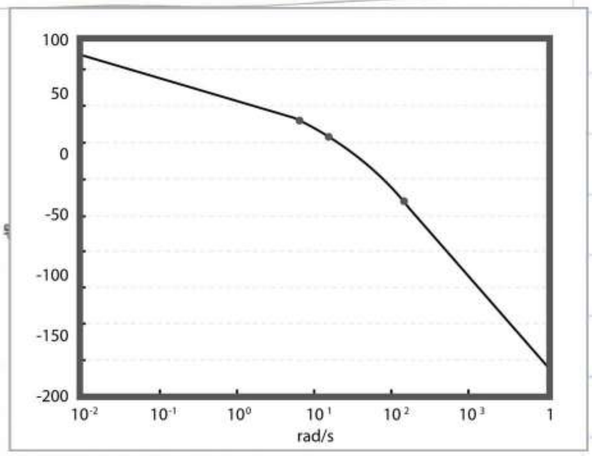
Para $u(t) = 12\cos(20t+30°)$

a resposta forçado do sistema será

$$y(t) = 12 \times 22{,}5 \cos(20t + 30° - 99{,}2°)$$

$$y(t) = 270 \cos(20t - 69{,}2°)$$

Cap. 7 Prob 12 Solução



Um resultado compatível com a observação da figura é o seguinte:

(a) $K_g(dB) = 48\,dB$

ou, em unidades SI

$$K_g = 10^{\frac{48}{20}} \cong 250$$

(b) Polos obtidos da fig.; 0; -5; -20; -80. Não é

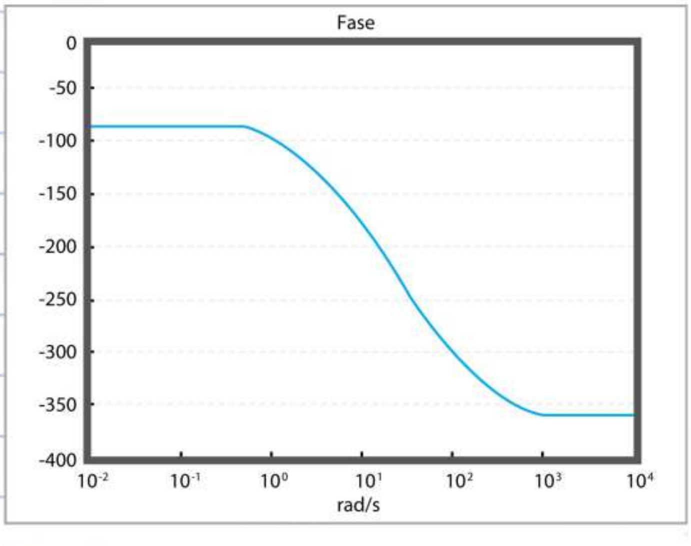
Logo:

$$G(s) = \frac{250}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{20}+1\right)\left(\frac{s}{80}+1\right)}$$

ou

$$G(s) = \frac{2\times 10^{6}}{s(s+5)(s+20)(s+80)}$$

(c) Poligonal de resposta em frequência de fase



Cap. 7 Prob. 14 Solução

$$G(s) = \frac{1.600\,(s+3)}{s\,(s^2+8s+1.600)}$$

Polos: $0\ ;\ -4 \pm j\,39{,}8$ Zero: -3

$K_g = 3$ $K_g\,(dB) \cong 9{,}5\ dB$

$\alpha = 4$ $\omega_n = 40$ $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = 0{,}1$

$$G(j\omega) = \frac{1600\,(3+j\omega)}{-j\omega^3 - 8\omega^2 + 1600\,j\omega}$$

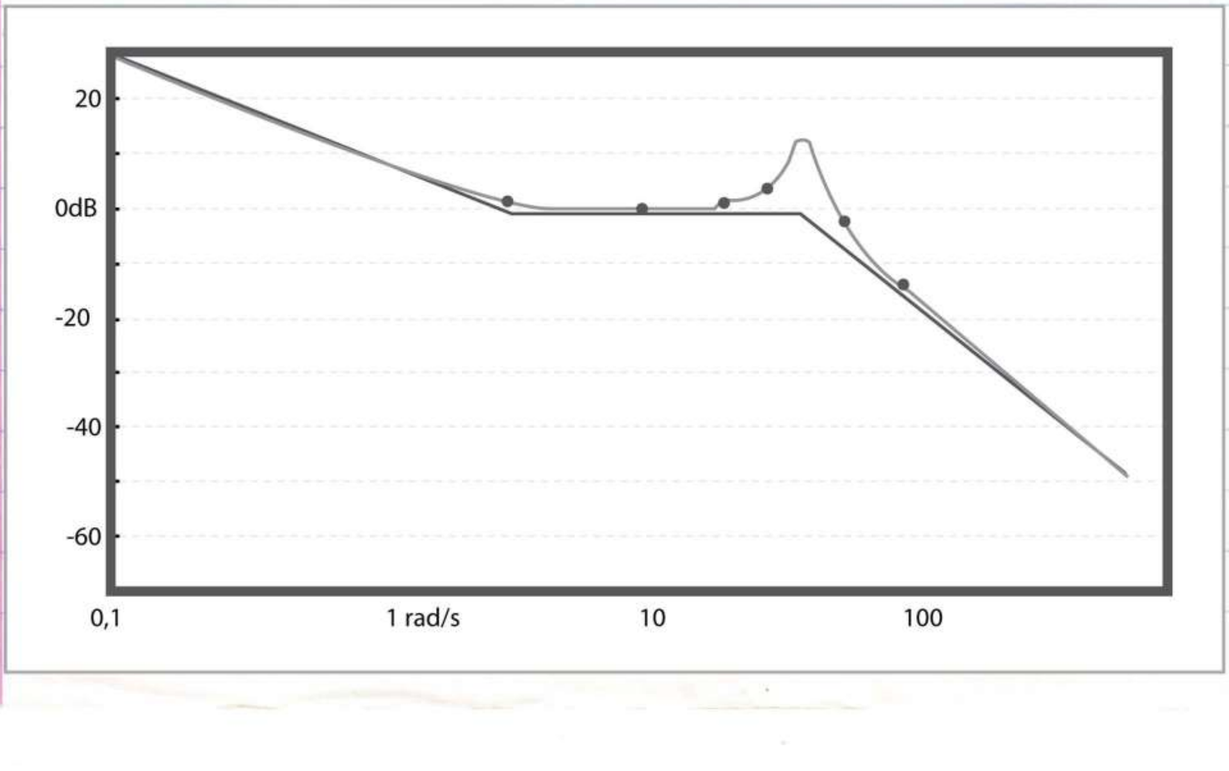
$G(j10) = 1{,}112 \angle -19{,}7°$ $0{,}922\,dB$

$G(j20) = 1{,}34 \angle -16{,}12°$ $2{,}54\,dB$

$G(j30) = 2{,}17 \angle -24{,}6°$ $6.72\,dB$

$G(j40) = 5{,}01 \angle -94{,}3°$ $14.0\,dB$

$G(j60) = 0{,}778 \angle -169{,}3$ $-2{,}17\,dB$



Capitulo 8. Soluções ✓
Estabilidade. Critério de Routh

1(a) $Q_1 = s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3$

s^4	1	8	3
s^3	2	4	
s^2	6	3	
s	3		
1	3		

$\frac{2\times 8 - 1\times 4}{2} = 6$ $\quad \frac{2\times 3 - 0}{2} = 1$

$\frac{6\times 4 - 2\times 3}{6} = 3$

Nenhuma troca de sinal na 1ª coluna portanto nenhuma raiz no SPD.

1(d) $Q_4 = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260$

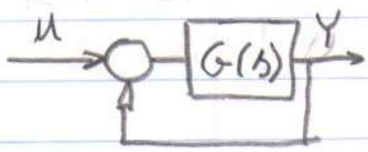
s^5	1	2	89
$+\ s^4$	2	46	260
$-\ s^3$	-21	-41	
$+\ s^2$	42,09	260	
s	88,71		
1	260		

$\frac{-21\times 46 + 2\times 41}{-21} = 42,09$

2 trocas de sinais na 1ª coluna indicam a existência de duas raizes no SPD do plano s

Capitulo 8 Solução Problema 3

(3) $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)(s+4)} =$



ou $G(s) = \dfrac{K(s+1)}{s(s^3+9s^2+26s+24)}$

Em malha fechada

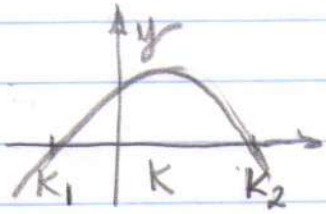
$$F(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{K(s+1)}{s^4+9s^3+26s^2+(24+K)s+K}$$

s^4	1	26	K
s^3	9	$24+K$	
s^2	$\frac{210-K}{9}$	$\frac{9K}{9}$	
s	y		
1	$K>0$		

$\dfrac{9\times 26-(24+K)}{9}$

$y = (210-K)(24+K) - 81K$

$= 5040 + 105K - K^2$



raizes dessa equação
$K_2 = 140{,}80$ e $K_1 = -35{,}79$

Para que não haja troca de sinais na primeira coluna devemos ter $y > 0$ e portanto devemos ter $K_1 < K < K_2$ além disso a última linha impõe $K > 0$. Logo valores de K que tornam o sistema estavel: $0 < K < 140{,}79$

Capitulo 8 Solução Problema 5

1º sitema

Em malha fechada temos

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{K}{s^3 + 8s^2 + 9s + K}$$

s^3	1	9
s^2	8	K
s	$72 - K \longrightarrow K < 72$	
1	$K \longrightarrow K > 0$	

∴ Condição para que não haja troca de sanais na coluna principal = condição de estabilidade do sistema: $0 < K < 72$

2º sistema

Em malha fechada

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^4 + 4s^3 + 10s^2 + 20}$$

Esse sistema é instavel pois falta o termo em s, no polinômio do denominador. De fato

s^4	1	10	20
s^3	4	0	
s^2	+10	20	
s	−80		
1	+20		

cont.

Cap. 8 Prob 5 Continuação

Duas trocas de sinais na coluna principal indicam a existência de 2 raízes de instabilidade no SPD. De fato os polos desse sistema são:

$$-2{,}35 \pm j\,2{,}46$$
$$\text{e} \quad +0{,}35 \pm j\,1{,}27$$

Mais ilustrativo é esse mesmo sistema acrescido de um zero na origem. Em malha fechada fica:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{Ks}{s^4 + 4s^3 + 10s^2 + Ks + 20}$$

s^4	1	10	20
s^3	4	K	
s^2	40-K	80	
s	y		
1	80		

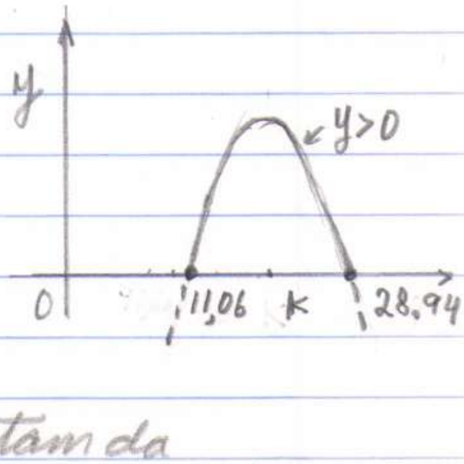
$$\longrightarrow y = -K^2 + 40K - 320$$

$$K_{1,2} = 20 \pm \sqrt{80} = 20 \pm 8{,}94$$

$$K_1 = 11{,}06 \qquad K_2 = 28{,}94$$

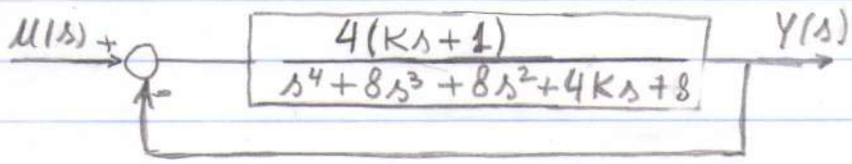
Valores de K compatíveis com a estabilidade

$$11{,}06 < K < 28{,}94$$



São esses os valores que constam da resposta da questão da questão 5 2º sistema

Capítulo 8 Solução Problema 7



Em malha aberta

$$q(s) = s^4+8s^3+8s^2+4Ks+8$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 8 & 8 \\
s^3 & \cancel{8} & \cancel{4K} & \\
 & 2 & K & \\
s^2 & 16-K & 16 & \longrightarrow K<16 \\
s & y_1 & & \longrightarrow y_1 = -K^2+16K-32 \\
1 & 16 & &
\end{array}$$

$$K_{1,2} = -8 \pm \sqrt{64-32} = 8 \pm 5{,}67$$

$$K_1 = 2{,}33 \quad K_2 = 13{,}67$$

Para estabilidade em malha aberta: $2{,}33 < K < 13{,}67$

Em malha fechada

$$Q(s) = s^4+8s^3+8s^2+8Ks+12$$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 8 & 12 \\
s^3 & \cancel{8} & \cancel{8K} & \\
 & 1 & K & \\
s^2 & 8-K & 12 & \longrightarrow K<8 \\
s & -K^2+8K-12 & & \longrightarrow K_{1,2} = 4 \pm \sqrt{16-12} = 4 \pm 2 \\
1 & 12 & &
\end{array}$$

$$K_1 = 2 \quad K_2 = 6$$

Para estabilidade em malha fechada $2 < K < 6$

Caso geral: $\underset{2}{[}\ \underset{2,33}{[}\ \overset{K}{\ }\ \underset{6}{]}\ \underset{13,67}{]}\rightarrow$ $\quad 2{,}33 < K < 6$

cont. prob 7

Para $K=2$ temos, em malha fechada

$$Q(s) = s^4 + 8s^3 + 8s^2 + 16s + 12$$

s^4	1	8	12
s^3	$\cancel{8}$ / 1	$\cancel{16}$ / 2	
s^2	$\cancel{6}$ / 1	$\cancel{12}$ / 2	
s	$\cancel{0}$ / 2	0	
1	2		

$\longrightarrow \quad q_1(s) = s^2 + 2$

$$\frac{dq_1}{ds} = 2s + 0$$

As raízes do polinômio auxiliar ($s = \pm j\sqrt{2}$) são também raízes de $Q(s)$

As demais raízes de $Q(s)$ estão contidas no polinômio do 2º grau

$$q_2(s) = \frac{Q(s)}{q_1(s)} = s^2 + 8s + 6$$

cujas raízes são $-7{,}16$ e $-0{,}84$

Capitulo 8 Solução Problema 9

Em malha fechada

$Q(s) = s^3 + 5s^2 + 16s + 10a$

$s = s' - 1 \longrightarrow Q' = s'^3 + 2s'^2 + 9s' - 12 + 10a$

s'^3	1	9
s'^2	2	$10a - 12$
s'	$30 - 10a$	$\longrightarrow a < 3$
1	$10a - 12$	$\longrightarrow a > 1{,}2$

assim, com $a = 3$ ou $a = 1{,}2$ as raizes do polinômio original $Q(s)$ se situarão à distância de pelo menos uma unidade a esquerda do eixo imaginario

Vejamos:

$a = 3$, $Q = s^3 + 5s^2 + 16s + 30$

raizes nesse caso: $-1 \pm 3j$ e -3

$a = 1{,}2$ $Q = s^3 + 5s^2 + 16s + 12$

raizes: -1 e $-2 \pm j2{,}82$

Para valores intermediarios de a no intervalo $(1{,}2;3)$, as raizes do polinômio Q estarão ainda mais afastadas do eixo $j\omega$. Exemplo: $a = 2$

$Q = s^3 + 5s^2 + 16s + 20$

Raizes: -2 e $-1{,}5 \pm j2{,}78$

Capitulo 8 Solução Prob-11

$Q_1 = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 3s + 3$

s^4	1	4	3
s^3	2	3	
s^2	5	6	
s	3		
1	6		

Não há troca de sinal na 1ª coluna. Portanto, nenhuma raiz no SPD.

$Q_2 = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 3s + 2$

	s^5	1	4	3
	s^4	2	8	2
+	s^3	$\cancel{0}\,\varepsilon$	4	
−	s^2	$\frac{8\varepsilon - 8}{\varepsilon}$	2	
+	s	4		
	1	2		

← 1º caso especial

duas trocas de sinais na 1º coluna; Portanto 2 raizes no SPD

Capítulo 8. Solução. Prob-13

Polinômio característico de um sistema:

$Q_4(s) = s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 8s^2 + 6s + 4$

$$\begin{array}{c|ccc}
s^5 & 1 & 7 & 6 \\
s^4 & \cancel{4} & \cancel{8} & \cancel{4} \\
 & 1 & 2 & 1 \\
s^3 & \cancel{5} & \cancel{5} & \\
 & 1 & 1 & \\
s^2 & 1 & 1 & \\
s & \cancel{0} & & \\
 & 2 & & \\
 & 1 & &
\end{array}$$

→ linha toda nula
2° caso especial
Obtem-se o polinômio auxiliar com os coeficientes da linha anterior (s^2)

$q(s) = s^2 + 1$

Substituem-se os zeros da linha nula pelos coeficientes da derivada do polinômio auxiliar

$\frac{dq}{ds} = 2s$

As raizes de $q(s)$ são também raizes do polinômio dado Q_4: $\pm j$. Uma outra raiz (-2) é dada pelo enunciado do problema. O polinômio que contem essas 3 raizes é

$q_1(s) = (s^2+1)(s+2) = s^3 + 2s^2 + s + 2$

As raizes restantes estão contidas no polinômio resultante da divisão

$$\frac{Q_4(s)}{q_1(s)} = s^2+2s+2$$

cujas raizes são $-1 \pm j$

Então as 5 raizes do polinômio ($Q_4(s)$) dado, são: -2, $+j$, $-j$, $-1+j$, $-1-j$

- Há duas raizes no eixo imaginario mas nenhuma no SPD.

Capitulo 8. Solução Prob 15

$$Q(s) = s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\
s^5 & \cancel{2} & \cancel{12} & \cancel{16} & \\
 & 1 & 6 & 8 & \\
s^4 & \cancel{2} & \cancel{12} & \cancel{16} & \\
 & 1 & 6 & 8 & \\
s^3 & 0 & 0 & 0 & \rightarrow \text{linha toda nula}
\end{array}
$$

polinômio auxiliar $q(s) = s^4 + 6s^2 + 8$

raizes do $q(s)$: $\pm j\sqrt{2}$ e $\pm j2$

$$\frac{dq}{ds} = 4s^3 + 12s + 0$$

$$
\begin{array}{c|cccc}
s^6 & 1 & 8 & 20 & 16 \\
s^5 & 1 & 6 & 8 & \\
s^4 & 1 & 6 & 8 & \\
s^3 & \cancel{4} & \cancel{12} & & \\
 & 1 & 3 & & \\
s^2 & 3 & 8 & & \\
s & 1 & & & \\
1 & 8 & & &
\end{array}
$$

$$\frac{Q(s)}{q(s)} = s^2 + 2s + 2 \quad \text{raizes } -1 \pm j$$

Há 4 raizes no eixo $j\omega$. Não há raizes no SPD

Cap. 9 Prob 1 Sol.

- Dos diagramas obtem-se:

(1º diagrama)

Em m.a. $G(s) = \frac{20}{s+20} = \frac{1}{0{,}05s+1}$

$K=20$; pólo: -20; $K_g=1$; $\tau=0{,}05$

Em m.f.

$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{20}{s+40} = \frac{0{,}5}{0{,}025s+1}$

$K=20$; pólo: -40; $K_g=0{,}5$; $\tau=0{,}025$

(2º diagrama)

Em m.a. $G(s) = \frac{10}{s+20} = \frac{0{,}5}{0{,}05s+1}$

$K=10$; pólo: -20; $K_g=0{,}5$; $\tau=0{,}05$

Em m.f. $\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{10}{s+40} = \frac{0{,}25}{0{,}025s+1}$

$K=10$; pólo: -40; $K_g=0{,}25$ $\tau=0{,}025$

Em ambos os casos os sistemas em malha fechada são mais rápidos e mais estáveis.

Cap. 9 Prob. 3 Sol.

$$G(s) = \frac{25}{(s-1)(s+5)} = \frac{25}{s^2+4s-5}$$ (instavel) polos: +1 e −5

Com realimentação unitaria (negativa) temos

$$F(s) = \frac{25}{s^2+4s+20} = \frac{25}{(s+2)^2+16}$$

$K=25$ polos: $-2 \pm j4$ $K_g = 1{,}25$ $\tau = 0{,}5$

Em malha fechada, sistema estável e subamortecido.

Cap. 9 Prob. 5 Sol.

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+6)(s-4)} = \frac{K(s+4)}{s^2+2s-24}$$

Pólos de malha aberta: -6 e $+4$. O sistema é instavel e a constante de ganho tem sinal contrário ao da constante K: $K_g = -\frac{1}{6}K$

Em malha fechada (realimentação unitária negativa):

$$F(s) = \frac{K(s+4)}{s^2+(K+2)s+4(K-6)}$$

$$K=4 \longrightarrow F(s) = \frac{4(s+4)}{s^2+6s-8} = \frac{4(s+4)}{(s+7{,}12)(s-1{,}12)}$$

Sistema instável. Polos: $-7{,}12$ e $+1{,}12$

$K=4$; $K_g=-2$

$$K=6 \longrightarrow F(s) = \frac{6(s+4)}{s^2+8s} = \frac{6(s+4)}{s(s+8)}$$

Sistema marginalmente estavel

Polos: 0 e -8; $K=6$; $K_g=3$

$$K=10 \longrightarrow F(s) = \frac{10(s+4)}{s^2+12s+16} = \frac{10(s+4)}{(s+1{,}52)(s+10{,}47)}$$

Polos: $-1{,}52$ e $-10{,}47$ $\quad K=10 \quad K_g = \frac{40}{16} = 2{,}5$

Sistema estável superamortecido

$$K=15 \longrightarrow F(s) = \frac{15(s+4)}{s^2+17s+36} = \frac{15(s+4)}{(s+2{,}48)(s+14{,}52)}$$

Pólos: $-2{,}48$ e $-14{,}52$ $\quad K=15 \quad K_g = \frac{60}{36} = 1{,}67$

Sistema estável superamortecido

Cap. 9 Prob. 7 Sol

Em malha aberta: $G(s) = \frac{10}{s^2+7s+10}$

Polos: -2 e -5; sistema estavel, tipo zero, (sem polo na origem). $K_g = 1$

Em malha fechada: $F(s) = \frac{10}{s^2+7s+20}$

Polos: $-3{,}5 \pm j\,2{,}78$. Sistema estável.

Erro estacionário da resposta ao degrau unitário (erro estacionário de posição); sendo sistema tipo zero:

$$e_{stp} = \frac{1}{K_g+1} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Cap. 9 Prob. 9 Sol.

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)} \longrightarrow G(s) = \frac{F(s)}{1-F(s)}$$

$$F(s) = \frac{7(s+2)}{s^3+3s^2+7s+14}$$

$$\therefore \quad G(s) = \frac{7(s+2)/(s^3+3s^2+7s+14)}{1-7(s+2)/(s^3+3s^2+7s+14}$$

$$G(s) = \frac{7(s+2)}{s^2(s+3)} \qquad K_g = \frac{14}{3} = 4{,}67$$

Sistema tipo 2: possui 2 pólos na origem em malha aberta.

(a) o erro estacionario relativo a uma entrada em rampa (erro estacionário de velocidade) é zero, para sistemas tipo 2.

(b) no caso de uma parábola unitária (erro estático de aceleração), sendo o sistema do tipo 2:

$$\mathcal{E}_{sta} = \frac{1}{K_g} = \frac{3}{14} = 0{,}214$$

Cap. 9 Prob 11 Sol.

Em malha aberta

$$G(s) = \frac{K}{s(s+0,8)(s+10)} = \frac{K}{s(s^2+10,8s+8}$$

(a) Sistema tipo 1: um polo na origem em m. a.

(b) Para $K=50$, resulta $K_g = \frac{50}{8} = 6,25$

∴ Constante de erro de velocidade $K_v = K_g = 6,25$

(c) O erro estático de posição, para sistemas tipo 1, é zero: $\varepsilon_{stp} = 0°C$

(d) Para $K=50$ o erro estático de velocidade é:

$$\varepsilon_{stv} = \frac{v_0}{K_g} = \frac{0,2}{6,25} = 0,032°C$$

(e) Cálculo do maior valor de K_g compatível com a estabilidade do sistema.

Em malha fechada: $F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^3+10,8s^2+8s+K}$

s^3	1	8	
s^2	$10,8$	K	
s	$86,4-K$		$\longrightarrow K<86,4$
1	K		$\longrightarrow K>0$

Caso limite de K_g:

$$K_g = \frac{K}{8} = \frac{86,4}{8} = 10,8$$

limite teórico limite para o menor erro estático de velocidade:

$$\varepsilon_{stv}(min) = \frac{0,2}{10,8} = 0,019°C$$

Cap. 9 Prob. 13 Sol.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)(s+7)} = \frac{K}{s(s^3+15s^2+71s+105)}$$

Em malha fechada:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^4+15s^3+71s^2+105s+K}$$

(a) Valores de K para estabilidade do sistema.

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 71 & K \\
s^3 & \cancel{15} & \cancel{105} & \\
 & 1 & 7 & \\
s^2 & 64 & K & \\
s & 448-K & & \\
1 & K & &
\end{array}$$

Sistema estavel para $0<K<448$

(b) Sistema tipo 1: um polo na origem em m.a.

(c) Degrau de altura 40.
Com $K=420$. O erro estático de posição é nulo para sistemas tipo 1.
Para $K=520$ o sistema é instavel.

(d) Rampa de coeficiente $v_0=2$
Com $K=420$, em malha aberta $K_g=\frac{420}{105}=4$

Erro estático de velocidade para sistemas tipo 1: $e_{stv}=\frac{v_0}{K_g}=\frac{2}{4}=0,5$.

Para $K=520$ o sistema é instável.

Cap. 9 Prob. 15 Sol.

Em malha aberta

$$A(s) = \frac{K}{s(s^2+8s+15)}$$

$$K_g = \frac{K}{15}$$

Em malha fechada

$$F(s) = \frac{K}{s^3+8s^2+15s+K}$$

Valores de K que tornam o sistema estável

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 15 \\ s^2 & 8 & K \\ s & 120-K & \\ 1 & K & \end{array} \Bigg\} \; 0<K<120$$

Segurança de 1 para 2: adota-se $K_{max} = 60$

$$\therefore \quad K_{g(max)} = \frac{60}{15} = 4$$

Cálculo do erro estático de velocidade

$$e_{stv} = \frac{\omega}{K_g} = \frac{\pi}{48} = 0{,}0654 \text{ rad}$$

ou $e_{stv} = \frac{\pi}{48}\,\frac{180}{\pi} = 3{,}75°$

Cap. 10 Prob. 1 Sol.

(a) Com $U=0$ $\quad Y = D - GHY$

$$Y(1+GH) = D$$

$$\left.\frac{Y}{D}\right]_{U=0} = \frac{1}{1+GH}$$

(b) Com $D=0$ $\quad E = U - HY \quad$ e $\quad Y = GE$

$$\left.\frac{E}{U}\right]_{D=0} = \frac{1}{1+GH}$$

(c) Com $U=0$

$$Y = D - GHY \longrightarrow Y = \frac{D}{1+GH}$$

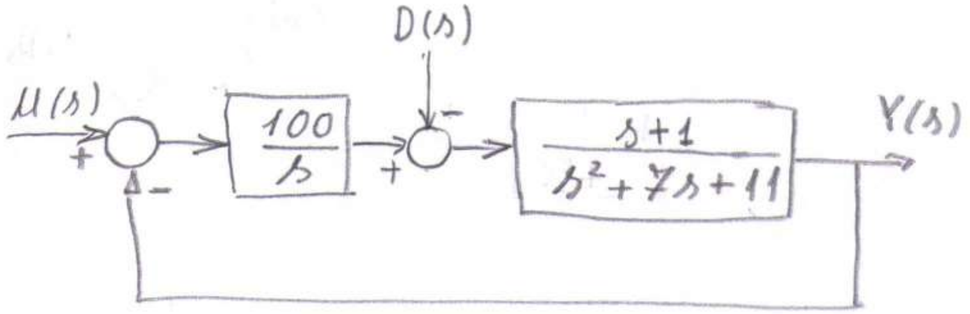
$$E = -HY = -\frac{H}{1+GH}D$$

$$\left.\frac{E}{D}\right]_{U=0} = -\frac{H}{1+GH}$$

Cap. 10 Prob. 3 Sol.

Malha interna

$$\frac{\frac{1}{s+6}}{1+\frac{5}{(s+6)(s+1)}} = \frac{s+1}{s^2+7s+11}$$



(a) Com D=0

$$F(s) = \left.\frac{Y}{U}\right]_{D=0} = \frac{100(s+1)}{s^3+7s^2+111s+100}$$

(b)

s^3	1	111
s^2	7	100
s	677	
1	100	

Não há pólos no SPD

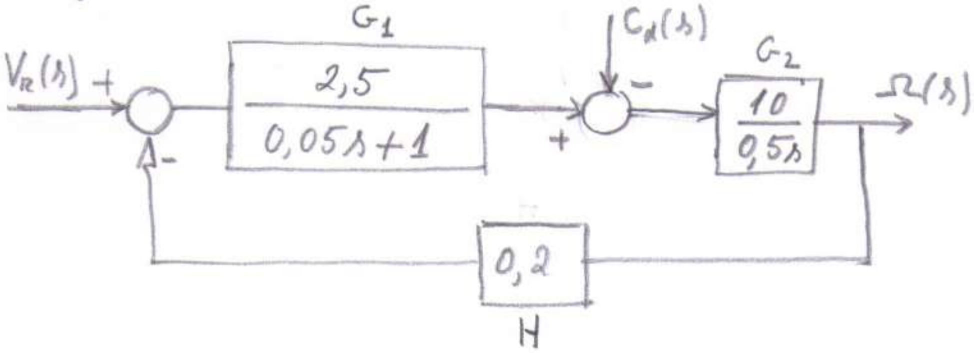
Sistema estavel

(c) Cálculo de $\frac{Y(s)}{D(s)}$ com $U(s)=0$

$$Y = \frac{(s+1)/(s^2+7s+11)\quad(-D)}{1+100(s+1)/(s(s^2+7s+11))} = -\frac{s(s+1)D}{s^3+7s+111s+100}$$

Resulta $F_d(s) = \left.\frac{Y}{D}\right]_{U=0} = -\frac{s(s+1)}{s^3+7s^2+111s+100}$

Cap. 10 Prob. 5 Sol.



$$G_1(s) = \frac{2,5}{0,05s+1} = \frac{50}{s+20} \qquad G_2(s) = \frac{10}{0,5s} = \frac{20}{s}$$

(a) $$F_1(s) = \frac{G_1G_2}{1+G_1G_2H} = \frac{\frac{1000}{s(s+20)}}{1+\frac{200}{s(s+20)}} =$$

$$F_1(s) = \frac{1000}{s^2+20s+200}$$

(b) $$F_2(s) = \frac{-G_2}{1+G_1G_2H} = \frac{-\frac{20}{s}}{1+\frac{200}{s(s+20)}}$$

$$F_2(s) = -\frac{20(s+20)}{s^2+20s+200}$$

(c) Aplicando o teorema do valor final:

$$\lim_{t\to\infty}(\omega_1(t)) = \lim_{s\to\infty}\left(s\,F_1(s)\frac{1}{s}\right) = 5 \text{ rad/s}$$

$$\lim_{t\to\infty}(\omega_2(t)) = \lim_{s\to\infty}\left(s\,F_2(s)\frac{1}{s}\right) = -2 \text{ rad/s}$$

Cap. 10 Prob. 7 Sol

Em malha fechada

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{KG(s)}{1+KG(s)}$$

Sensibilidade de F em relação a K

$$S_K^F = \frac{\partial F}{\partial K}\frac{K}{F} = \frac{(G(1+KG)-KG^2)}{(1+KG)^2}\cdot\frac{(1+KG)K}{KG}$$

ou

$$S_K^F = \frac{G(1+KG)-KG^2}{G(1+KG)} = \frac{1}{1+KG}$$

Cap. 10 Prob. 9 Sol.

Em malha fechada

$$F(s) = \frac{K}{s^2+ps+K}$$

Sensibilidade de F em relação a p

$$S_p^F = \frac{\partial F}{\partial p}\frac{p}{F} = \frac{-Ks}{(s^2+ps+K)^{\cancel{2}}}\,\frac{p\cancel{(s^2+ps+K)}}{\cancel{K}}$$

$$S_p^F = \frac{-ps}{s^2+ps+K}$$

Cap.10 Prob.11 Sol.

Em malha fechada

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K}{s^2+(p+q)s+pq+K}$$

Sensibilidade do sistema em relação a p:

$$S_p^F = \frac{\partial F}{\partial p} \cdot \frac{p}{F}$$

$$S_p^F = \frac{-K(s+q)}{(s^2+(p+q)s+pq+K)^2} \cdot \frac{p(s^2+(p+q)s+pq+K)}{K}$$

$$S_p^F = \frac{-p(s+q)}{s^2+(p+q)s+pq+K}$$

Numericamente $K=10$, $p=5$ e $q=3$

$$S_p^F = \frac{-5(s+3)}{s^2+8s+25}$$

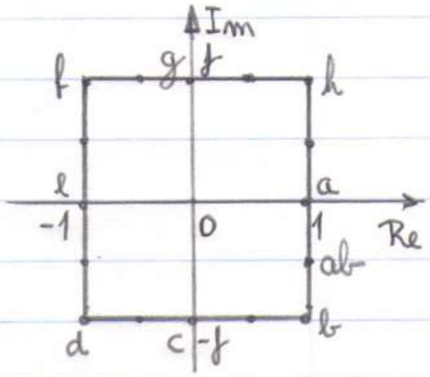
Para frequência $\omega = 5$ rad/s e $s = j5$

$$S_p^F\Big]_{s=j5} = \frac{-5(3+j5)}{j40} = -\frac{-5+j3}{8}$$

ou $S_p^F\Big]_{s=j5} = 0,729\angle 149°$

Cap. 11 Prob. 1 Sol.

Transformação $s \rightarrow A(s)$ a partir da Trajetória no plano s indicada na fig.



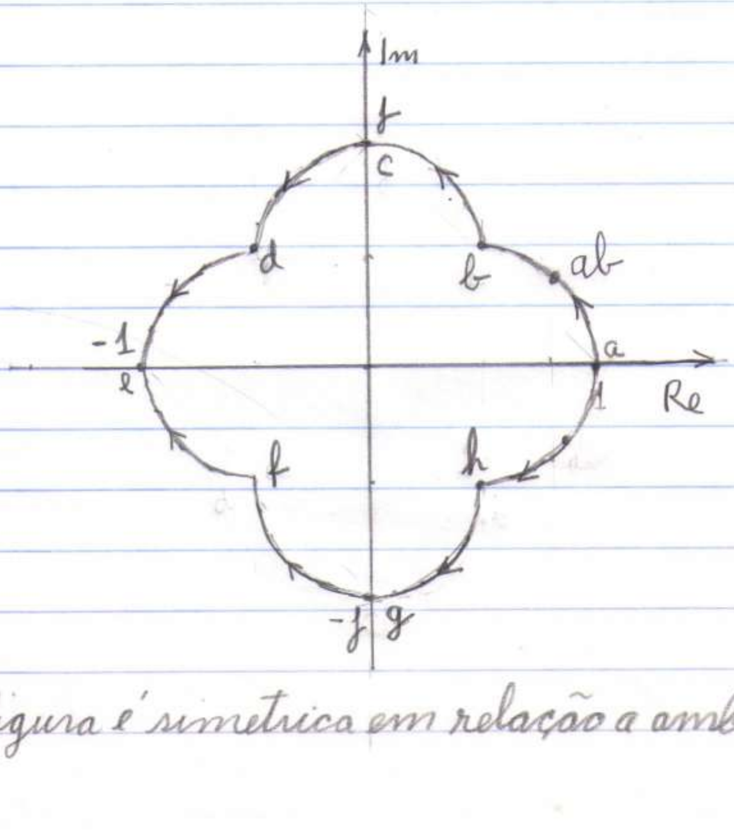
(a) $A(s) = \dfrac{1}{s}$

Ex.: Com $s = 1 - j$, resulta

$$A(s) = \frac{1}{1-j} = \frac{1+j}{2}$$

$X = Re(A) = 0{,}5$ e $Y = Im(A) = 0{,}5$

	a	ab	b	bc	c	cd	d	de	e
s	1	1-0,5j	1-j	0,5-j	-j	-0,5-j	-1-j	-1-0,5j	-1
X	1	0,8	0,5	0,4	0	-0,4	-0,5	-0,8	-1
Y	0	0.4	0,5	0.8	1	08	0,5	-0,4	0

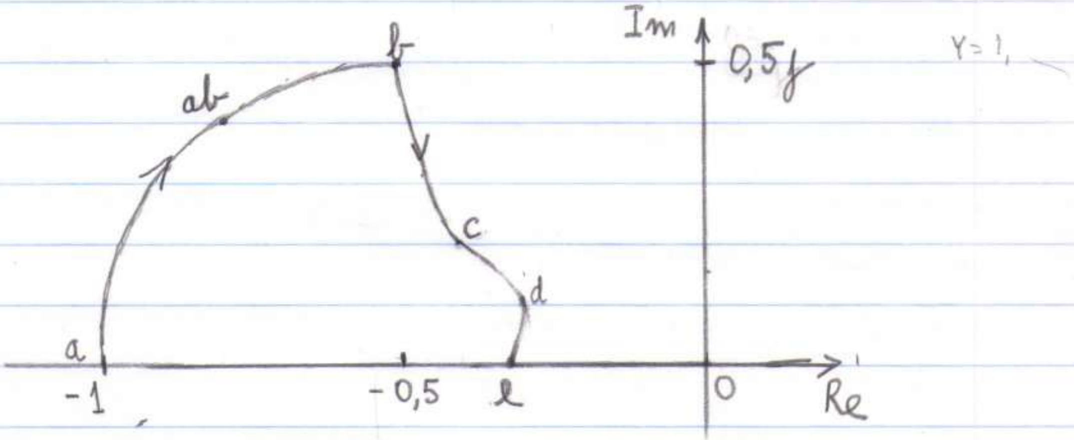


A figura é simetrica em relação a ambos os eixos

Cap. 11 Prob 1 Sol. cont.

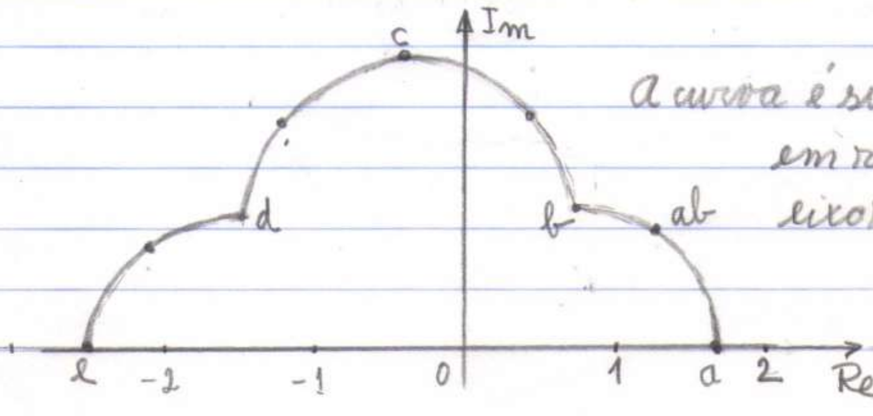
(b) $A(s) = \dfrac{1}{s-2}$

	a	ab	b	bc	c	cd	d	de	e
s	1	1-0,5j	1-j	0,5-j	-j	-0,5-j	-1-j	-1-05j	-1
X	-1	-0,8	-0,5	-0,46	-0,4	-0,34	-0,3	-0,32	-0,333
Y	0	0,4	0,5	0,31	0,2	0,14	0,1	0,054	0



(c) $A(s) = \dfrac{10}{s(s+5)}$

s	a	ab	b	bc	c	cd	d	de	e
X	1,667	1,27	0,68	0,45	-0,38	-1,22	-1,47	-2,09	-2,5
Y	0	0,77	0,96	1,54	1,92	1,51	0,88	0,74	0



A curva é simétrica em relacão ao eixo real.

Cap. 11 Prob 3 Sol.

9
4,5
1

$$G(s) = \frac{K}{s^2+6s+81}$$

Com $s = jw$, $G(jw) = \dfrac{K}{(81-w^2)+6wj}$

Resultados de $A(jw)$ obtidos por tentativa, para $K=81$

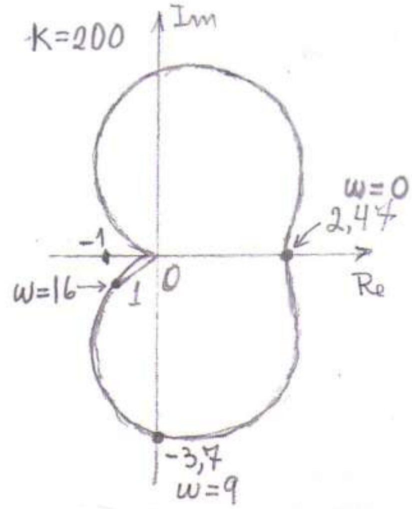
ω	0	9	11,2
X	1	0	-0,55
Y	0	-1,5	-0,83
|G|	1	1,5	1
$\theta°$	0	-90°	-123

$G(j11,2) = 1 \angle -123°$ $\quad$ $MF = 180-123° = 57°$

$\lim_{\omega \to \infty} |G(jw)| = 0$ $\quad$ $MG = \infty$

$K = 200$

ω	0	9	11,2	16
X	2,47	0	-1,36	-0,88
Y	0	-3,7	-2,07	-0,48
|G|	2,47	3,7	2,48	1
$\theta°$	0	-90°	-123	-151



$G(j16) = 1 \angle -15°$

$MF = 180-151 = 29°$

$\lim_{\omega \to \infty} |G(jw)| = 0$ $\quad$ $MG = \infty$

Cap. 11 Prob. 5 Sol.

$$G(s) = \frac{20}{(s^3+5s^2+10s+15)}$$

$$G(j\omega) = \frac{20}{5(3-\omega^2)+j\omega(10-\omega^2)}$$

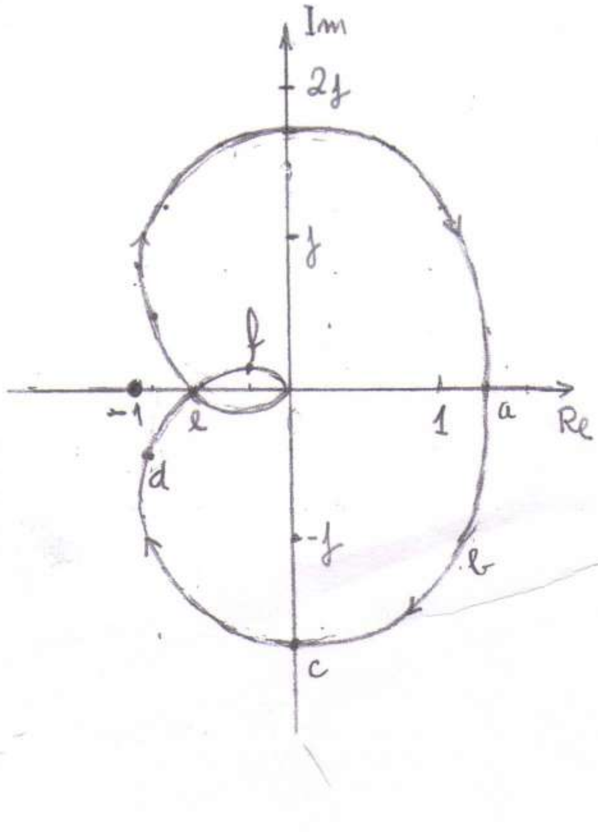
	a	b	c	d	e	f
ω	0	1	1,73	2,56	3,17	4,07
X	1,33	1,1	0	-0,90	-0,56	-0,25
Y	0	-0,99	-1,65	-0,45	0	0,1
$\lvert G \rvert$	1,33	1,41	1,65	1.0	0,56	0,27
$\theta°$	0	-42	-90	-153	180	158

$h = 0,56$

$MG = \frac{1}{h} = 1,786$

$MG(dB) = 20 \log 1,786 = 5 dB$

$MF = 180° - 153° = 27°$



Cap. 11 Prob. 7 Sol.

$$G(s) = \frac{81}{s(s+6)}$$

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{81}{s^2+6s+81}$$

Sistema de 2ª ordem com

$$\alpha = 3 \qquad \omega_n = 9 \qquad \xi = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{1}{3}$$

(a) Pico de ressonância M_p

$$M_p = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}} = \frac{1}{\frac{2}{3}\sqrt{1-\frac{1}{9}}} = \frac{9}{2\sqrt{8}} = 1{,}59 \text{ rad/s}$$

(b) Frequencia de ressonancia ω_p

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2} = 9\sqrt{1-\frac{2}{9}} = 3\sqrt{7} = 7{,}93 \text{ rad/s}$$

(c) Banda passante ω_b

$$\omega_b = \omega_n\sqrt{(1-2\xi^2)+\sqrt{4\xi^4-4\xi^2+2}}$$

$$\omega_b = 9\sqrt{1-\frac{2}{9}+\sqrt{\frac{4}{81}-\frac{4}{9}+2}}$$

$$= 9\sqrt{0{,}778+\sqrt{1{,}605}} = 9\sqrt{2{,}045}$$

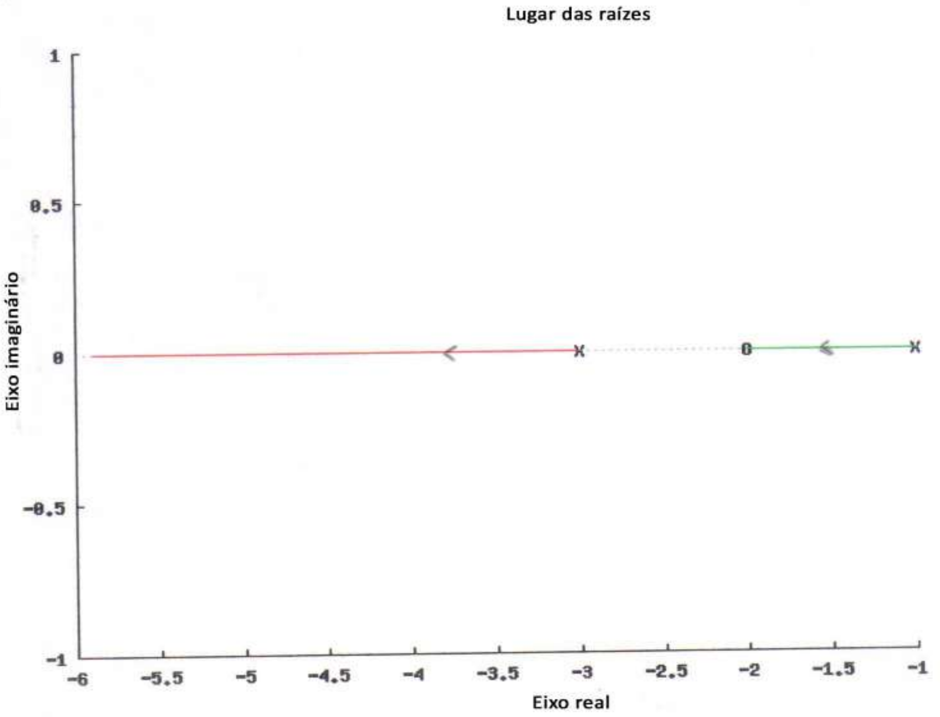
$$\omega_b = 9 \times 1{,}43 = 12{,}8 \text{ rad/s}$$

Cap. 12 Prob 1

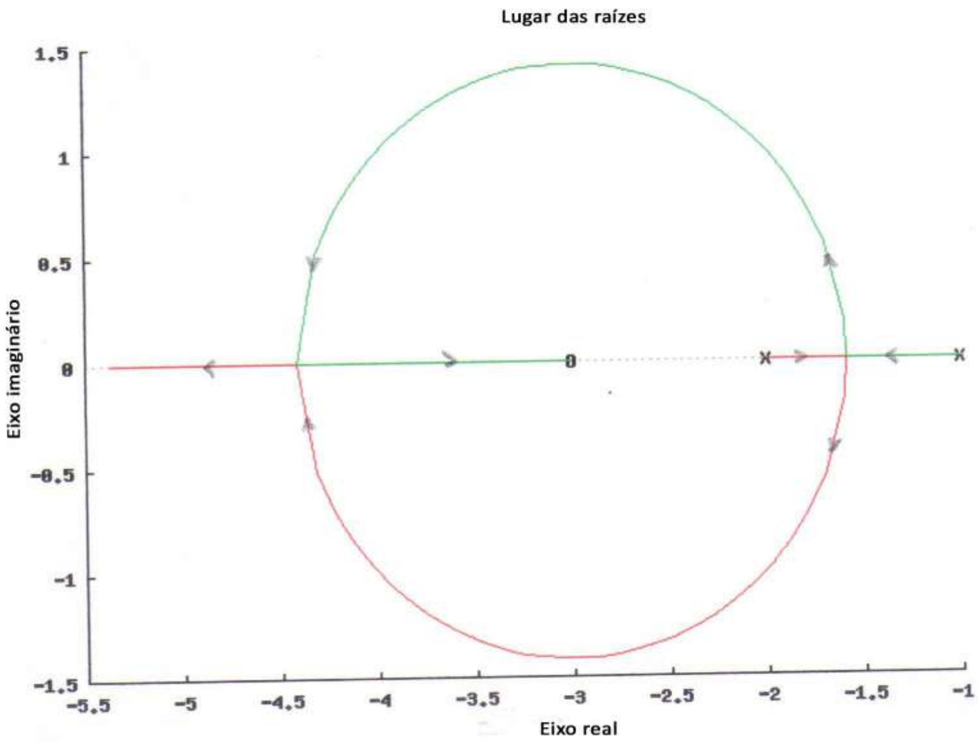
Problemas propostos. Powered by Ch

Problema 1

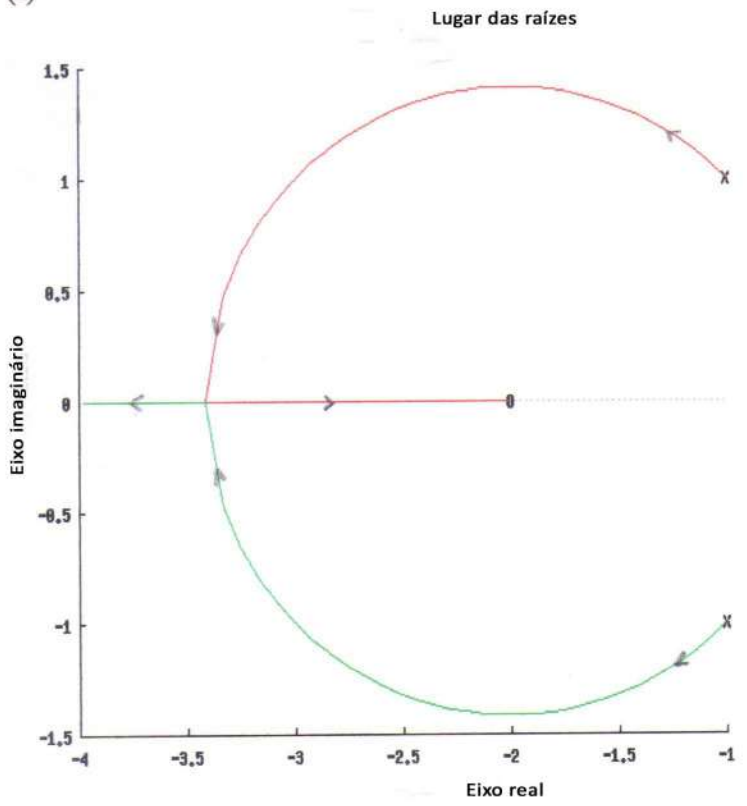
(b)



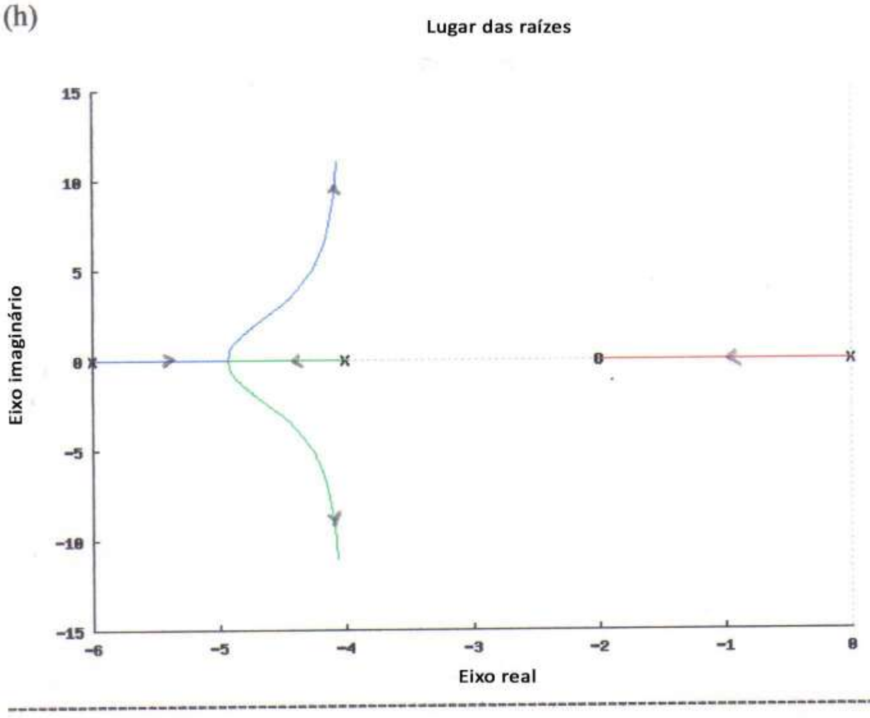
(d)



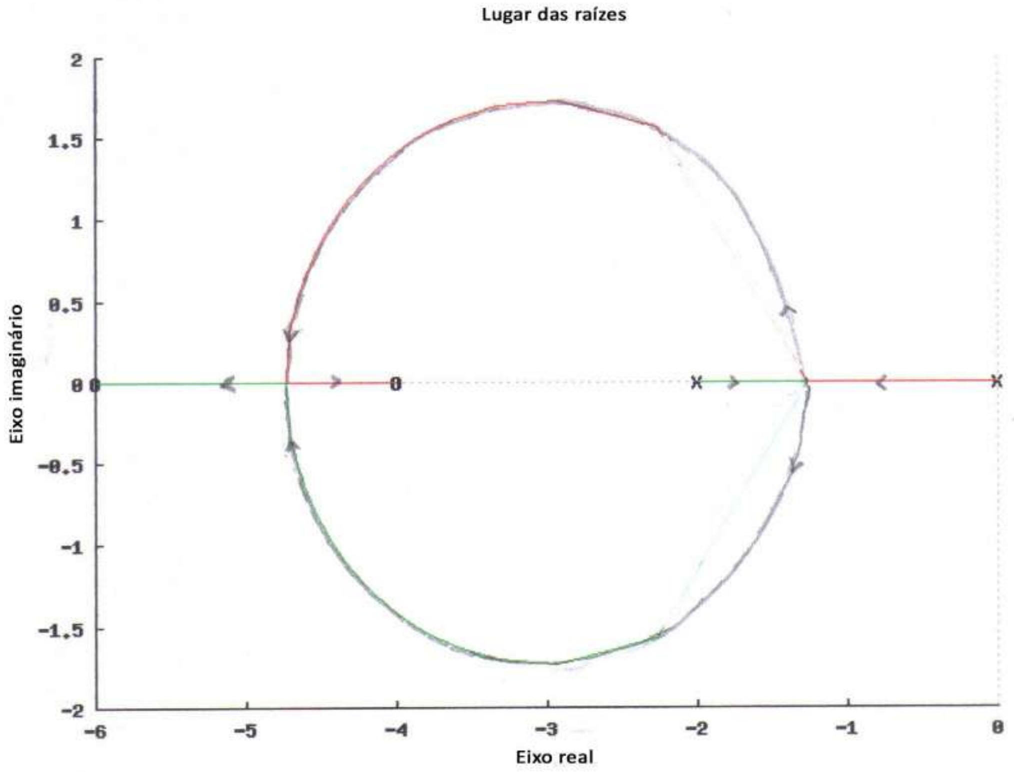
(f)


Lugar das raízes
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
-1,5
-4
-3,5
-3
-2,5
-2
-1,5
-1
Eixo imaginário
Eixo real

(h)

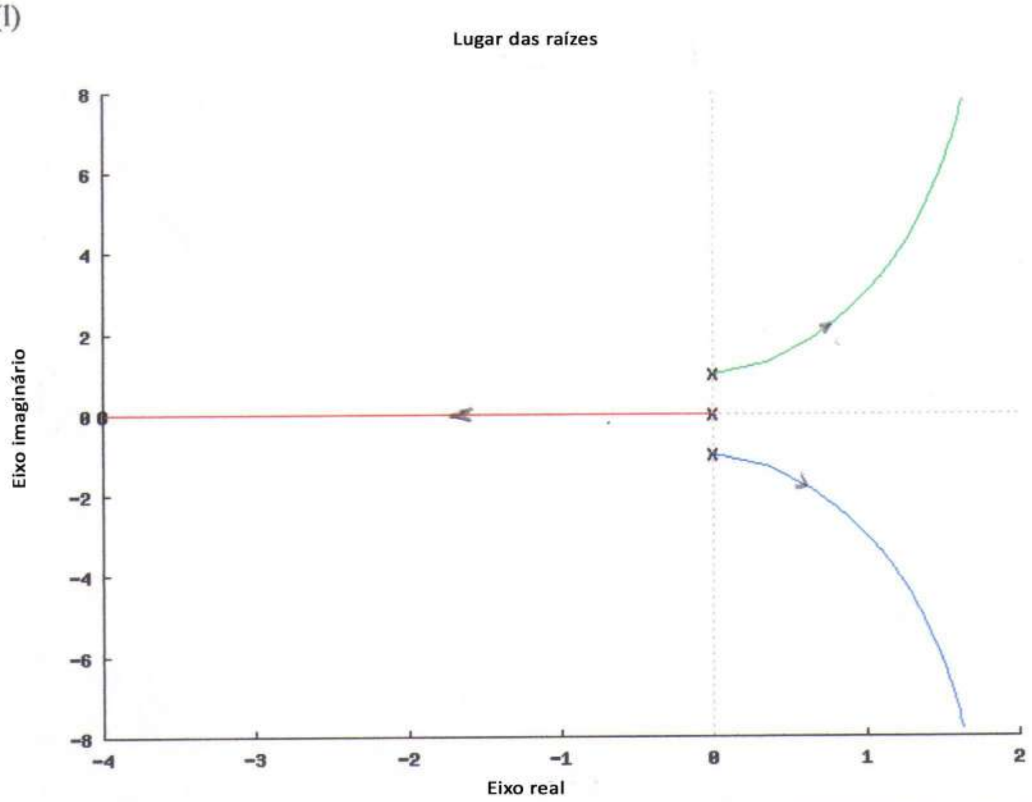

Lugar das raízes
15
10
5
0
-5
-10
-15
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0
Eixo imaginário
Eixo real

(j)

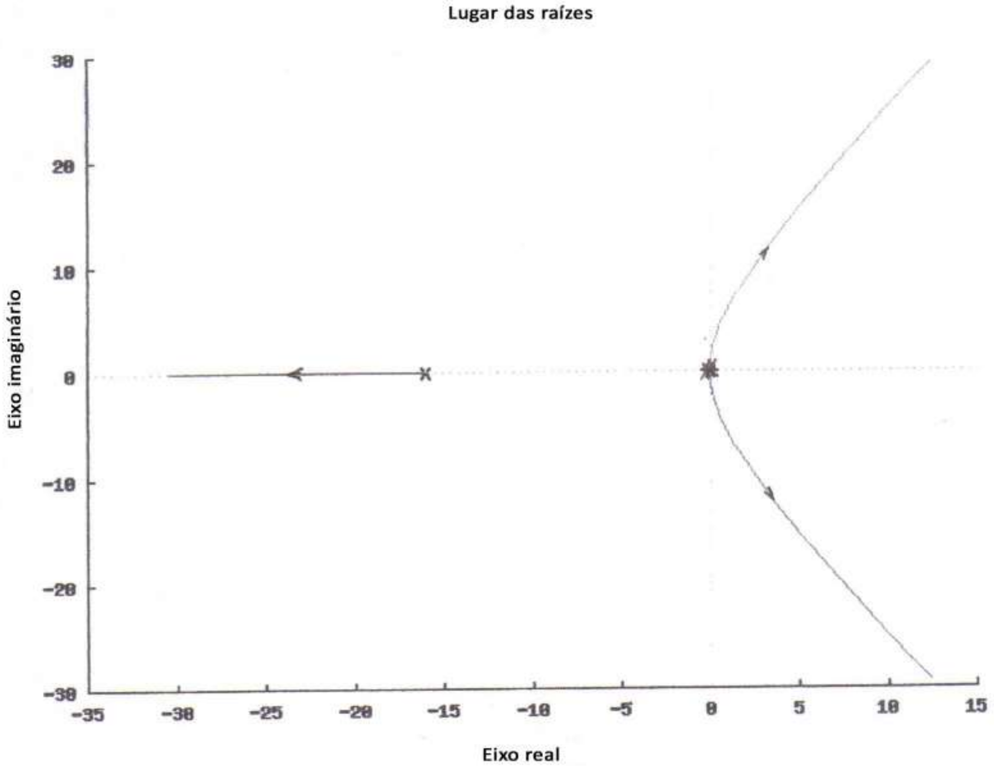

Lugar das raízes
Eixo imaginário
Eixo real
2
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-2
-6
-5
-4
-3
-2
-1
0

(j)

(l)


Lugar das raízes
Eixo imaginário
Eixo real
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
-4
-3
-2
-1
0
1
2

(n)

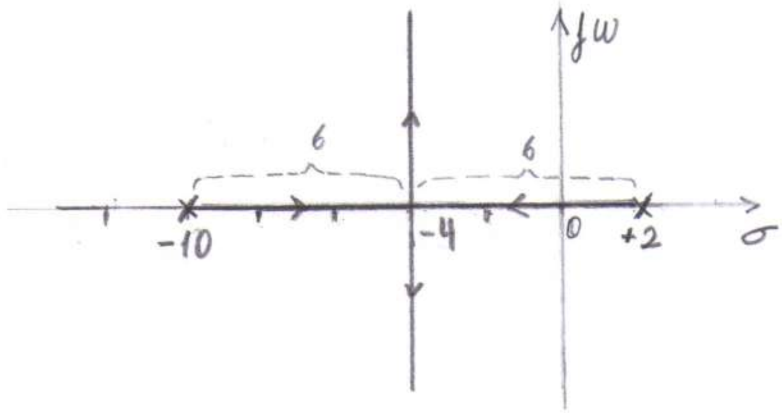

Lugar das raízes
Eixo imaginário
Eixo real
30
20
10
0
-10
-20
-30
-35
-30
-25
-20
-15
-10
-5
0
5
10
15

Cap. 12 Prob 2 Sol.

(a) Malha aberta

$$A(s) = \frac{K}{s^2+8s-20} = \frac{K}{(s-2)(s+10)}$$

Pólos +2 e −10. Não há zeros



Ponto de separação −4

O polo de malha fechada que dá início à instabilidade é o que se situa na origem 0, no ramo que começa em +2. O valor de K aí é

$$K = 2 \times 10 = 20$$

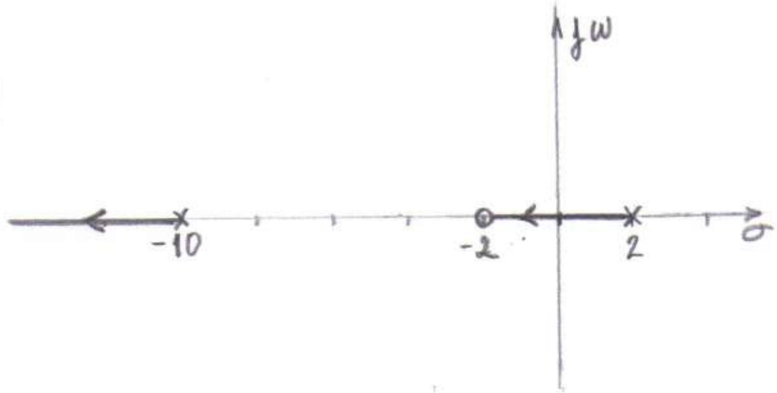
No ponto de separação

$$K = 6 \times 6 = 36$$

(c) Malha aberta

$$A(s) = \frac{K(s+2)}{s^2+8s-20} = \frac{K(s+2)}{(s-2)(s+10)}$$

Pólos $+2$ e -10 Zero: -2



Polo de malha fechada em -1

distâncias aos pólos de m.a.: 3 e 9

distância ao zero de m.a.: 1

Cálculo do ganho

$$K = \frac{3 \times 9}{1} = 27$$

Outro pólo com o mesmo valor de $K=27$

Polinômio característico de m.f. com $K=27$

$$Q(s) = s^2+35s+34 = (s+1)(s+34)$$

Raízes: -1 e -34

$\therefore$ o outro polo situa-se em -34

Cap. 12   Prob. 2   Sol.

(e)

malha aberta

$$A(s) = \frac{K(s+6)}{s^2+4s+8} = \frac{K(s+6)}{(s+2)^2+4}$$

Polos: $-2 \pm j2$ Zero: -6

Ponto de separação

$$K = -\frac{s^2+4s+8}{s+6}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(s+6)(2s+4)-(s^2+4s+8)}{(s+6)^2} = -\frac{s^2+12s+16}{(s+6)^2} = 0$$

os pontos de separação são as raizes de $s^2+12s+16$, a saber $-10{,}47$ e $-1{,}53$. O segundo valor cai fora dos ramos de interesse do nosso L.R. Logo, temos um ponto de separação de chegada em $\sigma_i = -10{,}47$

Ângulo de partida dos pólos complexos:

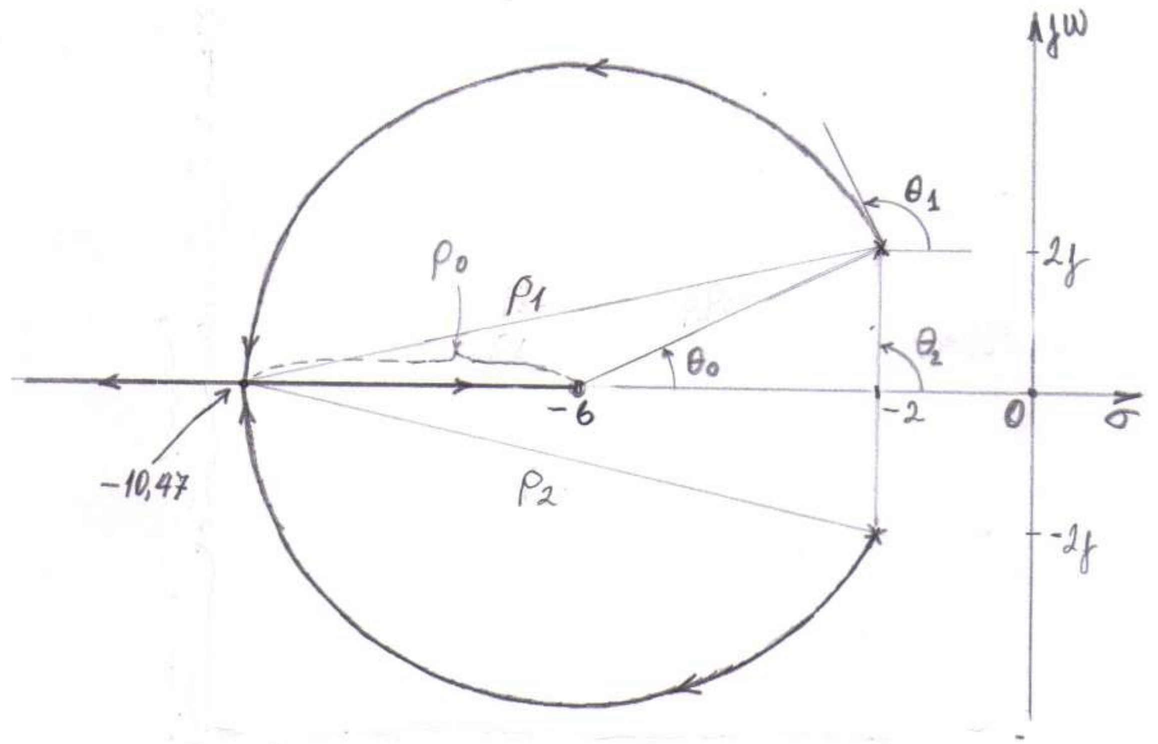
Vamos determinar θ_1 (fig. a seguir)

$$\theta_0 = \tan^{-1}\frac{2}{4} = 26{,}57$$

$$\theta_2 = 90°$$

$$\theta_1 + \theta_2 - \theta_0 = 180° \longrightarrow \theta_1 = 90 + 26{,}57 = 116{,}57$$

Cap. 12 Prob 2 Cont.



O sistema é subamortecido enquanto tiver polos complexos, portanto para valores de K menores que no ponto de separação, onde

$$K = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_0}$$

sendo $\rho_1 = \rho_2 = \sqrt{8,47^2 + 2^2} = 8,7$

e $\rho_0 = 4,47$

$$K = \frac{8,7^2}{4,47} = 16,9$$

O sistema será subamortecido para $K \leq 16,9$

Cap. 12 Prob 4 Sol.

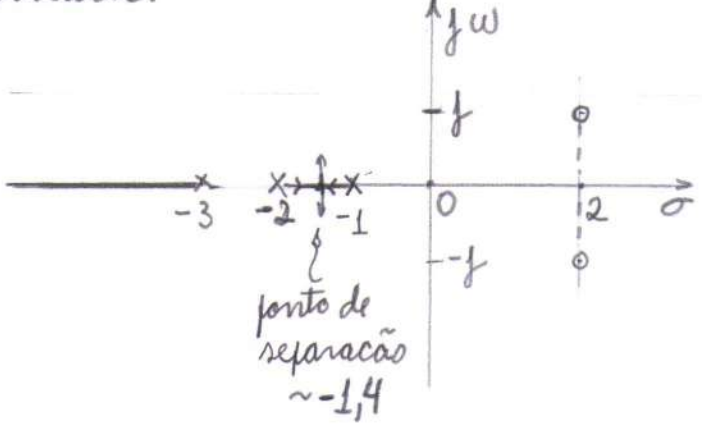
Malha aberta

$$G(s) = \frac{K(s^2-4s+5)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{K(s^2-4s+5)}{s^3+6s^2+11s+6}$$

Polos: $-1, \ -2, \ -3$ Zeros: $2 \pm j$

Lugar das raizes

Segmentos do eixo real e ponto de separação aproximado.



Pontos de cruzamento com o eixo $j\omega$.

Em malha fechada temos:

$$Q = s^3 + (6+K)s^2 + (11-4K)s + (6+5K)$$

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 11-4K \\ s^2 & 6+K & 6+5K \\ s & y & \\ 1 & \underbrace{6+5K} & \end{array}$$

$$y = 66 - 13K - 4K^2 - 6 - 5K$$
$$= -4K^2 - 18K + 60$$
$$= -4(K^2 + 4{,}5K - 15)$$

$\rightarrow K > -\frac{6}{5} = -1{,}2$ Raizes: $K = -2{,}25 \pm \sqrt{20{,}06} = \begin{cases} 2{,}23 \\ -6{,}73 \end{cases}$

Como procuramos o L.R. para K variando de 0 a ∞, o valor de interesse é $K = 2{,}23$.

Cap. 12 Prob. 4 Cont. 1

Para esse valor de K, temos

$Q = s^3 + 8{,}23s^2 + 2{,}08s + 17{,}15$

Com $s = jw$, resulta

$Q = -jw^3 - 8{,}23w^2 + 2{,}08jw + 17{,}15$

ou $Q = 17{,}15 - 8{,}23w^2 + jw(-w^2 + 2{,}08)$

Para um valor de w que seja raiz desse polinômio, tanto a parte real como a parte imaginária devem ser nulas:

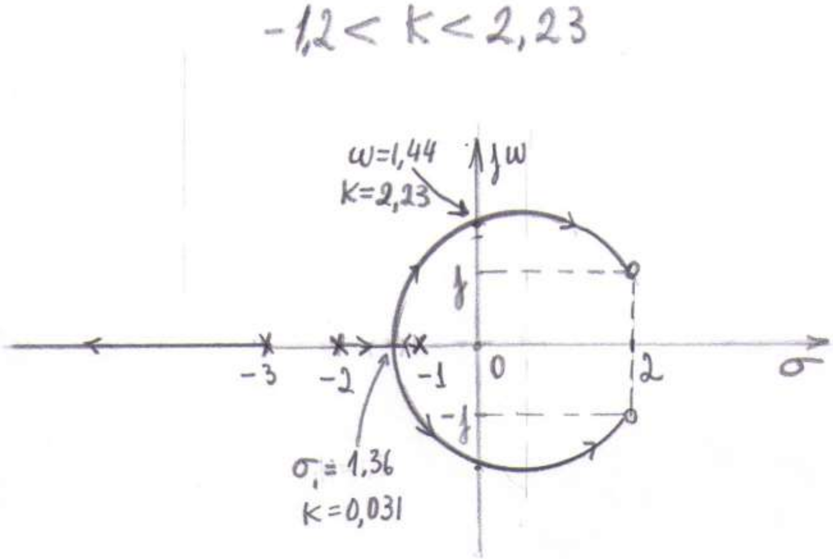
da parte imaginaria resulta

$w^2 = 2{,}08 \qquad w = \pm 1{,}44$

Verificação na parte real $w = \sqrt{\frac{17{,}15}{8{,}23}} = 1{,}44$

Valores de K compatíveis com a estabilidade do sistema (V. critério de Routh):

$-1{,}2 < K < 2{,}23$



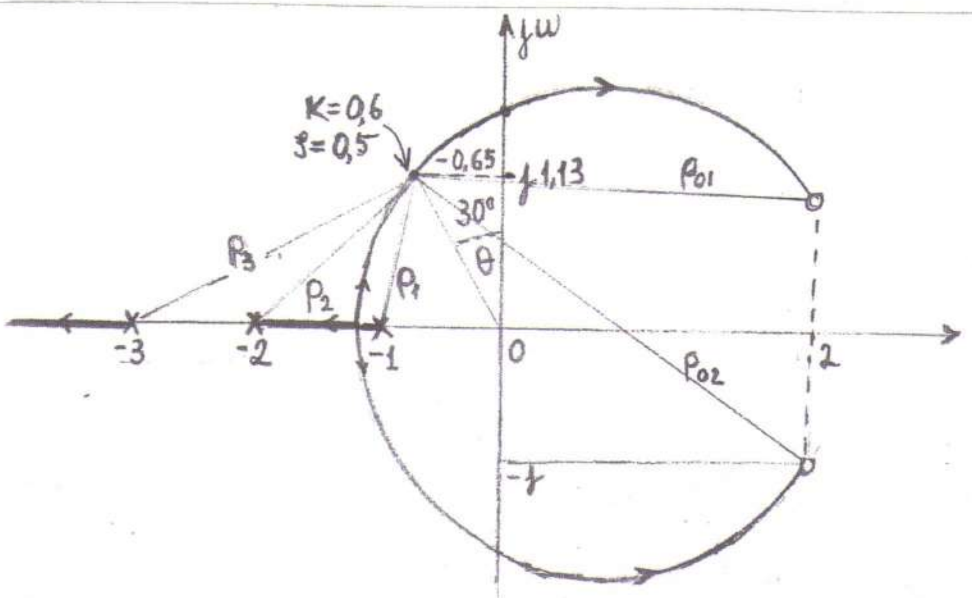
Cap. 12 Prob 4 Cont. 2

Um bom desenho em escala do LR, permite determinar com razoavel precisão os polos dominantes de m.f. para os quais o grau de amortecimento é $\zeta = 0{,}5$. Isso corresponde $\theta = 30°$ (fig abaixo). Localizado esse ponto, medem-se as distâncias desse ponto aos demais polos e zeros do sistema. O produto das distâncias aos polos dividido pelo produto das distâncias aos zeros, fornece, como sabemos, o valor de K no polo considerado. Essas distâncias podem também ser facilmente calculadas.

Com a notação da fig abaixo temos:

$\rho_1 = 1{,}18$; $\rho_2 = 1{,}76$; $\rho_3 = 2{,}6$; $\rho_{01} = 2{,}65$; $\rho_{02} = 3{,}4$

$$K = \frac{\rho_1 \rho_2 \rho_3}{\rho_{01} \rho_{02}} = \frac{5{,}4}{9{,}0} = 0{,}6$$



Cap. 12 Prob 6

Malha aberta

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s-2)^2+4} = \frac{K(s+4)}{s^2-4s+8}$$

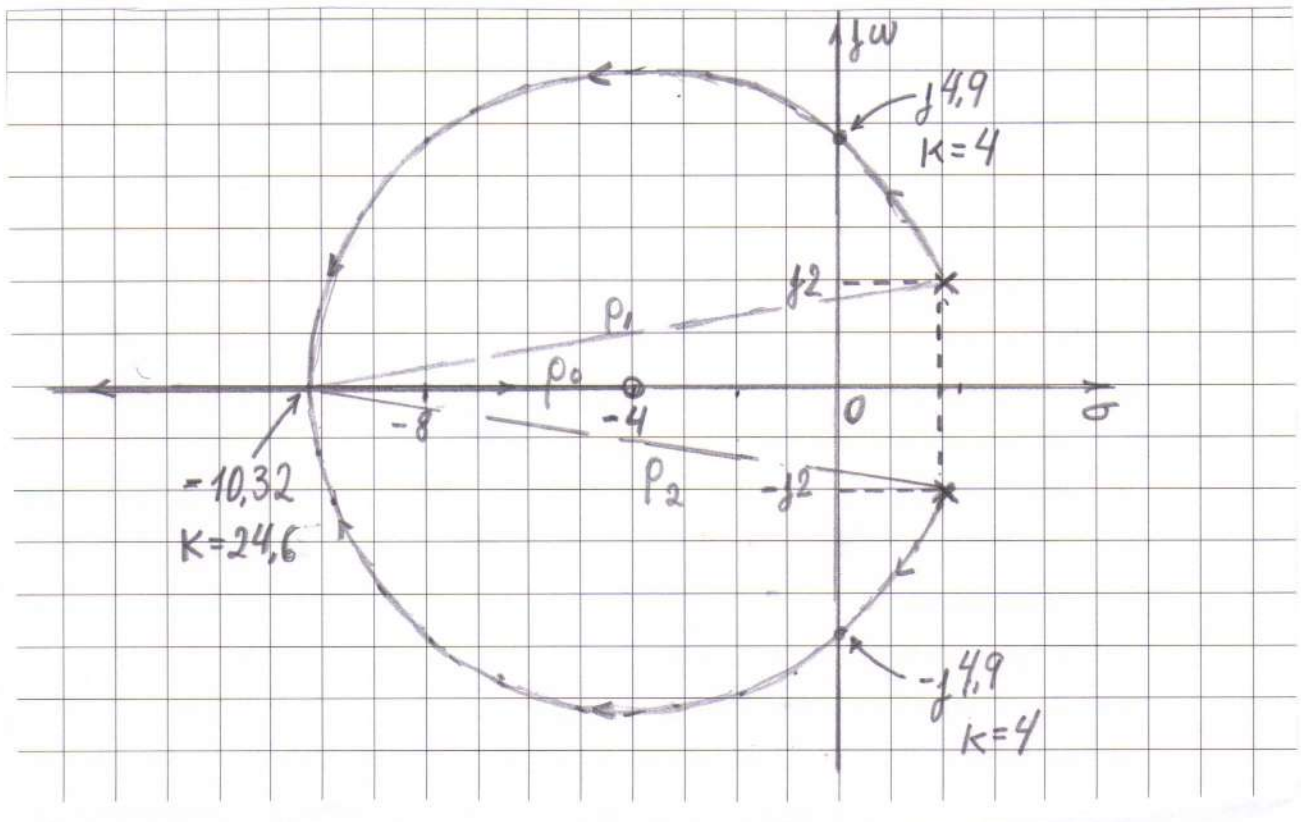
Polos: $2 \pm \sqrt{4-8} = 2 \pm j2$ Zero: -4

Malha fechada

$$F(s) = \frac{K(s+4)}{s^2+(K-4)s+4(K+2)}$$

(a) Polos de m.f. situados no eixo imaginário.
Para que isso aconteça devemos ter $K-4=0$
$\therefore K=4$. O polinômio característico se reduz
a $Q = s^2+24$. $s = \sqrt{-24} = \pm j4,9$

Para que o sistema seja estável devemos
$K>4$.



Cap. 12 Prob. 6 Cont.

Calculo do ponto de separação de chegada

$$K = -\frac{s^2 - 4s + 8}{s+4}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(s+4)(2s-4) - (s^2-4s+8)}{(s+4)^2} = \frac{s^2+8s-24}{(s+4)^2} = 0$$

$s^2 + 8s - 24 = 0$ — raizes $s_1 = -10{,}32$ e $s_2 = 2{,}32$

o ponto 2,32 cai fora do L.R. Resta apenas o ponto de separação em −10,32.

O valor de K correspondente a esse ponto de separação pode ser calculado pelo produto das distâncias desse ponto aos polos, dividido pela distância ao zero, de m.a.

$$K = \frac{P_1 P_2}{P_0} = \frac{\left(\sqrt{12{,}32^2 + 2^2}\right)^2}{6{,}32} = 24{,}6$$

Cap. 12 Prob. 8 Sol.

Malha aberta

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3+19s^2+80s-100}$$

Polos: 0, 1, −10 e −10 Zero: −1

(a) Pontos de separação

$$K = -\frac{s^4+19s^3+80s^2-100s}{s+1}$$

$$\frac{dK}{ds} = -\frac{(s+1)(4s^3+57s^2+160s-100)-(s^4+19s^3+80s^2-100)}{(s+1)^2}$$

$$\frac{dK}{ds} = \frac{3s^4+42s^3+137s^2-40s-100}{(s+1)^2} = 0$$

As raizes do numerador são

0,432 −10 −2,219 ± j 1,632

São válidos os pontos de separação no eixo real: 0,432 e −10, este por causa do duplo polo.

(b) Ponto de irradiação das assintotas

$$\sigma_i = \frac{\sum \text{polos} - \sum \text{zeros}}{\text{n. de polos} - \text{n. de zeros}} = \frac{0+1-10-10+1}{4-1}$$

$$\sigma_i = \frac{-18}{3} = -6$$ São 3 assintotas

Cap. 12 Prob. 8 Cont 1

c) Cruzamento no eixo imaginário

Podemos utilizar o critério de Routh

Polinômio característico de malha fechada

$$Q = s^4 + 19s^3 + 80s^2 + (K-100)s + K$$

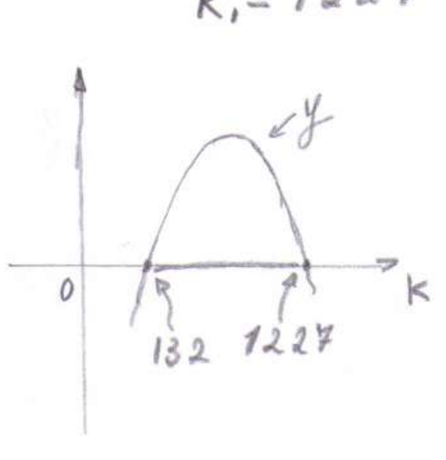
s^4	1	80	K
s^3	19	K−100	
s^2	1620−K	19K	
s	y		
1	19K	$\longrightarrow K>0$	

$$y = (1620-K)(K-100) - 19^2 K$$

ou $\quad y = -K^2 + 1359K - 162000$

As raizes desse polinômio são

$K_1 = 1227$ e $K_2 = 132$



Para que y seja positivo devemos ter

$$132 < K < 1227$$

Com K=132 a linha em s (penúltima linha da tabela de Routh) é nula. A linha anterior nos dá, então,

Cap. 13 Prob 1

Malha aberta $G(s) = \dfrac{10K_p}{s^2 + 7s + 10}$

Malha fechada $F(s) = \dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{10K_p}{s^2 + 7s + 10(1+K_p)}$

$\alpha = 3,5 \qquad \omega_n = \sqrt{10(1+K_p)}$

$\xi = \dfrac{3,5}{\omega_n} = 0,5 \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{10(1+K_p)} = 7$

$10 + 10K_p = 49$

$K_p = 3,9$

$F(s) = \dfrac{39}{s^3 + 7s + 49}$

polos de m.f.: $-3,5 \pm \sqrt{12,25 - 49} = -3,5 \pm j6,06$

Cap. 13 Prob. 2 Sol.

Malha fechada sem compensação:

$$F(s) = \frac{100}{s^2+9s+120}$$

$\alpha = 4,5$ $\quad \omega_n = \sqrt{120} = 10,95$ $\quad \zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = 0,41$

$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 9,987$ $\quad$ polos $\cong -4,5 \pm j10$

Malha aberta com compensador PI:

$$G_c(s)G(s) = \frac{100K_p(s+0,05)}{s(s+4)(s+5)} = \frac{K(s+0,05)}{s(s^2+9s+20)}$$

Malha fechada, sistema compensado:

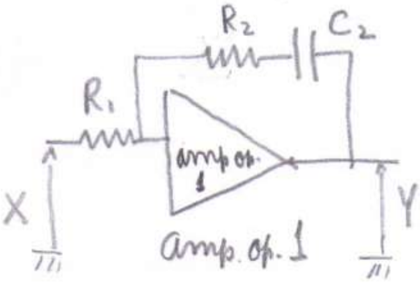
$$F_c(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100K_p(s+0,05)}{s^3+9s^2+(20+K)s+0,05K}$$

com $K = 100K_p$

Para tentar conseguir a mesma resposta transitória devemos procurar manter os polos dominantes no mesmo lugar. Como introduzimos um polo na origem e um zero muito próximo, os valores de K no sistema compensado não devem variar muito para pólos dominantes nas posições desejadas. Podemos, em princípio, adotar o mesmo valor de K do sistema não compensado. No caso, $K=100$ e os novos polos dominantes serão $-4,48 \pm j9,78$, muito próximos dos antigos. O 3º polo fica em $-4,09$. Temos ainda $K_c = 1$ e $\zeta \cong 0,41$. Resulta para o compensador: $G_c(s) = 1\,\frac{s+0,05}{s}$

Cap. 13 Prob 3 Sol.

No amp 01 da fig. temos a função de transferência



$$\frac{Y}{X} = -\frac{1}{R_1}\left(R_2 + \frac{1}{C_2 s}\right) = -\frac{R_2}{R_1}\left(1 + \frac{1}{R_2 C_2 s}\right)$$

Como devemos ter para o compensador PI

$$G_c = 1 + \frac{0,05}{s}$$

podemos adotar para o circuito compensador:

$$R_1 = R_2 = 1\,M\Omega$$

$$C_2 = 20\,\mu F$$

assim $\frac{1}{R_2 C_2} = \frac{1}{10^6 \times 20 \times 10^{-6}} = 0,05$

e $\frac{R_2}{R_1} = 1$

O amp. 02 (fig) é apenas um inversor de sinal. Podemos adotar $R = 10\,k\Omega$.

Cap. 13 Prob. 5 Sol.

Sistema dado (em m.f.)

$$F(s) = \frac{100}{s^3+11s^2+24s+100}$$

Pólos: $0,708 \pm j\,3,152$ e $-9,584$

$\therefore \alpha = 0,708 \quad \omega_d = 3,152 \quad \omega_n = \sqrt{\alpha^2+\omega_d^2} = 3,231$

Compensador de avanço de fase: $G_c(s) = \frac{K_c(s+b)}{s+a} = \frac{K_c(s+3)}{s+a}$ com $a>3$

Sistema compensado (~ 2 vezes mais rapido)

$\alpha = 2\times 0,708 = 1.416$

$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = 0,42 \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{\alpha}{\zeta} = \frac{1,416}{0,42} = 3,37$

$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 3,058$

pólos dominantes: $-1,416 \pm j\,3,058 = 3,37\underline{/\pm 114,8^\circ}$

O polo em -3 é compensado pelo zero do compensador na mesma posição

O pólo em -8 contribui com o valor

$R_8 = (8-1,416) + j\,3,058 = 7,26\underline{/24,9^\circ}$

Calculo do pólo compensado

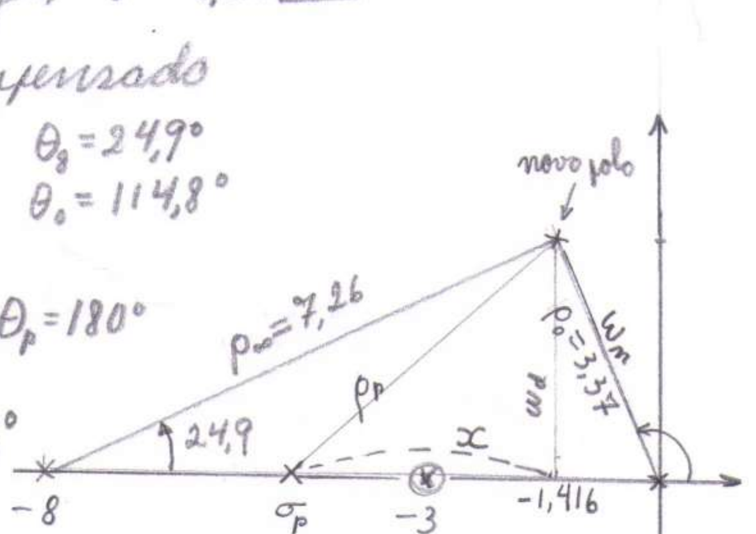
$\rho_8 = |R_\infty| = 7,26 \qquad \theta_8 = 24,9^\circ$

$\rho_0 = \omega_n = 3,37 \qquad \theta_0 = 114,8^\circ$

$\theta_0 + \theta_8 + \theta_p = 139,7^\circ + \theta_p = 180^\circ$

$\theta_p = 180^\circ - 139,7^\circ = 40,3^\circ$

$\tan\theta_p = 0,847$



Cap. 13 Prob 5 (cont.) Sol.

$$\tan\theta_p = \frac{\omega_d}{X} \qquad X = \frac{\omega_d}{\tan\theta_p} = \frac{3,058}{0,847} = 3,61$$

$$R_p = 3,61 + j3,058 = 4,73 \angle 40,26 \qquad \rho_p = |R_p| = 4,73$$

Posição do novo pólo

$$\sigma_p = -3,61 - 1,416 = -5,026$$

Valor de K correspondente ao novo polo

$$K = \rho_0 \cdot \rho_8 \cdot \rho_p = 3,37 \times 7,26 \times 4,73 = 115,8$$

Função de transferência do compensador

$$G_c(s) = \frac{K_c(s+3)}{s+5,026} \qquad \text{com } K_c = 1,158$$

Sistema compensado em malha aberta

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{115,8}{s(s+5,026)(s+8)}$$

Em malha fechada

$$F_c(s) = \frac{115,81}{s^3 + 13,03s^2 + 40,22s + 115,81}$$

Cap. 13 Prob 7 Sol.

Sistema dado, em malha aberta

$$G(s) = \frac{40}{s(s+40)} \qquad G_c(s) = \frac{K_c(s+b)}{(s+a)}$$

Polos em 0 e −40 com $a > b$

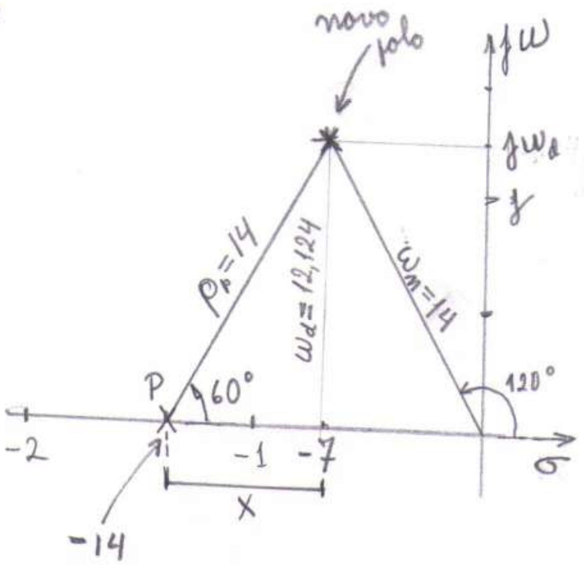
Determinação dos novos polos

$$\omega_n = 14 \quad \alpha = \zeta\omega_n = 7 \quad \omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 12{,}124$$

Polos: $-7 \pm j12{,}124 = 14\angle \pm 120°$

O compensador deve ter um zero em −4, para cancelar o polo original na mesma posição.

Determinação do polo do compensador (v. fig.):



$$\theta_p + 120° = 180°$$

$$\theta_p = 60°$$

$$X = \frac{\omega_d}{\tan\theta_p} = \frac{12{,}124}{1{,}732} = 7{,}00$$

$$\rho_p = \sqrt{X^2 + \omega_d^2} = 14$$

$$\sigma_p = X + \alpha = 14$$

$$G_c = \frac{K_c(s+4)}{s+14} \qquad G_c G = \frac{40K_c(s+4)}{s(s+14)}$$

$$K = 40K_c = \rho_p \cdot \omega_n = 196 \qquad K_c = \frac{196}{40} = 4{,}9$$

Finalmente

$$G_c = \frac{4{,}9(s+4)}{s+14}$$

Cap. 13 Prob. 9 Sol.

Sistema dado em m. a.

$$G(s) = \frac{10}{s(0{,}2s+1)} = \frac{50}{s(s+5)}$$

Para os novos polos dominantes devemos ter

$\omega_n = 5\sqrt{5}$ $\quad \zeta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $\quad \alpha = \zeta\omega_n = 5$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 10$$

Novos polos:

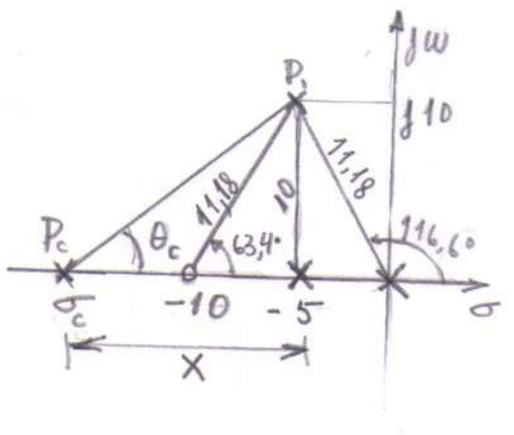
$$p_{1,2} = -5 \pm j10 = 11{,}18 \angle \pm 116{,}6°$$

O zero do compensador para a posição -10:

$$G_c G = \frac{50 K_c (s+10)}{s(s+5)(s+p_c)}$$

Resta determinar o pólo p_c e o ganho K_c do compensador.

Condição angular (v. fig)



$116{,}6° + 90° - 63{,}4° + \theta_c = 180$

$\theta_c = 36{,}8°$

Posição do novo polo

$$X = \frac{\omega_d}{\tan\theta_c} = \frac{10}{0{,}748} = 13{,}37$$

$\sigma_c = -(13{,}37 + 5) = -18{,}37$

$R_c = p_1 - p_c = 13{,}37 + j10 = 16{,}69 \angle 36{,}8$

$p_c = \mathrm{mod}(R_c) = 16{,}69$

Cap. 13 Prob. 9 cont. Sol.

$$K = \rho_c \cdot \omega_d = 166,9$$

$$K_c = \frac{166,9}{50} = 3,338$$

Compensador:

$$G_c = \frac{3,338(s+10)}{s+18,37}$$

$$G_c G = \frac{50(s+10)}{s(s+5)(s+18,37)}$$

Cap. 13 Prob. 11 Sol.

Sistema não compensado em malha fechada

$$F(s) = \frac{200}{s^2+16s+200}$$

Pólos: $-8 \pm j\,11{,}66$

Sistema compensado em malha aberta

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{K_c(s+b)}{s+0{,}01} \cdot \frac{200}{s(s+16)}$$

ou, com $K = 200K_c$

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{K(s+b)}{s(s+0{,}01)(s+16)}$$

Em malha fechada resulta

$$F_c(s) = \frac{K(s+b)}{s^3+16{,}01s^2+(0{,}16+K)s+Kb}$$

Para que o erro estático de velocidade seja $e_{stv} = \frac{1}{K_g} = 0{,}01$ devemos ter $K_g = 100$

Mas $K_g = \frac{Kb}{0{,}16}$ (v. malha aberta, acima).

Logo $Kb = 16$ e os polos de malha fechada podem ser obtidos em função de K

$$Q(s) = s^3+16{,}01s^2+(0{,}16+K)s+16$$

Podemos procurar por tentativas valores de K que forneçam pólos muito próximos dos originais $-8 \pm j\,11{,}66$. Assim, para $K=200$ obtemos pólos em $-7{,}95 \pm j\,11{,}64$, um bom resultado. Nesse caso $b = 0{,}08$ e $K_c = 1$.

Cap 13 Prob 13 Sol.

Sistema dado

$$m.a.: G(s) = \frac{2}{(s+1)(10s+1)} = \frac{0{,}2}{(s+0{,}1)(s+1)} = \frac{0{,}2}{s^2+1{,}1s+0{,}1}$$

$$m.f.: F(s) = \frac{0{,}2}{s^2+1{,}1s+0{,}3} = \frac{0{,}2}{(s+0{,}5)(s+0{,}6)}$$

Polos: $-0{,}5$ e $-0{,}6$

Compensador proposto

$$G_c(s) = K_c \frac{(s+0{,}05)}{(s+0{,}005)}$$

Sistema compensado

$$m.a. \quad G_c(s)G(s) = \frac{0{,}2K_c(s+0{,}05)}{(s+0{,}005)(s+0{,}1)(s+1)}$$

$$\text{ou} \quad G_c(s)G(s) = \frac{0{,}2K_c s + 0{,}01K_c}{s^3+1{,}105s^2+0{,}1055s+0{,}0005}$$

$$\therefore \quad K_g = \frac{0{,}01K_c}{0{,}0005} = 20K_c$$

Condição de erro estacionário de posição

$$\varepsilon_{st_p} = \frac{1}{K_g+1} = 0{,}01 \quad \therefore \quad K_g = 100-1 = 99$$

Comparando os valores de K_g: $20K_c = 99$

$$\text{ou} \quad K_c = \frac{99}{20} = 4{,}95 \quad \text{e} \quad G_c(s) = 4{,}95\frac{(s+0{,}05)}{(s+0{,}005)}$$

Esse compensador de atraso de fase, determinado pela condição de erro estático, não satisfaz à condição de manter os pólos na mesma condição anterior.
O atendimento simultâneo às duas condições, por meio do compensador proposto não é possível, neste problema

Cap. 13 Prob 15 Sol.

Sistema dado, em malha aberta

$$G(s) = \frac{4(s+6)}{(s-2)(s+4)} = \frac{4(s+6)}{s^2+2s-8}$$

Sem compensação, em malha fechada

$$F(s) = \frac{4(s+6)}{s^2+6s+16} \quad \text{pólos } -3 \pm j2{,}646$$

Sistema compensado em malha aberta

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{K_c(s+b)}{s+0{,}01} \cdot \frac{4(s+6)}{s^2+2s-8}$$

ou

$$G_c(s)\,G(s) = \frac{K(s+b)(s+6)}{s^3+2{,}01s^2-7{,}98s-0{,}08}$$

com $K = 4K_c$. Polos: $-0{,}01$; -4 e $+2$

Nesse caso $K_g = \dfrac{6Kb}{-0{,}08}$ é negativo e o

o erro estacionario também o será:

$$e_{st_p} = \frac{1}{K_g+1} = -\frac{1}{29}$$

$$K_g = -30 \quad e \quad Kb = \frac{-0{,}08\,K_g}{6} = 0{,}4$$

Polinômio característico de malha fechada

$$Q(s) = s^3 + (2{,}01+K)s^2 + (6K-7{,}58)s + 2{,}32$$

Por tentativas óbtem-se o $K=4$ para conseguir os pólos dominantes de malha fechada aproximadamente na mesma posição que os pólos originais.

Cap. 13 Prob. 15 cont.

De fato, temos com $K = 4$

$$Q(s) = s^3 + 6{,}01\,s^2 + 16{,}42\,s + 2{,}32$$

Polos: $-2{,}93 \pm j\,2{,}638$ e $-14{,}9$

Os polos dominantes são bem próximos dos do sistema dado inicialmente.

Temos ainda

$$K_c = \frac{K}{4} = 1 \quad e \quad b = \frac{0{,}4}{K} = 0{,}1$$

Finalmente

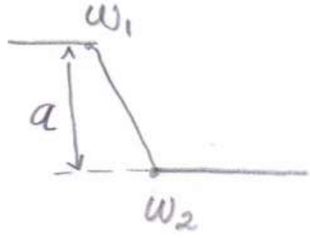
$$G_c(s) = 1\,\frac{s+0{,}1}{s+0{,}01}$$

Cap. 13 Prob. 17 Sol.

Sistema dado

$$\text{m.a.: } G(s) = \frac{100}{(s+1)(10s+1)} = \frac{10}{(s+0,1)(s+1)}$$

Usar um compensador de atraso de fase, para obter $MF = 60°$



Manter inalterado o erro estacionário de posição = conservar o mesmo valor de K_g. No caso,

$$K_g = 100 \quad \text{ou} \quad K_g(dB) = 40\,dB$$

Projeto do compensador

Resposta em frequência de m.a. do sistema dado (v. fig. seguinte)

Adotaremos para o cálculo $MF + 5° = 65°$

Esse valor corresponde a um ângulo de fase de de $-180+65 \cong -115°$. Pelo gráfico de Bode do sistema não compensado, esse angulo se dá em torno de 7 rad/s e a atenuação necessária é de aproximadamente $-20\,dB$ a ser imposta pelo compensador. Logo $a(dB) = 20$ e $a = 10$

Além disso adotaremos o zero do compensador também a uma década da frequência de cruzamento $\bar{\omega}_c \cong 0,7$ rad/s. Logo $\omega_2 = 0,07$ rad/s e $\omega_1 = 0,007$ rad/s

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\omega_2}{s+\omega_1} = K_c \frac{s+0,07}{s+0,007}$$

Cap. 13 Prob. 17 Cont.

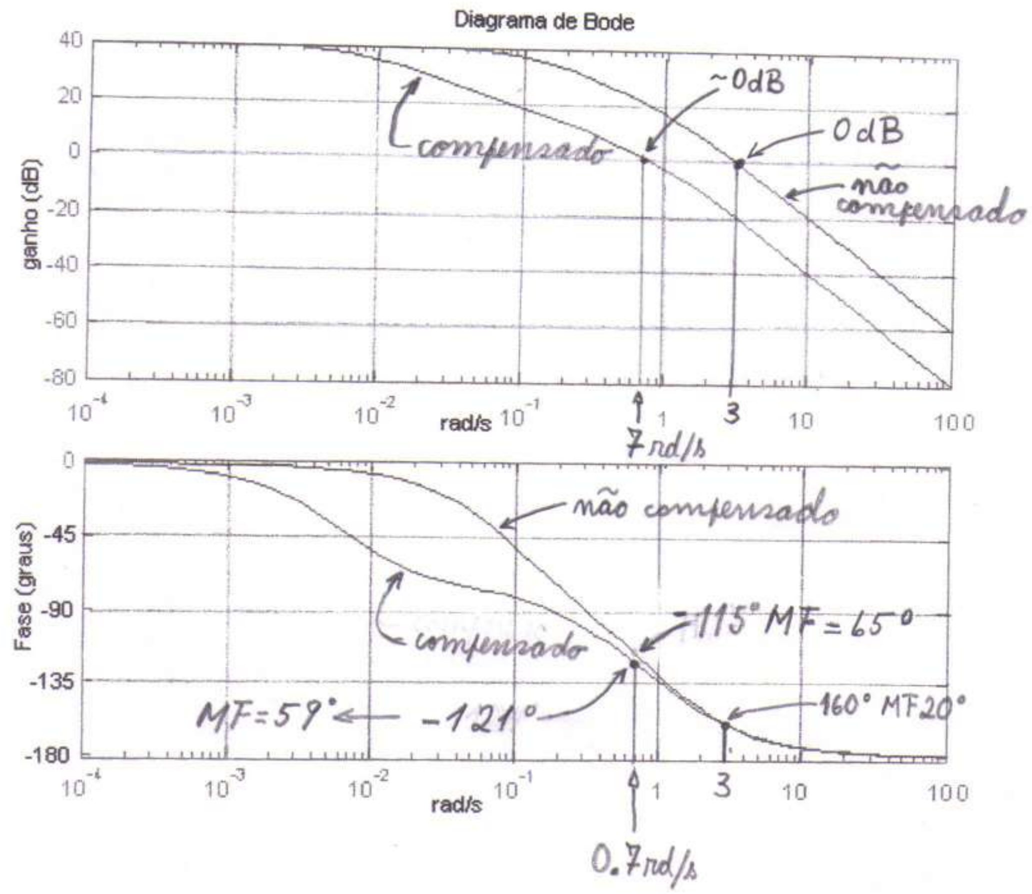
Sistema compensado em malha aberta

$$G_c(s)G(s) = \frac{10K_c(s+0,07)}{(s+0,007)(s+0,1)(s+1)}$$

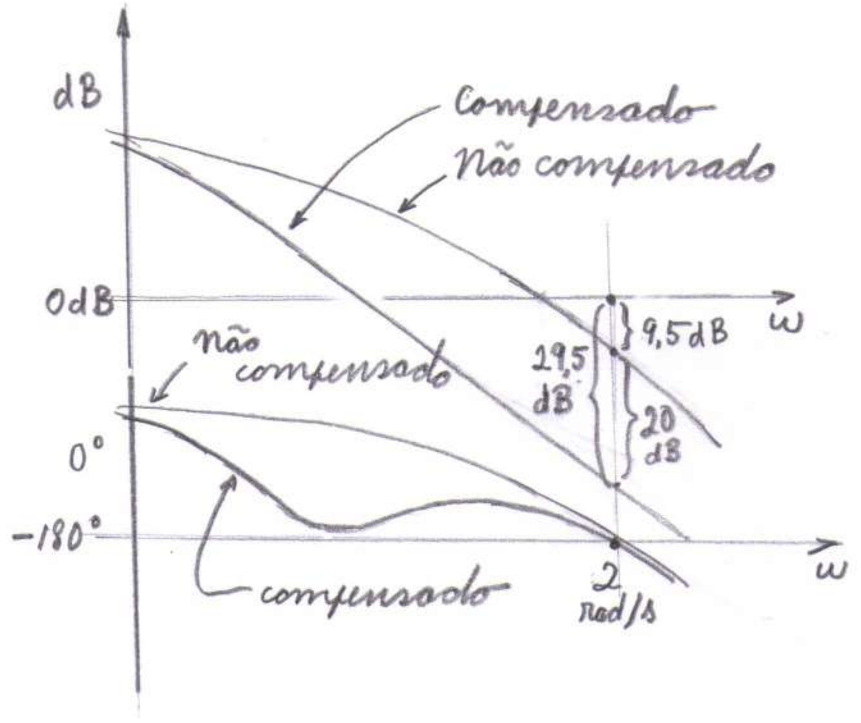
$$K_g = \frac{0,07 \times 10 \times K_c}{0,0007} = 1000K_c = 100 \leftarrow \text{Valor original}$$

$$\therefore K_c = 0,1$$

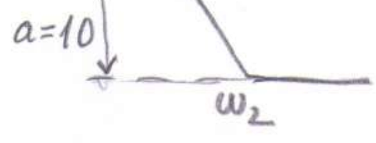
$$G_c(s)G(s) = \frac{(s+0,07)}{(s+0,007)(s+0,1)(s+1)}$$



Cap. 13 Prob 19



Pelo enunciado deseja-se uma atenuação de 1 para 10 na curva de ganho junto à frequência crítica ω_{cr} (frequencia de cruzamento $\bar{\omega}_c$. Para isso usa-se um compensador de atraso de fase de forma a não alterar os erros estacionários. Podemos adotar para o projeto do compensador



$$\omega_2 = \frac{\omega_{cr}}{10} = 0,2 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_2}{10} = 0,02$$

$$G_c(s) = K_c \frac{s+\omega_2}{s+\omega_1}$$

$$K_c = \frac{\omega_1}{\omega_2} = 0,1$$

$$\therefore \quad G_c(s) = 0,1 \frac{s+0,2}{s+0,02}$$

Cap. 13 Prob 19 Cont

Observação: O método de que trata esse problema é de grande interesse prático porque, em muitos casos, permite projetar um compensador para um sistema do qual não se conhece o modelo. Foi desenvolvido pelo Prof. Heraldo Silveira Barbuy.

Cap. 14 Problemas propostos 1.

Prob. 1 Sol.

(a) $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u(t)$

Sistema de 2ª ordem. Usamos variáveis de estado de fase: $x_1 = y$ $x_2 = \dot{y}$ $\dot{x}_2 = \ddot{y}$

Podemos representar a equação acima da seguinte forma:

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = -x_1 - 3x_2 + u(t)$$

São as equações escalares de estado.

A equação de saída, neste caso, será:

$$y = x_1$$

Sob forma matricial (ou vetorial):

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0]\, u(t)$$

As matrizes desse modelo de estado são

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Outras questões do problema 1 serão resolvidas dessa forma mas de modo resumido.

Cap. 14 Problemas propostos 1

Prob. 1 Cont. 1

(b) $\underbrace{\dddot{y}}_{\dot{x}_3} + 5\underbrace{\ddot{y}}_{x_3} + 8\underbrace{\dot{y}}_{x_2} + 12\underbrace{y}_{x_1} = u(t)$ 3ª ordem

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -12 & -8 & -5 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \qquad D = 0$$

(c) $\underbrace{\dddot{x}}_{\dot{x}_3} + 6\underbrace{\ddot{x}}_{x_3} + 18\underbrace{\dot{x}}_{x_2} + 64\underbrace{x}_{x_1} = u(t)$ 3ª ordem

$$y = 16(\underbrace{\dot{x}}_{x_2} + 4\underbrace{x}_{x_1})$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -64 & -18 & -6 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}_{B} u(t)$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 64 & 16 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \qquad D = 0$$

Cap. 14 Problemas propostos 1

Prob. 1 Cont. 2

$$(f)\quad \ddot{y} + 2\dot{y} + y + \int_0^t y\,dt = \frac{du}{dt} + 5u(t) \qquad 3^{a}\text{ ordem}$$

$$\left(s^2 + 2s + 1 + \frac{1}{s}\right) Y(s) = (s+5)\,U(s)$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s(s+5)X(s)}{(s^3 + 2s^2 + s + 1)X(s)}$$

$$\underbrace{\dddot{x}}_{\dot{x}_3} + 2\underbrace{\ddot{x}}_{x_3} + \underbrace{\dot{x}}_{x_2} + \underbrace{x}_{x_1} = u(t)$$

$$y(t) = \underbrace{\ddot{x}}_{x_3} + 5\underbrace{\dot{x}}_{x_2}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Cap. 14 Problemas propostos 1

Prob 1 cont. 3

(e) $\dddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2\dfrac{du}{dt} + u(t)$ 3ª ordem

No caso em que aparecem derivadas da variavel de entrada usa um artifício:

(1) Obtem a função de transferencia e multiplica-se numerador e denominador por uma variavel arbitraria $X = X(s)$:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(2s+1)\,X(s)}{(s^3+6s+5)\,X(s)}$$

Sendo X uma váriavel arbitrária pode ser escolhida de forma que os denominadores e os numeradores da igualdade acima sejam respectivamente iguais:

$$U(s) = (s^3+6s+5)\,X(s)$$

$$Y(s) = (2s+1)\,X(s)$$

Pela transformada inversa (sendo $x = x(t)$)

$$\underbrace{\dddot{x}}_{\dot{x}_3} + 0\underbrace{\ddot{x}}_{x_3} + 6\underbrace{\dot{x}}_{x_2} + 5\underbrace{x}_{x_1} = u(t)$$

$$y = 2\underbrace{\dot{x}}_{x_2} + \underbrace{x}_{x_1}$$

Resulta

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \qquad D = 0$$

Cap. 14 Problemas propostos (2)

Problema 3

Dados

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -6\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$$

$D=0$

(a) Autovalores da matriz A.

$$\Delta = \det[sI-A] = \det\begin{bmatrix}s & -1\\ 10 & s+6\end{bmatrix} = s^2+6s+10 = (s+3)^2+1$$

autovalores: $-3 \pm j$

(b) Matriz de transição de estado.

$$\phi(s) = \begin{bmatrix}s & -1\\ 10 & s+6\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{s+6}{\Delta} & \frac{1}{\Delta}\\ \frac{-10}{\Delta} & \frac{s}{\Delta}\end{bmatrix}$$

com $\Delta = (s+3)^2+1$

(c) Matriz de transferência

$$G(s) = C\,\phi(s)\,B + \underset{0}{D} = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+6}{\Delta} & \frac{1}{\Delta}\\ \frac{-10}{\Delta} & \frac{s}{\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{\Delta} & \frac{1}{\Delta}\\ \frac{s}{\Delta} & \frac{s}{\Delta}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{s+1}{\Delta} & \frac{s+1}{\Delta}\\ \frac{1-s}{\Delta} & \frac{1-s}{\Delta}\end{bmatrix}$$

Cap. 14 Problemas propostos (2)

Prob 3 Cont.

(d) Resposta às entradas $u_1 = 0$ e
$u_2 = \delta(t) =$ impulso unitário

$$Y(s) = G(s)\,U(s)$$

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{\Delta} & \frac{s+1}{\Delta} \\ \frac{1-s}{\Delta} & \frac{1-s}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{\Delta} \\ \frac{1-s}{\Delta} \end{bmatrix}$$

$$Y_1(s) = \frac{s+1}{(s+3)^2+1} = \frac{s+3}{(s+3)^2+1} - \frac{2}{(s+3)^2+1}$$

$$\therefore\ y_1(t) = e^{-3t}(\cos t - 2\,\mathrm{sen}\,t)$$

$$Y_2(s) = \frac{1-s}{(s+3)^2+1} = \frac{4}{(s+3)^2+1} - \frac{s+3}{(s+3)^2+1}$$

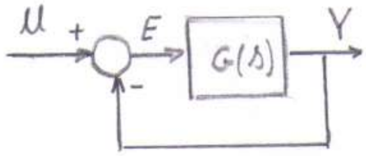
$$y_2(t) = e^{-3t}(4\,\mathrm{sen}\,t - \cos t)$$

Cap. 14 Problemas propostos (2)

Prob 2 Sol

Dados

$$G \begin{cases} \dot{x} = Ax + Be(t) \\ y(t) = Cx \end{cases}$$



$$e(t) = u - y$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

Solução

$$e(t) = u - Cx = u - \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -27 & -9 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -37 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Cap. 14 Problemas propostos 1

Prob. 3 Sol.

(a) $x_1 = V \qquad x_2 = i_L \qquad y = V$

$C\dot{x}_1 = i_C \qquad \frac{x_1}{R} = i_R \qquad x_2 = i_L \qquad V = L\dot{x}_2$

$f(t) = C\dot{x}_1 + \frac{x_1}{R} + x_2$ (soma das correntes)

$x_1 = L\dot{x}_2$ (tensão no circuito)

Equações de estado

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 - \frac{1}{C}x_2 + \frac{1}{C}f(t)$$

$$\dot{x}_2 = \frac{1}{L}x_1$$

Equação de saída

$$y = x_1$$

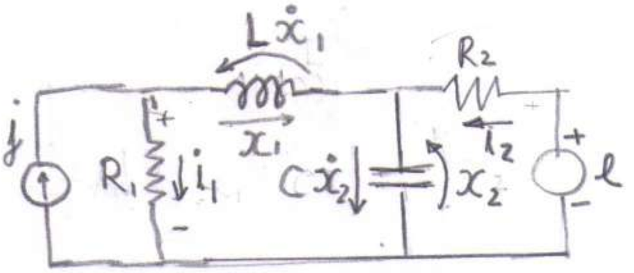
matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0] \qquad D = 0$$

Cap. 14 Problemas propostos 1
Prob. 3 Cont.

(c)
$$x_1 + i_1 = j(t)$$
$$R_1 i_1 = L\dot{x}_1 + x_2$$
$$x_2 + R_2 i_2 = e(t)$$
$$x_1 + i_2 = C\dot{x}_2$$



Eliminando i_1 e i_2 nas equacões acima

$$\dot{x}_1 = -\frac{R_1}{L}x_1 - \frac{1}{L}x_2 + \frac{R_1}{L}j(t)$$
$$\dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{R_2C}x_2 + \frac{1}{R_2C}e(t)$$

Saida
$$y_1 = R_1 i_1 = -R_1 x_1 + R_1 j(t)$$
$$y_2 = x_2$$

Matrizes

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{R_1}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{R_2C} \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2C} \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 12 Sol.

Solução da equação de estado no domínio do tempo.

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At}\int_0^t e^{-A\tau} B\,u(\tau)\,d\tau \quad \text{(p. 260)}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ para } t \geq 0$$

$$\phi(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$ matriz de transição de estado

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}(\phi(s)) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

Solução para condições iniciais nulas

$$x(t) = e^{At}\int_0^t \begin{bmatrix} e^{-\tau} & 0 \\ 0 & e^{-2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} d\tau$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 6e^{\tau} \\ -12e^{2\tau} \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6(e^{t}-1) \\ -6(e^{2t}-1) \end{bmatrix}$$

$$x_1(t) = 6(1 - e^{-t})$$
$$x_2(t) = -6(1 - e^{-2t})$$
para $t \geq 0$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob 1 Sol.

(a) $Q(s) = \det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s-2 & 1 & -1 \\ -3 & s+4 & 0 \\ -1 & 0 & s+3 \end{bmatrix}$

$$Q(s) = s^3 + 5s^2 - 19$$

(b) $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$ $M^2 = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$ $M^3 = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix}$

$$Q(M) = M^3 + 5M^2 - 19I = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 9 & 0 \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} - 19\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$Q(M) = \begin{bmatrix} -34 & -3 \\ 9 & -34 \end{bmatrix}$$

(c) Polinômio característico de M

$$Q_M(s) = \det(sI - M) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 3 & s \end{bmatrix} = s^2 + 3$$

$$Q_M(M) = M^2 + 3I = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 10 Sol.

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -4\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix} \quad D=0$$

Condições iniciais (estado inicial): $x_0=\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$

(a) Resposta às condições iniciais.

$$Y(s) = C\,\phi(s)\,x_0$$

$$\phi(s) = \cancel{[sI-A]^{-1}} = \begin{bmatrix}s+1 & 0\\ 0 & s+4\end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}$$

$$Y_a(s) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\-1\end{bmatrix}$$

$$Y_a(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{s+4} \qquad y_a(t) = 3e^{-t} - e^{-4t}$$

(b) Resposta ao degrau unitário, sendo nulas as condições iniciais ($x_0=0$).

$$Y_b(s) = C\,\phi(s)\,B\,U(s) = \begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$Y_b(s) = \begin{bmatrix}\frac{1}{s+1} & \frac{1}{s+4}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}\frac{1}{s} = \frac{2}{s(s+4)}$$

$$Y_b(s) = \frac{0{,}5}{s} - \frac{0{,}5}{s+4} \qquad y_b(t) = \frac{1}{2}\left(1-e^{-4t}\right)$$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 10 Cont

(c) Resposta ao degrau unitário quando as condições iniciais forem as mesmas do item (a).

Como o sistema é linear, a resposta às duas entradas simultaneas é igual à soma das duas respectivas respostas.

$$y(t) = y_a(t) + y_b(t) = 3e^{-t} - e^{-4t} + \frac{1}{2}(1 - e^{-4t})$$

$$y(t) = \frac{1}{2} + 3e^{-t} - \frac{3}{2}e^{-4t}$$

ou $$y(t) = 0{,}5(1 + 6e^{-t} - 3e^{-4t})$$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 8 Sol.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -7\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad D=0$$

$x_0=0$ $\quad u(t)=$ degrau unitário

$$\Delta=\det[sI-A]=\det\begin{bmatrix}s & -1\\ 10 & s+7\end{bmatrix}=s^2+7s+10=(s+2)(s+5)$$

Polos: $-2 \quad -5$

$$\phi(s)=[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{s+7}{\Delta} & \frac{1}{\Delta}\\ \frac{-10}{\Delta} & \frac{s}{\Delta}\end{bmatrix}$$

$$Y(s)=C\phi(s)B\cdot u(s)=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{s+7}{\Delta} & \frac{1}{\Delta}\\ \frac{-10}{\Delta} & \frac{s}{\Delta}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\frac{1}{s}$$

$$\begin{bmatrix}Y_1(s)\\ Y_2(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{1}{s\Delta}\\ \frac{s}{s\Delta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1-s}{s\Delta}\\ \frac{1}{\Delta}\end{bmatrix}$$

$$Y_1(s)=\frac{1-s}{s(s+2)(s+5)}=\frac{\frac{1}{10}}{s}-\frac{\frac{1}{2}}{s+2}+\frac{\frac{2}{5}}{s+5}$$

$$Y_2(s)=\frac{1}{(s+2)(s+5)}=\frac{\frac{1}{3}}{s+2}-\frac{\frac{1}{3}}{s+5}$$

$$y_1=\frac{1}{10}-\frac{1}{2}e^{-2t}+\frac{2}{5}e^{-5t} \qquad \text{para } t\geq 0$$

$$y_2=\frac{1}{3}\left(e^{-2t}-e^{-5t}\right) \qquad \text{para } t\geq 0$$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 6 Sol.

$$A=\begin{bmatrix}-5 & 0\\ 0 & -6\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix} \quad C=[1 \;\; 0] \quad D=0$$

(a) Autovalores de A

$$\Delta=\det[sI-A]=\det\begin{bmatrix}s+5 & 0\\ 0 & s+6\end{bmatrix}=(s+5)(s+6)$$

Pólos −5 e −6

O sistema é estável porque todos os polos estão no semiplano direito (SD) do plano s.

(b) Resposta às condições iniciais $x_0=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$

$$Y(s)=C\phi(s)x_0$$

$$\phi(s)=[sI-A]^{-1}=\begin{bmatrix}\frac{1}{s+5} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+6}\end{bmatrix}$$

$$Y(s)=[1 \;\; 0]\begin{bmatrix}\frac{1}{s+5} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\frac{2}{s+5}$$

$$y(t)=2e^{-5t}$$

(c) Função de transferência

$$G(s)=C\phi(s)B=[1 \;\; 0]\begin{bmatrix}\frac{1}{s+5} & 0\\ 0 & \frac{1}{s+6}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\frac{1}{s+5}$$

$$G(s)=\frac{1}{s+5}$$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 4 Solução

Determinar os pólos do sistema cuja matriz de transição de estado é

(a) $\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}$

$$A_1 = \dot{\varphi}_1(t) \cdot \varphi(-t) = \begin{bmatrix} -5e^{-5t} & 0 \\ 0 & -6e^{-6t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 \\ 0 & e^{6t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\det[sI - A_1] = \det \begin{bmatrix} s+5 & 0 \\ 0 & s+6 \end{bmatrix} = (s+5)(s+6)$$

Polos -5 e -6

(b) $\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & 0{,}5\,\mathrm{sen}(2t) \\ -2\,\mathrm{sen}(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$

$$A_2 = \dot{\varphi}_2(t) \cdot \varphi(-t) =$$

$$\begin{bmatrix} -2\,\mathrm{sen}(2t) & \cos(2t) \\ -4\cos(2t) & -2\,\mathrm{sen}(2t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos(2t) & -0{,}5\,\mathrm{sen}(2t) \\ 2\,\mathrm{sen}(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\det[sI - A_2] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 4 & s \end{bmatrix} = s^2 + 4$$

Polos: $\pm 2j$

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 3 Sol.

$$\varphi_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t}-1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{Para } t=0 \quad \varphi_1(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Não satisfaz a 1ª propriedade (tabela p. 259) das matrizes de transição de estado segundo a qual $\varphi(0) = I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, no caso. $\varphi_1(t)$ não pode ser matriz de transição de estado

---

$$\varphi_2 = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(t)+1 \end{bmatrix}$$

a 1ª propriedade é satisfeita:

para $t=0$ $\quad \varphi_2(0) = \begin{bmatrix} \cos(0) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(0)+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Entretanto a propriedade 3, da tabela referida não é satisfeita. De fato

$\varphi(-t) = [\varphi(t)]^{-1}$ logo deveriamos ter

$\varphi_2(t) \cdot \varphi_2(-t) = I$ o que não ocorre:

$$\begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \operatorname{sen}(t)+1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & 1-\operatorname{sen}(t) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \cos^2(t) & 0 \\ 0 & 1-\operatorname{sen}^2(t) \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\varphi_2(t)$ não pode ser matriz de transição de estado.

Cap. 14 Problemas propostos (3)

Prob. 3 Cont.

$$\varphi_3 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_3(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ 1º propriedade satisfeita

$$\varphi_3(t) \cdot \varphi_3(-t) = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

3ª propriedade tambem satisfeita

Facamos uma verificação geral com auxilio da 4º propriedade: $\dot{\varphi}(t) \cdot \varphi(-t) = A$

$$\dot{\varphi}_3(t) \cdot \varphi(-t) = \begin{bmatrix} -e^{-t} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Para comprovar façamos o calculo do φ_3 a partir do A calulado:

$$\phi_3(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$\varphi_3(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$ Confere.

$\varphi_3(t)$ pode ser matriz de transição de estado.

Cap. 15 Prob-19 Sol

(a) Reduzindo o diagrama de blocos com auxílio da fórmula de Mason:

$$F(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1400\left(\frac{1}{s^2}+\frac{1}{s^3}\right)}{1+\frac{15}{s}+\frac{71}{s^2}+\frac{108}{s^3}}=\frac{1400(s+1)}{s^3+15s^2+71s+105}$$

(b) Modelo de estado sob forma canonica do observador

$$A=\begin{bmatrix}-15 & 1 & 0\\ -71 & 0 & 1\\ -108 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1400\\ 1400\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\end{bmatrix} \quad D=0$$

(c) Projeto do observador

Polinômios característicos:

em malha aberta

$$P_a=s^3+\underbrace{15}_{a_2}s^2+\underbrace{71}_{a_1}s+\underbrace{105}_{a_0}$$

em malha fechada

$$P_f=(s+40)(s+20-j34{,}6)(s+20+j34{,}6)$$

$$P_f=s^2+\underbrace{80}_{f_2}s^2+\underbrace{3197}_{f_1}s+\underbrace{63886}_{f_0}$$

$$h_1=f_2-a_2=80-15=65$$
$$h_2=f_1-a_1=3197-71=3126$$
$$h_3=f_0-a_0=63886-105=63781$$

Cap. 15 Prob 19 Cont.

$$H = \begin{bmatrix} 65 \\ 3126 \\ 63781 \end{bmatrix}$$

(e) Matriz de malha fechada do observador

$$A_{ob} = A - HC = \begin{bmatrix} -15 & 1 & 0 \\ -71 & 0 & 1 \\ -105 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 65 \\ 3126 \\ 63781 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} -15 & 1 & 0 \\ -71 & 0 & 1 \\ -105 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 65 & 0 & 0 \\ 3126 & 0 & 0 \\ 63781 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -80 & 1 & 0 \\ -3197 & 0 & 1 \\ -63886 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A_{ob} = \begin{bmatrix} -80 & 1 & 0 \\ -3197 & 0 & 1 \\ -63886 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(f) O observador é mais rapido que o sistema dado porque os pólos dele estão mais distantes à esquerda do eixo imaginário que os polos do sistema.

Cap. 15 Prob. 17 Sol.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+0,5)(s+0,9)} = \frac{s+2}{s^2+1,4s+0,45}$$

(a) Representação sob forma canônica do observador

$$A = \begin{bmatrix} -1,4 & 1 \\ -0,45 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

(b) Verificação da observabilidade

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1,4 & 1 \end{bmatrix} \qquad \det(M_o) = 1 \neq 0$$

O sistema é observável

(c) Projeto do observador

Polinômios característicos.

Em malha aberta:

$$p_a = s^2 + \underbrace{1,4}_{a_1}s + \underbrace{0,45}_{a_0}$$

Em malha fechada

$$p_f = (s+6)^2 + 36 = s^2 + \underbrace{12}_{f_1}s + \underbrace{72}_{f_0}$$

$$h_1 = f_1 - a_1 = 12 - 1,4 = 10,6$$

$$h_2 = f_0 - a_0 = 72 - 0,45 = 71,55$$

$$H = \begin{bmatrix} 10,6 \\ 71,55 \end{bmatrix}$$

Cap. 15 Prob. 15 Sol.

$$G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+7)} = \frac{1}{s^3+10s^2+21s}$$

(a) O modelo de estado na forma canônica do observador pode ser obtida por inspeção

$$A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -21 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad D = [0]$$

(b) Obtenção da matriz H do observador.

Polinomios característicos.

Em malha aberta

$$p_a = s^3 + \underbrace{10}_{a_2}s^2 + \underbrace{21}_{a_1}s + \underbrace{0}_{a_0}$$

Em malha fechada, com pólos do observador em $-30 \pm j40$ e -300.

$$p_f = s^3 + \underbrace{360}_{f_2}s^2 + \underbrace{20500}_{f_1}s + \underbrace{750000}_{f_0}$$

No caso

$$h_i = f_{3-i} - a_{3-i} \quad \text{com } i = 0, 1, 2$$

$$h_1 = f_2 - a_2 = 360 - 10 = 350$$

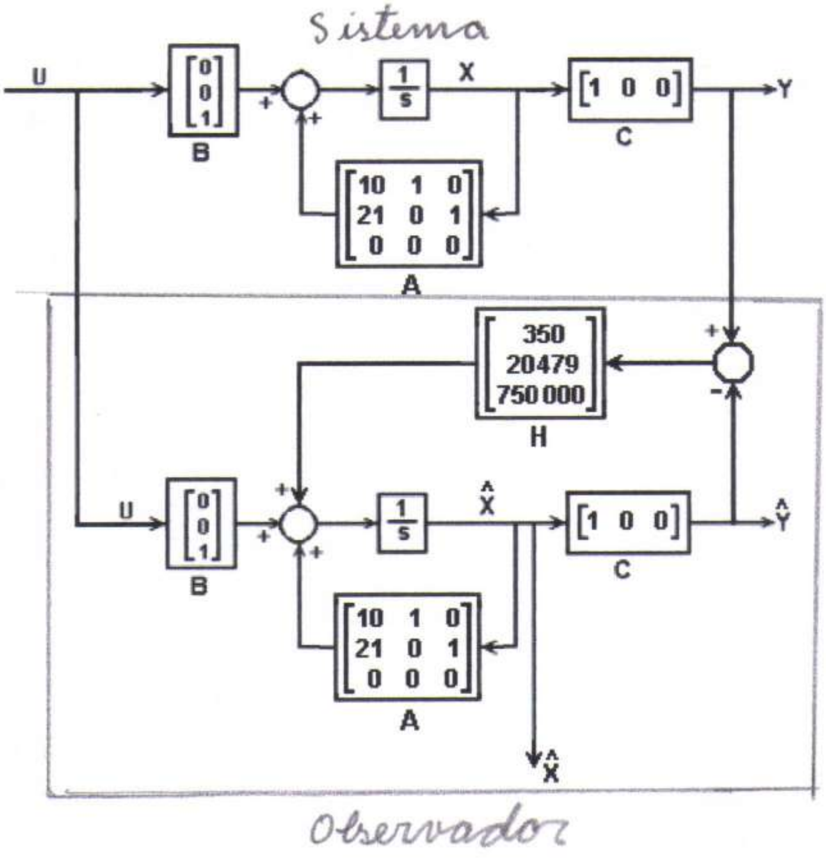
$$h_2 = f_1 - a_1 = 20500 - 21 = 20479$$

$$h_3 = f_0 - a_0 = 750000 - 0 = 750.000$$

$$H = \begin{bmatrix} 350 \\ 20479 \\ 750.000 \end{bmatrix}$$

Cap. 15 Prob. 15 Cont.

(d) Diagrama vetorial do sistema + observador



Cap. 15 Prob. 13 Sol.

$$F(s) = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{(s+2)}{s^3+9s^2+23s+15}$$

(a) O modelo de estado na forma canônica do controlador pode ser obtida por inspeção:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [2 \;\; 1 \;\; 0] \quad D = 0$$

(b) Obtenção da matriz K de realimentação

Polinômios característicos.

Em malha aberta:

$$p_a = s^3 + \underbrace{9}_{a_2}s^2 + \underbrace{23}_{a_1}s + \underbrace{15}_{a_0}$$

Em malha fechada, com polos $-20 \pm j20$ e -50

$$p_f = s^3 + \underbrace{90}_{f_2}s^2 + \underbrace{2800}_{f_1}s + \underbrace{40000}_{f_0}$$

$$k_1 = f_0 - a_0 = 40000 - 15 = 39985$$
$$k_2 = f_1 - a_1 = 2800 - 23 = 2777$$
$$k_3 = f_2 - a_2 = 90 - 9 = 81$$
$$\therefore \quad K = [\,39985 \quad 2777 \quad 81\,]$$

(c) Diagrama

Para construir o digrama sob forma escalar convém partirmos das equações de estado, sob forma escalar.

Cap. 15 Prob. 13 Cont.

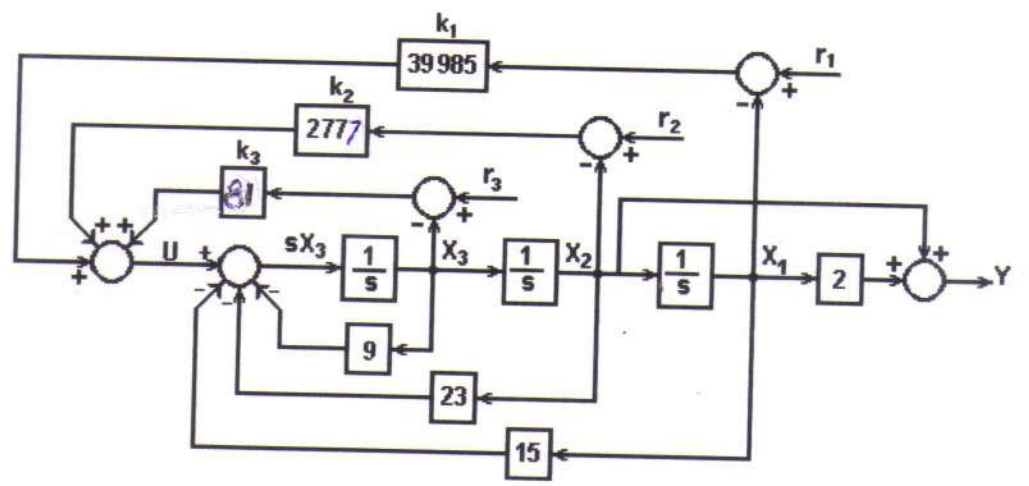
Em malha aberta

$$\dot{x}_1 = x_2$$
$$\dot{x}_2 = x_3$$
$$\dot{x}_3 = -15x_1 - 23x_2 - 9x_3$$
$$y = 2x_1 + x_2$$

Realimentação

$$u = K(r - x) = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \right\}$$

$$u = 39985(r_1 - x_1) + 2777(r_2 - x_2) + 81(r_3 - x_3)$$



Cap. 15 Prob. 11 Sol.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(a) Matriz de controlabilidade

$$AB = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$M_c = \begin{bmatrix} B & AB \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \qquad \det(M_c) = -2 \neq 0$$

$\therefore$ Sistema controlavel

(b) Diagonalização da matriz do sistema

$$\det[sI - A] = \det\begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 1 & s+2 \end{bmatrix} \doteq (s+1)(s+2)$$

autovalores de A: $s_1 = -1 \quad s_2 = -2$

Calculo dos autovetores

$$[s_1 I - A]\, p_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} p_{11} + p_{21} = 0 \\ p_{11} = 1 \;\; p_{21} = -1 \end{matrix} \qquad p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$s_1 = -1$

$$[s_2 I - A] = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} p_{12} = 0 \\ p_{22} = 1 \end{matrix} \qquad p_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$s_2 = -2$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Então

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a matriz A_d é digonal e o matriz B' não tenha nenhuma linha nula. Logo o sistema é controlável

Cap. 15 Prob 9 Sol.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

(a) Matriz P de transformação

$$\det[sI-A] = \det\begin{bmatrix} s & -2 \\ 1 & s+3 \end{bmatrix} = s^2+3s+2 = (s+1)(s+2)$$

autovalores de A: $s_1=-1$ e $s_2=-2$

$$\underset{s_1=-1}{[s_1I-A]p_1} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p_{11}+2p_{21}=0 \\ p_{11}=2 \;\; p_{21}=-1 \end{matrix} \quad p_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\underset{s_2=-2}{[s_2I-A]p_2} = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} p_{12}+p_{22}=0 \\ p_{12}=1 \;\; p_{22}=-1 \end{matrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Matriz de transformação $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$

$$P^{-1} = -\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}$$

(b) Equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u$$

Equação de saída

$$y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

Cap. 15 Prob 9 Cont.

(c) Matriz de transição de estado

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\phi(s) = [Is - A_d]^{-1} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

(d) Resposta a degrau unitário

$$Y(s) = C'\phi(s)B'U(s) = [0 \ \ -1] \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \frac{1}{s}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-1}{s+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{s} \\ \frac{-3}{s} \end{bmatrix} = \frac{3}{s(s+2)} = \frac{3}{2}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+2}\right\}$$

$$\therefore \quad y(t) = \frac{3}{2}\left[1 - e^{-2t}\right] \quad \text{para } t \geq 0$$

Cap. 15 Prob. 8 Cont 2

uma equação auxiliar que permite determinar o correspondente valor de w:

$K = 132$

s^4	1	80	132
s^3	19	32	
s^2	1488	2508	
s	0		

$\longrightarrow 1488 s^2 + 2508 = 0$

$s^2 = -1,68$

$s = \pm j\,1,298$

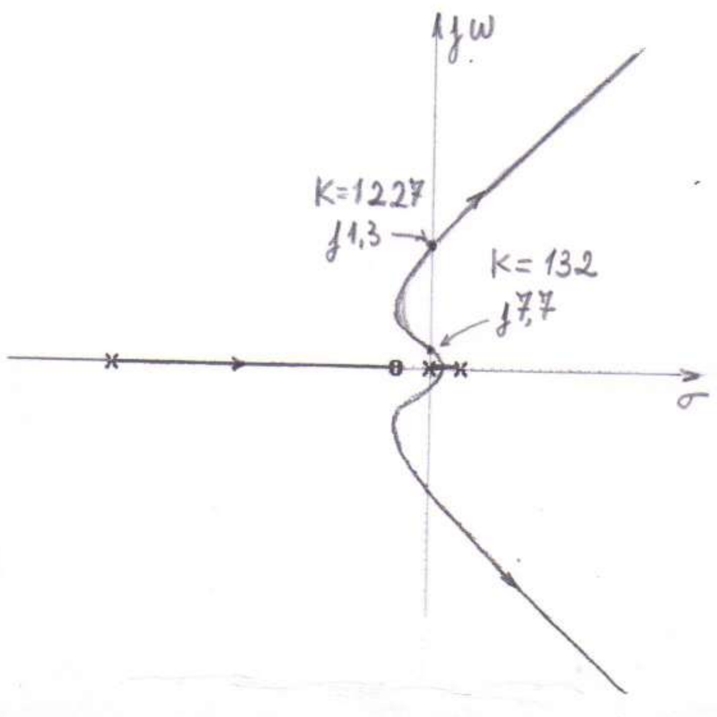
analogamente para $K = 1227$

s^4	1	80	1227
s^3	19	1127	
s^2	393	23313	
s	0		

$\longrightarrow 393 s^2 + 2313 = 0$

$s^2 = -59,32$

$s = \pm j\,7.702$



Cap. 15 - Prob. 7 Sol.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(a) Autovalores e autovetores do A

$$\Delta = \det[sI - A] = s^2 + 6s + 8 = (s+2)(s+4)$$

autovalores de A : $s_1 = -2 \quad s_2 = -4$

$$\underset{s_1=-2}{[s_1 I - A]}\, p_1 = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 2p_{11} + p_{21} = 0 \\ p_{11} = 1 \;\; p_{21} = -2 \end{matrix} \quad p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{s_2=-4}{[s_2 I - A]}\, p_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 \\ 8 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} 4p_{12} + p_{22} = 0 \\ p_{12} = 1 \;\; p_{22} = -4 \end{matrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

autovetores: $p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$ e $p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$

(b) Equações do estado e de saída

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad \Delta = \det P = -2 \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \quad B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$$

$$C' = CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

Equação de estado: $\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$

Equação de saída $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$

Cap. 15 Prob. 5 Sol

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-2 & b-15 & c-8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [-a \ -b \ 0]$$

(a) Determinação das constantes a, b e c, para que a matriz diagonalizada seja

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

A matriz A e sua transformada A_d devem ter os mesmos autovalores e portanto devem ter polinômios característicos iguais:

$$p(A) = s^3 + (8-c)s^2 + (15-b)s + 2 - a$$

$$p(A_d) = (s+1)(s+2)(s+5) = s^3 + 8s^2 + 17s + 10$$

Para que esses dois polinomios sejam iguais, devemos ter

$$2 - a = 10 \longrightarrow a = -8$$

$$15 - b = 17 \longrightarrow b = -2.$$

$$8 - c = 8 \longrightarrow c = 0$$

Logo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [8 \ 2 \ 0]$$

Cap. 15 Prob. 5 Cont. 1

(b) Determinação da matriz P da transformação de $A \longrightarrow A_d$.

As colunas da matriz P são os autovalores da matriz A.
Os autovalores de A são os mesmos de A_d, a saber: $s_1=-1$; $s_2=-2$; $s_3=-3$.

autovetor associado a $s_1=-1$

$$[s_1 I - A]p_1 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 10 & 17 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$s_1=-1$

$-p_{11}-p_{21}=0$
$-p_{21}-p_{31}=0$
$10p_{11}+17p_{21}+7p_{31}=0$

Se fizermos $p_{11}=1$ resulta $p_{21}=-1$ e $p_{31}=1$

$$\therefore p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Autovetor associado a $s_2=-2$

$$[s_2 I - A]p_2 = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 \\ 10 & 17 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$
$s_2=-2$

$-2p_{12}-p_{22}=0$

$-2p_{22}-p_{32}=0$

$10p_{12}+17p_{22}+6p_{32}=0$

Se fizermos $p_{12}=1$ resulta $p_{22}=-2$ e $p_{23}=4$

Cap. 15 Prob 5 Cont 2

Resulta

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Analogamente, para o autovetor associado a $s_3 = -5$, podemos obter

$$p_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 25 \end{bmatrix}$$

A matriz de transformação será

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 25 \end{bmatrix}$$

Note que as colunas dessa matriz (autovetores de A) são constituidas por potencias sucessivas dos respectivos autovalores. As matrizes com esse formato são denominadas matrizes de Vandermonde.

Temos de calcular também o inverso de P, que resulta (v. observação final)

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 2,5 & 1,75 & 0,25 \\ -1,667 & -2 & -0,333 \\ 0,1667 & 0,25 & 0,083 \end{bmatrix}$$

Cap. 15 Prob. 5 Cont. 3

Verifique $A_d = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$

Calculo de B' e C'

$$B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 2,5 & 1,75 & 0,25 \\ -1,667 & -2 & -0,333 \\ 0,1667 & 0,25 & 0,0833 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -0,333 \\ 0,0833 \end{bmatrix}$$

$$C' = CP = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Cap. 15 Prob. 3 Sol.

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -13 & 7 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = x_1 - x_2$$

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -13 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -13 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}$$

autovalores do A e do A'

$$\det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s+11 & -9 \\ 13 & s-7 \end{bmatrix} = s^2 + 4s + 40$$

$$\det[sI - A'] = \det \begin{bmatrix} s+6 & 13 \\ -4 & s-2 \end{bmatrix} = s^2 + 4s + 40$$

Os autovares de ambas as matrizes são

$$s_{1,2} = -2 \pm j6$$

Cap. 15 Prob 1 Sol.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} \quad D=0$$

$$x_1'=1,25x_1+0,25x_2$$
$$x_2'=-0,25x_1-0,25x_2$$

$$Q=\begin{bmatrix}1,25 & 0,25\\ -0,25 & -0,25\end{bmatrix}=P^{-1}$$

$$\Delta=\det(Q)=-1,25\times0,25+0,25^2=-0,25$$

$$P=-\frac{1}{0,25}\begin{bmatrix}-0,25 & -0,25\\ 0,25 & 1,25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -5\end{bmatrix}$$

$$A'=P^{-1}AP=\begin{bmatrix}1,25 & 0,25\\ -0,25 & -0,25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ -5 & -6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -5\end{bmatrix}$$

$$A'=\begin{bmatrix}1,25 & 0,25\\ -0,25 & -0,25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & -5\\ 1 & 25\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}$$

$$B'=P^{-1}B=\begin{bmatrix}1,25 & 0,25\\ -0,25 & -0,25\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0,25\\ -0,25\end{bmatrix}$$

$$C'=CP=\begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}$$

Equações de estado e de saída, relativas às novas variáveis:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1'\\ \dot{x}_2'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0,25\\ -0,25\end{bmatrix}\mu$$

$$y=\begin{bmatrix}1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}$$

Cap. 16 Prob. 9 Sol.

Dados

$$G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,4}{s+2} \qquad T = 0,1$$

$$G_c(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s}$$

a) Constante de tempo do processo em malha aberta.

$$\tau_{ma} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ segundos}$$

b) Função de transferência discreta em série com o segurador: $G(z) = \dfrac{Y(z)}{E(z)}$

$$G_{s+p}(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{0,4}{s(s+2)} = (1 - e^{-sT}) \left\{ \frac{0,2}{s} - \frac{0,2}{s+2} \right\}$$

$$G_{s+p}(z) = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{0,2z}{z-1} - \frac{0,2z}{z - e^{-2\times0,1}} \right\}$$

$$G_{s+p}(z) = \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}} \; \frac{0,2\cancel{z}(1 - 0,819)}{\cancel{(z-1)}(z-0,819)} = \frac{0,0362}{z - 0,819}$$

c) $$G_{s+c}(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{\alpha s + \beta}{s^2} = (1 - e^{-sT}) \left\{ \frac{\alpha}{s} + \frac{\beta}{s^2} \right\}$$

$$G_{s+c}(z) = \frac{(z-1)}{z} \left\{ \frac{\alpha z}{(z-1)} + \frac{\beta T z}{(z-1)^2} \right\} = \alpha + \frac{\beta T}{(z-1)}$$

$$G_{s+c}(z) = \alpha + \frac{0,1\beta}{(z-1)} = \frac{\alpha\left(z - \left(1 - \frac{0,1\beta}{\alpha}\right)\right)}{(z-1)}$$

Cap. 16 Prob. 9 Cont.

(d) Ralação $\frac{\beta}{\alpha}$ para que o sistema de malha fechada seja de 1ª ordem

$$G(z) = G_{s+c}(z)\,G_{s+p}(z) = \frac{\alpha\left(z-\left(1-\frac{0{,}1\beta}{\alpha}\right)\right)}{(z-1)}\,\frac{0{,}0362}{(z-0{,}819)}$$

Para que o sistema seja do 1ª ordem devemos fazer

$$z-\left(1-\frac{0{,}1\beta}{\alpha}\right) = z-0{,}819$$

ou $1-\frac{0{,}1\beta}{\alpha} = 0{,}819 \quad \therefore \quad \frac{\beta}{\alpha} = 1{,}81$

Resulta

$$G(z) = \frac{0{,}0362\,\alpha}{z-1}$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0{,}0362\,\alpha}{z-(1-0{,}0362\,\alpha)}$$

(e) Valores de α e β para que a constante de tempo (continuo) do sistema, seja 0.8.

$$e^{-aT} = e^{-\frac{T}{\tau_f}} = 1-0{,}0362\alpha)$$

$$e^{-\frac{0{,}1}{0{,}8}} = e^{-0{,}125} = 0{,}882$$

$$1-0{,}0362\,\alpha = 0{,}882 \qquad \alpha = 3{,}246$$

$$\beta = 1{,}81\,\alpha = 5{,}875$$

$$G_c(s) = \frac{3{,}246s + 5{,}875}{s}$$

Cap. 16 Prob. 7 Sol.

$T = 0,1$

(a) $G_p(s) = (1+e^{-sT})\dfrac{1}{s(s+1)} = (1+e^{sT})\left\{\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1}\right\}$

$$G(z) = \frac{z-1}{z}\left\{\frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-T}}\right\} \quad \text{com } T=0,1$$

$$G(z) = \frac{\cancel{z-1}}{\cancel{z}}\,\frac{\cancel{z}(1-e^{-0,1})}{\cancel{(z-1)}(z-e^{-0,1})} = \frac{1-e^{-0,1}}{z-e^{-0,1}}$$

Sendo $e^{-0,1} = 0,905$, resulta

$$G(z) = \frac{0,095}{z-0,905}$$

(b) $$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,095}{z-0,905} = \frac{0,095\,z^{-1}}{1-0,905\,z^{-1}}$$

$$(1-0,905\,z^{-1})\,Y(z) = 0,095\,z^{-1}U(z)$$

No domínio do tempo

$$y_k - 0,905\,y_{k-1} = 0,095\,u_{k-1}$$

Para u_k = degrau unitário $u_k = \begin{cases} 0 & \text{para } K<0 \\ 1 & \text{para } K\geq 0 \end{cases}$

$$y_k = 0,905\,y_{k-1} + 0,095\,u_{k-1}$$

K	0	1	2	3
y_k	0	0,095	0,181	0,259

Cap. 16 Prob 7 Cont

c) $$\frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z}{z-1}G(z) = \frac{0{,}095z}{(z-1)(z-0{,}905)}$$

$$F(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{0{,}095z}{z^2 - 1{,}810z + 0{,}905}$$

Polos: $z_{1,2} = -0{,}905 \pm j0{,}293$

$|z_1| = |z_2| = 0{,}951 < 1$

Sistema estável

Valor final (pelo teorema do valor final no domínio da variável z)

$$\lim_{k\to\infty} y_k = \lim_{z\to 1}\{(z-1)Y(z)\}$$

No caso de um degrau unitário

$$Y(z) = F(z)\frac{z}{(z-1)}$$

ou

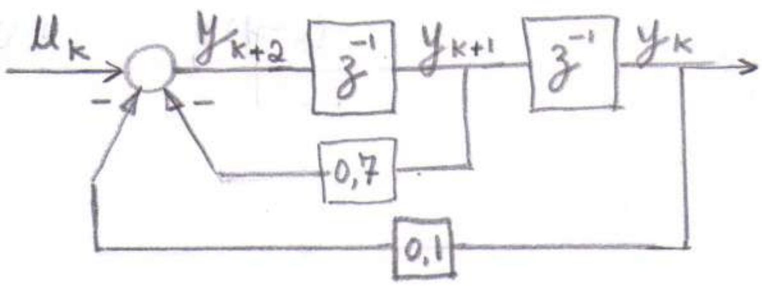
$$\lim_{k\to\infty} y(k) = \lim_{z-1}\left\{\cancel{(z-1)}\frac{0{,}095z}{z^2-1{,}81z+0{,}905}\frac{z}{\cancel{(z-1)}}\right\} = 1$$

Cap. 16   Prob. 5   Sol.

Equação de diferença dada

$$y(k+2) + 0,7y(k+1) + 0,1y(k) = u(k)$$

(a) $$y(k+2) = -0,7y(k+1) - 0,1y(k) + u(k)$$



(b) u_k = degrau unitario

$y_0 = 0 \quad y_1 = 0$

$k=0 \longrightarrow y_2 = 1$

$k=1 \longrightarrow y_3 = -0,7 + 0 + 1 = 0,3$

$k=2 \longrightarrow y_4 = -0,7\times 0,3 - 0,1\times 1 + 1 = 0,69$

$k=3 \longrightarrow y_5 = -0,7\times 0,69 - 0,1\times 0,3 + 1 = 0,487$

(c) $$(z^2 + 0,7z + 0,1)Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z^2+0,7z+0,1)(1-z)}$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z+0,2)(z+0,5)(z-1)}$$

Cap. 16 Prob. 5 Cont.

(d) Termo geral y_k

$$Y(z) = z\left[\frac{a}{z+0,2} + \frac{b}{z+0,5} + \frac{c}{z-1}\right]$$

$$a = \frac{1}{0,3(-1,2)} = \frac{-1}{0,36} \qquad b = \frac{1}{(-0,3)(-1,5)} = \frac{1}{0,45}$$

$$c = \frac{1}{(1,2)(1,5)} = \frac{1}{1,8}$$

Substituindo na expressão de $Y(z)$:

$$Y(z) = \frac{-z}{0,36(z+0,2)} + \frac{z}{0,45(z+0,5)} + \frac{z}{1,8(z-1)}$$

Obtendo a transformada inversa com auxílio da tabela 16.3 - p. 307

$$y(k) = -\frac{1}{0,36}(-0,2)^k + \frac{1}{0,45}(-0,5)^k + \frac{1}{1,8}(1)^k$$

Verificação:

para $k=0$ $\quad y(0) = -\frac{1}{0,36} + \frac{1}{0,45} + \frac{1}{1,8} = 0$

para outros valores de k

$$y(1) = 0$$
$$y(2) = 1$$
$$y(3) = 0,3$$
$$y(4) = 0,69$$

Cap. 16 Prob. 3 Sol.

(a) $y_k = +\frac{3}{4} y_{k-1} - \frac{1}{8} y_{k-2} + u_k$

$u_k = h(u_k) =$ degrau unitário

Todos os sinais são nulos para $k < 0$

Para qualquer $k \geq 0$, $u_k = 1$

(b) $k = 0 \rightarrow y_0 = \frac{3}{4} y_{(-1)} - \frac{1}{8} y_{(-2)} + u_0$

$y_0 = 1$

$k = 1 \rightarrow y_1 = \frac{3}{4} y_0 - \frac{1}{8} y_{-1} + u_1$

$y_1 = \frac{3}{4} + 1 = 1{,}75$

$k = 2 \rightarrow y_2 = \frac{3}{4} y_1 - \frac{1}{8} y_0 + u_2$

$y_2 = \frac{3}{4} 1{,}75 - \frac{1}{8} + 1 = 2{,}188$

Prosseguindo

$k = 3 \longrightarrow y_3 = 2{,}422$

$k = 4 \longrightarrow y_4 = 2{,}543$

$\vdots$

$\lim_{k \to \infty} y_k = \frac{8}{3} = 2{,}667$

Cap. 16 Prob. 1 Sol.

a) $x(k+2)+1{,}3x(k+1)+4x(k)=u(k)$

Condições iniciais: $x_0=0 \quad x_1=2$

$u(k)$ = impulso unitário:

para $k=0$, $u(k)=1$; para $k\neq 1$, $u(k)=0$

Aplicação do processo de recorrencia.

$$x(k+2)=-1{,}3x(k+1)-4x(k)+u(k)$$

$$k=0 \longrightarrow x(2)=-1{,}3x(1)-4x(0)+u(0)$$

$$x(2)=-1{,}3\times 2-4\times 0+1=-1{,}6$$

$$k=1 \longrightarrow x(3)=-1{,}3x(2)-4x(1)+u(1)$$

$$x(3)=-1{,}3\times(-1{,}6)-4\times 2+0=-5{,}92$$

$$k=2 \longrightarrow x(4)=-1{,}3\times x(3)-4\times x(2)+u(2)$$

$$x(4)=-1{,}3\times(-5{,}92-4\times(-1{,}6)+0=14{,}096$$

b) Transformada z, da equação de diferenças finitas dadas.

$$z^2X(z)-z^2x_0-zx_1+1{,}3(zX(z)-zx_0)+4X(z)=U(z)$$

Com $x_0=0$ e $x_1=2$ resulta

$$(z^2+1{,}3z+4)X(z)=2z+U(z)$$