

# Controle essencial

PAULO ALVARO MAYA  
FABRIZIO LEONARDI



Introdução ao Matlab  
no site de apoio do livro.



Companion  
Website

# Controle essencial

PAULO ALVARO MAYA  
FABRIZIO LEONARDI



São Paulo

Brasil Argentina Colômbia Costa Rica Chile Espanha Guatemala México Peru Porto Rico Venezuela



EDITORA AFILIADA

# Agradecimentos

Gostaríamos de agradecer aos inúmeros colegas que nos influenciaram durante nossa carreira. Este livro tem um pouco da didática e da experiência em sala de aula de cada um deles, co-autores anônimos que são desta obra. Muito obrigado.

Dedicamos esse trabalho a:

Dagmar, Claudia e Ana Cintia.

Paulo Alvaro Maya

Luigi, Chiara e Cimara.

Fabrizio Leonardi

# Sumário

Apresentação .....	XI
Prefácio.....	XIII
<b>Capítulo 1 Sistemas de controle: definição e generalidades .....</b>	<b>1</b>
1.1 Sistemas: definição e generalidades .....	1
1.2 Os modelos: modelo físico e modelo matemático.....	2
1.3 Sistemas de interesse do curso — classificação .....	4
1.4 Sistemas de controle com realimentação .....	5
1.5 Representação por diagramas de blocos.....	7
1.6 Simulação .....	8
1.7 Procedimento para o estudo de um sistema dinâmico .....	9
<b>Capítulo 2 Analogia e modelagem .....</b>	<b>13</b>
2.1 Sistemas análogos .....	13
2.2 Circuitos elétricos.....	13
2.3 Dualidade entre circuitos elétricos .....	15
2.4 Sistemas mecânicos de translação .....	15
2.5 Analogia entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos.....	16
2.6 Sistemas mecânicos de rotação .....	19
2.7 Engrenagens ideais.....	19
2.8 Sistemas eletromecânicos .....	21
2.9 Simulação analógica com amplificadores operacionais .....	25
<b>Capítulo 3 Transformada de Laplace.....</b>	<b>33</b>
3.1 Definição .....	33
3.2 Propriedades .....	34
3.3 Transformada inversa .....	34
3.4 Solução de equações diferenciais .....	36
<b>Capítulo 4 Função de transferência .....</b>	<b>41</b>
4.1 Definição de função de transferência.....	41
4.2 Definições adicionais — polos e zeros.....	43
4.3 Propriedades da função de transferência .....	43
4.4 Formas normais da função de transferência.....	45

<b>Capítulo 5</b>	<b>Diagramas de blocos .....</b>	<b>51</b>
5.1	Diagramas de blocos.....	51
5.2	Representação de um sistema por meio de diagramas de blocos .....	52
5.3	Reduções básicas .....	55
5.4	Exemplos de redução de diagramas de blocos .....	56
5.5	Fórmula de Mason .....	59
<b>Capítulo 6</b>	<b>Resposta dinâmica dos sistemas lineares.....</b>	<b>65</b>
6.1	Generalidades.....	65
6.2	Noções de estabilidade .....	66
6.3	Sinais típicos de ensaios.....	66
6.4	Dinâmica dos sistemas de 1 <sup>a</sup> ordem.....	67
6.5	Sistemas de 2 <sup>a</sup> ordem — classificação.....	72
6.6	Sistema superamortecido.....	72
6.7	Sistema criticamente amortecido.....	76
6.8	Sistema subamortecido.....	77
6.9	Sistema subamortecido de 2 <sup>a</sup> ordem dotado de um zero real.....	84
6.10	Sistema de 3 <sup>a</sup> ordem .....	87
6.11	Presença de zeros na função de transferência .....	90
6.12	Generalização — sistemas com mais de três polos .....	91
<b>Capítulo 7</b>	<b>Resposta em frequência .....</b>	<b>99</b>
7.1	Generalidades.....	99
7.2	Função senoidal de transferência .....	100
7.3	Fasores de entrada e saída.....	102
7.4	Representações gráficas da resposta em frequência.....	103
7.5	Escalas logarítmicas.....	104
7.6	Diagramas de Bode de funções de transferência simples .....	106
7.7	Resposta em frequência de um sistema com polos e zeros reais .....	110
7.8	Sistemas com polos complexos conjugados .....	113
7.9	Sistemas com polos e zeros reais e complexos .....	116
7.10	Sistemas de fase mínima e não mínima .....	118
<b>Capítulo 8</b>	<b>Estabilidade .....</b>	<b>123</b>
8.1	Estabilidade: definição e generalidades.....	123
8.2	Critério de estabilidade de Routh.....	125
8.3	Casos especiais .....	129
<b>Capítulo 9</b>	<b>Realimentação .....</b>	<b>137</b>
9.1	Efeitos da realimentação em sistemas de 1 <sup>a</sup> ordem.....	137
9.2	Efeitos da realimentação em sistemas de 2 <sup>a</sup> ordem.....	139
9.3	Realimentação em sistemas de controle.....	140
9.4	Tipos de sistemas .....	141
9.5	Erro estacionário e erro atuante.....	143
<b>Capítulo 10</b>	<b>Perturbação e sensibilidade .....</b>	<b>151</b>
10.1	Perturbação em sistemas de controle .....	151
10.2	Resposta a sinais de comando e de perturbação.....	152

10.3 Rejeição aos distúrbios .....	155
10.4 Sensibilidade .....	157
<b>Capítulo 11 Diagrama de Nyquist.....</b>	<b>163</b>
11.1 Diagramas polares e transformação $s \rightarrow A(s)$ .....	163
11.2 Trajetórias fechadas no plano $s$ .....	166
11.3 Critério de Nyquist .....	169
11.4 Análise da estabilidade .....	172
11.5 Estabilidade relativa .....	175
11.6 Robustez.....	180
11.7 Especificações em malha fechada .....	182
<b>Capítulo 12 Diagrama do Lugar das Raízes.....</b>	<b>187</b>
12.1 O método do Lugar das Raízes .....	187
12.2 Princípios do método do <i>LR</i> .....	188
12.3 Regras básicas de construção do <i>LR</i> .....	189
12.4 Refinamento e calibração do esboço do <i>LR</i> .....	193
12.5 Análise pelo diagrama do <i>LR</i> .....	199
<b>Capítulo 13 Projeto de compensadores .....</b>	<b>203</b>
13.1 Projeto de compensadores pelo método do Lugar das Raízes .....	204
13.2 Projeto de compensadores pelo método da resposta em frequência.....	223
<b>Capítulo 14 Espaço de estados .....</b>	<b>237</b>
14.1 O modelo de estados — definições.....	237
14.2 Equações de estado e de saída .....	238
14.3 Critérios de escolha das variáveis de estado .....	241
14.4 Vantagens da representação de estado .....	246
14.5 Equações de estado e de saída no domínio da frequência.....	248
14.6 Modelo de estados e diagramas de blocos .....	249
14.7 Matriz de transição de estado .....	250
14.8 Resposta no domínio da frequência.....	252
14.9 Notação de Bellman .....	255
14.10 Solução da equação de estado no domínio do tempo .....	260
<b>Capítulo 15 Realimentação de estados .....</b>	<b>265</b>
15.1 Transformação linear das variáveis de estado.....	265
15.2 Transformação das equações de estado e de saída.....	266
15.3 Matriz $A$ diagonalizada .....	268
15.4 Diagonalização da matriz do sistema — autovetores.....	269
15.5 Outros casos de transformações .....	272
15.6 Controlabilidade e observabilidade.....	275
15.7 Realimentação de estados .....	280
15.8 Projeto de controladores .....	281
15.9 Projeto de controle integral .....	284
15.10 Fórmula de Ackermann.....	286
15.11 Observadores de estados.....	287
15.12 Projeto de observadores .....	289

# Prefácio

Este livro se propõe a ser um primeiro curso de controle, focalizando essencialmente os sistemas lineares, em sua versão clássica e moderna (modelo de estados) e noções de sistemas de tempo discreto. Trata-se de um livro didático sobre sistemas de controle dotados de realimentação. Destina-se especialmente aos alunos que se iniciam neste assunto de fundamental importância em amplos setores do conhecimento humano, nas ciências em geral, engenharia, economia, biologia e em tantas outras especialidades que requerem algum conhecimento do assunto. O texto pressupõe familiaridade com um primeiro curso de cálculo, números complexos e o básico em análise de circuitos e mecânica clássica, e sobre, como dito, os controles clássico e moderno e uma introdução aos sistemas de tempo discreto. Os autores pretendem apresentar um curso focalizando a parte essencial a um primeiro estudo sobre controle evitando que o texto se tornasse muito volumoso e permitindo que praticamente todo o material pudesse ser abordado em um curso de 80 horas (por exemplo, dois semestres com quatro aulas semanais). Nosso objetivo final é que o estudante adquira ideias claras sobre o funcionamento dos sistemas com realimentação, sobre as principais aplicações e princípios de projeto.

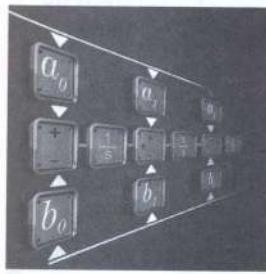
O texto foi usado durante alguns anos em cursos de controle em várias faculdades de engenharia, tendo sido trabalhado praticamente na íntegra. Quanto à parte matemática, as demonstrações foram, quando possível, simplificadas e as mais complicadas excluídas. Os conceitos e as definições (realimentação, estabilidade, resposta em frequência etc.) foram cuidadosamente apresentados e ilustrados por meio de exemplos. A parte de programação via Matlab não foi explicitamente incluída no texto, mas ficará disponível no site do livro. Há um grande número de problemas resolvidos no próprio texto e outros tantos a serem resolvidos. Tentamos criar um texto didático, com linguagem simples e objetiva, possibilitando ao aluno estudar sozinho.

Os aspectos essenciais podem ser resumidos como segue:

- Matemática na dose certa para os cursos de engenharia.
- Conteúdo essencial para um primeiro curso.
- Vários exemplos e problemas propostos.
- Didatismo (com linguagem simples, possibilita ao aluno estudar sozinho).
- Engloba controle clássico, controle moderno e uma introdução aos sistemas de tempo discreto.
- O Matlab é apenas um pano de fundo, pois não se trata de um livro de Matlab.

O livro possui 16 capítulos. O primeiro é uma introdução ao assunto central: os sistemas de controle (automático) com realimentação. Alguns exemplos e uma representação desses sistemas com auxílio de diagramas de blocos descriptivos permitem situar o leitor para a caminhada que se segue. O segundo e o terceiro capítulos abordam ainda temas preliminares: o segundo é uma introdução à modelagem de sistemas, focalizando especialmente sistemas elétricos e mecânicos; a modelagem é de *per si* um importante capítulo da engenharia e poderia ser um capítulo introdutório também a esse tema; o terceiro é uma apresentação da transformada de Laplace do ponto de vista operacional com exemplos resolvidos e uma boa coleção de exercícios. Os capítulos quatro ao oito constituem, por assim dizer, um curso de dinâmica dos sistemas LIT (Lineares Invariantes no Tempo), onde se faz (Capítulo 4) um estudo bastante completo da função de transferência de um sistema, suas propriedades e formas de apresentação. Na sequência (Capítulo 5), um estudo dos diagramas de blocos, seus

# capítulo 1



## Sistemas de controle: definição e generalidades

Como introdução a um curso de controle, este capítulo se propõe a lançar as bases do assunto, incluindo alguma motivação para esse estudo. Assim, inicia-se o capítulo com uma apresentação dos sistemas em geral, com vários exemplos, classificação dos mesmos e de sua representação por modelos. Depois, definem-se os sistemas de controle, particularmente

os sistemas de controle com realimentação, bem como sua representação por meio de diagramas de blocos (descritivos). São apresentadas, ainda, noções sobre a simulação dinâmica dos sistemas. Finalmente há uma informação sobre os procedimentos gerais necessários para a análise, além de projeto dos sistemas de controle.

### 1.1 Sistemas: definição e generalidades

Este trabalho destina-se ao estudo dos *sistemas de controle com realimentação*. Eles são de enorme importância científica, tecnológica e econômica. Suas aplicações são intensivas nas telecomunicações, nos transportes, em navegação, nos processos industriais, na pesquisa científica, na biologia, na medicina, em astronomia, nas viagens espaciais e em tudo mais que se possa imaginar.

Mas o que vem a ser um sistema de controle com realimentação?

Bem, começemos por saber o que é um *sistema* e o que são seus *modelos*.

Em sentido amplo, define-se *sistema* como sendo um conjunto de elementos que se relacionam e que de alguma forma interagem uns com os outros. Eventualmente, também interagem com elementos do meio exterior, isto é, com elementos não pertencentes ao sistema. Como exemplo, podemos citar o *sistema solar*, cujos elementos são os astros que exercem ações entre si e com o resto do universo, de acordo com as leis da física em geral, e da mecânica celeste em particular.

Em ciência e em outras atividades, como engenharia, economia, administração etc., costuma-se estabelecer um conceito de *sistema* de forma mais restrita, como sendo *um conjunto de elementos selecionados e organizados que interagem no sentido de alcançar um ou mais objetivos determinados*.

Note que, em qualquer caso, a definição é sempre muito ampla, pois se refere a um conjunto de elementos que podem ser realizados das formas mais diversas. Podem ser tanto objetos físicos como abstrações matemáticas, leis jurídicas, moedas, princípios de economia, células vivas, pessoas etc. Os elementos de um sistema podem ser, inclusive, outros sistemas, que, nesse contexto, são denominados subsistemas. Essa generalidade permite desde logo classificar os sistemas de acordo com a natureza dos elementos que os integram. Assim, há os sistemas físicos, jurídicos, monetários, biológicos etc.

Os sistemas que especialmente nos interessam neste estudo são os *sistemas físicos*, isto é, aqueles cujos elementos são objetos reais. Não obstante, a teoria aqui desenvolvida é de grande generalidade e válida para quase todos os casos.

Vejamos a seguir dois exemplos muito simples de sistemas físicos.

**Exemplo 1.1**

Uma agulha, uma rolha e um copo com água constituem um conjunto de elementos (objetos físicos), mas não formam um sistema. Contudo, se a agulha for espetada na rolha e esta for posta a flutuar de forma equilibrada na água do copo, o conjunto adquire uma finalidade, forma um sistema (uma bússola), capaz de indicar a direção norte-sul do meridiano magnético do lugar. Experimente!

**Exemplo 1.2**

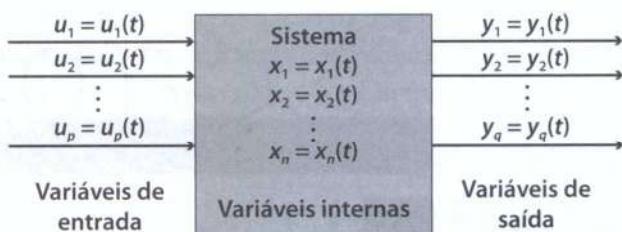
Dois fios, uma pilha e uma lâmpada soltos em cima de uma mesa não formam um sistema. Mas se a lâmpada for convenientemente ligada à pilha por meio dos dois fios de modo que a lâmpada acenda, teremos um pequeno sistema de iluminação.

Esses exemplos mostram que dispositivos comuns, como circuitos elétricos, dispositivos mecânicos, motores, geradores etc., já, eventualmente, do conhecimento do leitor, podem ser considerados como sistemas. Entretanto, há métodos próprios para tratar os sistemas como tais, e a vantagem em utilizá-los aumenta à medida que aumenta o seu grau de complexidade.

O comportamento de um sistema depende de ações ou influências que provêm de fora do sistema. Tais influências externas são denominadas entradas ou excitações e são representadas por grandezas chamadas variáveis de entrada. Por outro lado, o comportamento dos elementos do próprio sistema é descrito por grandezas denominadas variáveis internas do sistema. Algumas dessas grandezas podem ser observadas ou mesmo utilizadas externamente e caracterizam as ações do sistema sobre o resto do universo. Essas são as saídas ou resposta do sistema.

Nos sistemas físicos, tanto as entradas como as grandezas internas de interação e as de resposta do sistema são forças, tensões elétricas ou outras grandezas físicas que podem ser medidas e representadas matematicamente por variáveis em funções do tempo. Temos assim variáveis de entrada ou de excitação ( $u_1(t)$ ,  $u_2(t)$ , ...,  $u_p(t)$ ), variáveis internas ( $x_1(t)$ ,  $x_2(t)$ , ...,  $x_n(t)$ ) e variáveis de saída ou de resposta ( $y_1(t)$ ,  $y_2(t)$ , ...,  $y_q(t)$ ) do sistema. A Figura 1.1 mostra a representação convencional de um sistema por meio de um bloco (um retângulo), as diversas ações de entrada e saída por meio de setas, bem como as variáveis internas, designadas  $x_i(t)$ .

Quando estudamos um sistema, estamos basicamente interessados em saber as relações de causa e efeito que existem entre determinadas entradas e saídas desse sistema.

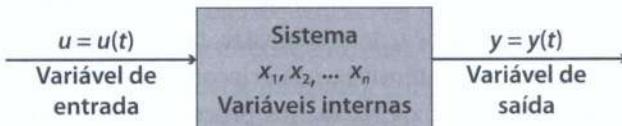


**Figura 1.1** Sistema de entradas e saídas múltiplas.

Por exemplo, em um estudo sobre o comportamento dinâmico de um automóvel considerado como sistema físico, as entradas podem ser a força sobre o pedal do acelerador, e a posição angular da direção e as saídas podem ser a velocidade, o ângulo de avanço em relação ao eixo da estrada, bem como a distância percorrida.

Inicialmente, estudaremos os casos mais simples de sistemas que possuem apenas uma entrada e uma saída (Figura 1.2). Esse tipo de sistema é habitualmente denominado *sistema escalar*. Às vezes, são também designados pela sigla ‘siso’, do inglês *single input single output*.

Da mesma forma, os sistemas com entradas e saídas múltiplas são denominados sistemas vetoriais ou são designados pela sigla MIMO, também do inglês, *multiple input multiple output*.



**Figura 1.2** Sistema de entradas e saídas únicas.

## 1.2 Os modelos: modelo físico e modelo matemático

Os sistemas físicos reais são sempre muito ricos em detalhes e pormenores, o que torna difícil seu estudo. Além disso, o estudo que se deseja fazer de um sistema aborda sempre um aspecto particular de seu comportamento e não envolve todos os seus pormenores construtivos. Então, não se estuda diretamente o sistema real, mas sim o que se denomina um modelo físico dele. *Modelo físico ou descriptivo de um sistema: é um sistema ideal que inclui apenas os aspectos relevantes do sistema dado, de interesse para o estudo que se deseja fazer.*

**Exemplo 1.3**

Para a análise do comportamento de um automóvel quanto à sua suspensão, não é necessário considerar, por exemplo, detalhes do sistema elétrico. Basta considerar o carro reduzido a um bloco com massa e centro de gravidade adequados, apoiado em molas e amortecedores que representem a suspensão propriamente dita mais a massa das rodas e a elasticidade dos pneus, conforme mostra a Figura 1.3. O modelo pode ser mais ou menos aprimorado, conforme os detalhes que inclua. Por exemplo: o bloco que representa o automóvel pode ser considerado rígido somente em primeira aproximação. Uma análise mais cuidadosa deve incluir as deformações desse bloco supondo, por exemplo, que ele seja composto de dois ou três blocos menores rígidos, mas articulados entre si por meio de molas e amortecedores convenientes.

Do que foi dito, torna-se evidente um aspecto essencial da modelagem de um sistema: a complexidade do modelo a ser considerado depende essencialmente da natureza e da precisão do estudo que se deseja fazer referente ao comportamento do sistema. No exemplo dado, o modelo de automóvel é inteiramente diverso do que seria utilizado para estudar o sistema de tração, em que deveriam ser representadas as características do motor, eixos, engrenagens etc.

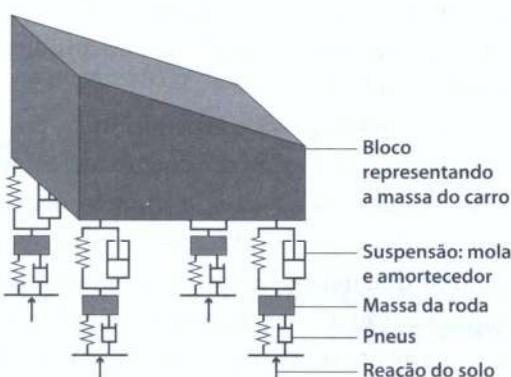
Para o estudo quantitativo de um sistema, a partir do modelo físico, deve-se obter o *modelo matemático*. O *modelo matemático* é constituído pelas equações que descrevem o comportamento dinâmico do modelo físico. O modelo matemático de um sistema pode ser apresentado de várias formas. A forma básica é constituída pelas equações diferenciais ou íntegro-diferenciais que resultam diretamente da aplicação das leis físicas

que governam a dinâmica do modelo considerado. Outras formas mais elaboradas, como as funções de transferência, baseadas na transformação de Laplace, ou os modelos vetoriais de estado, baseados no conceito de variáveis de estado, são também muito utilizadas. Na literatura técnica, quando se fala no modelo de um sistema, está-se referindo, em geral, ao modelo matemático e não ao modelo físico que lhe serve de base.

Na verdade, a construção de modelos de sistemas integra uma disciplina à parte, chamada modelagem. Envolve além de um estudo preliminar criterioso, medidas experimentais, critérios de avaliação, dados estatísticos, consultas a fabricantes de equipamentos etc., até que se consiga um modelo físico adequado. Baseado no modelo físico ou descritivo do sistema, estabelece-se, então, o seu modelo matemático, que, como vimos, são as equações que descrevem o comportamento dinâmico do modelo físico.

Resumindo, a partir do modelo descritivo é que podemos passar ao modelo que realmente permite a análise do comportamento do sistema, que é o modelo matemático. A modelagem é, pois, um processo que inclui basicamente dois estágios: um de abstração e outro de formalização. O primeiro leva-nos do mundo real à idealização de um modelo abstrato que deve ser suficientemente simples para poder ser facilmente interpretado e suficientemente detalhado para fornecer resultados confiáveis na área de interesse do estudo que se deseja fazer. A idealização do modelo descritivo é inferida por meio da observação de medidas experimentais, bem como da experiência e intuição do modelador. O segundo estágio consta da formalização matemática do comportamento do sistema. Chega-se, assim, a estabelecer um sistema de equações diferenciais ordinárias (ou mesmo equações diferenciais parciais ou, ainda, equações de diferenças finitas) que constituem o modelo matemático do sistema. As variáveis que aparecem nessas equações, além das variáveis de entrada e de saída, podem ser denominadas, genericamente, variáveis internas ou configuração do sistema.

Para que o modelo formal de um sistema tenha validade e seja confiável, ele deve ser complementado por um processo de verificação, ou seja, o modelo deve ser programado, simulado, analisado e comparado com resultados conhecidos do comportamento do sistema real. Esse processo é denominado *validação* do modelo.



**Figura 1.3** Exemplo de modelo físico.

### 1.3 Sistemas de interesse do curso — classificação

A classificação dos sistemas pode ser feita segundo vários critérios, dependendo do objetivo que se tem em mente. Já vimos que, de acordo com a natureza dos elementos que os compõem, os sistemas podem ser classificados em várias categorias, como sistemas físicos, econômicos, sociais, biológicos, ecológicos etc. Podem ser classificados também como sistemas escalares e vetoriais, conforme tenham, respectivamente, entrada e saída únicas (sistema ‘siso’) ou múltiplas entradas e múltiplas saídas (sistema ‘mimo’).

Alguns sistemas são suscetíveis de tratamento quantitativo. Outros não. Nos primeiros, as variáveis são quantificáveis e as relações entre elas podem ser expressas analiticamente. Nos sistemas que não podem ser estudados matematicamente, as variáveis são qualitativas. Os sistemas físicos, que nos interessam particularmente neste trabalho, constituem um exemplo dos que permitem tratamento matemático.

A seguir faremos algumas considerações sobre importantes critérios de classificação dos sistemas físicos, que facilitarão o desenvolvimento e a compreensão deste curso.

#### ■ 1.3.1 Sistemas lineares e não lineares

*Sistemas lineares* são aqueles para os quais valem os princípios da homogeneidade e da superposição dos efeitos. Segundo esses princípios, o sistema deve satisfazer às duas condições seguintes:

- Se a resposta do sistema a uma excitação  $u_1(t)$  for  $y_1(t)$ , a resposta a uma excitação  $m$  vezes maior,  $m u_1(t)$ , deve ser também  $m$  vezes maior, ou seja,  $m y_1(t)$  (Princípio da homogeneidade).
- Se a resposta do sistema à excitação  $u_1(t)$  for  $y_1(t)$  e a resposta a uma outra excitação  $u_2(t)$  for  $y_2(t)$ , então a resposta à soma das excitações,  $u_1(t) + u_2(t)$ , será igual à soma das respostas respectivas,  $y_1(t) + y_2(t)$ . (Princípio da superposição dos efeitos).

Matematicamente, os modelos dos sistemas lineares são constituídos por equações (diferenciais e algébricas) lineares.

Os sistemas que não obedecem aos dois princípios enunciados são denominados sistemas não lineares.

Aqui, cabe uma observação importante: todos os sistemas reais são não lineares. Eles podem se compor-

tar como lineares apenas dentro de certos limites. No caso da eletrônica, o que denominamos amplificador linear (um amplificador operacional, por exemplo), ilustra bem esse fato. A tensão de saída do amplificador é inicialmente proporcional à tensão de entrada, o que significa um comportamento linear. Mas se a tensão de entrada aumenta além de certo valor, a tensão de saída deixa de aumentar, permanecendo constante. Diz-se que a saída fica saturada. A saturação é um fenômeno tipicamente não linear. Um exemplo simples de natureza mecânica é o de uma mola, cuja deformação é proporcional à força aplicada (lei de Hook). Entretanto, se a força aplicada ultrapassar determinado limite, a mola apresentará deformações permanentes, isto é, deformações que permanecem mesmo depois da retirada da força deformadora. O sistema deixou de ser linear.

Então, na prática, esses sistemas podem ser considerados lineares desde que permaneçam dentro da ‘janela de linearidade’. Dentro desses limites, eles ficam representados por um modelo linear.

#### ■ 1.3.2 Sistemas estáticos, ou instantâneos, e sistemas dinâmicos

*Sistemas estáticos*, ou *instantâneos*, são sistemas que respondem instantaneamente à excitação aplicada, sendo que a resposta não depende das condições anteriores à aplicação da excitação (condições iniciais). Por isso, também são denominados sistemas de memória nula. É o caso dos circuitos puramente resistivos. O circuito da figura é um exemplo, em que se tem um resistor de  $1\ \Omega$  que pode ser ligado a uma bateria de  $1\ V$  por meio de uma chave. A partir do instante em que a chave é ligada, a corrente no circuito passa a ser de  $1\ A$ , independentemente da corrente que estivesse passando no resistor antes do fechamento da chave.

*Sistemas dinâmicos* são sistemas que possuem memória, isto é, seu comportamento depende das condições iniciais. Nesse caso, o modelo matemático sempre inclui equações diferenciais. Em oposição aos sistemas dinâmicos, temos os sistemas estáticos, cujas equações são apenas de natureza algébrica. Um circuito puramente resistivo é exemplo de um sistema estático. Um circuito indutivo  $LR$ -série, por sua vez, descrito pela equação  $Ri + L(di/dt) = v(t)$ , é um sistema dinâmico.

### ■ 1.3.3 Sistemas de parâmetros concentrados e sistemas de parâmetros distribuídos

Denominam-se parâmetros de um sistema as grandezas que representam propriedades dos elementos desse sistema. Por exemplo, em um sistema mecânico, a massa de um móvel ou a constante elástica de uma mola pertencente ao sistema comparecem como parâmetro do sistema nas equações de seu modelo matemático. No caso de um circuito elétrico, as resistências, indutâncias, capacitâncias etc. são parâmetros do sistema.

*Sistemas de parâmetros concentrados* são aqueles cujos parâmetros descrevem propriedades concentradas em pontos bem definidos do sistema (e não distribuídas ao longo de todo ou de parte dele). Por exemplo, no caso de um indutor fisicamente constituído por uma bobina de cobre com núcleo de ferro, os parâmetros essenciais para estudo do comportamento desse sistema são a indutância e a resistência elétrica do dispositivo. O modelo descritivo é habitualmente o que está representado na Figura 1.4, na qual se vê a resistência concentrada junto à extremidade esquerda da figura e a indutância do lado direito. Embora na realidade não se tenha essa concentração de parâmetros, pois tanto a indutância quanto a resistência estão distribuídas ao longo de todas as espiras do indutor, o modelo funciona bem para uso em circuitos comuns. Isso, entretanto, não ocorre sempre. Em certos casos, como em uma longa linha de transmissão, não se pode concentrar a resistência da linha em uma extremidade e a indutância na outra sem prejuízo do estudo dos fenômenos que ocorrem ao longo da linha. Devemos ter aí um *modelo de parâmetros distribuídos*.



Modelo de parâmetros concentrados de um indutor.

Figura 1.4

parte dos sistemas físicos, dentro dos limites das aplicações técnicas, é assim.

*Sistemas variantes no tempo, ou sistemas de parâmetros variáveis*, são aqueles, como o próprio nome indica, cujos parâmetros se alteram com o decorrer do tempo. Um exemplo clássico são os foguetes e os mísseis, cuja massa se altera com a queima de combustível. Outro exemplo é o dos móveis que atingem grandes velocidades, próximas da velocidade da luz, pois então a massa relativística cresce com a velocidade.

Observe que os sistemas que vamos estudar inicialmente são sistemas lineares, dinâmicos, de parâmetros concentrados e invariantes no tempo. Adotando o costume generalizado de usar siglas, denominaremos esses sistemas por *sistemas LIT* (Figura 1.5). O *L* é de linear, primeira propriedade da sequência que caracteriza os sistemas; *IT* são as iniciais de invariante no tempo, que é a última propriedade da sequência.

Além disso, o modelo matemático dos sistemas *LIT* de entrada e saída únicas pode ser sempre reduzido a uma única equação diferencial linear, ordinária, de coeficientes constantes, nas variáveis de entrada e de saída:

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n \frac{d^n y}{dt^n} + q_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + q_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + q_1 \frac{dy}{dt} + q_0 y(t) = \\ p_m \frac{d^m u}{dt^m} + p_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \dots + p_2 \frac{d^2 u}{dt^2} + p_1 \frac{du}{dt} + p_0 u(t) \end{array} \right.$$

Não se esqueça, ainda, de que dois sistemas diferentes que possuem o mesmo modelo matemático são denominados *sistemas análogos*.

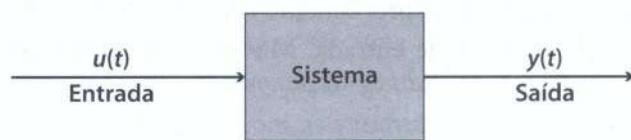


Figura 1.5 Sistema *LIT* de entrada e saída únicas.

### ■ 1.3.4 Sistemas invariantes no tempo e sistemas de parâmetros variáveis

*Sistemas invariantes no tempo* são aqueles cujos parâmetros (*R*, *L*, *C*, nos circuitos elétricos etc.) são constantes, isto é, não variam com o tempo. Grande

## 1.4 Sistemas de controle com realimentação

Já sabemos o que é um sistema. Vejamos agora o que se entende por sistema de controle com realimentação.

Genericamente, denomina-se *sistema de controle* aquele que tenta impor às variáveis de saída um determinado comportamento, cuja referência está de alguma forma contida nas variáveis de entrada.

Os sistemas de controle ‘com realimentação’ caracterizam-se, ainda, pelo fato de a variável de saída ser comparada continuamente com a referência, contida na variável de entrada, a fim de detectar e corrigir eventuais desvios do comportamento previsto para o sistema. Por isso, as variáveis de entrada são também denominadas variáveis de referência do sistema de controle. As de saída são as variáveis controladas. Um diagrama esquemático, típico de um sistema com realimentação, está indicado na Figura 1.6.

Os sistemas de controle com realimentação podem ser essencialmente classificados em:

- **Sistema regulador:** a variável de saída deve manter um valor constante, igual ou proporcional ao valor de referência da variável de entrada. São comuns os reguladores de velocidade, de temperatura, de nível líquido em um reservatório etc.
- **Sistemas rastreadores ou de perseguição (tracking systems):** as variáveis de saída devem seguir ou acompanhar as variáveis de entrada. São exemplos, os servomecanismos, os sistemas que procuram perseguir um alvo móvel ou uma posição variável de referência.

Os sistemas de controle dotados de realimentação são denominados também (por motivos óbvios) *sistemas de controle de malha fechada* (ver Figura 1.6). Existem também sistemas de controle de malha aberta (isto é, sem realimentação). Nesse caso, o comportamento desejado da variável de saída é, em geral, programado previamente em função do tempo ou de variáveis de entrada. Mas esses sistemas não

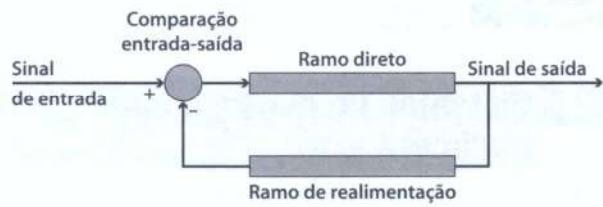


Figura 1.6 Diagrama esquemático de um sistema com realimentação.

reagem a uma eventual perturbação que altere o bom andamento das variáveis de saída.

Veja a comparação entre sistemas de controle programados e sistemas de controle com realimentação:

- **Sistema programado:** sistema de pontaria de uma luneta fixa em terra firme, para acompanhar a posição de uma estrela. Uma vez que a Astronomia permite determinar com exatidão posição da estrela em cada instante, o sistema pode ser programado para posicionar a luneta em função do tempo.
- **Sistema de controle em malha fechada:** sistema de pontaria de uma luneta situada em uma base móvel (em uma boia em alto-mar, por exemplo) para rastrear a posição de uma estrela. Os desvios de pontaria da luneta devidos às ondas são detectados com auxílio da realimentação e corrigidos pelo sistema.

A seguir damos como exemplo de um sistema de controle simples, o caso de um gerador de corrente contínua (c.c.), cuja tensão de saída deve permanecer constante em 100 volts. Trata-se de um regulador de tensão.

### Caso 1

Na Figura 1.7, temos o funcionamento em malha aberta: o operador simplesmente ajusta o reostato de campo do dinâmo para que ele produza inicialmente os 100 volts com o gerador sem carga. Mas se for ligada uma carga nos terminais do gerador (lâmpadas ou uma resistência de aquecimento, por exemplo), haverá circulação de uma corrente no circuito de armadura do dinâmo e, em consequência, uma diminuição da tensão de saída (digamos que caia, por exemplo, para 90 volts). Como o operador não tem meios de saber que houve essa queda de tensão, por não ter informações sobre o que se passa na saída do gerador, a tensão não é corrigida (e permanece em 90 V em vez de 100 V, como mostra a linha que representa a tensão fornecida pelo gerador).

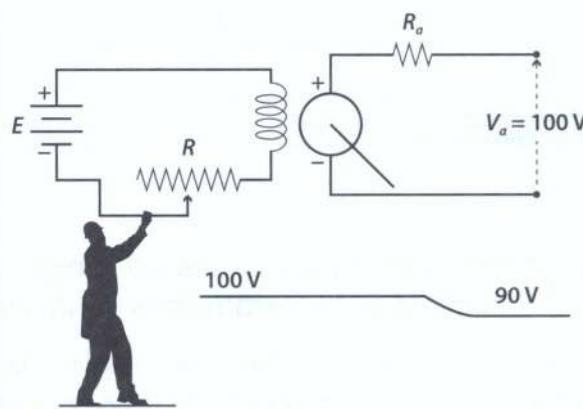


Figura 1.7 Sistema de malha aberta com operador.

## Caso 2

Já no caso da Figura 1.8, foi acrescentado ao sistema do exemplo anterior um voltímetro que mostra ao operador o valor da tensão de saída do dínamo. Se houver alteração dessa tensão em relação aos 100 V desejados, o operador detectará o erro e poderá mudar a posição do cursor do reostato de forma a corrigir o erro, fazendo com que a tensão volte a ser os 100 volts desejados. Essa informação, que vai da saída para a entrada do sistema, possibilitada, neste exemplo, pela existência do voltímetro, constitui o que se denomina realimentação do sinal de saída. Ela possibilita ao operador a detecção do erro e a ação de agir sobre o reostato para corrigir esse erro. Nota-se que a ação sobre o reostato exige um dispêndio de energia do operador que não está contida no sinal de erro. Isto é, o operador funciona como detector de erro e também como amplificador do sinal de erro. O sinal de entrada ou de referência (100 V, no caso) também fica a cargo do operador; está contido em sua memória. Temos aí um exemplo de um sistema de controle em malha fechada manual, isto é, dotado de operador.

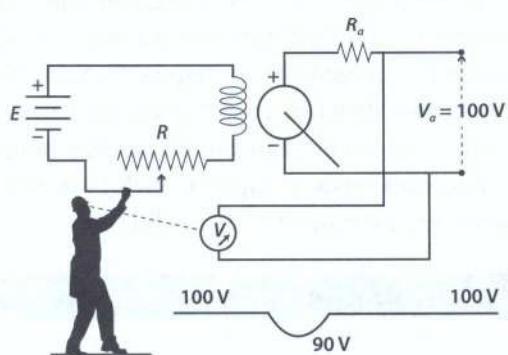


Figura 1.8

Sistema de controle de malha fechada com operador.

## Caso 3

No sistema representado na Figura 1.9, por sua vez, não há necessidade de operador. A realimentação, a detecção de erro e o ajuste de tensão são feitos automaticamente pelo próprio sistema. Seu funcionamento pode ser facilmente compreendido por meio de uma análise cuidadosa da figura.

Note que a referência da tensão de saída é dada por um diodo Zener de 20 V. Essa tensão de referência é a variável de entrada. Com auxílio de um circuito em ponte, pode-se detectar o erro da tensão de saída, em relação aos 100 V prefixados. O erro é proporcional à tensão de erro ( $V_E$ ), que aparece nos terminais da ponte.

Essa tensão  $V_E$  é amplificada, e a saída do amplificador é ligada no circuito de campo do gerador em série com a tensão  $E$ , de uma fonte de tensão independente. Se a tensão de saída do dínamo diminuir, caindo abaixo de 100 V, a tensão de erro  $V_E$  tem polaridade adequada para fazer com que a corrente do circuito de campo aumente. Em consequência, aumenta também a tensão de saída do dínamo, tendendo a recuperar os 100 V.

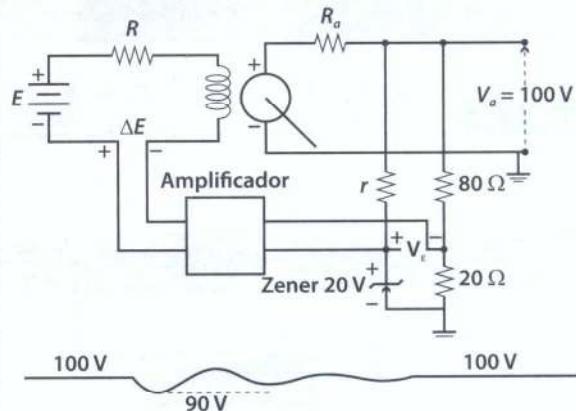


Figura 1.9 Sistema de controle de malha fechada sem operador (controle automático).

Se a tensão do gerador aumentar, a correção se faz em sentido contrário, tendendo sempre a recuperar os 100 V.

Nessa dinâmica, a volta da tensão de 100 V pode ocorrer de forma gradual, sem oscilações, ou pode fazer-se por meio de oscilações amortecidas, em torno dos 100 V. Há casos, porém, em que essas oscilações são crescentes em vez de atenuadas. Esse comportamento caracteriza a instabilidade do sistema que, nessas condições, não tem possibilidade de funcionar como regulador.

A instabilidade é um dos mais sérios problemas que afetam os sistemas de controle automático. Técnicas importantes foram desenvolvidas para prever e eliminar ou controlar as causas de instabilidade nos sistemas com realimentação.

Os sistemas das figuras vistas anteriormente estão representados por meio de diagrama de blocos funcionais nas figuras 1.10, 1.11 e 1.12.

## 1.5 Representação por diagramas de blocos

É muito útil a representação de sistemas por meio de diagramas de blocos descritivos ou qualitativos. Tais diagramas são uma extensão ou detalhamento da representação gráfica de um sistema por um retângulo com as variáveis de entrada e de saídas indicadas por meio de setas, apresentados nas figuras 1.1 e 1.2, no início do capítulo. Para efeito de representação por meio de diagramas de blocos, é conveniente considerar o sistema formado por subsistemas bem individualizados, assim como indicar as funções de cada um e as interligações entre eles. A Figura 1.10, por exemplo, é o diagrama de blocos do sistema de malha aberta a que se refere a Figura 1.7. Já os diagramas das figuras 1.11 e 1.12 representam

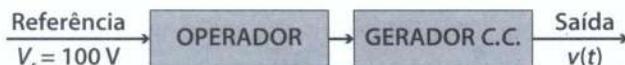


Diagrama de blocos do sistema de malha aberta com operador, mostrado na Figura 1.7.

**Figura 1.10**

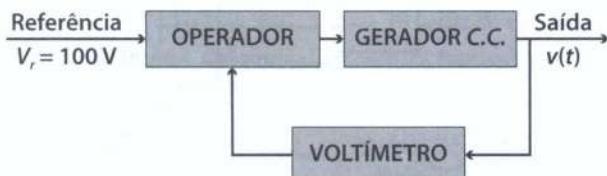


Diagrama de blocos do sistema de controle de malha fechada com operador, mostrado na Figura 1.8.

**Figura 1.11**



Diagrama de blocos do sistema de controle automático de malha fechada, mostrado na Figura 1.9.

**Figura 1.12**

os sistemas de malha fechada do regulador de tensão das figuras 1.8 e 1.9, respectivamente. As figuras são autoexplicativas e caracterizam bem o conceito de realimentação.

A Figura 1.13, a seguir, apresenta o caso geral de um sistema de controle. Nesses sistemas há sempre um dispositivo cuja saída se quer de alguma forma controlar. Esse dispositivo é o elemento do sistema que desenvolve maior potência. Ele é comandado por outros componentes de potência menor, mas que incluem necessariamente um amplificador e que são

os elementos de controle. Esses elementos de controle, em conjunto, formam o controlador do sistema. Assim, no caminho direto que vai da entrada para a saída, além do detector de erro, temos o controlador e o dispositivo de saída, o qual é denominado, genericamente, sistema controlado. Este último, conforme o tipo de aplicação, é, às vezes, chamado simplesmente de atuador, quando se trata de uma máquina, por exemplo, ou processo, ou planta (palavra mal traduzida do inglês, que quer dizer oficina, instalação), no caso de uma indústria etc. O ramo de realimentação que vai da saída para o detector de erro é constituído por circuitos incluindo transdutores, sensores ou simplesmente medidores.

No exemplo anterior (ver Figura 1.9), o controlador se reduz essencialmente aos amplificadores de tensão e potência, que atuam sobre a tensão de erro  $V_e$ , que é a saída do comparador. No exemplo, o detector de erro é um circuito em ponte, contendo em um dos ramos um diodo Zener, que fornece a tensão de referência  $V_r$ . A realimentação aqui é formada por um simples divisor de tensão, cujos resistores fazem parte do circuito em ponte. Em outros casos, a realimentação pode ser mais complexa, incluindo sensores, transdutores, instrumentos de medida etc.

## 1.6 Simulação

A simulação que nos interessa neste curso procura reproduzir, de alguma forma, o comportamento dinâmico de um sistema real existente ou projetado. Isso pode ser feito de várias formas. Podem ser utilizados modelos físicos do sistema, por exemplo, modelos em escala reduzida. No estudo do comportamento aerodinâmico dos aviões, é muito comum a utilização desses modelos em túneis de vento. Esse tipo de simulação é denominado simulação física. Outra possibilidade é utilizar um sistema análogo ao

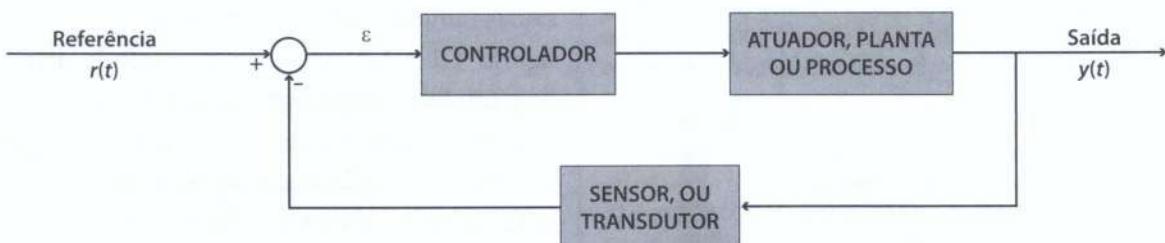


Diagrama de blocos típico de um sistema de controle com realimentação.

**Figura 1.13**

sistema em estudo. Dois sistemas de naturezas físicas diferentes são análogos quando possuem o mesmo modelo matemático. Construindo-se, por exemplo, um circuito elétrico (que é fácil de ser montado) análogo a um sistema mecânico, pode-se determinar o comportamento deste último sistema, interpretando-se convenientemente o comportamento do sistema elétrico. Uma simulação desse tipo é denominada simulação analógica. Finalmente, o comportamento do sistema pode ser obtido pela simples resolução das equações que constituem o seu modelo matemático. A integração dessas equações pode ser feita analítica ou numericamente, por meio de um computador digital. Nesse caso, temos a simulação simbólica, que pode ser analítica ou numérica. A simulação analítica é trabalhosa, cresce muito em complexidade com a ordem do sistema e, em muitos casos, é praticamente inviável. Já a solução numérica das equações que representam o modelo matemático do sistema pode ser obtida com facilidade, mesmo em sistemas de grande complexidade, com o emprego de computadores digitais, dada a enorme capacidade de cálculo dessas máquinas eletrônicas.

As principais aplicações da simulação são as seguintes:

- Reproduzir o comportamento dinâmico do modelo de um sistema (ou de um fenômeno), em casos particulares bem conhecidos, de forma a obter, por comparação de resultados, a validação e/ou o aperfeiçoamento do modelo matemático usado na simulação.
- Confirmar aspectos conhecidos do comportamento de um sistema (ou de um fenômeno) e aprofundar o conhecimento acerca dele, verificando e pesquisando aspectos menos aparentes ou mesmo inacessíveis à experiência e à observação.
- Prever consequências de uma nova teoria.
- Permitir a alteração de sistemas para efeito de melhoria, ou mesmo de otimização de seu desempenho, ou ainda para efeito de controle de seu comportamento.

Portanto, vê-se que a modelagem e a simulação de sistemas são imprescindíveis na pesquisa científica e no projeto de sistemas tecnológicos. Na verdade, as aplicações da simulação extrapolam as áreas das ciências exatas e da tecnologia e são amplamente utilizadas em economia, administração, biomedicina e em um grande número de outras atividades importantes.

## 1.7 Procedimento para o estudo de um sistema dinâmico

Os detalhes de um roteiro pormenorizado para o estudo do comportamento dinâmico de um sistema dependem, evidentemente, da natureza do sistema, de suas dimensões e complexidade, das especificações relativas ao seu desempenho etc. Entretanto, qualquer que seja o sistema particularmente considerado, o procedimento para estudo desse desempenho inclui, em geral, quatro etapas sucessivas, a saber: modelagem física, modelagem matemática, simulação do comportamento dinâmico do sistema e compensação ou síntese.

### ■ 1.7.1 Modelagem física

Consiste na elaboração de um modelo físico, ou descritivo, adequado para o caso.

### ■ 1.7.2 Modelagem matemática

É o estabelecimento das equações que descrevem o comportamento dinâmico do modelo físico do sistema.

O modelo matemático é constituído por uma ou mais equações diferenciais ou dinâmicas, além de, eventualmente, uma ou mais equações algébricas. O modelo matemático pode ser apresentado de várias formas equivalentes, nas quais as variáveis internas do sistema, em geral, não são as mesmas.

### ■ 1.7.3 Simulação do comportamento dinâmico do sistema

É obtida pela integração das equações do modelo matemático.

Como já vimos, essa integração pode ser feita analiticamente, numericamente com auxílio de computadores ou analogicamente com auxílio de sistemas físicos, montados especialmente em cada caso.

### ■ 1.7.4 Compensação ou síntese

Estudo das modificações ou acréscimos a serem introduzidos no sistema para que seu comportamento satisfaça as finalidades e especificações previstas. Após as alterações decorrentes dessa etapa, o sistema deve ser novamente analisado, refazendo-se essa etapa a fim de verificar se o comportamento do sistema é finalmente satisfatório.

## Considerações finais

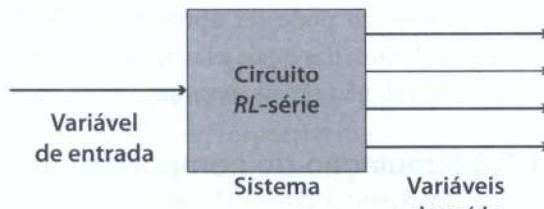
Neste capítulo foi apresentada uma introdução ao estudo dos sistemas, particularmente dos sistemas de controle dotados de realimentação. Foram explicadas as principais características dos sistemas focalizados neste estudo: são sistemas dinâmicos, lineares, invariantes no tempo. Fez-se uma referência também à representação dos sistemas por modelos: os que deno-

minamos modelos físicos ou descritivos, os modelos matemáticos e os modelos gráficos, aqui limitados aos diagramas de blocos descritivos.

Foram feitas, ainda, referências à simulação dos sistemas, suas formas e aplicações. Finalmente, foi proposto um resumo do procedimento utilizado para estudo dos sistemas dinâmicos.

## Problemas propostos

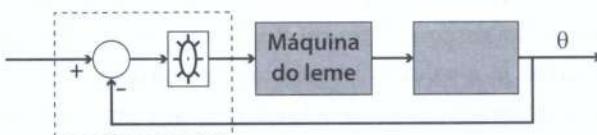
- Os terminais fixos de um potenciômetro são  $A$  e  $B$ . O terminal  $B$  é ligado à terra, e  $A$  é mantido em uma tensão constante  $V_{AB}$ . O terminal ligado ao cursor é  $C$ . Considere o potenciômetro como sendo um sistema. A entrada é a posição angular  $\theta$  do eixo. A saída é a tensão  $V_{CB}$ . Desenhe um circuito representando o modelo físico desse sistema. O sistema é linear? O sistema é dinâmico? Explique.
- A Figura 1.14 representa o circuito  $RL$  (resistência e indutância) em série. A variável de entrada é a tensão  $v$ , aplicada ao circuito. Indique pelo menos 4 grandezas que podem ser consideradas como variáveis de saída. Faça uma representação por meio de um bloco indicando a entrada e as saídas mencionadas.



**Figura 1.14** Circuito  $RL$  (resistência e indutância).

- No sistema de navegação de um navio, a variável de saída é o rumo (ângulo que indica a direção) efetivamente seguido pelo barco. Qual é, na sua opinião, a variável de entrada: (a) a potência do motor? (b) a direção do vento? (c) a perturbação causada pelas ondas? (d) A informação do rumo a ser seguido, dada ao piloto? (e) a posição angular do leme?
- Na questão anterior, o piloto vale-se de uma bússola, evidentemente. O sistema de navegação é dotado de realimentação? Como é detectado o erro do sistema em cada instante? Há amplificação do erro para correção do rumo? Como é feita essa amplificação?
- A Figura 1.15 representa um sistema de navegação como o dos problemas anteriores. O operador do sistema (o piloto do barco) atua ( $u$ ) sobre um servomecanismo de posicionamento do leme, e a po-

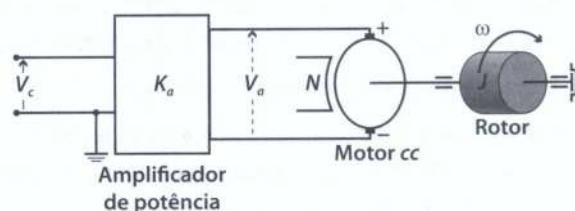
sição angular do leme ( $\phi$ ) atua sobre o próprio navio, levando-o a aproximar seu próprio rumo ( $\theta$ ), do rumo ( $\theta_R$ ) de referência.



**Figura 1.15** Sistemas de navegação.

Indique no diagrama da figura as variáveis de entrada, de saída, de posicionamento do leme e do erro de posicionamento ( $\epsilon$ ). Indique também a representação do operador e o que representa o último bloco em branco.

- A Figura 1.16 mostra um sistema de controle de velocidade de um motor de corrente contínua alimentado por meio de um amplificador de potência. Por sua vez, o motor aciona um rotor cuja velocidade  $\omega$  se deseja controlar (em malha aberta). Represente o sistema por meio de um diagrama de blocos descritivo.



Sistema de controle de velocidade de um motor de corrente contínua.

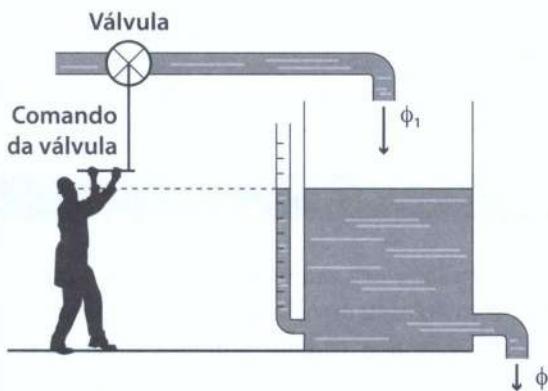
- A Figura 1.17 mostra um sistema de controle de velocidade de um motor de corrente contínua alimentado por meio de um amplificador de potência. O motor aciona, por sua vez, um rotor cuja velocidade  $\omega$  se deseja controlar em malha fechada. No mesmo eixo do rotor está acoplado

um tacogerador (um pequeno gerador que fornece tensão proporcional à velocidade de rotação). A Figura mostra com detalhes o modelo físico do sistema de malha fechada. Represente o sistema por meio de um diagrama de blocos descritivo.



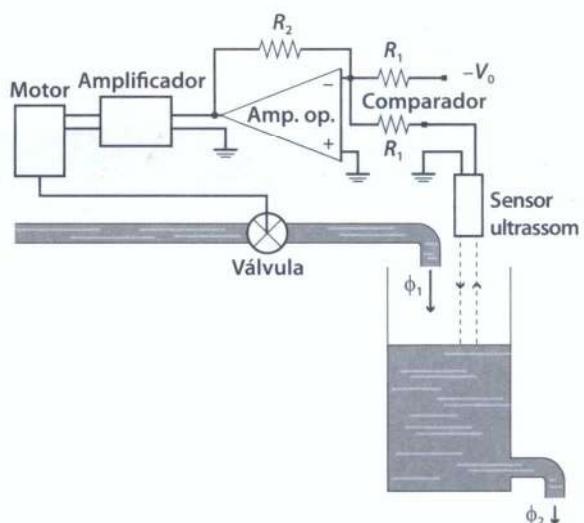
Sistema de controle de velocidade de um motor de corrente contínua.  
**Figura 1.17**

8. Considere o sistema de controle do nível de um líquido em um reservatório, em que a malha é fechada com auxílio de um operador (Figura 1.18). Desenhe um diagrama de blocos descritivo representando esse sistema. Quais são, neste caso, as variáveis de entrada e de saída do sistema?



Sistema de controle do nível de um líquido em um reservatório.  
**Figura 1.18**

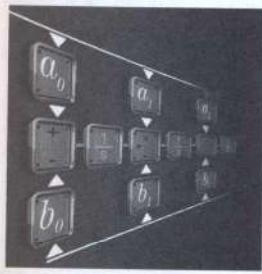
9. Considere o sistema automático de controle do nível de um líquido em um reservatório, conforme a Figura 1.19. Desenhe um diagrama de blocos descritivo representando esse sistema. Quais são, neste caso, as variáveis de entrada e de saída do sistema?



Sistema automático de controle do nível de um líquido em um reservatório.  
**Figura 1.19**

10. Os sistemas de controle estão presentes em quase todos os ramos das atividades humanas: na indústria, na navegação, nos transportes, nas atividades espaciais, na economia etc. Apresente um modelo simplificado de um sistema de controle com realimentação, de interesse de uma dessas áreas. Faça um desenho esquemático do sistema, descreva-o sucintamente e construa um diagrama de blocos descritivo.
11. Os mais perfeitos sistemas de controle automático são encontrados na própria natureza, especialmente em biologia. Animais e plantas, os seres vivos em geral dependem do perfeito funcionamento de tais sistemas. Cite pelo menos dois desses sistemas. Descreva-os sucintamente e procure representá-los por meio de um diagrama de blocos.
12. Considere um sistema de controle de temperatura de um forno elétrico em malha fechada sem operador. A variável de saída é a temperatura no interior do forno  $\theta$  ( $^{\circ}\text{C}$ ). Qual deve ser a variável de entrada? Que sensor ou transdutor deve ser utilizado? Elabore um diagrama de blocos descritivo.

# capítulo 2



## Analogia e modelagem

Neste capítulo vamos fazer uma revisão do equacionamento de alguns circuitos elétricos e dispositivos mecânicos e eletromecânicos lineares, considerados aqui como sistemas. Trata-se de uma revisão em que se procura fazer a modelagem matemática desses dispositivos, introduzindo, ainda, o conceito de analogia entre eles.

Outros sistemas mais complexos serão considerados adiante, após o estudo dos diagramas de blocos analíticos,

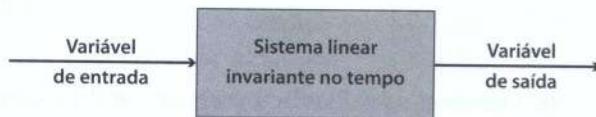
que facilitam o entendimento e a obtenção do próprio modelo matemático desejado.

Vale lembrar que, no decorrer do livro, as variáveis dependentes do tempo são, muitas vezes, indicadas por letras minúsculas, sem referência explícita a essa dependência. Assim, indica-se  $v$  ao invés de  $v(t)$ ,  $w$  no lugar de  $w(t)$  etc.

### 2.1 Sistemas análogos

Diremos que dois sistemas são análogos quando possuírem o mesmo modelo matemático, diferindo apenas, eventualmente, quanto à notação utilizada em cada caso. Assim, quando dizemos que o modelo matemático é o mesmo, não estamos imaginando que as equações diferenciais (ou íntegro-diferenciais) dos dois sistemas sejam idênticas, mas sim que sejam de mesma ordem e que se correspondam termo a termo, embora com notações diferentes. Nos casos em que os parâmetros de cada sistema compareçam da mesma forma nos coeficientes correspondentes das equações, fica fácil estabelecer uma semelhança do comportamento físico entre esses dois sistemas.

Os sistemas elétricos e mecânicos que vamos considerar neste capítulo são lineares, invariantes no tempo e de entrada e saída únicas, como indicado na Figura 2.1. Nesse caso, o modelo matemático pode ser reduzido a uma única equação diferencial ordinária, linear, de coeficientes constantes, ligando diretamente a variável de entrada à variável de saída. A ordem dessa equação define a ordem do sistema. Nos exemplos a seguir, suporemos, salvo aviso em contrá-



**Figura 2.1** Sistema linear invariante no tempo e de parâmetros concentrados, tendo apenas uma variável de entrada e uma de saída.

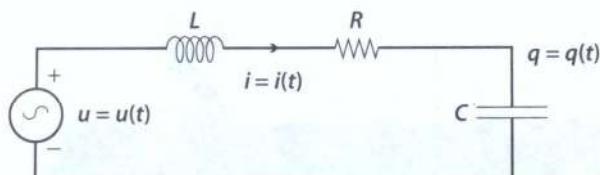
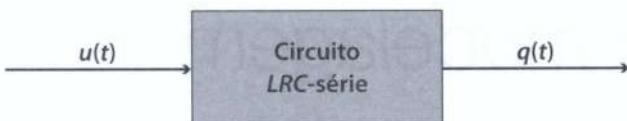
rio,  $t = 0$  como instante inicial, as condições iniciais nulas ( $C.I. = 0$ ) e as variáveis de entrada também nulas para  $t < 0$ .

### 2.2 Circuitos elétricos

Vamos rever, por meio de exemplos e para efeito de estudo de sistemas análogos, o equacionamento de dois circuitos elétricos simples.

#### Exemplo 2.1 Circuito RLC-série

Consideraremos inicialmente um circuito RLC-série (Figura 2.2), um sistema cuja entrada é a tensão  $u(t)$  aplicada pelo gerador ideal de tensão e cuja variável de saída é a corrente  $i(t)$  no circuito. A Figura 2.3 representa esse sistema por meio de um bloco.

**Figura 2.2** Circuito LRC-série.

Representação do circuito LRC-série por um bloco, com entrada  $u(t)$  e saída  $i(t)$ .

A equação que relaciona a variável de saída  $i = i(t)$  à variável de entrada  $u = u(t)$ , nesse caso, pode ser facilmente obtida pela aplicação da lei de Kirchhoff das tensões ou por análise de malhas:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt = u(t) \quad (2.1)$$

Se a variável de saída for a carga  $q = q(t)$  no condensador, em vez de ser a corrente no circuito (figuras 2.2 e 2.4), a equação acima toma a forma:

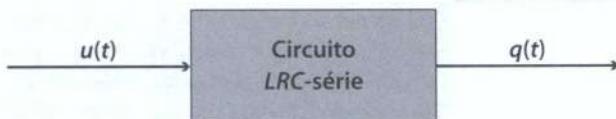
$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u(t) \quad (2.2)$$

sendo, evidentemente,

$$\dot{q} = \frac{dq}{dt} = i(t) \quad \ddot{q} = \frac{d^2q}{dt^2} = \frac{di}{dt} \quad \text{e} \quad q = \int_0^t idt$$

Usando uma notação mais compacta, temos:

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = u(t) \quad (2.3)$$



Representação do circuito LRC-série por um bloco com entrada  $u(t)$  e saída  $q(t)$ .

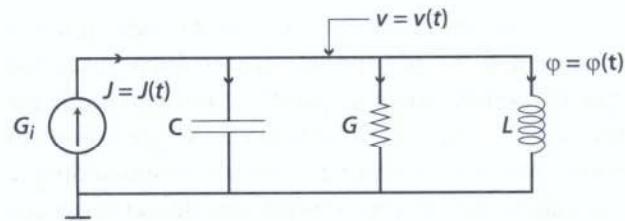
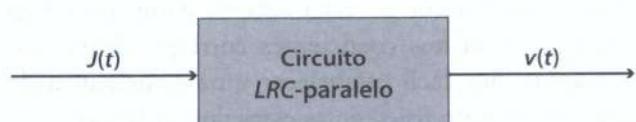
### Exemplo 2.2 Circuito LGC-paralelo

Vejamos o caso de um circuito LGC-paralelo, onde  $G$  é a condutância do resistor ( $G = 1/R$ ). Trata-se de um circuito com dois nós: um nó de referência ligado à terra e um nó independente de tensão  $v(t)$ ; entre esses dois nós são ligados os vários componentes do circuito. Tipicamente, tais circuitos são alimentados pela corrente  $j(t)$  de um gerador de corrente (Figura 2.5). Considerando esse circuito um sistema cuja entrada é a corrente  $j(t)$  e a saída é a tensão  $v(t)$  do nó independente (figuras 2.5 e 2.6), seu modelo matemático, baseado na lei de Kirchhoff das correntes, ou na análise nodal, pode ser escrito

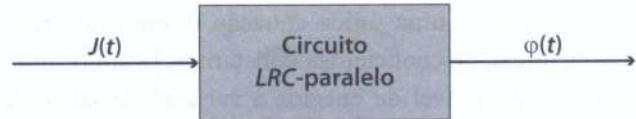
$$C \frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L} \int_0^t v dt = j(t) \quad (2.4)$$

Por outro lado, também é interessante considerar como variável de saída o fluxo magnético  $\varphi = \varphi(t)$  no indutor, em vez de a tensão do nó independente (figuras 2.5 e 2.7). Então, lembrando que a velocidade de variação desse fluxo induz a tensão no indutor, ou mais precisamente:

$$v(t) = \frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi} \quad \text{e, portanto, } \varphi(t) = \int_0^t v dt$$

**Figura 2.5** Circuito LRC-paralelo.

Representação do circuito RLC-paralelo por um bloco com entrada  $J(t)$  e saída  $v(t)$ .

**Figura 2.6**

Representação do circuito RLC-paralelo por um bloco com entrada  $J(t)$  e saída  $\varphi(t)$ .

**Figura 2.7**

a equação do circuito pode ser escrita a partir da Equação (2.4):

$$C \frac{d^2\phi}{dt^2} + G \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L} \phi = j(t) \quad (2.5)$$

ou, sob forma compacta

$$C\ddot{\phi} + G\dot{\phi} + \frac{1}{L}\phi = j(t) \quad (2.6)$$

## 2.3 Dualidade entre circuitos elétricos

Comparemos as equações do circuito de malha única *LRC*-série com as do circuito de apenas um nó independente *LGC*-paralelo, estudados anteriormente.

Consideremos, inicialmente, a comparação entre a Equação (2.1) relativa circuito-série com entrada  $u(t)$  e saída  $i(t)$  e a Equação (2.4), do circuito paralelo, com entrada  $j(t)$  e saída  $v(t)$ :

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t i dt = u(t) \quad (2.1)$$

$$C \frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L} \int_0^t v dt = j(t) \quad (2.4)$$

Vemos que as duas equações são iguais, diferindo apenas quanto à notação. O mesmo acontece com as equações (2.2) e (2.5), que se referem aos mesmos circuitos, apenas com as variáveis de saída diferentes: no circuito série, a saída agora é a carga no capacitor (Equação 2.2), e no circuito paralelo a saída é o fluxo magnético no indutor (Equação 2.5).

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u(t) \quad (2.2)$$

$$C \frac{d^2\phi}{dt^2} + G \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L} \int_0^t \phi dt = j(t) \quad (2.5)$$

Observe que as equações dos dois circuitos têm a mesma forma, ou melhor, elas são iguais, diferindo quanto à notação, como já mencionado.

Esse fato revela a existência de analogia entre os dois circuitos que então são ditos duais. Mais precisamente, dois circuitos são duais quando as equações que descrevem um deles por análise de malhas têm

a mesma forma das equações que descrevem o outro por análise nodal.

Nesse caso, existe uma correspondência entre os parâmetros e entre as variáveis de um e de outro circuitos. Essa correspondência é indicada pela Tabela 2.1.

**Tabela 2.1** Tabela de dualidade

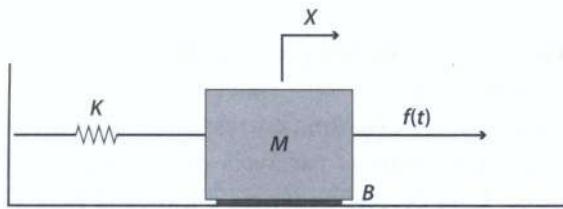
Malha	$\leftrightarrow$	Nó
Série	$\leftrightarrow$	Paralelo
$L$	$\leftrightarrow$	$C$
$R$	$\leftrightarrow$	$G$
$1/C$	$\leftrightarrow$	$1/L$
$i(t)$	$\leftrightarrow$	$v(t)$
$u(t)$	$\leftrightarrow$	$j(t)$
$q(t)$	$\leftrightarrow$	$\phi(t)$

Assim, na equação de um circuito tipo série, por exemplo, obtida por análise de malhas, se substituirmos a notação de acordo com a tabela de dualidade, obteremos uma nova equação, válida para outro circuito, tipo paralelo analisado por análise nodal. A questão é: qual será esse outro circuito? Temos aqui um problema que é o inverso dos problemas encontrados habitualmente, que consistem em modelar matematicamente um circuito dado. Agora temos o contrário: dadas as equações, devemos achar um circuito do qual elas sejam o modelo matemático. Digamos que se trata de um problema de síntese de circuitos.

## 2.4 Sistemas mecânicos de translação

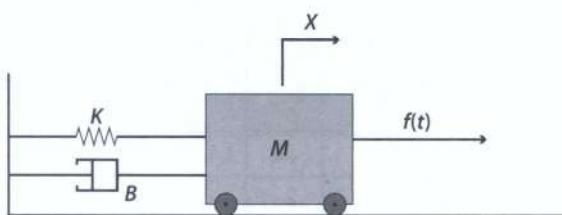
Vamos considerar, inicialmente, um sistema constituído por um corpo (de massa  $M$ ), ligado a uma parede por uma mola (de constante elástica  $K$ ) e sujeito a uma resistência viscosa (de coeficiente  $B$ ). O corpo move-se ao longo do eixo  $x$  sob a ação de uma força  $f(t)$ , conforme indicado na Figura 2.8 ou na Figura 2.9. Supomos, como habitualmente, condições iniciais nulas e a força  $f(t)$  aplicada no instante inicial  $t = 0$ .

Faremos, em primeiro lugar, o modelo matemático do sistema supondo como entrada a força ativa  $f(t)$  e como variável de saída a posição do móvel dada pela



Sistema mecânico formado por um bloco de massa  $M$ , sujeito a um atrito viscoso de coeficiente  $B$  e a uma mola de constante elástica  $K$ .

Figura 2.8



Outra representação do mesmo sistema indicado na Figura 2.8. Aqui a resistência viscosa é atribuída ao amortecedor.

Figura 2.9

abscissa  $x = x(t)$  (Figura 2.10). Para escrever as equações do movimento nesse sistema, é conveniente utilizar o diagrama do corpo livre, como indica a Figura 2.11.

O modelo matemático de um sistema mecânico de translação baseia-se na lei fundamental da mecânica (lei de Newton), ou seja:

$$\text{massa} \times \text{aceleração} = \text{resultante das forças externas}$$

Temos, então,

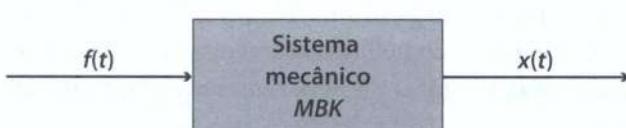
$$M \frac{d^2x}{dt^2} = f(t) - B \frac{dx}{dt} - Kx$$

que pode ser apresentada sob a forma

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) \quad (2.7)$$

ou sob forma compacta

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f(t) \quad (2.8)$$



Representação do sistema mecânico  $MBK$ , de entrada  $f(t)$  e saída  $x(t)$ .

Figura 2.10

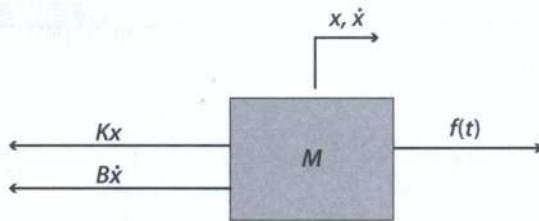
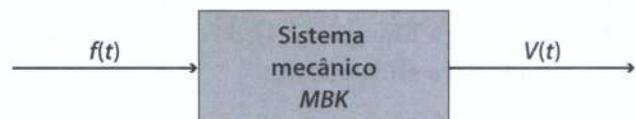


Diagrama do corpo livre onde aparecem as forças exercidas pelos vínculos (mola e resistência viscosa).

Figura 2.11

Vejamos agora o modelo matemático para o caso em que a entrada é a força  $f(t)$ , mas a saída é a velocidade  $V = V(t)$ , e não a posição do móvel (Figura 2.12). Como a velocidade é a derivada da posição, vem  $V(t) = \frac{dx}{dt} = \dot{x}$  e também  $x = \int_0^t V dt$ . Então, da equação (2.8), obtemos

$$M \frac{dV}{dt} + BV + K \int_0^t V dt = f(t) \quad (2.9)$$



Representação do sistema mecânico  $MBK$ , de entrada  $f(t)$  e saída  $V(t)$ .

## 2.5 Analogia entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos

Como já foi dito, sistemas análogos são aqueles que apresentam modelos matemáticos iguais, diferindo apenas quanto à notação. Assim, os circuitos *LRC*-série tendo a corrente como variável de saída e o sistema mecânico de translação  $MBK$  tendo a velocidade como saída são descritos, respectivamente, pelas equações (2.1) e (2.9). Comparando essas equações, vemos que elas só diferem quanto à notação:

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_0^t idt = u(t) \quad (2.1)$$

$$M \frac{dV}{dt} + BV + K \int_0^t V dt = f(t) \quad (2.9)$$

O mesmo acontece com as equações (2.2) e (2.7) ou, também, (2.3) e (2.8), respectivamente dos mesmos sistemas:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = u(t) \quad (2.2)$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) \quad (2.7)$$

ou

$$L \ddot{q} + R \dot{q} + \frac{1}{C} q = u(t) \quad (2.3)$$

$$M \ddot{x} + B \dot{x} + Kx = f(t) \quad (2.8)$$

Como sabemos, quando esse fato ocorre entre sistemas de naturezas físicas diferentes, elétrica e mecânica, no caso em questão, diz-se que os sistemas são análogos.

Também existe analogia entre o circuito LGC-paralelo e o mesmo sistema mecânico. De fato, basta comparar as respectivas equações:

$$C \frac{dv}{dt} + Gv + \frac{1}{L} \int_0^t v dt = j(t) \quad (2.4)$$

$$M \frac{dV}{dt} + BV + K \int_0^t V dt = f(t) \quad (2.9)$$

e também

$$C \frac{d^2\phi}{dt^2} + G \frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{L} \phi = j(t) \quad (2.5)$$

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t) \quad (2.7)$$

Assim, um sistema mecânico é análogo a dois sistemas elétricos duais entre si. A analogia entre o sistema mecânico e o circuito tipo série descrito por análise de malhas (denominada analogia do 1º tipo) e a analogia entre o sistema mecânico e o circuito do tipo paralelo e descrito por análise nodal (denominada analogia do 2º tipo).

A seguir, fornecemos uma tabela de analogia entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos (Tabela 2.2).

(continuação)

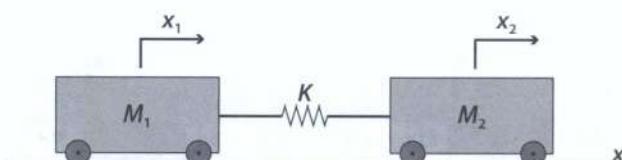
Circuito-série		Dinâmica de translação		Circuito-paralelo
	Analogia do 1º tipo			Analogia do 2º tipo
1/C	↔	K	↔	1/L
i(t)	↔	ẋ(t)	↔	V(t)
e(t)	↔	f(t)	↔	j(t)
q(t)	↔	x(t)	↔	φ(t)

Façamos, inicialmente, algumas considerações sobre graus de liberdade e variáveis de configuração.

Considere um sistema formado por dois blocos rígidos que podem se mover ao longo do eixo  $x$ , interligados por uma mola (Figura 2.13). Para dar, em qualquer instante, a configuração, ou seja, a posição de cada móvel desse sistema, necessitamos de duas coordenadas (duas abscissas, por exemplo,  $x_1$  e  $x_2$ ). De fato, a posição do bloco 1 não informa nada sobre a posição do bloco 2. Podemos, por exemplo, fixar a posição de  $M_1$  e deslocar  $M_2$ , uma vez que a mola permite esse deslocamento relativo. Se o sistema tivesse três blocos móveis, interligados por molas ou por amortecedores, deveríamos recorrer a três variáveis para fixar a configuração do sistema. Se fosse um bloco único, bastaria uma variável.

Denomina-se grau de liberdade de um sistema o número de variáveis necessárias para dar a sua configuração. No caso do exemplo da figura, temos um sistema com dois graus de liberdade. As variáveis escolhidas para dar a configuração de um sistema podem ser chamadas de variáveis de configuração.

As ideias de graus de liberdade e de configuração de um sistema podem ser generalizadas e estendidas a outros domínios da Física. No caso dos circuitos elétricos, por exemplo, o comportamento de um circuito de duas malhas exige o conhecimento de duas variáveis, por exemplo, duas correntes de malhas. As correntes de malha, sob essa ótica, seriam as variáveis de configuração do sistema, e o circuito de duas malhas é, então, um sistema com dois graus de liberdade.



Sistema formado por dois blocos rígidos ligados por uma mola.

Figura 2.13

**Tabela 2.2** Tabela de analogia

Circuito-série		Dinâmica de translação		Circuito-paralelo
	Analogia do 1º tipo		Analogia do 2º tipo	
L	↔	M	↔	C
R	↔	B	↔	G

(continua)

Passaremos agora ao estudo de sistemas mecânicos de translação com duas variáveis de configuração ou com dois graus de liberdade.

Consideremos o sistema indicado na Figura 2.14, composto de duas massas interligadas por molas e sujeitas a atrito viscoso e a uma força externa dada  $f(t)$ .

Como habitualmente temos condições iniciais nulas e o sistema em repouso para  $t < 0$ , então:

$$\left. \begin{array}{l} x_1(t) = x_2(t) = 0 \\ \dot{x}_1(t) = \dot{x}_2(t) = 0 \\ f(t) = 0 \end{array} \right\} \quad \text{para } t < 0$$

Neste caso, a deformação da mola  $K_1$  será  $x_1 - x_2$  e a da mola  $K_2$  será de  $x_2$ .

As forças que atuam sobre cada um dos blocos são as indicadas nos diagramas dos corpos livres, a seguir (Figura 2.15).

Para o móvel  $M_1$ , temos:

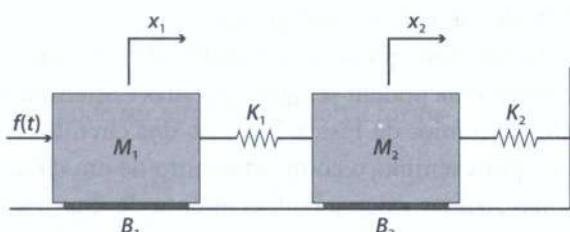
$$M_1 \ddot{x}_1 + B_1 \dot{x}_1 + K_1(x_1 - x_2) = f(t)$$

ou, sendo  $\dot{x}_1 = V_1$  e  $\dot{x}_2 = V_2$  vem:

$$M_1(dV_1/dt) + B_1 V_1 + K_1 \int_0^t (V_1 - V_2) dt = f(t)$$

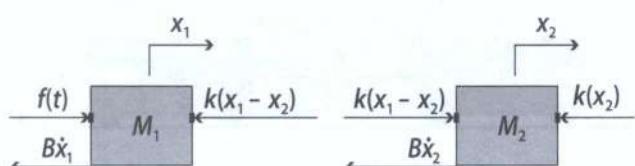
Para o móvel  $M_2$ , teremos:

$$M_2 \ddot{x}_2 + B_2 \dot{x}_2 + K_1(x_1 - x_2) - K_2 x_2 = 0$$



Sistema composto de duas massas interligadas por molas e sujeitas a atrito viscoso e a uma força externa dada  $f(t)$ .

**Figura 2.14**



**Figura 2.15** Diagramas dos corpos livres.

ou, da mesma forma que no caso anterior:

$$M_2(dV_2/dt) + B_2 V_2 + (K_1 + K_2) \int_0^t V_2 dt - K_1 \int_0^t V_1 dt = 0$$

Com auxílio da Tabela 2.2, de analogia (1º tipo), as equações do sistema mecânico anteriormente apresentadas transformam-se em equações de análise de malhas de um circuito. Assim, a equação do móvel  $M_1$  transforma-se na seguinte equação:

$$L_1(dI_1/dt) + R_1 i_1 + (1/C_1) \int_0^t (i_1 - i_2) dt = e(t)$$

O mesmo para o móvel  $M_2$ , ou seja:

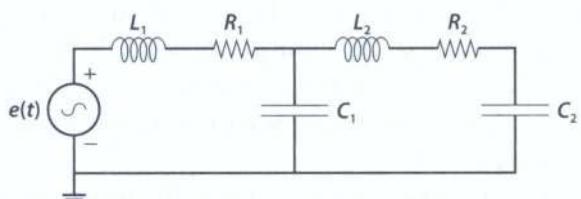
$$L_2(dI_2/dt) + R_2 i_2 + [(1/C_1) + (1/C_2)] \int_0^t i_2 dt - (1/C_1) \int_0^t i_1 dt = 0$$

O circuito elétrico que corresponde a essas equações é o indicado na Figura 2.16, a seguir:

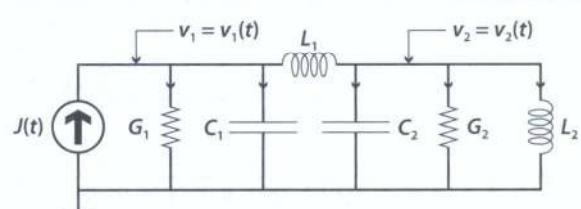
Pelo 2º tipo de analogia, as equações do sistema mecânico transformam-se em equações de análise nodal de um circuito, que será o dual do circuito anterior.

$$\begin{aligned} C_1(dv_1/dt) + G_1 v_1 + (1/L_1) \int_0^t (v_1 - v_2) dt &= j(t) \\ C_2(dv_2/dt) + G_2 v_2 + [(1/L_1) + (1/L_2)] \int_0^t v_2 dt - (1/L_1) \int_0^t v_1 dt &= 0 \end{aligned}$$

O circuito correspondente a essas equações é o indicado na Figura 2.17.



Circuito elétrico análogo (analogia do tipo 1) ao sistema mecânico da Figura 2.14.



Circuito elétrico análogo (analogia do tipo 2) ao sistema mecânico da Figura 2.14.

**Figura 2.17**

## 2.6 Sistemas mecânicos de rotação

Inicialmente, vamos estudar os sistemas mecânicos de rotação em torno de um eixo fixo, com uma única variável de configuração, ou seja, com apenas um grau de liberdade.

Consideremos o sistema da Figura 2.18, constituído por um rotor de momento de inércia  $J$ , suportado por um eixo com elasticidade de torção, de constante elástica  $K$  e sujeito a um conjugado resistente do tipo viscoso, isto é, proporcional à velocidade angular do rotor e a um conjugado externo ativo  $M = M(t)$ . As variáveis do sistema são:

$$\text{Abscissa angular } \theta = \theta(t)$$

$$\text{Velocidade angular } \omega = \omega(t) = \dot{\theta}$$

O sistema está em repouso para  $t < 0$ , isto é,  $\theta(t) = 0$  para  $t < 0$ .

As condições iniciais são nulas. Neste caso, a abscissa angular,  $\theta$ , mede a deformação angular do eixo elástico.

O modelo matemático de um sistema mecânico de rotação baseia-se na lei fundamental da mecânica de rotação, ou seja:

$$J(d^2\theta/dt^2) = M \text{ (resultante)}$$

em que  $M$  (resultante) é o conjugado externo resultante, que age sobre o rotor.

Temos, então, para o caso em estudo, a equação:

$$J(d^2\theta/dt^2) = M(t) - B(d\theta/dt) - K\theta$$

Daí resultam os seguintes modelos matemáticos:

Em função da variável  $\theta$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = M(t)$$

Em função da variável  $\omega$

$$J(d\omega/dt) + B\omega + K \int_0^t \omega dt = M(t)$$

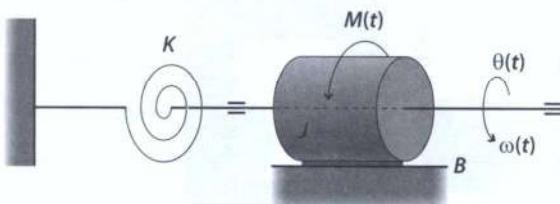


Figura 2.18 Sistema mecânico de rotação.

Comparando a equação de análise de malhas do circuito  $L, R, C$  série, com esta última equação do sistema mecânico de rotação, vemos que elas também têm a mesma forma:

$$L(di/dt) + Ri + (1/C) \int_0^t idt = e(t)$$

$$J(d\omega/dt) + B\omega + K \int_0^t \omega dt = M(t)$$

O mesmo ocorre com as outras equações dos mesmos sistemas:

$$L\ddot{q}_1 + R\dot{q}_1 + (1/C)q_1 = e(t)$$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = M(t)$$

Essas equações revelam a existência de analogia do 1º tipo entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos de rotação.

Analogamente, a comparação entre as equações de análise nodal dos circuitos elétricos e, respectivamente, as equações dos sistemas mecânicos de rotação mostram a existência de uma analogia do 2º tipo entre esses sistemas, ou seja:

$$C(dv/dt) + Gv + (1/L) \int_0^1 v dt = j(t)$$

$$J(d\omega/dt) + B\omega + K \int_0^t \omega dt = M(t)$$

$$C\ddot{q} + G\dot{q} + (1/L)q = j(t)$$

$$J\ddot{\theta} + B\dot{\theta} + K\theta = M(t)$$

A seguir fornecemos uma tabela de analogia entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos de rotação (Tabela 2.3).

Tabela de analogia entre circuitos elétricos e sistemas mecânicos de rotação

Série		Rotação		Paralelo
	1º Tipo		2º Tipo	
$L$	$\leftrightarrow$	$J$	$\leftrightarrow$	$C$
$R$	$\leftrightarrow$	$B$	$\leftrightarrow$	$G$
$1/C$	$\leftrightarrow$	$K$	$\leftrightarrow$	$1/L$
$i(t)$	$\leftrightarrow$	$\omega(t)$	$\leftrightarrow$	$v(t)$
$u(t)$	$\leftrightarrow$	$M(t)$	$\leftrightarrow$	$j(t)$
$q(t)$	$\leftrightarrow$	$\theta(t)$	$\leftrightarrow$	$\phi(t)$

## 2.7 Engrenagens ideais

As engrenagens ideais são representadas pelo seu círculo diretor, são supostas rígidas e não possuem atrito nem momento de inércia.

Uma das engrenagens, geralmente a menor, está ligada ao eixo motor, que é a roda motora, e a outra, a roda movida, está ligada ao eixo de carga.

A roda motora, engrenagem 1, tem  $N_1$  dentes, raio  $r_1$  e velocidade angular  $\omega_1$ . A roda movida, engrenagem 2, tem  $N_2$  dentes, raio  $r_2$  e velocidade angular  $\omega_2$ . Evidentemente, vale a relação:

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

Na Figura 2.19, temos uma representação do sistema formado pelas duas engrenagens. Vemos as duas engrenagens ligeiramente afastadas uma da outra, para indicar com clareza as velocidades dos pontos de contato e as forças que agem em cada uma delas, constituindo a ação e reação.

Não havendo escorregamento, a velocidade dos pontos de contato dos dois círculos diretores é a mesma,

$$V = \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2$$

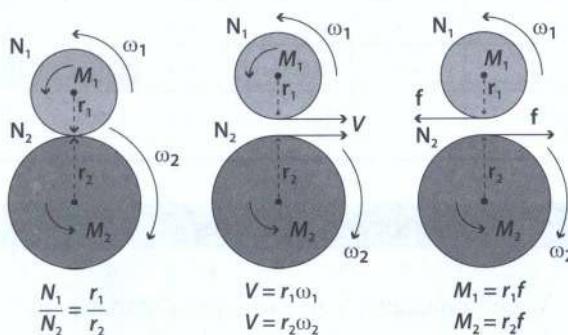
As forças que atuam nesses pontos de contato são forças de ação e reação, portanto têm a mesma intensidade  $f$ , mas apresentam sentidos opostos e permitem calcular os conjugados de torção nas duas engrenagens, ou seja:

$$M_1 = r_1 f \quad \text{e} \quad M_2 = r_2 f$$

As equações que podem ser escritas para as engrenagens são:

$$\text{Rotação} \rightarrow \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

$$\text{Conjugado} \rightarrow \frac{M_2}{M_1} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{N_2}{N_1}$$



**Figura 2.19** Engrenagens ideais.

$$\text{Potência} \rightarrow M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2$$

Pode-se obter a analogia elétrica do primeiro tipo para o caso das engrenagens ideais, lembrando que, pela Tabela 2.3, temos a correspondência:

$$\omega \leftrightarrow i \quad \text{e} \quad M \leftrightarrow u$$

Então, devemos procurar um dispositivo de circuito elétrico que satisfaça às equações análogas às das engrenagens:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} \leftrightarrow \frac{M_1}{M_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

que são

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} \leftrightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2}$$

$$M_1 \omega_1 = M_2 \omega_2 \leftrightarrow u_1 i_1 = u_2 i_2$$

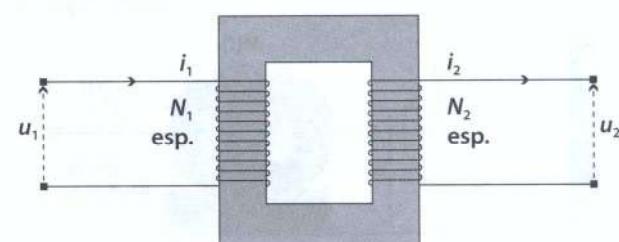
As três equações acima, à direita, podem ser reconhecidas como as de um transformador ideal, isento de perdas e de dispersão magnética e onde  $N_1$  e  $N_2$  são, respectivamente, o número de espiras nos enrolamentos primário e secundário, conforme podemos ver na Figura 2.20.

### Exemplo 2.3

#### Exemplo de sistema de rotação

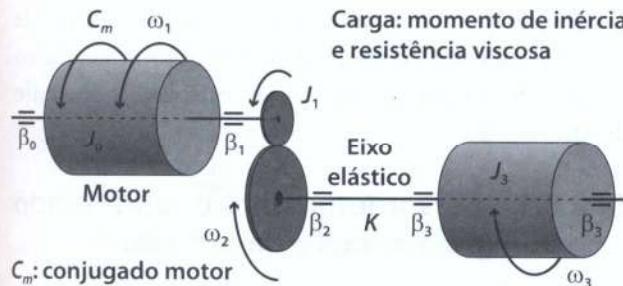
Na Figura 2.21 temos um sistema de rotação dotado de um jogo de engrenagens. Os momentos de inércia, os coeficientes de atrito viscoso nos mancais, os raios e números de dentes das engrenagens, bem como o conjugado motor  $C_m$ , que age sobre o primeiro rotor (rotor de um motor de c.c., por exemplo) e as indicações de velocidade e posições angulares estão claramente indicados na figura.

Note que o eixo menor, eixo motor, é rígido, enquanto o eixo maior apresenta uma constante elástica de torção  $K$ .



Transformador ideal: sistema análogo a um par de engrenagens ideal.

**Figura 2.20**



**Figura 2.21** Sistema mecânico de rotação com engrenagens

Na Figura 2.22 temos os diagramas dos corpos livres, com indicação dos conjugados que atuam sobre eles. Note que, em virtude de o eixo maior ser deformável, o sistema apresenta dois graus de liberdade.

A seguir fornecemos o modelo matemático, onde  $C_1$  e  $C_2$  são os conjugados devido às forças de ação e reação nas engrenagens 1 e 2 respectivamente.

$$(J_0 + J_1) \frac{d\omega_1}{dt} + (\beta_0 + \beta_1) \omega_1 = C_m - C_1$$

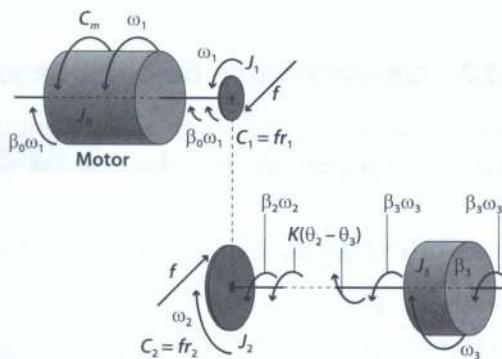
$$J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + \beta_2 \omega_2 + K \left( \int_0^t \omega_2 dt - \int_0^t \omega_3 dt \right) = C_2$$

$$J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + 2\beta_3 \omega_3 + K \left( \int_0^t \omega_3 dt - \int_0^t \omega_2 dt \right) = 0$$

sendo

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n}$$

Assim, as equações acima constituem o modelo matemático do sistema descrito pelas variáveis  $\omega_1$ ,  $\omega_2$  e  $\omega_3$ .



**Figura 2.22**

O sistema mecânico de rotação em estudo é análogo a um sistema elétrico dotado de transformador.

As equações elétricas podem ser obtidas a partir das equações anteriores e, com o auxílio da Tabela 2.3, podem ser postas sob a seguinte forma:

$$(L_0 + L_1) \frac{di_1}{dt} + (R_0 + R_1) i_1 = u - e_1$$

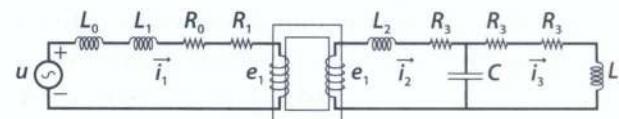
$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + (1/C) i_2 dt - (1/C) i_3 dt = e_2$$

$$L_3 \frac{di_3}{dt} + 2R_3 i_3 + \frac{1}{C} \int'_0 i_3 dt - \frac{1}{C} \int'_0 i_2 dt = 0$$

sendo

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2} = n \quad \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1} = \frac{1}{n}$$

O circuito correspondente a essas equações está representado a seguir, na Figura 2.23.



**Figura 2.23** Circuito elétrico análogo (analogia tipo 1), ao sistema mecânico da Figura 2.21.

## 2.8 Sistemas eletromecânicos

São sistemas que associam dispositivos elétricos ou eletromagnéticos e dispositivos mecânicos. Em tais sistemas há relações entre grandezas elétricas e/ou magnéticas e grandezas mecânicas. Há casos em que a variável de entrada é de natureza elétrica, geralmente tensão ou corrente, e a variável de saída é mecânica, como força, deslocamento, velocidade etc. Um exemplo clássico é o do alto-falante, em que a entrada é a corrente em uma bobina leve situada no campo magnético de um ímã e ligada no centro de um diafragma flexível; a saída é o deslocamento do diafragma, que gera a variação da pressão do ar que se propaga sob forma de ondas sonoras.

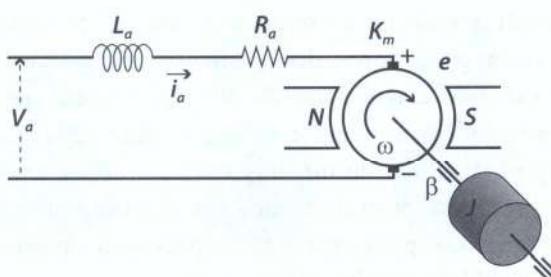
Há também casos inversos, em que a entrada é uma grandeza mecânica e a saída é uma variável

elétrica. Um exemplo (inverso ao do alto-falante) é o do microfone, em que a entrada é a variação da pressão do ar sobre uma lâmina flexível (diafragma) e a saída é um sinal de corrente que acompanha as variações da pressão de entrada.

É interessante lembrar que muitas vezes tais sistemas são reversíveis: entrada e saída podem ser permutáveis. O próprio alto-falante é um exemplo desse tipo: sendo a entrada a corrente, ele a transforma em ondas sonora na saída; se a entrada for uma variação de pressão sobre o diafragma, ele a transforma em uma corrente variável de saída.

Entre os dispositivos eletromecânicos mais importantes usados nos sistemas de controle estão os servomotores elétricos de corrente contínua (*c.c.*). Tais servomotores são tipicamente motores de corrente contínua fracionários (isto é, de potência inferior a 1 kW), cuidadosamente construídos, que trabalham em regime tanto quanto possível linear. O campo magnético dos servomotores é independente do circuito principal (circuito do rotor ou circuito de armadura) e é geralmente produzido por ímãs permanentes, embora em alguns poucos casos possam ser produzidos por bobinas de campo. A Figura 2.24 apresenta um servomotor de corrente contínua controlado por circuito de armadura. Atualmente, graças aos recursos da eletrônica, podem apresentar características variadas, como a de serem alimentados diretamente em corrente alternada e a comutação ser operada sem o auxílio de escovas e de coletores. Entretanto, as características básicas são, em geral, as mesmas dos motores convencionais de *c.c.*

A seguir faremos a análise e a modelagem dos motores de *c.c.* usados para controle de velocidade ou de posição angular. Nos casos em que o campo magnético for produzido por ímãs permanentes, o controle de velocidade é feito pela tensão aplicada ao circuito de armadura. No caso em que o campo magnético é



Servomotor de *c.c.* controlado pelo circuito de armadura.

**Figura 2.24**

produzido por bobinas de campo, a velocidade de rotação pode ser controlada pela tensão aplicada ao circuito de campo, mantendo-se constante a corrente de armadura.

### ■ 2.8.1 Servomotor de *c.c.* controlado pelo circuito de armadura

O modelo físico para controle de velocidade desses motores é o indicado na Figura 2.24. As equações pertinentes são as seguintes:

(1) Equação do circuito de armadura:

$$v_a = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e$$

(2) Equação da f.e.m. induzida:  $e = K_m \omega$

(3) Equação do conjugado eletromagnético:

$$C_m = K_m i_a$$

(4) Equação do conjugado eletromecânico:

$$C_m = J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega$$

### ■ 2.8.2 Funcionamento em regime permanente

O regime de funcionamento é permanente, ou estacionário, quando as variáveis (no caso,  $\omega$  e  $i_a$ ) permanecem constantes. Neste caso,  $\frac{d\omega}{dt} = 0$ ,  $\frac{di_a}{dt} = 0$  e as equações anteriormente apresentadas reduzem-se às seguintes, onde as variáveis são independentes do tempo:

$$V_a = R_a i_a + K_m \omega$$

$$e = K_m \omega$$

$$C_m = K_m i_a$$

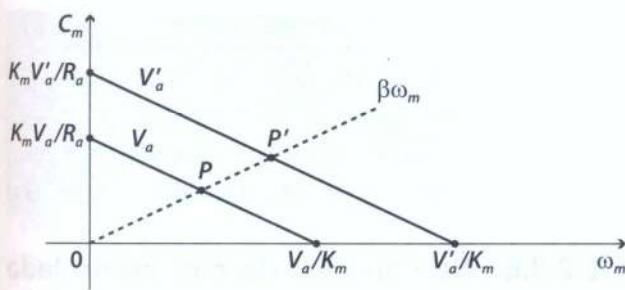
$$C_m = \beta \omega$$

### ■ 2.8.3 Característica de conjugado

Eliminando a corrente  $i$  entre as duas primeiras equações anteriormente apresentadas, obtemos

$$C_m = \frac{K_m}{R_a} (V_a - K_m \omega)$$

Essa função  $C_m(\omega)$ , para  $V_a$  constante e  $\omega$  variável, é a característica de conjugado do motor cujo gráfico aparece na Figura 2.25.  $P$  e  $P'$  são pontos de operação

Figura 2.25 Características de conjugado  $C_m(\omega_m)$ .

de funcionamento em vazio, correspondentes a dois diferentes valores de  $V_a$ . Note que a velocidade  $\omega$  do motor nos pontos de operação é maior para valores maiores de  $V_a$ .

### ■ 2.8.4 Característica de velocidade

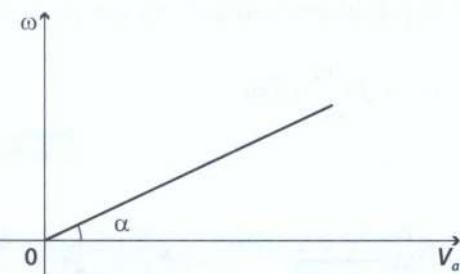
Lembrando também que  $C_m(\omega) = \beta\omega$ , podemos escrever

$$\beta\omega = \frac{K_m}{R_a}(V_a - K_m\omega)$$

ou

$$\omega = \frac{K_m}{K_m^2 + \beta R_a} V_a$$

Essa expressão, que mostra como a velocidade varia linearmente com a tensão de armadura, é a característica de velocidade do motor (ver Figura 2.26).

Figura 2.26 Característica de velocidade  $\omega(V_a)$ .

### ■ 2.8.5 Característica de potência

A potência mecânica (em W) de um sistema em rotação pode ser calculada pelo produto do conjugado  $C_m$  (em Nm) pela velocidade de rotação  $\omega$  (em rad/s):

$$P = C_m \omega$$

Então, usando a equação da característica de conjugado, a potência do motor em função da velocidade será:

$$P(\omega) = \left( \frac{K_m V_a}{R_a} - \frac{K_m^2}{R_a} \omega \right) \omega$$

Para  $V_a = V$  constante, temos aí um ramo de parábola de eixo vertical passando pela origem (Figura 2.27).

A potência do conjugado resistente absorvido pela carga que, para o motor em vazio, é apenas devido ao atrito viscoso, vale:

$$P_{rest} = \beta\omega^2$$

O ponto de operação situa-se no cruzamento das características de potência do motor e da carga (ver Figura 2.27).

A velocidade máxima do motor ocorre no ponto em que a característica de potência corta o eixo  $\omega$ , fora da origem:

$$\omega_{max} = \frac{V_a}{K_m}$$

Verifica-se facilmente também que a potência máxima ocorre quando a velocidade tem metade do seu valor máximo. O conjugado correspondente a essa velocidade é calculado de modo fácil e obtém-se:

$$C_{(\omega_{max}/2)} = \frac{K_m}{R_a} \left( V_a - K_m \frac{V_a}{2K_m} \right) = \frac{K_m V_a}{2R_a}$$

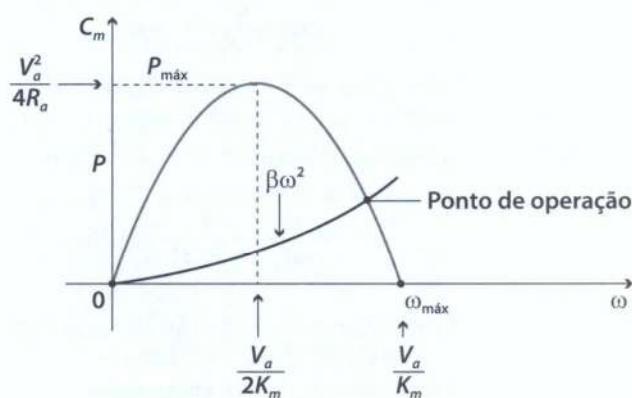


Figura 2.27 Características da potência.

Substituindo esse valor na expressão da potência, obtém-se facilmente:

$$P_{\max} = \frac{V_a^2}{4R_a}$$

#### Exemplo 2.4

Um servomotor de ímã permanente tem resistência de armadura de  $2,33 \Omega$ , conjugado máximo (para  $\omega = 0$ ),  $C_{\max} = 0,25 \text{ Nm}$  e tensão nominal  $V_a = 14 \text{ V}$ . Determine para essa tensão: (a) a velocidade máxima ( $\omega_{\max}$ ); (b) a característica de conjugado; (c) a potência máxima; (d) o ponto de operação ( $\omega, P$ ) para um conjugado de carga constante  $C_0 = 0,001 \text{ Nm}$ .

Solução:

(a) A velocidade máxima ocorre quando  $\beta = 0$ :

$$\omega_{\max} = \frac{V_a}{K_m}$$

O valor de  $K_m$  pode ser obtido a partir da característica de conjugado. De fato, temos que

o conjugado máximo é obtido quando  $\omega = 0$ :

$$C_{\max} = \frac{K_m V_a}{R_a}, \text{ e então:}$$

$$K_m = \frac{R_a C_{\max}}{V_a} = \frac{2,33 \cdot 0,25}{14} = 0,0416$$

$$\omega_{\max} = \frac{14}{0,0416} = 336 \text{ rad/s}$$

ou

$$\omega_{\max} = 3.216 \text{ rpm}$$

(b) Característica de conjugado

$$C_m(\omega) = \frac{K_m V_a}{R_a} - \frac{K_m^2}{R_a} \omega$$

$$C(\omega) = 0,25 - 7,43 \cdot 10^{-4} \omega \text{ Nm}$$

(c) Potência máxima

$$P_{\max} = \frac{V_a^2}{4R_a} = \frac{14^2}{4 \cdot 2,33} = 21 \text{ W}$$

(d) Ponto de operação para um conjugado de carga constante  $C_0 = 10^{-3} \text{ Nm}$ .

Da característica de conjugado, temos:

$$\omega = \frac{0,25 - 0,001}{7,43 \cdot 10^{-4}} = 335 \text{ rad/s}$$

ou ainda

$$\omega = 3.200 \text{ rpm}$$

#### ■ 2.8.6 Servomotor de c.c. controlado pelo circuito de campo

Neste caso, o campo magnético do servomotor é produzido por bobinas que então substituem os ímãs. São as bobinas de campo, fixas ao estator, que são percorridas por correntes que podem ser controladas. O campo magnético nesse caso não é constante, mas pode ser alterado pela corrente de campo ( $i_c$ ), de modo a ajustar a velocidade e o torque aos valores desejados. O que se mantém constante nesse caso é a corrente do circuito de armadura ( $I_a$ ). A Figura 2.28 mostra um modelo desse motor.

As equações do modelo matemático desse motor são as seguintes:

- (1) Equação do circuito de armadura:  $I_a = \text{const.}$
- (2) Equação do circuito de campo:

$$v_c = L_c \frac{di_c}{dt} + R_c i_c$$

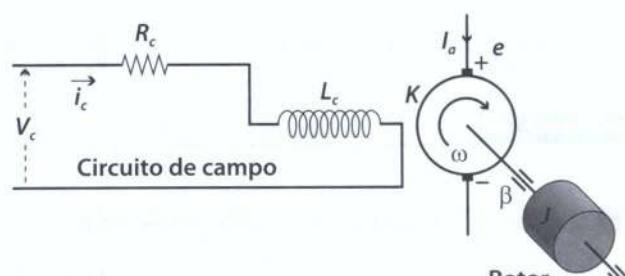
$$(3) \text{ Equação da f.e.m. induzida: } e = K_i \omega$$

$$(4) \text{ Equação do conjugado eletromagnético:}$$

$$C_m = K I_a i_c$$

$$(5) \text{ Equação do conjugado eletromecânico:}$$

$$C_m = J \frac{d\omega}{dt} + \beta \omega$$



Servomotor de c.c. controlado pelo circuito de campo.

Figura 2.28

### ■ 2.8.7 Gerador de c.c.

Outro sistema eletromecânico importante é o gerador de c.c. (Figura 2.29). Em princípio, os motores são reversíveis e podem funcionar como geradores. Vejamos a análise e a modelagem dos geradores considerando como entrada a tensão aplicada ao circuito de campo ( $V_c$ ) e como saída a tensão do circuito de armadura ( $V_a$ ), supondo velocidade de rotação constante. As equações são apenas de natureza elétrica, já que estamos supondo a velocidade de rotação constante.

(1) Equação do circuito de campo:

$$V_c = R_c i_c + L_c \frac{di_c}{dt}$$

(2) Equação da f.e.m. induzida:  $e = K_e i_a$

(3) Equação do circuito de armadura:

$$v_a = R_a i_a + L_a \frac{di_a}{dt} + e$$

No caso, a corrente de armadura fornecida pelo gerador ( $i_a$ ) depende da carga ligada no gerador. Se ela for conhecida, uma equação adicional permite determiná-la. Caso contrário, a corrente funciona como uma segunda entrada não previsível. Entradas desse tipo são denominadas perturbações ou distúrbios.

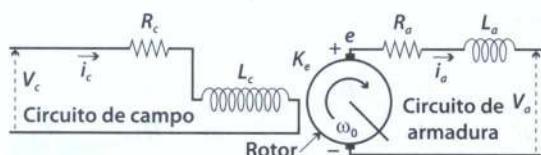


Figura 2.29 Gerador de c.c. controlado pelo circuito de campo. Velocidade  $\omega_0$  do rotor constante.

### 2.9 Simulação analógica com amplificadores operacionais

Um amplificador operacional (Figura 2.30) pode ser reduzido, essencialmente, a um amplificador eletrônico diferencial com duas entradas e uma saída, cujas principais características são:

(a) Entrada diferencial  $v_2(t) - v_1(t)$ . A entrada  $v_1$  é denominada entrada inversora (de sinal) e a  $v_2$ , entrada não inversora.

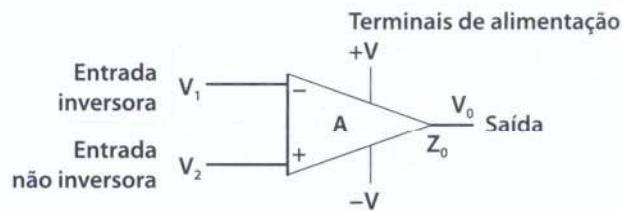


Figura 2.30 Amplificador operacional típico.

- (b) Impedância de entrada ( $Z_i$ ) muito elevada (valor infinito, no modelo ideal).
- (c) Baixa impedância de saída  $Z_o$  (desprezível, no modelo ideal).
- (d) Ganho de amplificação ( $A$ ) muito elevado (infinito, no modelo ideal).

Assim, sendo a impedância de entrada  $Z_i$  extremamente elevada (item b), a corrente de entrada através dessa impedância pode ser considerada desprezível nos circuitos habituais. Por outro lado, como o ganho  $A$  desses amplificadores é também muito elevado e sendo a tensão de saída  $v_o$  da ordem de uma ou pouco mais dezenas de volts, a tensão de entrada sobre  $Z_i$ , dada por  $\epsilon = v_2 - v_1 = v_o/A$ , deve ser muito pequena, desprezível mesmo, para que o amplificador não sature.

Os amplificadores operacionais são dispositivos eletrônicos muito versáteis. Com auxílio deles, é possível construir circuitos cujo modelo matemático seja igual ao modelo de vários sistemas elétricos, mecânicos, térmicos etc. Os principais circuitos básicos utilizando amplificadores operacionais são descritos a seguir.

### ■ 2.9.1 Amplificador inveror

No circuito da Figura 2.31,  $R_1$  é a resistência de entrada no circuito e  $R$ , a resistência de realimentação. A corrente nas duas é a mesma, pois, como vimos, a impedância de entrada  $Z_i$  do amplificador operacional é praticamente infinita. Logo:

$$u = R_1 i \quad v = -R i$$

$$v = -\frac{R}{R_1} u$$

Note que o terminal positivo (não inversor) está ligado à terra. Então, o potencial do terminal nega-

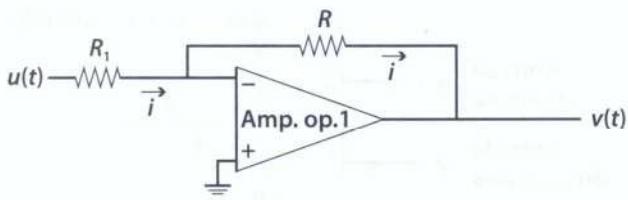


Figura 2.31 Amplificador inverter.

tivo (terminal inverter) é praticamente o mesmo de terra. Entretanto, a corrente  $i$  não vai para a terra. Ao contrário, ela está isolada da terra e prossegue através da resistência  $R$ . Esse comportamento do terminal inverter estabelece o conceito de terra virtual.

Seguindo a mesma linha de raciocínio do caso anterior, podemos obter o modelo matemático dos casos apresentados a seguir.

### ■ 2.9.2 Somador ponderado

$$u_1 = R_1 i' \quad i' + i'' = i$$

$$u_2 = R_2 i'' \quad \frac{u_1}{R_1} + \frac{u_2}{R_2} = - \frac{v}{R}$$

$$v = -Ri \quad v = -\left(\frac{R}{R_1}u_1 + \frac{R}{R_2}u_2\right)$$

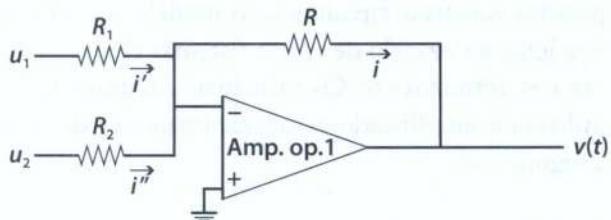


Figura 2.32 Somador ponderado.

### ■ 2.9.3 Integrador inverter

$$u = R_1 i$$

$$i = -C \frac{dv}{dt} = \frac{1}{R_1} u$$

ou

$$v = -\frac{1}{R_1 C} \int u dt$$

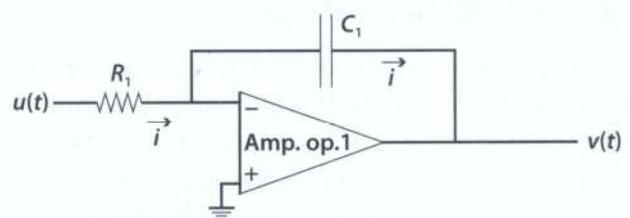


Figura 2.33 Integrador inverter.

### ■ 2.9.4 Bloco analógico de primeira ordem

Simula uma equação diferencial de 1ª ordem da forma

$$\frac{dv}{dt} + av = bu$$

em que  $u = u(t)$  é a variável de entrada e  $v = v(t)$  é a variável de saída. De fato, vejamos (Figura 2.34):

$$i = i' + i''$$

$$u = R_1 i$$

$$v = -Ri' \quad \rightarrow \quad i' = -\frac{v}{R}$$

$$v = -\frac{1}{C} \int_0^t i'' dt \quad \rightarrow \quad i'' = -C \frac{dv}{dt}$$

Substituindo  $i$ ,  $i'$  e  $i''$  na primeira dessas equações, obtemos:

$$\frac{u}{R_1} = -\left(\frac{v}{R} + C \frac{dv}{dt}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{RC} = -\frac{u}{R_1 C}$$

que representa uma equação diferencial linear de coeficientes constantes de primeira ordem como a indicada no início desta seção. Por comparação, temos

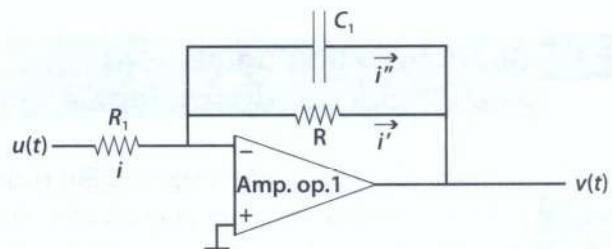


Figura 2.34 Bloco analógico de primeira ordem.

$a = \frac{1}{RC}$  e  $b = -\frac{1}{R_1 C}$ . Atenção apenas para o sinal negativo no segundo membro.

### ■ 2.9.5 Bloco analógico de segunda ordem

Um exemplo de blocos de 2<sup>a</sup> ordem construído com amplificadores operacionais é o indicado na Figura 2.35. As equações pertinentes são indicadas a seguir.

Considerando o caso anterior, relativo ao bloco de 1<sup>a</sup> ordem, podemos escrever

$$\frac{u}{R} - \frac{v}{R_3} = -\left(\frac{v'}{R_1} + C_1 \frac{dv'}{dt}\right)$$

e

$$\frac{v'}{R_2} = -C_2 \frac{dv}{dt}$$

Eliminando  $v'$  entre essas duas equações, obtemos

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R_1 C_1} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} v = \frac{1}{R_2 R C_1 C_2} u$$

que é uma equação diferencial linear de 2<sup>a</sup> ordem do tipo

$$\frac{d^2y}{dt^2} + p \frac{dy}{dt} + qy = bu$$

#### Exemplo 2.5

Simular o sistema mecânico da Figura 2.36 por meio de um bloco analógico como o estudo anteriormente. No caso, temos  $M = 1\text{kg}$ ,  $B = 2\text{ N/(m/s)}$  e  $K = 5\text{ N/m}$ .

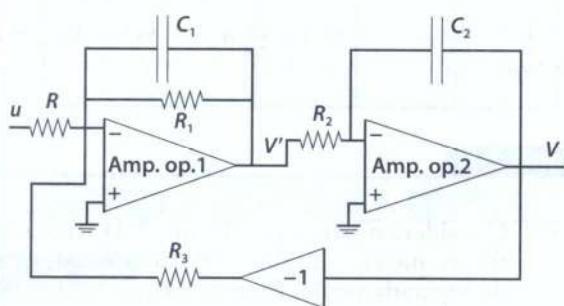


Figura 2.35 Bloco analógico de 2<sup>a</sup> ordem.

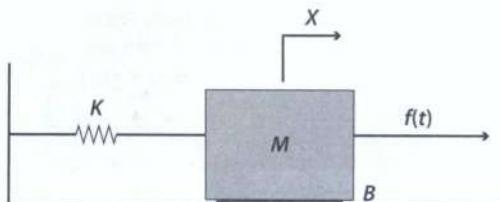


Figura 2.36 Sistema mecânico.

Solução:

A equação desse sistema mecânico é bem conhecida

$$M \frac{d^2x}{dt^2} + B \frac{dx}{dt} + Kx = f(t)$$

Ou, numericamente

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2 \frac{dx}{dt} + 5x = f(t)$$

A equação do bloco analógico de segunda ordem que vamos usar neste caso é

$$\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{1}{R_1 C_1} \frac{dv}{dt} + \frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} v = \frac{1}{R_2 R C_1 C_2} u$$

Comparando as duas últimas equações, podemos escrever:

$$\frac{1}{R_1 C_1} = 2$$

$$\frac{1}{R_2 R_3 C_1 C_2} = 5$$

$$\frac{1}{R_2 R C_1 C_2} = 1$$

Note que temos de determinar seis parâmetros, a saber,  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R$ ,  $C_1$  e  $C_2$  com apenas três equações. Podemos adotar arbitrariamente três valores.

Façamos inicialmente  $C_1 = C_2 = 10\text{ }\mu\text{F}$ . Resulta:

$$\frac{1}{10^{-5} R_1} = 2 \quad \text{ou} \quad R_1 = 50\text{ k}\Omega$$

$$\frac{1}{R_2 R_3 10^{-10}} = 5 \quad R_2 R_3 = 2 \cdot 10^9 \Omega^2$$

Podemos fazer também  $R_2 = 50\text{ k}\Omega$  e  $R_3 = 40\text{ k}\Omega$

Finalmente

$$\frac{1}{RR_2C_1C_2} = 1 \quad \frac{1}{5 \cdot 10^4 \cdot 10^{-10} R} = 1$$

$$R = 200\text{k}\Omega$$

Em resumo:  $R = 200\text{k}\Omega$ ;  $R_1 = R_2 = 50\text{k}\Omega$ ;  $R_3 = 40\text{k}\Omega$ ; e  $C_1 = C_2 = 10\mu\text{F}$ .

## Considerações finais

Este é um capítulo sobre modelagem dos sistemas, especialmente dos sistemas elétricos, mecânicos e eletromecânicos. Em boa parte, pode ser considerado uma revisão da análise dos circuitos elétricos e dos sistemas mecânicos incluindo movimentos de translação e de rotação em torno de eixos fixos. Nesse contexto, foi dada alguma ênfase à analogia entre os vários tipos de sistemas estudados, procurando-se mostrar que sistemas físicos (mesmo que sejam de naturezas diferentes) têm o mesmo modelo matemático. Isso permite analisar a dinâmica dos sistemas independentemente de sua interpretação física em cada caso. Quando dois sistemas físicos de diferen-

tes naturezas são representados pelo mesmo modelo matemático, dizemos que eles são sistemas análogos. No capítulo abordou-se, com algum detalhe, a analogia eletromecânica (que, aliás, pode ser estendida a outros tipos de sistemas: sistemas hidráulicos, sistemas gasosos etc. (uma boa referência é o livro de Katsuhiko Ogata, *Engenharia de controle moderno*, 4<sup>a</sup> ed., Capítulo 4, Pearson, 2003).

Na última seção do capítulo, há uma referência aos amplificadores operacionais. Estes são um componente muito útil em várias aplicações de controle, permitindo, em particular, a síntese de sistemas dinâmicos.

## Problemas propostos

1. Escreva as equações de análise de malhas dos circuitos das figuras 2.37 e 2.38.

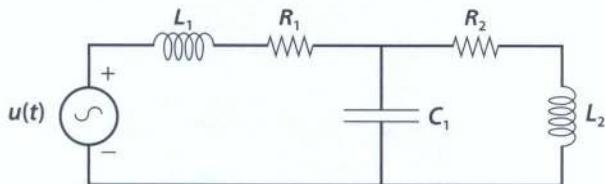


Figura 2.37

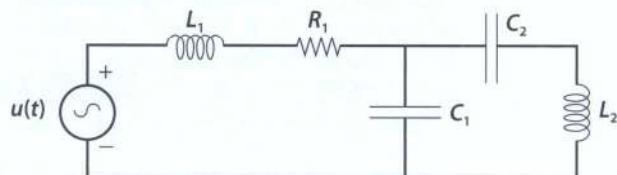


Figura 2.38

2. Indique os sistemas mecânicos de translação análogos aos circuitos das figuras 2.37 e 2.38.
3. Escreva as equações de análise de malhas do circuito da Figura 2.39. Desenhe também um sistema mecânico análogo ao circuito dado e escreva as respectivas equações em função da velocidade dos móveis.

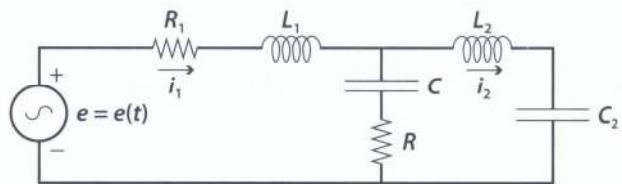


Figura 2.39

4. Escreva as equações de análise nodal do circuito da Figura 2.40. Desenhe também um sistema mecânico análogo ao circuito dado e escreva as respectivas equações em função da velocidade dos móveis.

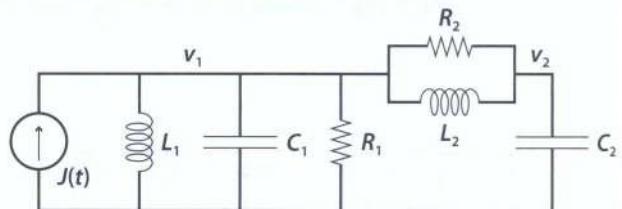


Figura 2.40

5. Considere o sistema da Figura 2.41. Indique as forças que atuam sobre o bloco móvel desenhado separadamente. Escreva a equação do movimento.

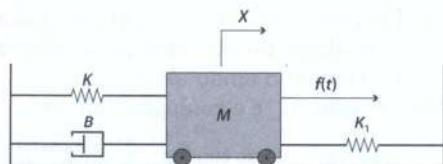


Figura 2.41

6. Um caminhão de massa  $M_1 = 2.500 \text{ kg}$  carrega um bloco de massa  $M_2 = 2.000 \text{ kg}$ , como indica a Figura 2.42. Para simplificar o modelo, considere desprezível a resistência do ar e a dos rolamentos. São dados ainda:  $K = 1.000 \text{ N/m}$  e  $B = 500 \text{ N/(m/s)}$ .
- Desenhe separadamente os dois blocos móveis e indique com clareza as forças que agem em cada um deles.
  - Escreva as equações diferenciais que constituem o modelo matemático do sistema.

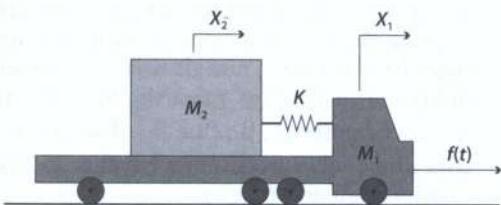


Figura 2.42

7. Considere o sistema da Figura 2.43: um caminhão transportando dois blocos ligados por molas e sujeitos a atrito viscoso na base (coeficientes  $B_1$  e  $B_2$ )
- Desenhe separadamente os vários blocos e indique as forças sobre cada um deles em função das abscissas e das velocidades dos móveis.
  - Escreva as equações mecânicas do sistema.
  - Desenhe também um circuito análogo.
- Não é necessário escrever as equações elétricas.

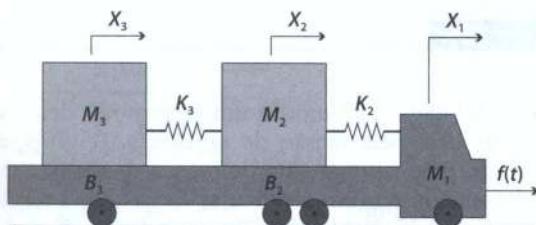


Figura 2.43

8. Escreva as equações do movimento do trem de três carros indicados na Figura 2.44. Desenhe dois circuitos análogos a esse sistema.

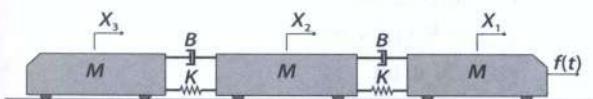


Figura 2.44

9. Considere o sistema da Figura 2.45. Indique as forças que atuam sobre cada um dos móveis dese-

nhados separadamente. Escreva para cada móvel a equação do movimento. Desenhe um circuito análogo a esse sistema mecânico.

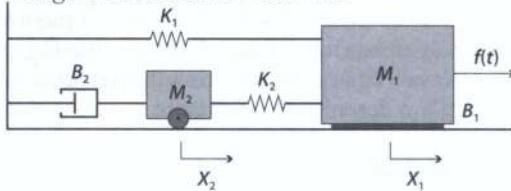


Figura 2.45

10. Escreva as equações de análise de malhas da Figura 2.46. Transforme essas equações em equações de um sistema mecânico de translação análogo (use a Tabela 2.2). Finalmente, desenhe um sistema mecânico análogo ao circuito. Ao que corresponde a tensão  $v(t)$  no sistema mecânico?

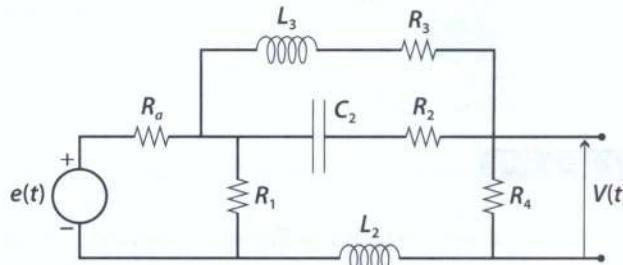


Figura 2.46

11. Para cada um dos sistemas mecânicos abaixo (figuras 2.47 e 2.48):
- Indique com clareza as forças que atuam em cada bloco.
  - Escreva as equações diferenciais do sistema.
  - Desenhe o circuito análogo a esse sistema (analogia tipo 1).

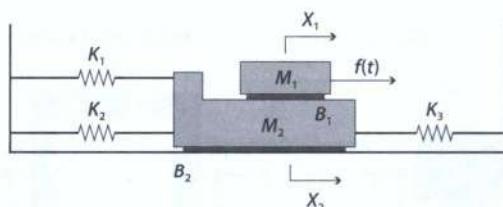


Figura 2.47

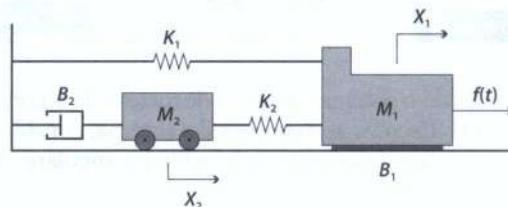


Figura 2.48

12. Na Figura 2.49 vemos um pêndulo de torção: um rotor cilíndrico de momento de inércia  $J$  suspenso por um fio de aço cuja constante elástica de torção

é  $K$ . O rotor está sujeito à ação de um momento de torção externo  $M(t)$  e a um conjugado resistente tipo viscoso (proporcional à velocidade angular  $\omega = \theta$ ) de coeficiente  $\beta$ . Determine o modelo matemático em função da velocidade angular  $\omega = (\theta)$ , escreva a equação de um circuito elétrico análogo e faça um desenho desse circuito.

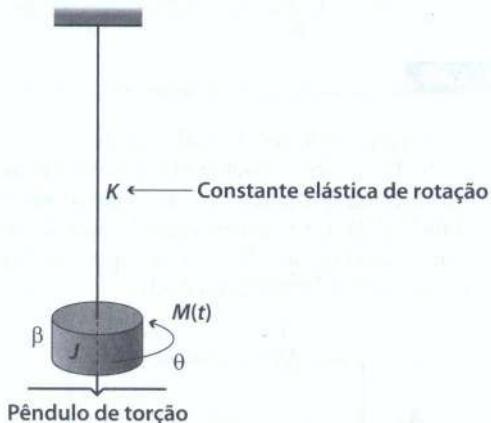


Figura 2.49

13. No sistema indicado na Figura 2.50 temos um rotor cilíndrico de momento de inércia  $J_1$  sujeito a um conjugado motor  $M(t)$ . Um eixo de constante elástica de torção  $K$  liga esse rotor a um segundo rotor, oco (visto em corte), de momento de inércia  $J_2$ . O sistema está apoiado em três mancais dotados de atrito viscoso de coeficientes  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ , conforme a figura. Desenhe separadamente os rotores e o eixo de ligação e indique as ações (momentos de torção) que atuam sobre cada um desses elementos. A partir daí, escreva as equações diferenciais do sistema (modelo matemático). O momento de inércia do eixo é desprezível.

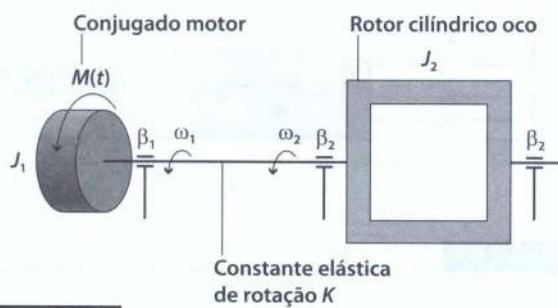


Figura 2.50

14. Dado o sistema mecânico de rotação da Figura 2.51:  
(a) Escreva as equações do sistema, considerando como variáveis as velocidades angulares  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  e  $\omega_4$ .

- (b) Desenhe um circuito elétrico análogo pela analogia do primeiro tipo. Considere as engrenagens como sendo ideais.

**Observação:**  $C_m$  é o conjugado motor.

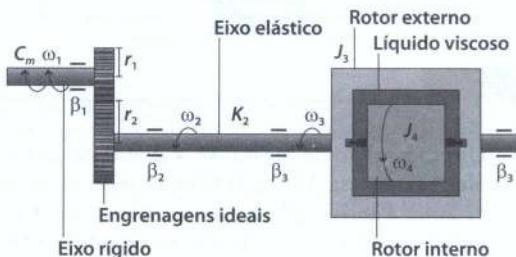


Figura 2.51

15. A Figura 2.52 mostra um rotor sujeito a um conjugado motor  $C_m(t)$ , acionando uma carga através de um jogo de engrenagens de redução  $\gamma = (r_1/r_2) < 1$ , (conforme a figura). Os eixos do sistema são rígidos e as engrenagens podem ser consideradas ideais, mas dotadas de momento de inércia ( $J_1$  e  $J_2$ ). Nos mancais, há atrito viscoso (de coeficientes  $\beta_0$ ,  $\beta_1$ ,  $\beta_2$  e  $\beta_3$ ). Escreva as equações diferenciais do sistema em função das velocidades angulares  $\omega_1$  e  $\omega_2$ .

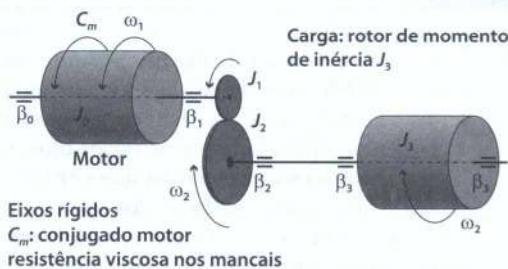


Figura 2.52

16. A Figura 2.53 mostra um servomotor de c.c. controlado pela tensão de armadura. A carga, além do próprio momento de inércia do rotor, é representada por um atrito tipo viscoso, de coeficiente  $\beta = 0,25 \text{ Nm}/(\text{rad/s})$ . Outros dados:  $R_a = 1\Omega$  e  $K_m = 0,25 \text{ V}/(\text{rad/s})$ . Determine a velocidade de rotação  $\omega$  do rotor, em regime permanente, quando a tensão aplicada à armadura for  $V = 20 \text{ V}$ . Desenhe também a característica de conjugado.

Fórmulas úteis:

$$V_a(t) = R_a i_a(t) + e(t)$$

$$e(t) = K_m \omega(t)$$

$$C_m(t) = K_m i_a(t)$$

$$C_m(t) = J\dot{\omega}(t) + \beta\omega(t)$$

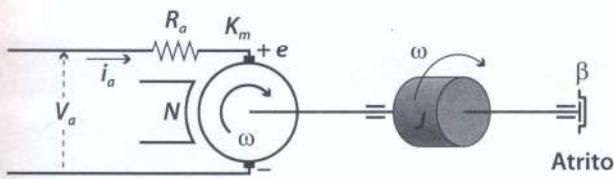


Figura 2.53

17. No circuito da Figura 2.54, tem-se um amplificador operacional associado a dois resistores e um capacitor. Determine a equação diferencial desse circuito que relaciona a variável de saída  $v_2(t)$  em função da variável de entrada  $v_1(t)$ . Dados numéricos:  $R_1 = 2 \text{ k}\Omega$ ;  $R = 20 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 10 \mu\text{F}$ .

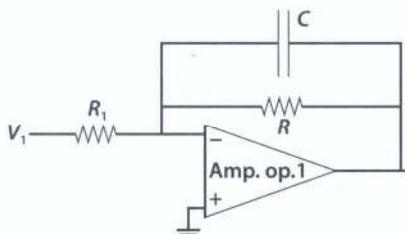


Figura 2.54

18. No circuito da Figura 2.55, que possui dois amplificadores operacionais, determine:
- A equação diferencial do primeiro amplificador, relacionando as variáveis  $v'(t)$  e  $v_1(t)$ .
  - A equação diferencial do segundo amplificador, relacionando as variáveis  $v_2(t)$  e  $v'(t)$ .
  - O modelo matemático do sistema por meio de uma equação diferencial de 2ª ordem, tendo como entrada a variável  $v_1(t)$  e como saída  $v_2(t)$ .

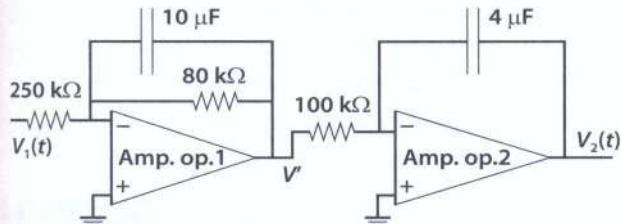


Figura 2.55

19. O circuito deste problema (Figura 2.56) é o mesmo do problema anterior, acrescido de um ramo de realimentação contendo um inversor de sinal e um resistor de  $10 \text{ k}\Omega$ . Determine para este caso a equação diferencial de 2ª ordem, tendo como entrada a variável  $v_1(t)$  e como saída  $v_2(t)$ .

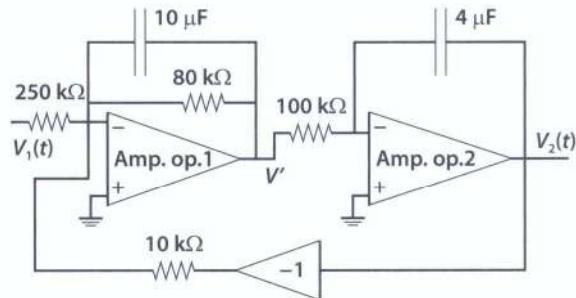


Figura 2.56

20. Simule o sistema da Figura 2.57 por meio de um circuito como o da Figura 2.58, considerando a força  $f(t)$  a variável de entrada e a velocidade  $v(t)$  a variável de saída.

Os valores numéricos são:  $M = 1 \text{ kg}$  e  $B = 0,5 \text{ N/(m/s)}$ . Escolha  $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$ .

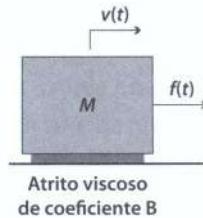


Figura 2.57

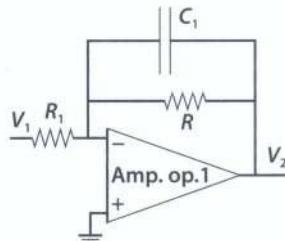
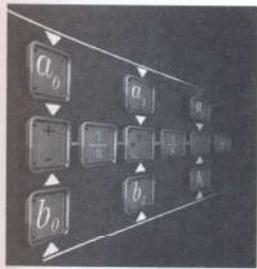


Figura 2.58

# capítulo 3



## Transformada de Laplace

Neste capítulo faremos uma breve revisão da transformada de Laplace. Uma de suas utilidades é facilitar a solução de equações diferenciais, transformando-as em equações algébricas. Também veremos adiante que o domínio da transformada de Laplace é bastante adequado para análises como a de estabilidade de sistemas e que é possível, inclusive, prever o desempenho de sistemas dinâ-

micos sem a necessidade de resolver de fato as equações diferenciais.

Lembramos ainda que, a partir deste capítulo, as variáveis das funções da frequência complexa  $s$  usadas nas transformadas de Laplace são representadas por letras maiúsculas, mas frequentemente sem indicação explícita dessa dependência. Exemplo:  $X(s)$  representada por  $X$ ,  $G(s)$ , por  $G$  etc.

### 3.1 Definição

Dada uma função  $f(t)$ , define-se:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt$$

em que  $\mathcal{L}[f(t)]$  denota a transformação de Laplace de  $f(t)$  e  $F(s)$ , a função de Laplace obtida. O limite inferior  $0^-$  indica que a integração deve ser feita imediatamente antes de  $t = 0$ , permitindo calcular a transformada mesmo de funções descontínuas nesse instante.

#### Exemplo 3.1

Obtenha a transformada de Laplace de  $f(t) = e^{-at}$  para  $t \geq 0$ .

Solução:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_{0^-}^{+\infty} e^{-st} e^{-at} dt = \\ &= \int_{0^-}^{+\infty} e^{-(s+a)t} dt = -\frac{e^{-(s+a)t}}{s+a} \Big|_{t=0}^{+\infty} = \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

A Tabela 3.1 mostra a transformada de Laplace de algumas funções usuais no contexto dos sistemas de controle. Sem perda de generalidade, supõe-se que os sinais considerados são sempre nulos para  $t < 0$ .

**Tabela 3.1** Tabela de transformadas de Laplace

$f(t), t \geq 0$	$F(s)$
$\delta(t)$	1
$h(t) = 1$	$\frac{1}{s}$
$w(t) = t$	$\frac{1}{s^2}$
$\alpha(t) = \frac{1}{2}t^2$	$\frac{1}{s^3}$
$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1}$	$\frac{1}{s^n}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$

(continua)

(continuação)

$\frac{1}{(n-1)!} t^{n-1} e^{-at}$	$\frac{1}{(s+a)^n}$
$\sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos(\omega t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \sin(\omega t)$	$\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}$
$e^{-at} \cos(\omega t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$

Notas:

1.  $\delta(t)$  = a função impulso unitário
2.  $h(t)$  = a função degrau unitário
3.  $w(t)$  = a função rampa unitária
4.  $\alpha(t)$  = a função parábola unitária

## 3.2 Propriedades

As propriedades das transformadas de Laplace podem ser demonstradas facilmente e algumas das mais relevantes para o nosso estudo são apresentadas na Tabela 3.2.

Tabela de propriedades da transformada de Laplace

Teorema	Propriedade
$\mathcal{L}[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(s) + \beta F_2(s)$	Linearidade
$\mathcal{L}[f(t-a)] = e^{-as} F(s)$	Translação no tempo
$\mathcal{L}[e^{-at} f(t)] = F(s+a)$	Translação na frequência
$\mathcal{L}\left[f\left(\frac{t}{a}\right)\right] = aF(as)$	Escala de tempo
$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF(s)}{ds}$	Multiplicação pelo tempo

(continua)

(continuação)

$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-)$	Diferenciação
$\mathcal{L}\left[\frac{d^2f(t)}{dt^2}\right] = s^2 F(s) - sf(0^-) - f'(0^-)$	
$\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{F(s)}{s}$	Integração
$\lim_{t \rightarrow \infty} [f(t)] = \lim_{s \rightarrow 0} [sF(s)]$	Teorema do valor final <sup>1</sup>
$\lim_{t \rightarrow 0^+} [f(t)] = f(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} [sF(s)]$	Teorema do valor inicial <sup>2</sup>

Notas

1. A função  $sF(s)$  deve ser estável, exceção feita a um único polo na origem.
2.  $f(t)$  não pode conter impulsos (nem suas derivadas) em  $t=0$ .

## 3.3 Transformada inversa

A transformada inversa de Laplace, que permite obter  $f(t)$  a partir de  $F(s)$  é dada por:

$$f(t > 0) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-\infty j}^{c+j\infty} F(s) e^{st} ds$$

Entretanto, a maneira prática de obter  $f(t)$  a partir de  $F(s)$  é usando as tabelas 3.1 e 3.2. Nesse contexto, o método da decomposição em frações parciais permite, muitas vezes, transformar a representação de  $F(s)$  de forma a permitir o uso da tabela de transformadas e de propriedades.

### Caso 1

$F(s)$  tem polos distintos.

$$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{a_m s^m + a_{m-1} s^{m-1} + \dots + a_1 s + 1}{(s + p_1)(s + p_2) \dots (s + p_n)} = \frac{r_1}{s + p_1} + \frac{r_2}{s + p_2} + \dots + \frac{r_n}{s + p_n}$$

Em que  $r_i$ ,  $1 \leq i \leq n$  e  $m < n$  são constantes denominadas resíduos associados aos polos  $-p_i$ . Para a determinação dos

valores  $r_i$ , podemos somar as frações parciais e comparar o numerador resultante com o polinômio  $N(s)$ , formando um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os resíduos. Como esse procedimento pode ser trabalhoso, ele é mais indicado para uma solução computacional. Alternativamente, existe um método menos trabalhoso para a solução manual.

$$r_i = (s + p_i) \left. \frac{N(s)}{D(s)} \right|_{s=-p_i}$$

As duas formas de cálculo dos resíduos apresentadas são válidas para polos reais ou complexos.

### Exemplo 3.2

Obtenha a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2 + 3s + 2}$$

Solução:

$$F(s) = \frac{2s+1}{s^2 + 3s + 2} = \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} = \frac{r_1}{s+1} + \frac{r_2}{s+2}$$

$$r_1 = (s+1) \left[ \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \right] \Big|_{s=-1} =$$

$$\frac{2(-1)+1}{(-1)+2} = -1$$

$$r_2 = (s+2) \left[ \frac{2s+1}{(s+1)(s+2)} \right] \Big|_{s=-2} =$$

$$\frac{2(-2)+1}{(-2)+1} = 3$$

Portanto,

$$F(s) = \frac{-1}{s+1} + \frac{3}{s+2}$$

$$f(t) = -e^{-t} + 3e^{-2t}, \quad t \geq 0$$

### Exemplo 3.3

Determine a transformada inversa de Laplace de  $F(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10}$

Solução:

$$F(s) = \frac{10}{s^2 + 2s + 10} = \frac{10}{(s+1-j3)(s+1+j3)}$$

ou

$$F(s) = \frac{10}{(s+1)^2 + 9} = \frac{10}{3} \frac{3}{(s+1)^2 + 9}$$

Usando a Tabela 3.1, de transformadas inversas, e o teorema da translação na frequência, obtemos a resposta

$$f(t) = \frac{10}{3} e^{-t} \sin(3t), \quad t \geq 0$$

### Exemplo 3.4

Obtenha a transformada inversa de Laplace de

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

Solução:

$$F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2s + 10)} = \frac{1}{s} + \frac{Bs + C}{s^2 + 2s + 10}$$

ou

$$F(s) = \frac{s^2 + 2s + 10 + Bs^2 + Cs + 10}{s(s^2 + 2s + 10)} = \frac{(B+1)s^2 + (C+2)s + 10}{s(s^2 + 2s + 10)}$$

Comparando os coeficientes de mesma potência do numerador dessa última expressão com a fórmula original, resulta:  $B = -1$  e  $C = -2$ . Logo,

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2 + 2s + 10}$$

que pode ser escrita sob a forma

$$F(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+1}{s^2 + 2s + 10} - \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

Mais uma vez, usando a Tabela 3.1 e o teorema da translação na frequência, obtemos a resposta:

$$f(t) = 1 - \frac{\sqrt{10}}{3} e^{-t} \cos(3t - 18,44^\circ), t \geq 0$$

## Caso 2

$F(s)$  tem polos múltiplos.

Similarmente ao caso anterior, para a determinação dos valores  $r_i$ , podemos somar as frações parciais e comparar o numerador resultante com o polinômio  $N(s)$ , formando um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os resíduos. Como alternativa, existe um método sugerido para a solução manual, porém não tão simples como o do caso anterior. Por isso, sugere-se uma terceira forma, que é um procedimento que recorre ao caso anterior.

### Exemplo 3.5

Decomponha  $F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3}$  em frações parciais.

Solução:

A ideia do procedimento é colocar em evidência os fatores múltiplos e recolocá-los depois da expansão em frações parciais.

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} =$$

$$\left[ \frac{1}{(s+1)^2} \right] \left[ \frac{1}{s(s+1)} \right] = F_1(s) F_2(s)$$

Faz-se então a decomposição de  $F_2(s)$ :

$$F_2(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Um dos fatores repetidos de  $F_1(s)$  é colocado de volta:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \\ \left[ \frac{1}{(s+1)^2} \right] \left[ \frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2} \right] = F_3(s) F_4(s)$$

Faz-se então a decomposição das parcelas de  $F_4(s)$ . Note que, neste caso, a segunda parcela de  $F_4(s)$  não precisa mais ser decomposta:

$$F_{41}(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

O último fator repetido de  $F_1(s)$  é então colocado de volta:

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \\ \left[ \frac{1}{s(s+1)} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} \right]$$

Faz-se então a decomposição da única parcela que ainda precisa ser expandida.

$$F_{51}(s) = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

Obtém-se então a decomposição completa de  $F(s)$ :

$$F(s) = \frac{1}{s(s+1)^3} = \\ \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{1}{(s+1)^3} \right]$$

## 3.4 Solução de equações diferenciais

Por meio da transformada de Laplace obtemos a solução completa de equações diferenciais lineares.

**Exemplo 3.6**

Dada a equação diferencial  $RCy'(t) + y(t) = x(t)$  que descreve o comportamento de um circuito  $RC$  no qual  $x(t)$  é a tensão de entrada aplicada sobre a associação e  $y(t)$  é a tensão sobre o capacitor, obtenha a solução  $y(t)$  em função da condição inicial  $y(0)$ , para uma entrada tipo degrau unitário  $h(t)$ .

Solução:

Tomando a transformada de Laplace de ambos os lados da equação diferencial

$$\mathcal{L}\left[RC \frac{dy(t)}{dt} + y(t)\right] = \mathcal{L}[x(t)]$$

$$RC(sY(s) - y(0)) + Y(s) = X(s)$$

Para uma entrada tipo degrau unitário  $h(t)$ ,

$$X(s) = \frac{1}{s}$$

$$(RCs + 1)Y(s) = RCy(0) + \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{RC}{RCs + 1} y(0) + \frac{1}{s(RCs + 1)} = \\ &= \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} y(0) + \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} = \\ &= \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} y(0) + \left[ \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \right] \end{aligned}$$

Portanto,

$$y(t) = y(0) e^{-\frac{t}{RC}} + 1 - e^{-\frac{t}{RC}}, t \geq 0$$

**Considerações finais**

O capítulo foi iniciado com uma referência às principais aplicações das transformadas de Laplace, sua definição, ilustrada por um exemplo e uma tabela das principais transformadas. Deliberadamente não foram apresentadas as demonstrações das transformadas re-

lacionadas na tabela. Foi apresentada também uma tabela de transformadas inversas de Laplace e das principais propriedades dessa transformada. Em seguida, foi apresentado um exemplo de aplicação das transformadas de Laplace na solução de equações diferenciais.

**Problemas propostos**

Determine a transformada de Laplace das seguintes funções, para  $t \geq 0$ .

$$1. f(t) = 5e^{-t}$$

$$2. f(t) = 2e^{-0.5t}$$

$$3. f(t) = 11e^t$$

$$4. f(t) = 6e^{-(0.2+3t)}$$

$$5. f(t) = e^{-t} - e^{-2t}$$

$$6. f(t) = 2e^{-5t} - 5e^{-2t}$$

$$7. \operatorname{senh}(at) = \frac{e^{at} - e^{-at}}{2}$$

$$8. \cosh(at) = \frac{e^{at} + e^{-at}}{2}$$

$$9. f(t) = e^{j2t} - e^{-j2t}$$

$$10. f(t) = 7e^{-3t} - 3e^{-7t}$$

$$11. f(t) = te^{-2t}$$

$$12. f(t) = t^2$$

$$13. f(t) = t^2 e^{-2t}$$

$$14. f(t) = t^3 e^{-3t}$$

$$15. f(t) = e^{-t} \operatorname{sen}(3t)$$

$$16. f(t) = e^{-t} \cos(3t)$$

17.  $f(t) = \sin(3t + \frac{\pi}{2})$

18.  $f(t) = \sin(3t + \frac{\pi}{4})$

19.  $f(t) = \sin(5t + \frac{\pi}{6})$

20.  $f(t) = \cos(100t + 30^\circ)$

21.  $f(t) = 2(2e^{-2t} - e^{-3t})$

22.  $f(t) = e^{-t}(3\sinh(2t) - 5\cosh(2t))$

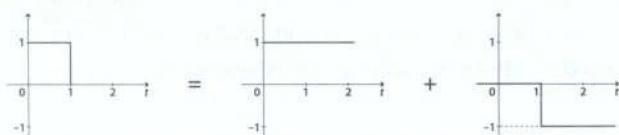
### Sinais descritos graficamente

23. Um pulso retangular  $p(t)$  pode ser entendido como a soma de dois degraus, como indica a Figura 3.1. No caso dessa figura, podemos escrever:

$$p(t) = b(t) - b(t - 1)$$

A transformada de Laplace desse pulso será, então,

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} = \frac{1 - e^{-s}}{s}$$



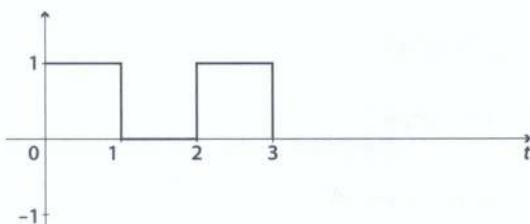
**Figura 3.1** Pulso retangular.

24. Um duplo pulso retangular como o da Figura 3.2 é representado por:

$$p(t) = b(t) - b(t - 1) + b(t - 2) - b(t - 3)$$

cuja transformada de Laplace é:

$$P(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1}{s}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-3s} = \frac{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s}}{s}$$



**Figura 3.2** Duplo pulso retangular.

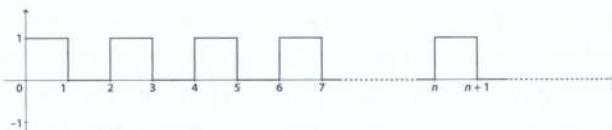
25. No caso de uma série infinita de pulsos quadrados, formando uma onda de amplitude unitária e período  $T=2$ , como se vê na Figura 3.3, a representação por Laplace será:

$$P(s) = \frac{1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + e^{-4s} - e^{-5s} + \dots}{s}$$

Note que o numerador da fração é uma progressão geométrica cujo primeiro termo é 1 e a razão é  $-e^{-s}$ . Lembrando que a soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente infinita, cujo primeiro termo é  $a$  e a razão  $q$  é dada pela expressão  $\frac{a}{1-q}$ , pode ser escrita, no caso acima ( $a = 1$  e  $q = -e^{-s}$ ):

$$P(s) = \frac{1}{s(1 + e^{-s})},$$

que é a representação pela transformada de Laplace da série infinita de pulsos quadrados da Figura 3.3.

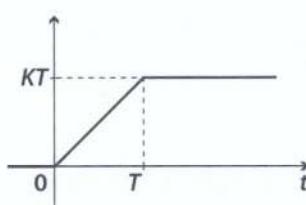


**Figura 3.3** Série infinita de pulsos quadrados.

26. Desenhe o gráfico da seguinte função e determine a respectiva transformada de Laplace.

$$p(t) = b(t) - 2b(t - 2) + b(t - 4)$$

27. Desenhe o gráfico função do tempo indicada na Figura 3.4 e determine a respectiva transformada de Laplace.



**Figura 3.4**

28. Determine a expressão no domínio do tempo e a transformada de Laplace do sinal representado na Figura 3.5.

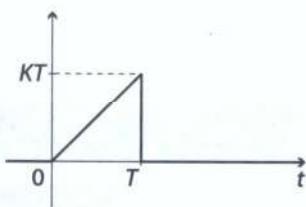


Figura 3.5

29. Determine a expressão no domínio do tempo e a transformada de Laplace do sinal representado na Figura 3.6.

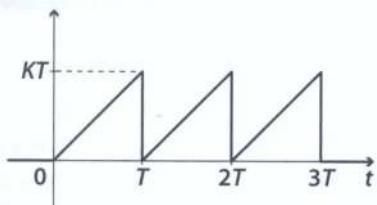


Figura 3.6

### Transformadas inversas de Laplace

30.  $F(s) = \frac{5}{s(s+2)}$

31.  $F(s) = \frac{12}{(s^2 + 7s + 12)}$

32.  $F(s) = \frac{12}{s(s+3)(s+4)}$

33.  $F(s) = \frac{45}{s(s^2 + 11s + 18)}$

34.  $F(s) = \frac{10(s+3)}{(s+2)(s+4)}$

35.  $F(s) = \frac{4}{s^2 + 5s + 80}$

36.  $F(s) = \frac{10}{s(s^2 + 2s + 2)}$

37.  $F(s) = \frac{s}{s^2 + 4s + 5}$

38.  $F(s) = \frac{5}{(s+1)(s+2)^2}$

39. Determine a decomposição em frações parciais de

$$F(s) = \frac{s+1}{s^3(s+2)}$$

### Solução de equações diferenciais

40. Dada a equação diferencial abaixo, determine a expressão da sua solução temporal  $y(t)$  através da transformada de Laplace para uma entrada  $x(t)$  tipo degrau unitário e condições iniciais nulas.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 10\frac{dy(t)}{dt} + 24y(t) = 4x(t)$$

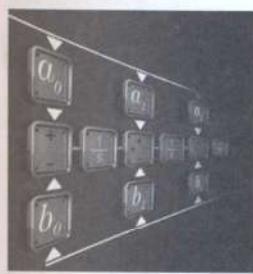
41. Dada a equação diferencial abaixo, determine a expressão da sua solução temporal  $y(t)$  através da transformada de Laplace para uma entrada  $x(t)$  tipo degrau unitário e condições iniciais nulas.

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 9\frac{dy(t)}{dt} + 14y(t) = 2x(t)$$

42. Dada a equação diferencial abaixo, determine a expressão da sua solução temporal  $y(t)$  através da transformada de Laplace para uma entrada  $x(t)$  tipo degrau unitário  $y(0) = 1$  e  $\dot{y}(0) = 0$ .

$$2\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 20\frac{dy(t)}{dt} + 32y(t) = 2x(t)$$

# capítulo 4



## Função de transferência

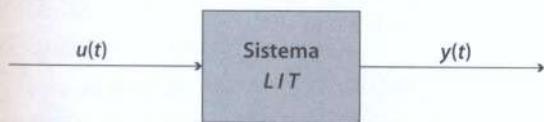
Neste capítulo utilizaremos a transformada de Laplace para introduzir um modelo matemático de suma importância no estudo da dinâmica dos sistemas: a função de transferência. Ela é própria dos sistemas lineares invariantes no tempo (sistemas LIT) dotados de uma única entrada e uma única saída. Como veremos, ela interliga diretamente a variável de

saída à variável de entrada e é por isso denominada, às vezes, modelo entrada-saída. Embora haja outras formas de modelos, até mais poderosos e menos restritivos que esse, a função de transferência é muito útil no estudo das propriedades, da dinâmica e da estabilidade de grande número de sistemas habituais, como veremos a seguir.

### 4.1 Definição de função de transferência

Considere um sistema linear de parâmetros concentrados, invariante no tempo (sistemas LIT), tendo apenas uma entrada e uma saída. O modelo matemático de tal sistema pode sempre ser expresso por apenas uma equação diferencial linear, ordinária, de coeficientes constantes, relacionando diretamente as variáveis de saída e de entrada. O conceito de função de transferência aplica-se especificamente a sistemas como esse.

Suponhamos que o sistema da Figura 4.1 satisfaça essas condições e que, além disso, sejam nulas as condições iniciais (*C.I. = 0*). Então, o modelo matemático desse sistema será:



Sistema linear invariante no tempo de entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$ .

Figura 4.1

$$\left\{ \begin{array}{l} q_n y^{(n)}(t) + q_{n-1} y^{(n-1)}(t) + \dots + q_2 \ddot{y}(t) + q_1 \dot{y}(t) + q_0 y(t) = \\ p_m u^{(m)}(t) + p_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + p_1 \dot{u}(t) + p_0 u(t) \end{array} \right. \quad (4.1)$$

onde:

$$y^{(n)}(t) = \frac{d^n}{dt^n} y(t) \quad y^{(n-1)}(t) = \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} y(t) \quad \dots \quad \dot{y}(t) = \frac{d}{dt} y(t)$$

$$u^{(m)}(t) = \frac{d^m}{dt^m} u(t) \quad u^{(m-1)}(t) = \frac{d^{m-1}}{dt^{m-1}} u(t) \quad \dots \quad \dot{u}(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

e os coeficientes

$q_i$  com  $i = 0, 1, 2, 3, \dots, n$  e  $p_j$  com  $j = 0, 1, 2, 3, \dots, m$

são constantes e dependem essencialmente dos parâmetros do sistema considerado.

Em geral, para os sistemas reais,  $n \geq m$  (sistemas próprios).

O valor de  $n$  indica a ordem da equação, que é também a ordem do sistema.

Sendo nulas as condições iniciais, a transformada de Laplace da Equação 4.1 resulta:

$$\begin{cases} (q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0) Y(s) = \\ (p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_2 s^2 + p_1 s + p_0) U(s) \end{cases} \quad (4.2)$$

onde

$$Y(s) = \mathcal{L}[y(t)], \quad sY(s) = \mathcal{L}[y'(t)], \\ s^2Y(s) = \mathcal{L}[y''(t)], \dots$$

$$U(s) = \mathcal{L}[u(t)], \quad sU(s) = \mathcal{L}[u'(t)], \\ s^2U(s) = \mathcal{L}[u''(t)], \dots$$

Definindo-se agora os polinômios:

$$Q(s) = q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0 \quad (4.3a)$$

e

$$P(s) = p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_2 s^2 + p_1 s + p_0 \quad (4.3b)$$

podemos escrever a Equação 4.2 sob a forma:

$$Q(s) Y(s) = P(s) U(s)$$

ou

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (4.4)$$

Note, na igualdade acima, que, embora o primeiro membro seja uma relação entre sinais de saída e de entrada, o segundo membro é uma relação de polinômios em  $s$ , que só dependem do sistema considerado. Esse fato permite introduzir a seguinte definição:

Denomina-se *função de transferência*  $G(s)$  de um sistema linear, de parâmetros concentrados, invariantes no tempo e de entrada e saída únicas a relação entre as transformadas de Laplace da variável de saída e da variável de entrada, supondo condições iniciais nulas.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \quad (4.5)$$

De acordo com a equação 4.4, podemos escrever também:

$$G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \quad (4.6)$$

Como os coeficientes dos polinômios  $P(s)$  e  $Q(s)$  só dependem dos parâmetros e da configuração do sistema, a função de transferência caracteriza esse sistema.

### Exemplo 4.1

Determine a função de transferência do circuito da Figura 4.2, considerando  $v_1(t)$  como entrada e  $v_2(t)$  como saída.

Solução:

$$v_1 = v_1(t)$$

$$v_2 = v_2(t)$$

Transformando essas variáveis por Laplace e escrevendo a equação do circuito, vem

$$V_2(s) = \frac{R}{R + (1/Cs)} V_1(s) = \frac{RCs}{RCs + 1} V_1(s)$$

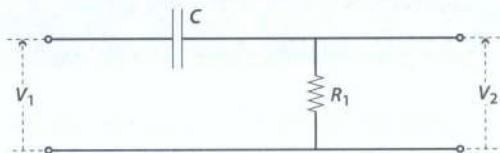
$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = G(s) = \frac{RCs}{RCs + 1}$$

Neste exemplo, o polinômio do denominador é

$$Q(s) = RCs + 1$$

e no numerador, temos

$$P(s) = RCs.$$



**Figura 4.2** Circuito.

### Exemplo 4.2

A Figura 4.3 representa um sistema formado por um bloco de massa  $M$ , apoiado em um plano horizontal dotado de atrito viscoso de coeficiente  $B$  e preso por uma mola de constante elástica  $K$ . A força aplicada no bloco é  $f(t)$ .

Determine a função de transferência desse sistema considerando  $f(t) = u(t)$  como variável de entrada e a abscissa  $y = y(t)$  como variável de saída.

Dados numéricos (em unidades do sistema internacional – S.I.):

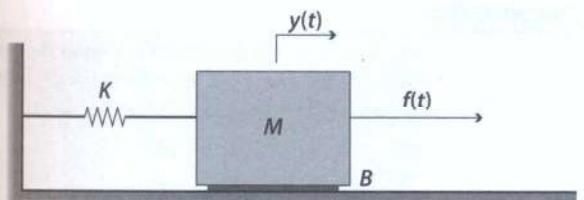
$$M = 2,0$$

$$B = 1,6$$

$$K = 0,24$$

Solução:

O modelo matemático do sistema é bem conhecido:



**Figura 4.3** Sistema formado por um bloco de massa.

$$M\ddot{y} + B\dot{y} + Ky = u(t)$$

ou numericamente

$$y + 0,8 \dot{y} + 0,12 y = 0,5u(t)$$

Transformando por Laplace e considerando condições iniciais nulas ( $C.I. = 0$ ), vem

$$(s^2 + 0,8s + 0,12) Y(s) = 0,5 U(s)$$

Portanto,

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{0,5}{s^2 + 0,8s + 0,12}$$

O polinômio do denominador é, então,  $Q(s) = s^2 + 0,8s + 0,12$ , e o polinômio do numerador se reduz a uma constante,  $P(s) = 0,5$ .

## 4.2 Definições adicionais – polos e zeros

Como vimos, a função de transferência é uma relação de polinômios da variável  $s$  (denominada frequência complexa  $s = \sigma + j\omega$ ).

Vamos supor sempre, salvo aviso em contrário, que na função de transferência  $G(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$ , os polinômios  $P(s)$  e  $Q(s)$  sejam irreduzíveis, isto é, não possuam fatores comuns.

O polinômio  $Q(s)$  do denominador da função de transferência denomina-se polinômio característico do sistema, e o grau  $n$  de  $Q(s)$  é a ordem do sistema.

A equação  $Q(s) = 0$  é a equação característica do sistema. As raízes  $s_1, s_2 \dots s_n$  da equação característica, denominam-se polos do sistema.

A equação  $P(s) = 0$ , onde  $P(s)$  é o polinômio do numerador da função de transferência, não tem nome especial, mas as raízes  $s'_1, s'_2 \dots s'_m$ , dessa equação, são os zeros do sistema.

Os polos e zeros de um sistema, que podem ser reais ou complexos, têm representação geométrica no plano  $s = \sigma + j\omega$ , sendo que os polos são representados por um  $x$ , enquanto os zeros são representados por um pequeno círculo ( $o$ ).

## 4.3 Propriedades da função de transferência

A função de transferência de um sistema apresenta as unidades necessárias para relacionarmos saída e entrada, mas não fornece informação adicional quanto à natureza física do sistema. Sistemas fisicamente diferentes podem ter a mesma função de transferência. São denominados sistemas análogos.

Uma propriedade importante da função de transferência é permitir determinar facilmente a resposta  $Y(s)$  do sistema no domínio da frequência, quando conhecida a variável de entrada  $U(s)$ , também no domínio da frequência:

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (4.7)$$

O sistema definido pela função de transferência  $G(s)$ , tendo como entrada  $U(s)$  e como saída  $Y(s)$ , pode ser representado no domínio da frequência da forma indicada na Figura 4.4.

Pode-se provar facilmente que a função de transferência de um sistema é a resposta desse mesmo sistema, no domínio da frequência, a um impulso unitário  $[\delta(t)]$ . De fato, sendo

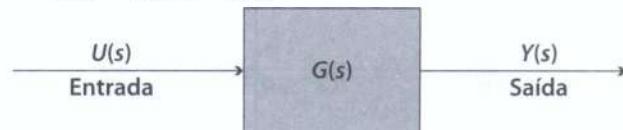
$$u(t) = \delta(t) = \text{impulso unitário}$$

resulta

$$\mathcal{L}[u(t)] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Portanto, nesse caso,

$$Y(s) = G(s) 1 = G(s)$$



**Figura 4.4** Representação no domínio de frequência.

**Exemplo 4.3**

Considere o sistema visto no Exemplo 4.2, cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{0,5}{s^2 + 0,8s + 0,12}$$

Escreva a equação característica e determine os polos e zeros de  $G(s)$ . Determine também a resposta do sistema a uma força de impacto correspondente a um impulso unitário.

Solução:

Sendo  $Q(s) = s^2 + 0,8s + 0,12$ , a equação característica será escrita por:

$$s^2 + 0,8s + 0,12 = 0 \quad \text{ou} \quad (s + 0,2)(s + 0,6) = 0$$

Como a equação característica é do segundo grau em  $s$ , o sistema é de segunda ordem e tem, portanto, dois polos. Os polos são as raízes de  $Q(s)$ . Logo,

$$s_1 = -0,2 \quad s_2 = -0,6$$

Note que os polos são reais e negativos (Figura 4.5). Por outro lado, sendo o polinômio do numerador  $P(s) = 0,5$ , a função de transferência não possui zeros.

Quanto à resposta ao impulso unitário, sabemos que no domínio da frequência ela é a própria função de transferência. Basta acharmos a transformada inversa dessa função para determinar a resposta impulsiva, no domínio do tempo.

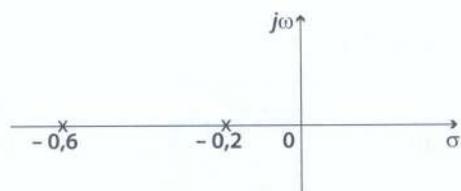
$$G(s) = \frac{0,5}{(s + 0,2)(s + 0,6)}$$

ou

$$G(s) = \frac{1,25}{s + 0,2} - \frac{1,25}{s + 0,6}$$

Resulta

$$g(t) = E^{-1}[G(s)] = 1,25(e^{-0,2t} - e^{-0,6t}), \text{ para } t \geq 0$$



**Figura 4.5**

Representação dos polos de  $G(s)$  no plano  $s$ .

**Exemplo 4.4**

Determine a função de transferência de um sistema cujas variáveis de entrada  $u = u(t)$  e de saída  $y = y(t)$  são relacionadas pela equação:

$$\frac{d^3y}{dt^3} + 9\frac{d^2y}{dt^2} + 23\frac{dy}{dt} + 15y =$$

$$2\frac{d^2u}{dt^2} + 12\frac{du}{dt} + 16u$$

Solução:

Para obter a função de transferência devemos transformar por Laplace a equação diferencial do sistema, ou seja:

$$(s^3 + 9s^2 + 23s + 15)Y(s) =$$

$$(2s^2 + 12s + 16)U(s)$$

e

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s^2 + 6s + 8)}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$$

Assim, o polinômio característico será:

$$Q(s) = s^3 + 9s^2 + 23s + 15 =$$

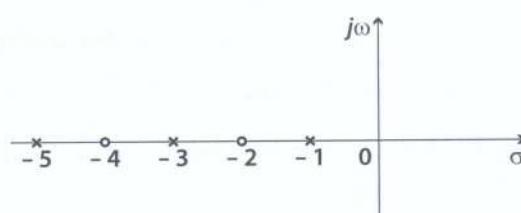
$$(s + 1)(s + 3)(s + 5)$$

$$\text{e os polos (Figura 4.6): } s_1 = -1 \quad s_2 = -3 \\ s_3 = -5$$

Também:

$$P(s) = s^2 + 6s + 8 = (s + 2)(s + 4)$$

$$\text{e os zeros } s_1' = -2, s_2' = -4$$



**Figura 4.6**

Polos e zeros de  $G(s)$  no plano  $s$ .

**Exemplo 4.5**

O bloco de massa  $M$  é suportado por molas e amortecedores que o ligam a uma base fixa e a uma plataforma horizontal  $P$ , que descreve uma lei de movimento prefixada  $u(t)$  conforme a Figura 4.7.

- (a) Escreva as equações do movimento do bloco  $M$ .

**Figura 4.5**

Representação dos polos de  $G(s)$  no plano  $s$ .

(b) Determine a função de transferência  $G(s) = Y(s)/U(s)$ .

(c) Considerando os dados indicados abaixo, obtenha a função de transferência com coeficientes numéricos.

(d) Determine os polos e os zeros do sistema.

Dados:  $M = 1,5 \text{ kg}$        $B = 2,0 \text{ N/(m/s)}$   
 $K = 1,0 \text{ N/m}$        $B_1 = 1,0 \text{ N/(m/s)}$   
 $K_1 = 2,0 \text{ N/m}$

Solução:

(a) A Figura 4.8 indica o diagrama do corpo livre  $M$ , que permite escrever as equações dinâmicas do movimento.

Assim, com  $u = u(t)$  e  $y = y(t)$ , temos

$$M\ddot{y} = K_1(u - y) + B_1(\dot{u} - \dot{y}) - Ky - B\dot{y}$$

ou

$$M\ddot{y} = (B + B_1)\dot{y} + (K + K_1)y = B_1\dot{u} + K_1u$$

(b) Transformando por Laplace a equação acima, vem:

$$[Ms^2 + (B + B_1)s + (K + K_1)]Y(s) = (B_1 + K_1)U(s)$$

portanto

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{B_1s + K_1}{Ms^2 + (B + B_1)s + (K + K_1)}$$

Note que os coeficientes dos polinômios  $Q(s)$  e  $P(s)$  são formados pelos parâmetros  $M, B, B_1, K, K_1$ , do sistema.

Sendo  $Q(s)$  um polinômio do 2º grau em  $s$ , o sistema é de segunda ordem.

(c) Substituindo os parâmetros por seus valores numéricos

$$G(s) = \frac{s+2}{1,5s^2 + 3s + 3}$$

(d) Determinação de polos e zeros.

$$Q(s) = 1,5s^2 + 3s + 3 = 0$$

ou

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

Polos:  $s_1 = -1 + j$  e  $s_2 = -1 - j$

Zero:  $s_1' = -2$

Note que nesse caso há um par de polos complexos e um zero real, todos situados no semiplano esquerdo do plano  $s$  (Figura 4.9).

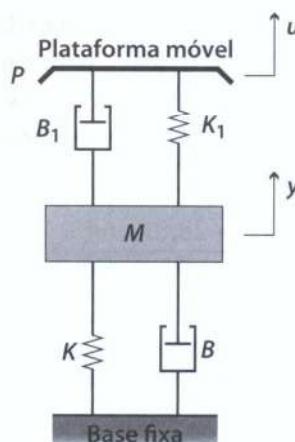


Figura 4.7 Sistema mecânico.

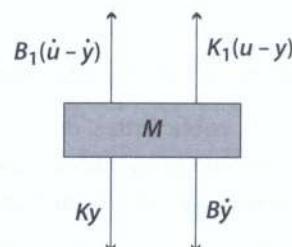


Figura 4.8 Diagrama do corpo livre  $M$ .

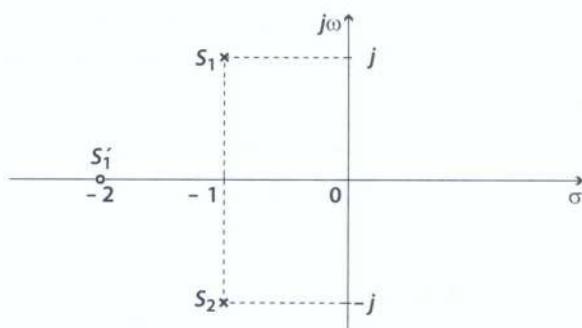


Figura 4.9 Polos e zeros de sistema.

#### 4.4 Formas normais da função de transferência

A forma geral da função de transferência de um sistema de ordem  $n$  pode ser escrita por:

$$G(s) = \frac{p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + \dots + p_2 s^2 + p_1 s + p_0}{q_n s^n + q_{n-1} s^{n-1} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0} \quad (4.8)$$

onde, em geral,  $m \leq n$ , isto é, o número de zeros é menor ou igual ao número de polos.

Para tornar mais simples o estudo da apresentação formal das funções de transferência, vamos recorrer a um exemplo numérico.

Seja, então, sob forma geral, a função de transferência de 3<sup>a</sup> ordem:

$$G(s) = \frac{3,2s^2 + 28,8s + 64}{0,8s^3 + 4,4s^2 + 7,6s + 4}$$

onde

$$Q(s) = 0,8s^3 + 4,4s^2 + 7,6s + 4$$

com  $n = 3$ , portanto, sistema de 3<sup>a</sup> ordem, e

$$P(s) = 3,2s^2 + 28,8s + 64$$

com  $m = 2$ .

### ■ 4.4.1 Primeira forma normal

Nesse caso, os coeficientes dos termos de mais alto grau em  $s$ , tanto no numerador como no denominador de  $G(s)$ , devem-se tornar unitários. Para conseguir isso, basta pôr em evidência os coeficientes dos termos de mais alto grau em  $s$ , nos polinômios  $P(s)$  e  $Q(s)$  (a saber, os coeficientes  $p_m$  e  $q_n$ , respectivamente, na forma geral de  $G(s)$ , Equação 4.8).

No caso do exemplo numérico que estamos seguindo, teremos:

$$G(s) = \frac{3,2(s^2 + 9s + 20)}{0,8(s^3 + 5,5s^2 + 9,5s + 5)}$$

ou

$$G(s) = \frac{Kp(s)}{q(s)} = \frac{4(s^2 + 9s + 20)}{(s^3 + 5,5s^2 + 9,5s + 5)}$$

onde a constante  $K$ , no caso, igual a 4, é denominada constante de ganho imprópria ou pseudoconstante de ganho.

Os polinômios do numerador e do denominador podem ser escritos também sob forma fatorada:

$$q(s) = (s^3 + 5,5s^2 + 9,5s + 5) = (s + 1)(s + 2)(s + 2,5)$$

onde os polos do sistema são:  $s_1 = -1$     $s_2 = -2$   
 $s_3 = -2,5$

$$p(s) = (s^2 + 9s + 20) = (s + 4)(s + 5)$$

onde os zeros do sistema são:  $s_1' = -4$     $s_2' = -5$

Assim, a função de transferência, escrita sob forma fatorada, é a seguinte:

$$G(s) = \frac{4(s + 4)(s + 5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 2,5)}$$

A expressão inicial representa a primeira forma normal não fatorada, e a última expressão, a primeira forma normal fatorada da função de transferência.

### ■ 4.4.2 Segunda forma normal

Neste caso, os coeficientes dos termos de menor expoente em  $s$  é que devem ser unitários, tanto no numerador quanto no denominador de  $G(s)$ . Para conseguir isso, basta pôr em evidência os coeficientes desses termos (que são  $p_0$  e  $q_0$ , respectivamente, nos polinômios  $P(s)$  e  $Q(s)$ , na forma geral de  $G(s)$ , equação).

No caso do exemplo numérico que estamos seguindo, onde

$$G(s) = \frac{3,2s^2 + 28,8s + 64}{0,8s^3 + 4,4s^2 + 7,6s + 4}$$

resulta para a segunda forma normal,

$$G(s) = \frac{64(0,05s^2 + 0,45s + 1)}{4(0,2s^3 + 1,1s^2 + 1,9s + 1)}$$

ou

$$G(s) = \frac{16(0,05s^2 + 0,45s + 1)}{(0,2s^3 + 1,1s^2 + 1,9s + 1)}$$

onde o fator constante que aparece no numerador (16, no caso) e que representaremos genericamente por  $K_g$ , denominada constante de ganho generalizada de frequência zero. Diz-se, abreviadamente, que é a constante de ganho de baixa frequência do sistema.

Sob forma fatorada, a segunda forma normal de  $G(s)$  pode ser obtida diretamente da primeira forma normal fatorada, a saber:

$$G(s) = \frac{4(s + 4)(s + 5)}{(s + 1)(s + 2)(s + 2,5)}$$

Pondo-se em evidência os termos constantes nos vários fatores do numerador e do denominador, resulta:

$$G(s) = \frac{4(4)(5)(s/4 + 1)(s/5 + 1)}{(2)(2,5)(s + 1)(s/2 + 1)(s/2,5 + 1)}$$

ou

$$G(s) = \frac{16(0,25s + 1)(0,2s + 1)}{(s + 1)(0,5s + 1)(0,4s + 1)}$$

Note que aqui também temos  $K_g = 16$ , como não poderia deixar de ser.

Se os coeficientes de  $s$  nos fatores do denominador forem números reais, serão denominados constantes de tempo do sistema. No caso, há três constantes de tempo:

$$\tau_1 = 1, \quad \tau_2 = 0,5 \quad \text{e} \quad \tau_3 = 0,4.$$

## Considerações finais

Neste capítulo começou-se a definir um dos modelos matemáticos mais importantes para o estudo dos sistemas LIT (lineares invariantes no tempo): a função de transferência (*f.t.*), também denominada modelo entrada-saída. Esse modelo utiliza a transformada de Laplace, e por isso se diz que é definido no domínio da frequência. Nos sistemas LIT, as funções de transferência são sempre funções racionais

(relação de dois polinômios em  $s$ ). Após a definição da função de transferência, foram apresentadas definições adicionais correlatas (como polos e zeros, por exemplo) e as principais propriedades desse modelo, ilustradas por meio de exemplos. Em seguida, foram definidas as diversas formas de apresentação das funções de transferência que denominamos formas normais e discutidos alguns exemplos.

## Problemas propostos

1. Determine a função de transferência e calcule polos e zeros de cada um dos sistemas, de entrada  $u = u(t)$  e saída  $y = y(t)$  (Figura 4.10), descritos pelas seguintes equações:

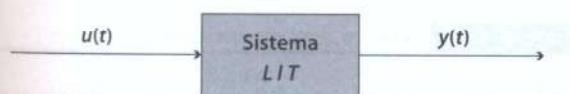


Figura 4.10

- (a)  $\ddot{y} + 5\dot{y} + 3y = u$   
 (b)  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 0,5u$   
 (c)  $\ddot{y} + 2\dot{y} + 5y + 10 \int_0^t y dt = 25u$   
 (d)  $\ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2 \left( \frac{du}{dt} \right) + u$   
 (e)  $\begin{cases} \ddot{x} + 18\dot{x} + 192x + 640\dot{x} = u \\ y = 160(\dot{x} + 4x) \end{cases}$   
 (f)  $\begin{cases} \ddot{x} + 3\dot{x} + 19x + 17\dot{x} = \int_0^t u dt \\ y = 10(\dot{x} + 4x) \end{cases}$
2. Sendo  $G = \frac{s^2 + 4s + 3}{s(s^2 + 2s + 2)}$ , determine e represente graficamente seus polos e zeros.

3. Determine a função de transferência do sistema cujas equações diferenciais são:

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 20\dot{x} = u(t) \quad y(t) = K(\dot{x} + x)$$

onde  $x = x(t)$  é uma variável do sistema,  $u(t)$  é a variável de entrada e  $y(t)$  é a variável de saída. Quais os polos e zeros do sistema?

4. Determine a função de transferência do sistema cujas equações diferenciais são:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 5\dot{x} = u(t) \quad y(t) = K(\dot{x} + x)$$

onde  $x = x(t)$  é uma variável do sistema,  $u(t)$  é a variável de entrada e  $y(t)$  é a variável de saída. Quais os polos e zeros do sistema?

5. Determine a função de transferência do sistema cujas equações diferenciais são:

$$\ddot{x} + 6\dot{x} + 25\dot{x} = u(t) \quad y(t) = K(\dot{x} + 5x)$$

onde  $x = x(t)$  é uma variável do sistema,  $u(t)$  é a variável de entrada e  $y(t)$  é a variável de saída. Quais os polos e zeros do sistema?

6. As equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema são:

$$\ddot{x}(t) + 3\ddot{x}(t) + 4\dot{x}(t) + 2x(t) = u(t)$$

$$y(t) = 2\ddot{x}(t) + 8\dot{x}(t) + 8x(t)$$

Determine a função de transferência  $G(s) = X(s)/U(s)$ , bem como os polos e zeros do sistema.

7. As equações diferenciais apresentadas a seguir descrevem o comportamento dinâmico de sistemas lineares cuja entrada é  $u(t)$  e a saída é  $y(t)$ . Determine a função de transferência de cada um deles sob as várias formas normais. Identifique os polos e os zeros, as constantes de ganho  $K$  e  $K_g$  e as constantes de tempo.

$$(a) \frac{d^3y}{dt^3} + 3\frac{d^2y}{dt^2} + 4\frac{dy}{dt} + 2y(t) = 2\frac{du}{dt} + u(t)$$

$$(b) \begin{cases} \ddot{x}(t) + 3\dot{x}(t) + 4x(t) = u(t) \\ y(t) = 7,2\dot{x}(t) + 36x(t) \end{cases}$$

8. Represente a função de transferência apresentada a seguir em ambas as formas normais (1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup>), fatoradas e não fatoradas:

$$G(s) = \frac{3s^2 + 12s + 12}{1,5s^3 + 4,5s^2 + 6s + 3}$$

9. Determine a função de transferência do sistema de entrada  $u = u(t)$  e saída  $y = y(t)$  descrito pela equação apresentada a seguir, calcule polos e zeros e faça a representação deles no plano  $s$ .

$$2\ddot{y} + 6\dot{y} + 16y + 12\int_0^t y dt = 5u + \int_0^t u dt$$

10. Qual a função de transferência de um sistema que tem os polos e zeros indicados na Figura 4.11 e cuja constante de ganho de frequência zero é  $K = 4$ ? Represente a função de transferência nas duas formas normais conhecidas.

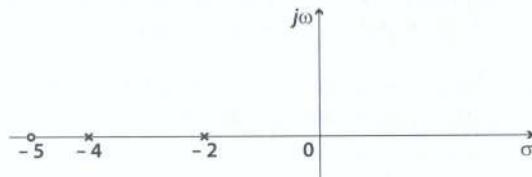


Figura 4.11

11. A Figura 4.12 representa os polos e os zeros de um sistema linear cujo ganho de frequência zero é  $K_g = 16/3$ . Determine:

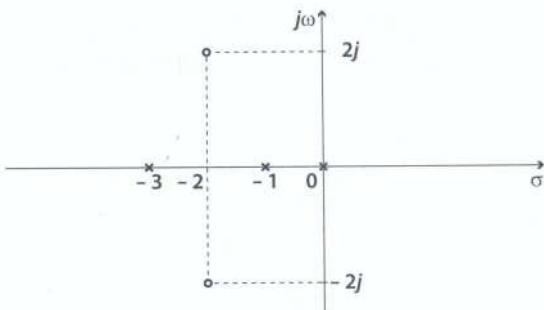


Figura 4.12 Polos e zeros de um sistema linear.

- (a) O polinômio característico do sistema. Qual a ordem do sistema?  
 (b) A função de transferência sob forma fatorada, com fatores de 1<sup>o</sup> e 2<sup>o</sup> graus em  $s$  e coeficientes reais.

12. Qual a função de transferência de um sistema que tem os polos e zeros indicados na Figura 4.13 e cuja constante de ganho de frequência zero é  $K = 1$ ?

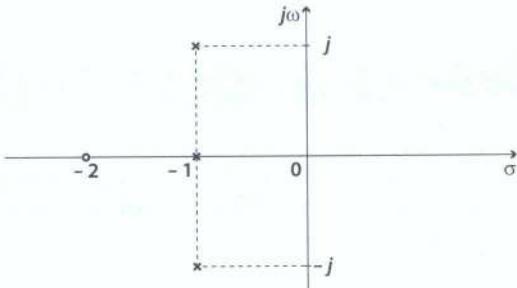


Figura 4.13 Polos e zeros de um sistema.

13. Escreva a equação diferencial que relaciona as variáveis de entrada  $u(t)$  e de saída  $y(t)$  do sistema cuja função de transferência é:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{32}{s(s+4)(s+8)}$$

14. (a) Escreva a equação diferencial que relaciona as variáveis de entrada  $u(t)$  e de saída  $y(t)$  do sistema representado pela função de transferência:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{8(1-s)}{s^3 + 2s^2 + 9s + 8}$$

- (b) Reescreva a equação diferencial supondo

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + 1}$$

15. Considere o sistema da Figura 4.14. Indique as forças que atuam sobre o bloco móvel desenhado separadamente. Escreva a equação do movimento. Determine a função de transferência.

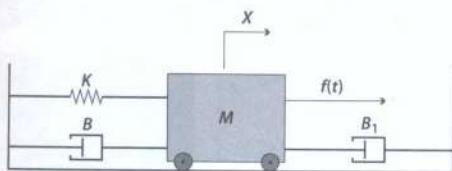


Figura 4.14 Sistema.

16. Determine a função de transferência  $V_2(s)/V_1(s)$  do quadripolo da Figura 4.15. Escreva a função sob forma literal e numérica, sendo  $R = R_1 = 10^5 \Omega$  e  $C = 1 \mu\text{F}$ .

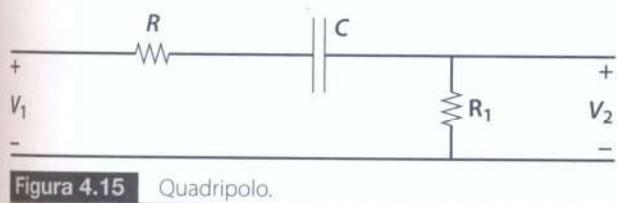


Figura 4.15 Quadripolo.

17. Determine (literalmente e com coeficientes numéricos) a função de transferência  $G(s) =$

$V_2(s)/V_1(s)$ , admitindo que  $RC = 0,1 \text{ s}$  no circuito da Figura 4.16.

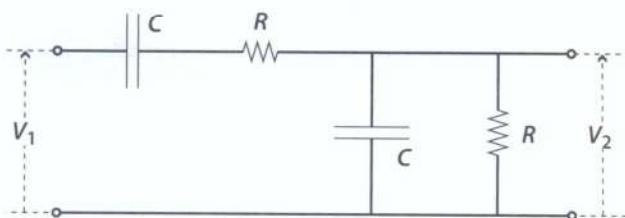


Figura 4.16

18. Determine (literalmente e com coeficientes numéricos) a função de transferência  $G(s) = V_2(s)/V_1(s)$ , admitindo que  $RC = 0,1 \text{ s}$  no circuito abaixo.

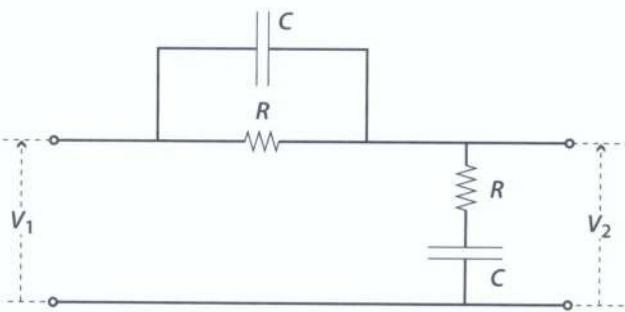
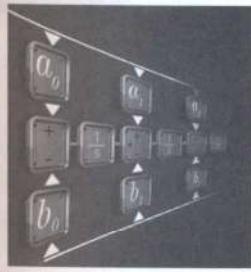


Figura 4.17

# capítulo 5



## Diagrams de blocos

Neste capítulo vamos estudar um método gráfico de representação dos modelos matemáticos dos sistemas: os diagramas de blocos. Há dois problemas básicos relativos a esse método. O primeiro é, dado um sistema, construir um diagrama que o represente. Podemos dizer, desde logo, que cada sistema pode ser representado por

vários diagramas equivalentes. Isso nos leva ao segundo problema básico: dado um diagrama, que pode ser mais ou menos complexo, reduzi-lo ao diagrama equivalente mais simples possível, um único bloco. Assim reduzido, esse diagrama fornece diretamente a respectiva função de transferência.

### 5.1 Diagramas de blocos

Como dissemos, uma forma conveniente de representar as equações que descrevem o comportamento dinâmico de um sistema é por meio dos diagramas de blocos. Esse processo consiste em uma representação pictórica ou figurativa das operações e demais relações entre as variáveis do sistema, incluindo as variáveis de entrada e saída.

Os diagramas de blocos aqui representados destinam-se primordialmente ao estudo dos sistemas lineares, mas podem ser estendidos também ao caso em que haja não linearidades.

Para representar os sistemas lineares por meio de diagramas de blocos, são necessários três símbolos gráficos.

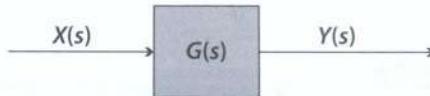
O primeiro símbolo é o *bloco operacional* ou *bloco dinâmico* da Figura 5.1

O bloco operacional, em nossos diagramas, contém uma função de transferência que, multiplicada pela variável (sinal) de entrada  $X(s)$ , fornece a variável (sinal) de saída  $Y(s)$ :

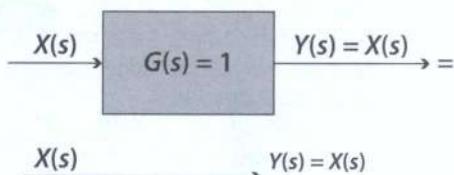
$$Y(s) = G(s) X(s)$$

Caso particular: se tivermos  $G(s) = 1$ , o bloco pode ser dispensado (ver Figura 5.2).

O segundo símbolo gráfico é o somador. Nesse caso, a variável de saída é a soma algébrica das variá-



**Figura 5.1** O bloco operacional representa uma função de transferência.



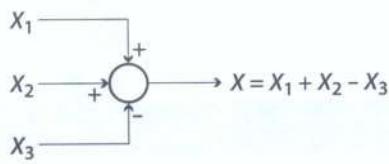
**Figura 5.2** Bloco operacional unitário.

veis de entrada, de acordo com os sinais algébricos associados a cada uma das variáveis, junto à entrada do somador (Figura 5.3).

Existe também um caso particular importante, em que o somador pode servir como inversor do sinal de uma variável (Figura 5.4).

O terceiro símbolo é a ramificação, que indica identidade entre a variável de entrada e as de saída, conforme representa a Figura 5.5.

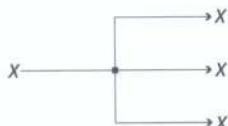
Um caso particular da ramificação é a bifurcação, quando há um ramo de chegada e apenas dois de saída.



**Figura 5.3** Somador.



**Figura 5.4** Inversor do sinal.



**Figura 5.5** Ramificação.

## 5.2 Representação de um sistema por meio de diagramas de blocos

Vejamos alguns exemplos.

### Exemplo 5.1

Construir um diagrama de um circuito *RC*-série, conforme a Figura 5.6, tendo como entrada a tensão aplicada  $v_1(t)$  e como saída a tensão  $v_2(t)$  no capacitor. As condições iniciais são nulas ( $C.I. = 0$ ). Podemos, então, construir o seguinte diagrama de blocos:

No domínio da frequência, temos as seguintes equações que dão origem ao diagrama de blocos da Figura 5.10:

$$V_1(s) = V_R(s) + V_C(s) \quad (1)$$

$$V_R = RI(s)$$

$$V_C(s) = \frac{1}{Cs} I(s)$$

$$V_2(s) = V_C(s)$$

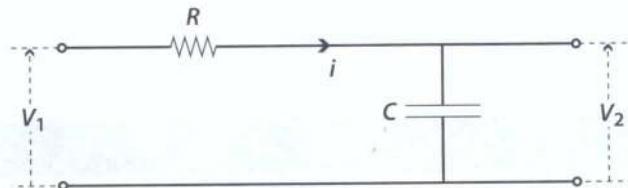
A primeira equação que pode ser escrita,

$$V_R(s) = V_1(s) - V_C(s)$$

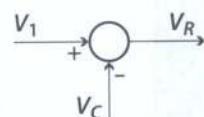
é representada pela Figura 5.7.

Assim, sucessivamente, podemos ir construindo o diagrama da Figura 5.8.

Finalmente, a igualdade que denota a reaumentação permite completar o diagrama, como se vê nas figuras 5.9 e 5.10.

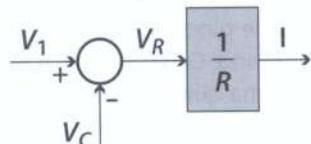


**Figura 5.6** Diagrama de um circuito *RC*-série.



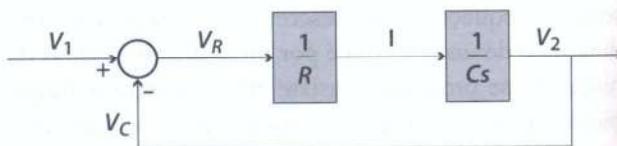
**Figura 5.7** Diagrama de blocos.

$$VR(s) = RI(s)$$

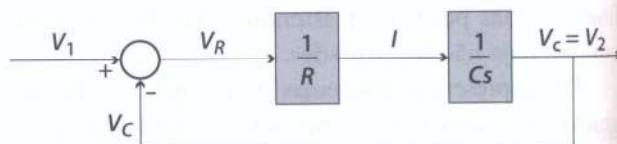


**Figura 5.8** Diagrama de blocos.

$$VC(s) = V_2(s) = (1/(Cs)) I(s)$$



**Figura 5.9** Diagrama de blocos.

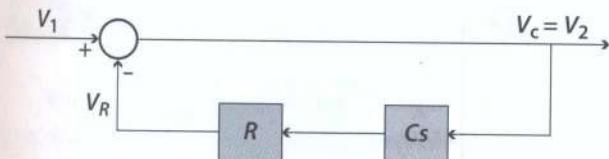


**Figura 5.10** Diagrama de blocos.

Um fato importante a ser observado é que um mesmo sistema pode, em geral, ser representado por mais de um diagrama de blocos. Por exemplo, se escrevermos a primeira equação da seguinte forma

$$VC(s) = V_1(s) - VR(s)$$

o diagrama que resulta é o indicado na Figura 5.11.

**Figura 5.11** Diagrama de blocos.

Veremos, porém, que qualquer que seja a forma do diagrama de blocos que representa um sistema, a função de transferência a que ele pode ser reduzido é sempre a mesma. São diagramas equivalentes.

**Exemplo 5.2**

Construir o diagrama de blocos do circuito da Figura 5.12, constituído por duas malhas tipo  $RC$  interligadas por um amplificador isolador de ganho unitário com impedância de entrada infinita e impedância de saída nula:

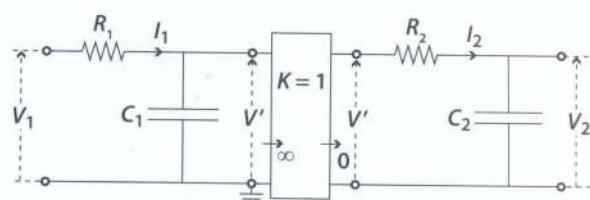
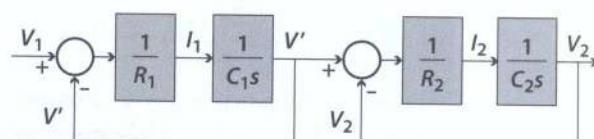
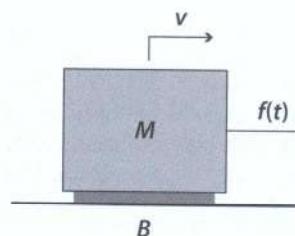
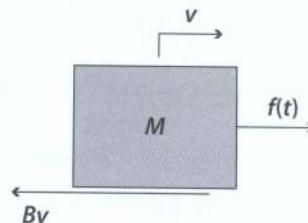
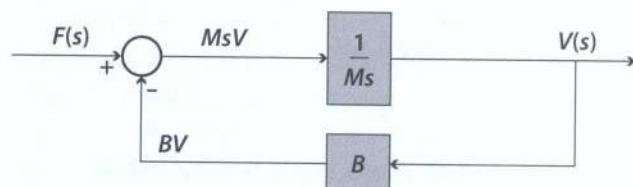
Solução:

O modelo matemático pode ser escrito:

$$I_1 = \frac{V_1 - V'}{R_1} \quad V' = \frac{I_1}{C_1 s}$$

$$I_2 = \frac{V' - V_2}{R_2} \quad V_2 = \frac{I_2}{C_2 s}$$

Resulta, então, o diagrama de blocos da Figura 5.13.

**Figura 5.12** Diagrama de blocos do circuito.**Figura 5.13** Diagrama de blocos do circuito da Figura 5.12.**Figura 5.14** Bloco de massa  $M$ .**Figura 5.15** Forças atuantes no bloco móvel.**Figura 5.16** Diagrama de blocos.**Exemplo 5.4**

O mesmo bloco do problema anterior, mas com o móvel ligado a uma parede fixa por meio de uma mola de constante elástica  $K$ , além do atrito viscoso de coeficiente  $B$  e da força atuante  $f(t)$  (Figura 5.17).

Solução:

A Figura 5.18 indica as forças atuantes no bloco móvel. O modelo matemático neste caso é constituído por duas equações:

$$M \frac{dv}{dt} = f(t) - Bv - Kx \quad \text{e} \quad v = \frac{dx}{dt}$$

Transformando por Laplace e considerando C.I. = 0, obtemos.

$$MsV(s) = F(s) - BV(s) - KX(s)$$

e

$$V(s) = sX(s), \quad \text{ou seja,} \quad X(s) = \frac{V(s)}{s}$$

Essas equações permitem que se desenhe o diagrama de blocos da Figura 5.19.

### Exemplo 5.5

A Figura 5.20 representa um servomotor de c.c. Determine o modelo matemático desse sistema e desenhe um diagrama de blocos considerando como entrada a tensão de armadura  $V_a$  e como saída a velocidade de rotação  $\omega_m$ .

Solução:

O modelo matemático considerando C.I. = 0:

Equação do circuito de armadura

$$V_a(t) = L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a(t) + e_m(t)$$

$$V_a(s) = (L_a s + R_a) I_a(s) + E_m(s)$$

Equação da força eletromotriz (f.e.m.)

$$e_m(t) = K_m \Omega_m(t)$$

$$E_m(s) = K_m \Omega_m(s)$$

Equação do conjugado eletromagnético

$$C_m(t) = K_m i_a(t)$$

$$C_m(s) = K_m I_a(s)$$

Equação do conjugado eletromecânico

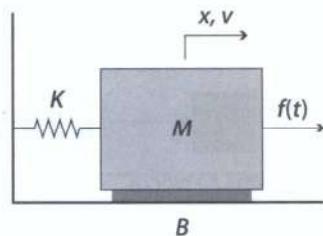
$$C_m(t) = J \frac{d\omega_m(t)}{dt} + B\omega_m(t)$$

$$C_m(s) = (J s + B) \Omega_m(s)$$

A primeira equação pode ser escrita sob a forma

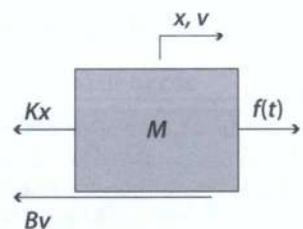
$$I_a(s) = (V_a(s) - E_m(s)) \frac{1}{(L_a s + R_a)}$$

E o diagrama que resulta com entrada  $V_a$  e saída  $\omega_m$  (velocidade angular do motor) a partir das equações acima é o indicado na Figura 5.21.



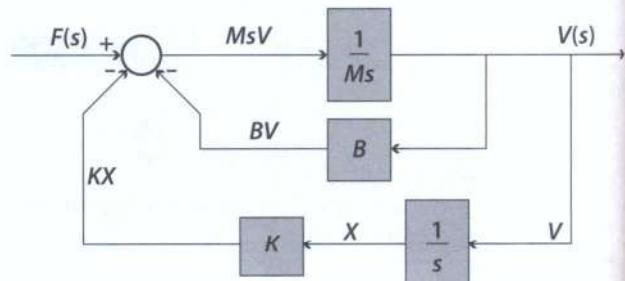
**Figura 5.17**

Bloco móvel sujeito ao atrito viscoso (coeficiente  $B$ ) e à força elástica da mola (coeficiente  $K$ ).



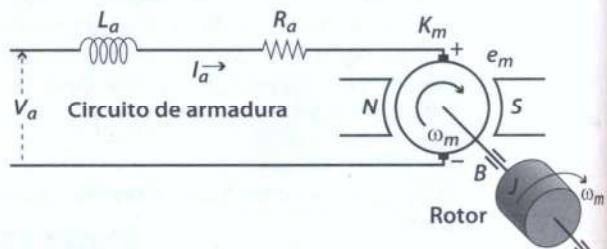
**Figura 5.18**

Forças atuantes no bloco móvel.



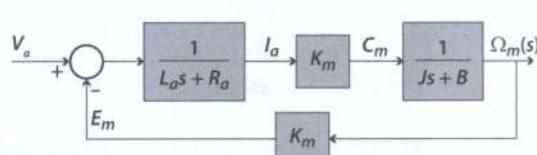
**Figura 5.19**

Diagrama de blocos.



**Figura 5.20**

Servomotor de c.c. controlado pelo circuito de armadura.



**Figura 5.21**

Diagrama resultante da entrada  $V_a$  e saída  $\omega_m$ .

### 5.3 Reduções básicas

Vamos mostrar agora como proceder para reduzir um diagrama de blocos a um único bloco equivalente ao diagrama dado. Para reduzir uma associação de resistências elétricas a apenas uma resistência equivalente, devemos começar por estudar os casos simples de resistências associadas em série e em paralelo; da mesma forma, para reduzir os diagramas de blocos, devemos iniciar pelas reduções simples. Consideraremos três casos de reduções: (1) blocos em série, (2) ramos em paralelo e (3) malhas de realimentação.

#### ■ 5.3.1 Blocos em série

Blocos operacionais em série podem ser reduzidos a um único bloco cuja função de transferência é o produto das funções de transferência dos vários blocos, caso não haja efeito de carga, ou seja, a colocação do bloco seguinte não muda a função do bloco anterior.

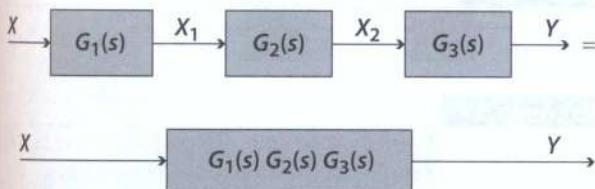
De fato, no caso da Figura 5.22, em que temos três blocos em série, podemos escrever:

$$X_1 = G_1(s)X \quad X_2 = G_2(s)X_1 \quad Y = G_3(s)X_2$$

Eliminando  $X_1$  e  $X_2$  nas fórmulas, obtemos:

$$Y = G_1(s)G_2(s)G_3(s)X$$

o que justifica a redução indicada na Figura 5.22. O resultado pode ser facilmente generalizado para um número qualquer de blocos em série.



**Figura 5.22** Redução de três blocos em série.

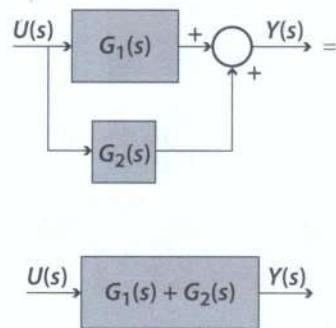
#### ■ 5.3.2 Ramos em paralelo

Da própria configuração do diagrama apresentado na Figura 5.23, resulta que:

$$Y(s) = G_1(s)U(s) + G_2(s)U(s)$$

ou

$$Y(s) = [G_1(s) + G_2(s)] U(s)$$



**Figura 5.23** Redução de blocos em paralelo.

A última igualdade pode ser representada por apenas um bloco  $G(s) = G_1(s) + G_2(s)$ , que representa a redução do diagrama anterior. O resultado pode ser evidentemente generalizado para um número qualquer de ramos em paralelo. Além disso, os sinais junto ao somador podem ser + ou - e naturalmente afetam as somas no bloco equivalente.

#### ■ 5.3.3 Malhas de realimentação

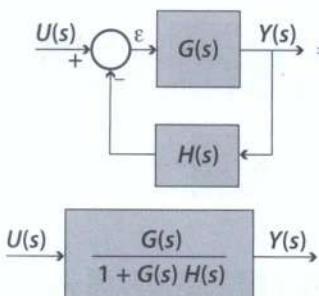
Há dois casos a serem considerados. Quando o sinal do ramo de realimentação que chega ao somador é positivo, a realimentação é dita positiva, e quando o sinal é negativo, a realimentação é dita negativa. De fato, isso é apenas um detalhe didático, pois o sinal do somador pode ser incorporado na função  $H(s)$ . Em ambos os casos, estamos considerando o sinal da variável de entrada junto ao somador, sempre positiva.

Muitas vezes, o somador presente no primeiro termo da Figura 5.24 é denominado comparador. Essa designação deve ser usada com cautela, pois o termo ‘comparador’ é frequentemente utilizado nas áreas de eletrônica e de automação para designar uma função cuja saída é ‘lógica’ (ligado/desligado, cortado/saturado etc.), ao passo que o somador em questão, o sinal de saída, é ‘real’.

Consideremos inicialmente o caso de realimentação negativa, por ser o mais usual. A variável  $\varepsilon(s)$  de saída do somador é uma variável importante, geralmente denominada erro atuante ( $\varepsilon = U - HY$ ).

A álgebra do diagrama considerado permite-nos escrever:

$$\varepsilon(s) = U(s) - H(s) Y(s) \quad \text{e} \quad Y(s) = G(s) \varepsilon(s)$$

**Figura 5.24** Redução da malha de realimentação negativa.

Eliminando  $\varepsilon(s)$  entre as duas equações e isolando a variável  $Y(s)$  no primeiro membro, obtemos:

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}U(s)$$

O diagrama que representa a malha de realimentação negativa pode ser reduzido, no caso, a apenas um bloco cuja função de transferência é a que acabamos de apresentar (ver Figura 5.24).

Isto é,

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

ou, de maneira mais simples,

$$F = \frac{G}{1 + GH}$$

No caso de uma realimentação positiva, temos

$$F = \frac{G}{1 - GH}$$

Observe que, nos sistemas que estamos estudando, as funções de transferência apresentam-se sempre (salvo casos especiais) como uma relação de polinômios:

$$G = \frac{N(s)}{D(s)} = \frac{N}{D}$$

Então, se tivermos  $H(s) = 1$ , obteremos:

$$F = \frac{G}{1 + G} = \frac{N}{D + N}$$

Note que nesse caso o numerador da função de transferência de malha fechada permanece o mesmo, e o denominador é a soma do numerador com o denominador de  $G(s)$ .

## 5.4 Exemplos de redução de diagramas de blocos

Vejamos alguns exemplos de obtenção da função de transferência de um sistema por redução do respectivo diagrama de blocos.

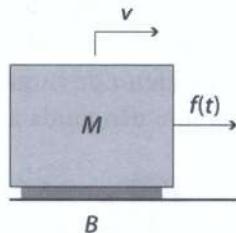
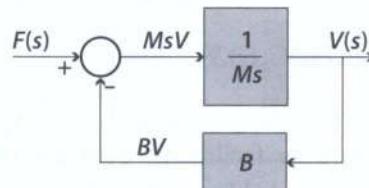
### Exemplo 5.6

Reduza o diagrama de blocos e determine a função de transferência do bloco que desliza com atrito viscoso sobre um plano horizontal (Exemplo 5.2, figuras 5.25 e 5.26).

Solução:

O diagrama de blocos é um exemplo de um sistema simples dotado de realimentação negativa, com  $G = 1/Ms$  e  $H = B$ . Logo, sendo a função de transferência de malha fechada  $\frac{G}{1 + GH}$ , resulta:

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{Ms}}{1 + \frac{B}{Ms}} = \frac{1}{Ms + B}$$

**Figura 5.25** Diagrama de blocos.**Figura 5.26** Diagrama de blocos.

### Exemplo 5.7

Como vimos, um circuito *RC*-série pode ser representado por qualquer dos diagramas de blocos das figuras 5.27 e 5.28, a seguir.

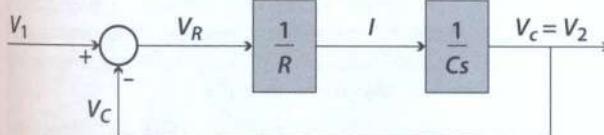
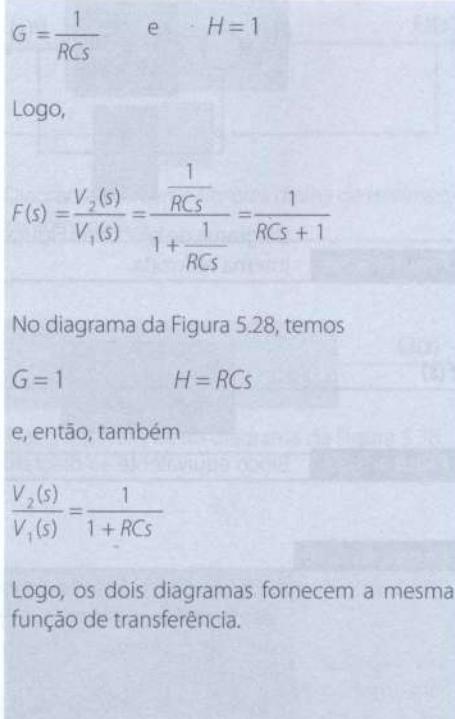
Mostre que a redução de ambos os diagramas resultam na mesma função de transferência, que é a do circuito *RC*.

Solução:

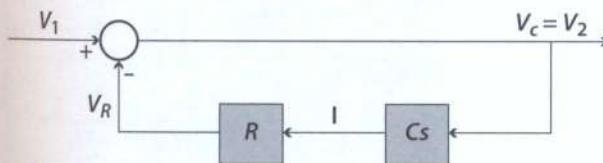
De fato, os dois diagramas consistem em uma malha de realimentação negativa, cuja redução é imediata:

$$F = \frac{G}{1 + GH}$$

No diagrama da Figura 5.27, temos:



**Figura 5.27** Diagrama de blocos igual ao da Figura 5.10.



**Figura 5.28** Diagrama de blocos igual ao da Figura 5.11.

### Exemplo 5.8

Reducir o diagrama de blocos da Figura 5.29, que representa um circuito constituído por duas malhas tipo  $RC$  interligadas por um amplificador de isolamento (isto é, de impedância de entrada infinita e impedância de saída nula) do Exemplo 5.2.

A primeira redução que pode ser feita é a dos blocos em série em cada malha, do que resulta a seguinte configuração, mostrada na Figura 5.30.

Note, agora, que nesse diagrama as malhas de realimentação 1 e 2 são independentes, isto é, não há entrelaçamento entre elas; podemos, então, reduzir separadamente cada uma delas.

$$\text{Malha 1: } \frac{V'}{V_1} = \frac{\frac{1}{R_1 C_1 s}}{1 + \frac{1}{R_1 C_1 s}} = \frac{1}{R_1 C_1 s + 1}$$

Malha 2: Analogamente

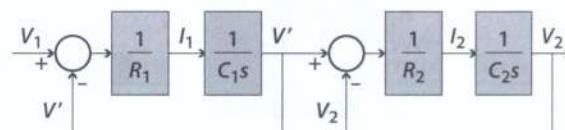
$$\frac{V_2}{V'} = \frac{\frac{1}{R_2 C_2 s}}{1 + \frac{1}{R_2 C_2 s}} = \frac{1}{R_2 C_2 s + 1}$$

Com essa redução, o diagrama torna-se igual ao da Figura 5.31:

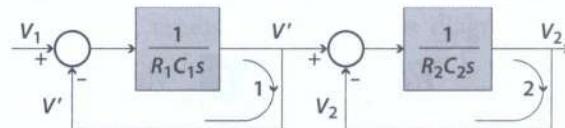
Finalmente, reduzindo a apenas um bloco, temos o que mostra a Figura 5.32:

A função de transferência desse sistema é, então:

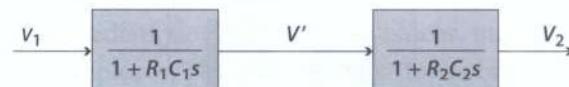
$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{(R_1 C_1 s + 1)(R_2 C_2 s + 1)}$$



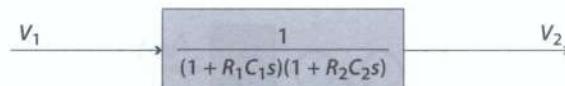
**Figura 5.29** Diagrama de blocos do circuito  $RC$  da Figura 5.12.



**Figura 5.30** Redução parcial do diagrama da Figura 5.29.



**Figura 5.31** Redução parcial do diagrama da Figura 5.30.



**Figura 5.32** Diagrama de blocos reduzido da Figura 5.12.

### Exemplo 5.9

Reducir o diagrama de blocos relativo ao sistema indicado na Figura 5.33. (É o mesmo sistema do Exemplo 5.4).

Solução:

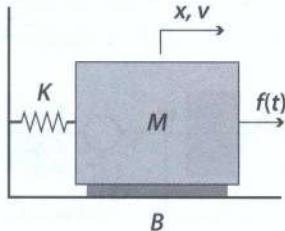
Nesse diagrama temos duas malhas de realimentação: uma malha interna, com um bloco de transferência  $B$  e uma malha externa, com

dois blocos em série, que podem ser reduzidos a um único bloco ( $K/s$ ). Podemos reduzir inicialmente a malha interna, resultando o diagrama seguinte.

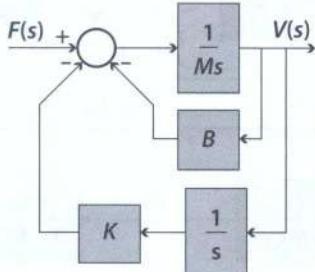
$$\frac{1}{1 + \frac{B}{Ms}} = \frac{1}{Ms + B}$$

Finalmente, reduzindo essa última malha, vem:

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{Ms + B}}{1 + \frac{K}{s(Ms + B)}} = \frac{s}{Ms^2 + Bs + K}$$



Sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 5.34.



**Figura 5.34** Diagrama de blocos.

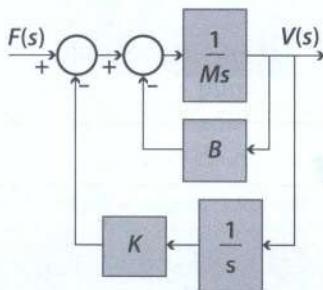


Diagrama de blocos da Figura 5.34 com somador desdobrado.

**Figura 5.35**

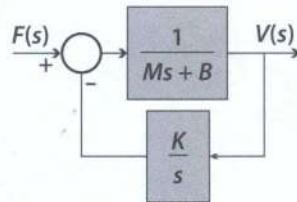
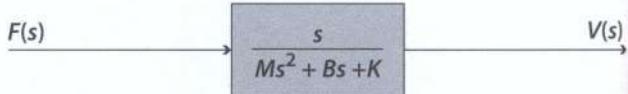


Diagrama de blocos da Figura 5.35 com a malha interna reduzida.



**Figura 5.37** Bloco equivalente ao diagrama da Figura 5.34.

### Exemplo 5.10

A Figura 5.38 representa o diagrama de blocos de um servomotor (ver Exemplo 5.5) de corrente contínua, cuja entrada é a tensão de armadura  $v_a(t)$  e a saída é a velocidade de rotação  $\Omega_m(t)$ . Reduza o diagrama de blocos e obtenha a função de transferência  $\Omega(s)/V_a(s)$ .

Solução:

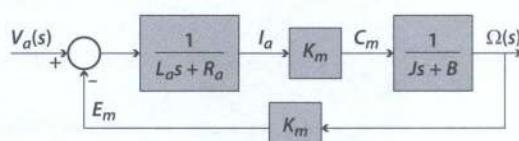
Podemos inicialmente reduzir os blocos em série no ramo direto e obter, então, um diagrama com uma simples malha de realimentação negativa (Figura 5.39).

Reduzindo, agora, essa malha de realimentação, temos:

$$\frac{\Omega(s)}{V_a(s)} = \frac{\frac{K_m}{(L_a s + R_a)(J_s + B)}}{1 + \frac{K_m^2}{(L_a s + R_a)(J_s + B)}} =$$

$$\frac{K_m}{JL_a s^2 + (JR_a + BL_a)s + BR_a + K_m^2}$$

Esse é o resultado da redução do diagrama de blocos do servomotor dado; o bloco final apresenta a função de transferência desejada (ver Figura 5.40).



**Figura 5.38** Diagrama de blocos de um servomotor.

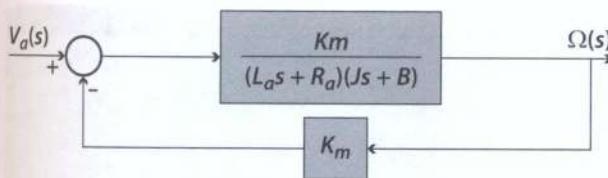
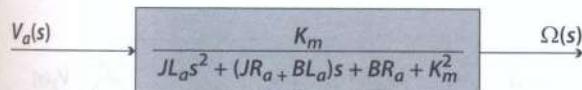


Diagrama com uma simples malha de realimentação negativa.

Figura 5.39



Bloco equivalente ao diagrama da Figura 5.38.

Figura 5.40

### Exemplo 5.11

Reducir o diaograma de blocos da Figura 5.41.

Solução:

Note que nesse diagrama as malhas 1 e 2 estão entrelaçadas. Assim, não podemos reduzir uma das malhas sem afetar a outra. Por isso, antes de qualquer redução devemos descruzar as malhas entrelaçadas. Isso pode ser conseguido de várias maneiras. Por exemplo, passando o ponto de ramificação da malha 1, de antes para depois do bloco  $G_2$ . Nessa mudança, devemos notar o seguinte: na posição original, essa malha realimenta a variável  $X$ ; depois da mudança, ela realimenta a variável  $V_2 = G_2 X$ . Para reconstituir a variável  $X$  no ramo de realimentação, este deve conter um bloco com o operador  $1/G_2$ , como mostra a Figura 5.42.

Agora temos uma malha interna e outra externa, e a redução pode prosseguir da forma habitual, como mostram as figuras 5.43, 5.44 e 5.45.

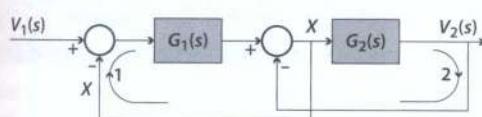


Figura 5.41 Diagrama de blocos.

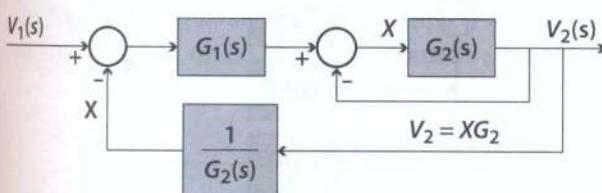


Figura 5.42 Diagrama de blocos equivalente ao da Figura 5.41.

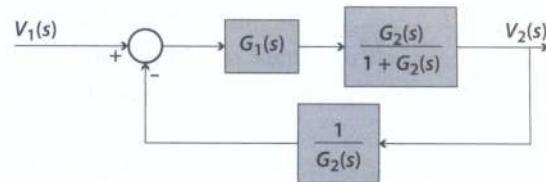


Diagrama da Figura 5.42 reduzido a uma única malha de realimentação.

Figura 5.43

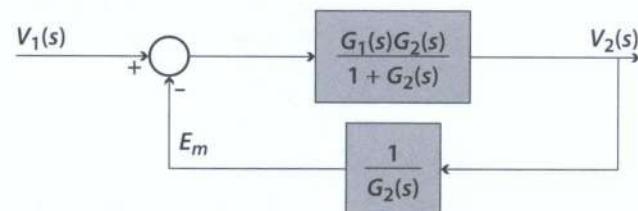
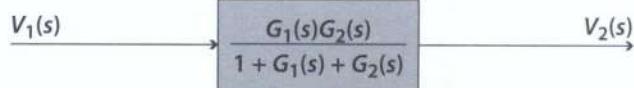


Diagrama de blocos equivalente ao da Figura 5.43.



Redução final do diagrama de blocos da Figura 5.41.

## 5.5 Fórmula de Mason

Até agora, temos simplificado os diagramas de blocos por meio de reduções sucessivas. É um processo trabalhoso em que, por vezes, deve-se recorrer a artifícios.

Para evitar o trabalho e os artifícios de redução, S. J. Mason desenvolveu um processo que permite redução imediata dos diagramas de blocos, mesmo dos mais complexos, por meio de uma fórmula que leva seu nome.

A fórmula de Mason é a seguinte:

$$F(s) = \frac{\sum \bar{G}_k \Delta_k}{\Delta}$$

$F(s)$ : é a função de transferência do sistema representado pelo diagrama de blocos.

$\bar{G}_k$ : é o ganho do caminho de avanço de número  $k$  que liga a entrada à saída.

O denominador,  $\Delta$ , é dado por:

$$\Delta = 1 + \sum_i L_i + \sum_{i,j} L_i L_j + \sum_{i,j,r} L_i L_j L_r + \dots$$

onde  $L_i, L_j, L_r, \dots$  são os ganhos das malhas  $i, j, r, \dots$  do diagrama, com os sinais trocados, sendo que os produtos dos vários ganhos não devem incluir malhas que se tocam.

No numerador,  $\Delta_k$  é o mesmo que  $\Delta$ , não contendo, porém, o ganho das malhas que tenham um ou mais pontos de contato com o caminho de avanço  $k$ .

### Exemplo 5.12

Reduza, com auxílio da fórmula de Mason, o diagrama de blocos da Figura 5.46.

Solução:

Caminhos de avanço:

$$\bar{G}_1 = G_1 G_2$$

Ganhos de malha e cálculo do  $\Delta$  do denominador levando em conta que as malhas não se tocam e por isso aparece o produto das duas:

$$\Delta = 1 + L_1 + L_2 + L_1 L_2$$

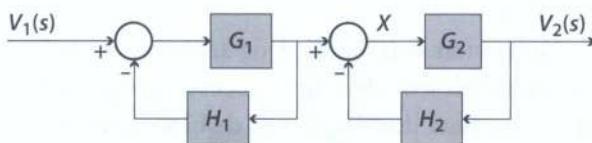
$$L_1 = G_1 H_1 \quad L_2 = G_2 H_2$$

$$\Delta = 1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2$$

Cálculo dos deltas parciais:  $\Delta_1 = 1$  e  
 $\Delta_2 = 1$

Finalmente:

$$F(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 + G_1 G_2 H_1 H_2}$$



**Figura 5.46** Diagrama de blocos.

### Exemplo 5.13

Reduza com auxílio da fórmula de Mason o diagrama de blocos da Figura 5.47.

Solução:

Caminhos de avanço:

$$\bar{G}_1 = G_1 G_2 \quad \text{e} \quad \bar{G}_2 = G_1 G_3$$

Há três malhas cujos ganhos são:

$$L_1 = G_1 H_1 \quad L_2 = G_2 H_2$$

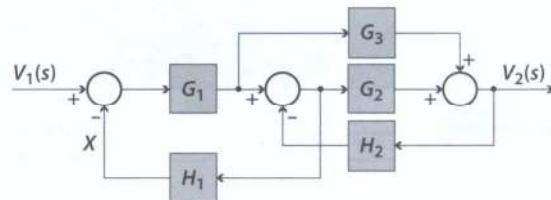
$$L_3 = -G_1 G_3 H_1 H_2$$

O  $\Delta$  do denominador será, então:

$$\Delta = 1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 - G_1 G_3 H_1 H_2$$

Finalmente:

$$F(s) = \frac{G_1 G_2 + G_1 G_3}{1 + G_1 H_1 + G_2 H_2 - G_1 G_3 H_1 H_2}$$



**Figura 5.47** Diagrama de blocos.

### Exemplo 5.14

Reducir o diagrama de blocos da Figura 5.48 com auxílio da fórmula de Mason.

Caminhos de avanço:

$$\bar{G}_1 = G_1(s) \quad \text{ou simplesmente} \quad \bar{G}_1 = G_1$$

$$\bar{G}_2 = -G_2(s) \quad \text{ou simplesmente} \quad \bar{G}_2 = -G_2$$

Ganhos de malha e cálculo do  $\Delta$  do denominador:

$$L_1 = -G_2 G_3 \quad L_2 = G_3 G_4$$

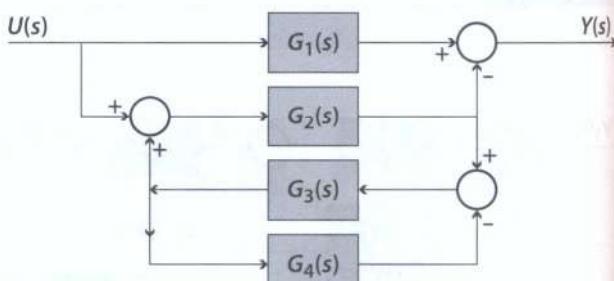
$$\Delta = 1 - G_2 G_3 + G_3 G_4$$

Cálculo dos deltas parciais:

$$\Delta_1 = 1 - G_2 G_3 + G_3 G_4 \quad \text{e} \quad \Delta_2 = 1 + G_3 G_4$$

Finalmente:

$$F(s) = \frac{G_1(1 - G_2 G_3 + G_3 G_4) - G_2(1 + G_3 G_4)}{1 - G_2 G_3 + G_3 G_4}$$



**Figura 5.48** Diagrama de blocos.

**Exemplo 5.15**

Consideremos o circuito da Figura 5.49, constituído por duas malhas do tipo  $RC$ , que aparece na Figura 5.50. Agora, vamos fazer a redução com auxílio da fórmula de Mason.

Solução:

As malhas do diagrama de blocos estão identificadas, o que nos permite calcular facilmente os respectivos ganhos:

$$L_1 = \frac{1}{R_1 C_1 s} \quad L_2 = \frac{1}{R_2 C_2 s} \quad L_3 = \frac{1}{R_2 C_2 s}$$

Para determinar  $\Delta$ , devemos lembrar que malhas que se tocam não comparecem na formação dos produtos dos ganhos de malha. Teremos, no caso:

$$\Delta = 1 + L_1 + L_2 + L_3 + L_1 L_3$$

ou

$$\Delta = 1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}$$

Para a determinação do  $\Delta'$ , observemos que todas as três malhas têm pontos em comum com o único caminho de avanço. Assim,  $\Delta' = 1$ . Então, a fórmula de Mason para este caso se reduz a:

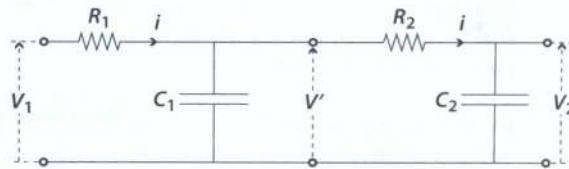
$$F(s) = \frac{G_1 \Delta'}{1 + L_1 + L_2 + L_3 + L_1 L_3}$$

isto é,

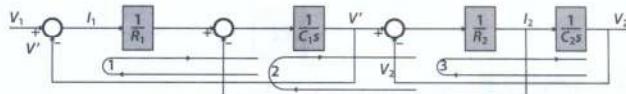
$$F(s) = \frac{1}{1 + \frac{1}{R_1 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_1 s} + \frac{1}{R_2 C_2 s} + \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2}}$$

Que convenientemente reduzida se torna:

$$F(s) = \frac{1}{R_1 R_2 C_1 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_1 C_2 + R_2 C_2)s + 1}$$



**Figura 5.49** Circuito.



**Figura 5.50** Diagrama de blocos.

## Considerações finais

Neste capítulo foram estudados os diagramas de blocos. Inicialmente, apresentou-se os símbolos gráficos que formam os diagramas. Depois, com o uso de exemplos, mostrou-se como são representados os sistemas por meio desses diagramas.

A representação de um sistema dado, por meio de diagramas de blocos, constituiu o primeiro problema geral relativo ao estudo desses diagramas. O segundo problema foi a obtenção, dado um diagrama inicial, de diagramas equivalentes mais simples, de forma a reduzi-los a um único bloco que contém a função de

transferência do sistema dado. É o problema da redução dos diagramas. São estudadas, primeiro, as reduções básicas, que incluem a dos blocos em série, a dos blocos em paralelo e a das malhas de realimentação. Depois, foram dados exemplos das denominadas reduções sucessivas, de sistemas mais complexos, com várias malhas, vários caminhos de avanço e com malhas entrelaçadas. Em seguida, estudou-se a fórmula de Mason, que é uma fórmula geral para redução direta dos sistemas. A aplicação dessa fórmula foi ilustrada por vários exemplos.

## Problemas propostos

1. O modelo matemático do sistema da Figura 5.51 pode ser escrito:

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$$

$$M \frac{dv(t)}{dt} = f(t) - Bv(t) - (K + K_1)x(t)$$

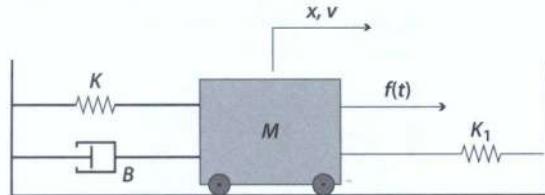


Figura 5.51

Desenhe um diagrama desse sistema, de entrada  $F(s)$  e saída  $X(s)$ , mostrando as realimentações de posição e de velocidade.

2. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.52 e determine a função de transferência  $Y(s)/U(s)$ .

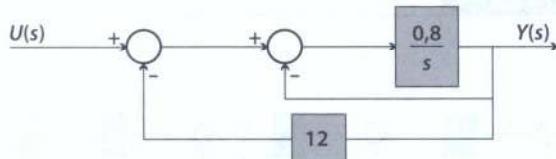


Figura 5.52

3. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.53 e determine a função de transferência  $Y(s)/U(s)$ .

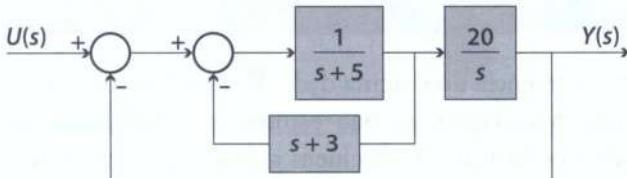


Figura 5.53

4. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.54 e determine a função de transferência  $Y(s)/U(s)$ .  
Nota: Realimentação positiva.

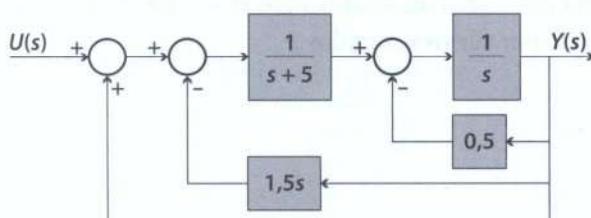


Figura 5.54

5. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.55 e determine a função de transferência  $Y(s)/U(s)$ .

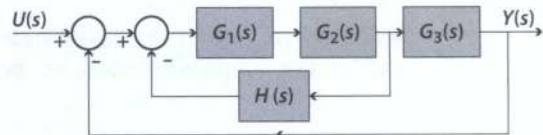


Figura 5.55

6. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.56 e determine a função de transferência  $Y(s)/U(s)$ .

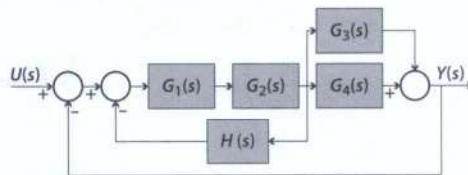


Figura 5.56

7. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.57.

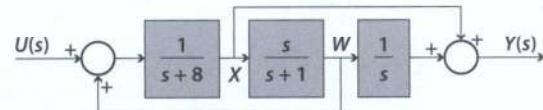


Figura 5.57

Sugestão: Para desentrelaçar as malhas, mude o ponto de ramificação da segunda malha de  $X$  para  $W$ , conforme Figura 5.58, auxiliar.

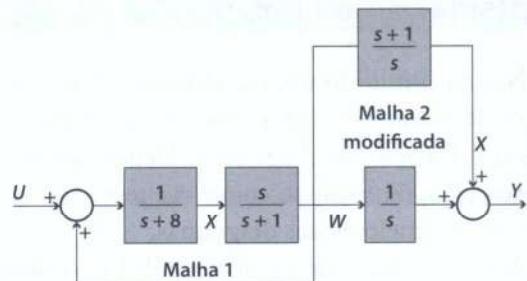


Figura 5.58

8. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.59.

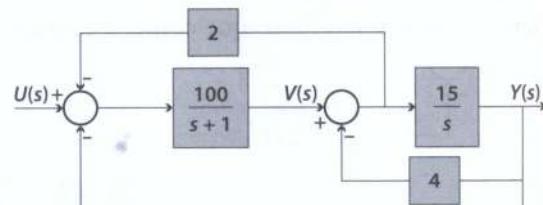


Figura 5.59

9. Reduza o diagrama de blocos da Figura 5.60.

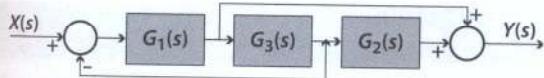


Figura 5.60

10. Determine a função de transferência do sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 5.61.

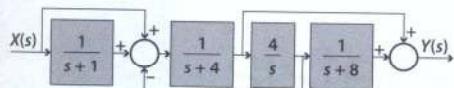


Figura 5.61

11. O modelo matemático do circuito da Figura 5.62, contendo amplificadores operacionais, pode ser escrito sob a forma:

$$X = \frac{-40}{s} U + \frac{4}{s} Y \quad Y(s) = -\frac{40}{s+10} X$$

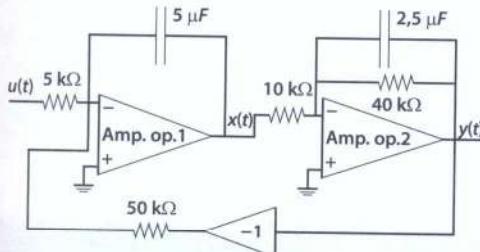


Figura 5.62

Desenhe um diagrama de blocos de entrada  $U(s)$  e saída  $Y(s)$  e reduza-o.

12. O modelo de um servomotor de c.c. controlado pela tensão de armadura, através de um amplificador precedido de um filtro  $RC$ , é no domínio da frequência (Figura 5.63):

$$V_a(s) = \frac{K_a}{RCs + 1} V_1(s) = \frac{0,8}{s + 1} V_1(s)$$

$$V_a(s) = R_a I_a(s) + E_m(s) = 0,2 I_a(s) + E_m(s)$$

$$E_m(s) = K_m \Omega(s) = 0,01 \Omega(s)$$

$$C_m(s) = K_m I_a(s)$$

$$C_m(s) = J_s \Omega(s) = 10^{-3} s \Omega(s)$$

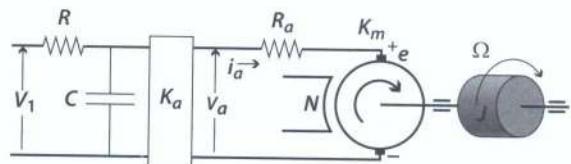


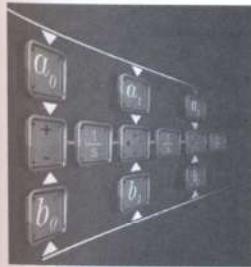
Figura 5.63

Desenhe um diagrama de blocos de entrada  $V_1(s)$  e saída  $\Omega(s)$  e calcule, por redução do diagrama, a função de transferência:

$$G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_1(s)}$$

13. Reduza os diagramas de blocos das questões de 2 a 10 utilizando a fórmula de Mason e confira os resultados.

# capítulo 6



## Resposta dinâmica dos sistemas lineares

Os capítulos anteriores foram dedicados especialmente ao estabelecimento do modelo usual para o estudo da dinâmica dos sistemas L/T de maneira geral e, em particular, dos sistemas de controle automático. Tal modelo, denominado 'Função de Transferência', é obtido via transformada de Laplace das equações diferenciais que descrevem o comportamento dinâmico do sistema. Neste capítulo vamos ver como se utiliza esse modelo para determinar a resposta a uma determinada entrada.

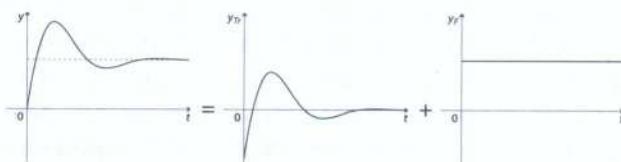
O capítulo se inicia com a apresentação dos sinais de entrada mais importantes. Segue com uma análise da resposta dos sistemas L/T mostrando que ela pode ser considerada como a

soma de duas parcelas ou componentes: uma delas, denominada resposta natural, é caracterizada essencialmente pelo próprio sistema, enquanto a outra parcela, denominada resposta forçada ou regime permanente, apresenta um andamento que reflete as características do sinal de entrada. Na sequência, estudam-se, detalhadamente, as respostas dos sistemas de primeira e segunda ordens, essenciais para o estudo dos sistemas de ordens superiores à segunda. Segue-se com uma breve referência aos sistemas de 3<sup>a</sup> ordem e depois com uma generalização para sistemas com mais de três polos. Há ainda considerações sobre a presença de zeros na função de transferência dos sistemas.

### 6.1 Generalidades

A resposta de um sistema linear a uma excitação qualquer consta, em geral, de duas partes: *componente natural* e *componente forçado da resposta*. Nos sistemas ditos estáveis (que são os de nosso interesse imediato), a resposta natural vai-se atenuando com o passar do tempo e desaparece mais ou menos rapidamente. Por isso, no caso dos sistemas estáveis, a resposta natural é habitualmente chamada de resposta transitória. A resposta forçada, ao contrário, tem caráter permanente e via de regra se apresenta com a 'cara' do sinal de entrada, para  $t > 0$  (se a entrada é um degrau, a resposta forçada tem valor constante; se a entrada é senoidal, a resposta forçada também é senoidal etc.). O componente forçado também é denominado resposta de regime permanente. Então, a resposta completa ( $y(t)$ ) de um sistema estável resulta da soma de dois componentes: a resposta transitória ( $y_T(t)$ ) e a forçada ( $y_F(t)$ ), conforme indicado a seguir (Figura 6.1):

$$y(t) = y_T(t) + y_F(t)$$



Exemplo de resposta completa, transitória e forçada da resposta ao degrau de um sistema.  
**Figura 6.1**

No domínio do tempo a resposta transitória é a solução geral da equação diferencial homogênea do sistema. A resposta forçada é a solução particular da equação completa. Por exemplo, se a equação diferencial de um sistema submetido a uma de entrada  $u(t)$  for

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = bu(t),$$

a equação homogênea é a que se obtém anulando o segundo membro:

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = 0$$

A solução geral dessa equação homogênea (solução geral é aquela que contém as constantes de integração ainda a serem determinadas de acordo com as condições iniciais de cada caso),  $y_r(t)$ , fornece a resposta transitória do sistema. Essa resposta caracteriza o sistema e não depende do sinal de entrada, que nem comparece na equação homogênea. Já a resposta particular da equação completa,  $y_p$ , é a que satisfaz a equação com o segundo membro contendo o particular sinal de entrada,  $u(t)$ . Assim, esse componente forçado (ou de regime permanente) da resposta é essencialmente caracterizado pelo sinal de entrada  $u(t)$ .

No domínio da frequência, o componente transitório é aquele que provém das frações parciais que contêm os polos do sistema, mas não os do sinal de entrada. A resposta forçada, por outro lado, contém apenas os polos do sinal de entrada.

## 6.2 Noções de estabilidade

Uma das propriedades mais importantes dos sistemas lineares é a que se refere à estabilidade dinâmica. Trata-se de uma propriedade essencialmente ligada ao componente transitório da resposta do sistema. De fato, conforme o próprio nome indica, supõe-se que o componente transitório da resposta (ou, mais simplesmente, resposta transitória) seja realmente transitório, isto é, espera-se que desapareça mais ou menos rapidamente com o decorrer do tempo (como na Figura 6.1). Se isso de fato acontecer, diremos que o sistema é estável. Se não for assim, temos ainda duas possibilidades: em vez de decrescer, ela cresce, tendendo ao infinito; ou torna-se constante, não aumentando nem diminuindo com o decorrer do tempo. No primeiro caso, diz-se que o sistema é instável. No segundo, que é marginalmente estável (ou mesmo instável, dependendo da definição de instabilidade que se adote).

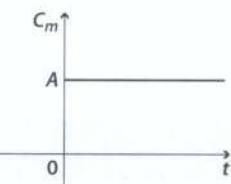
Neste capítulo, salvo aviso em contrário, suporemos sempre estáveis os sistemas de que tratarmos.

## 6.3 Sinais típicos de ensaios

A seguir mostramos sinais típicos que podem ser utilizados como excitação na entrada dos sistemas, a fim de verificarmos a sua resposta.

Função degrau (Figura 6.2)

$$Ab(t) = \begin{cases} = 0 & \text{para } t < 0 \\ = A & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$



**Figura 6.2** Degrau de altura A.

sendo  $b(t) \rightarrow$  degrau unitário (altura 1)

$A \rightarrow$  altura do degrau

Função rampa ou sinal de velocidade (Figura 6.3)

$$V_0 tb(t) = V_0 w(t) = \begin{cases} = 0 & \text{para } t < 0 \\ = V_0 t & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

sendo  $w(t) = tb(t) \rightarrow$  rampa unitária

$V_0 \rightarrow$  coeficiente da rampa

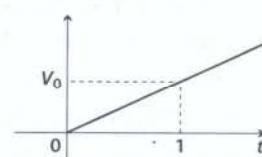
Função parábola ou sinal de aceleração (Figura 6.4)

$$a_0 \frac{t^2}{2} b(t) = a_0 \alpha(t) = \begin{cases} = 0 & \text{para } t < 0 \\ = a_0 \frac{t^2}{2} & \text{para } t \geq 0 \end{cases}$$

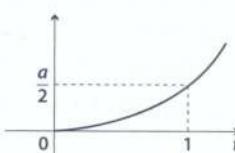
sendo

$\alpha(t) = (t^2/2)b(t) \rightarrow$  parábola unitária

$a_0 \rightarrow$  coeficiente da parábola



**Figura 6.3** Rampa de coeficiente  $V_0$ .



**Figura 6.4** Parábola de coeficiente  $a_0$ .

### Função senoidal (Figura 6.5)

A função senoidal é preferencialmente representada por cosseno, em vez de seno.

$$y(t) = A \cos(\omega t + \theta_0) b(t)$$

sendo que:

$A$  é a amplitude da senoide;

$\omega$  é a pulsação ou frequência angular;

$\theta(t) = \omega t + \theta_0$  é o argumento ou ângulo de fase;

$\theta_0$  é o ângulo fase inicial.

### Função impulso unitário (Figura 6.6)

Definição matemática;

$$\delta(t) = \begin{cases} = 0 & \text{para } t \neq 0 \\ \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \int_{0-}^{0+} \delta(t) dt = 1 \end{cases}$$

Para conceituação e interpretação do que seja o impulso, veja abaixo.

O impulso pode ser considerado o limite de um pulso de área constante cuja altura tende ao infinito e, necessariamente, a largura da base tende a zero (ver Figura 6.7). Uma observação importante é a que se

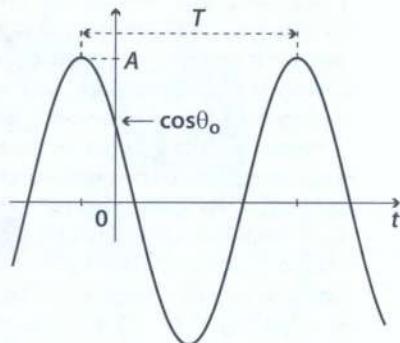


Figura 6.5 | Função senoidal.

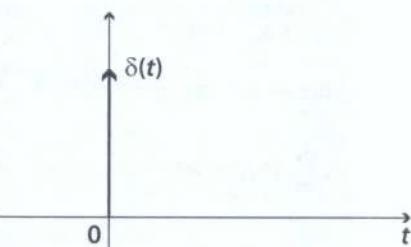


Figura 6.6 | Impulso unitário  $\delta(t)$ .

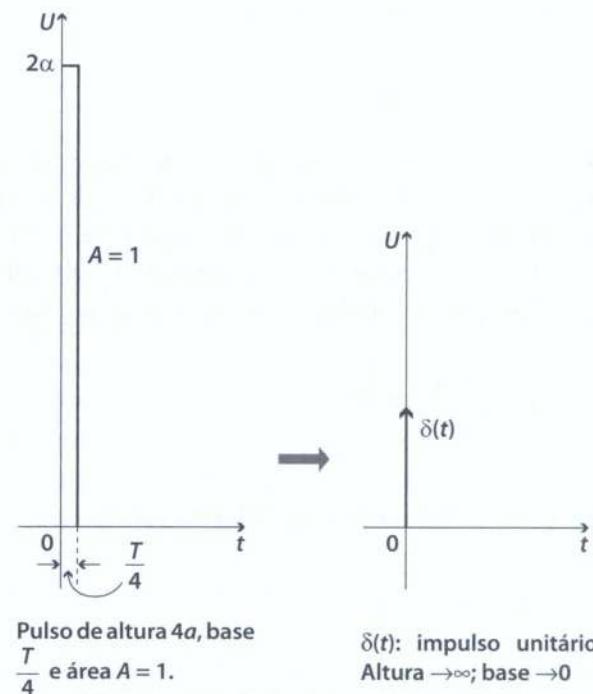
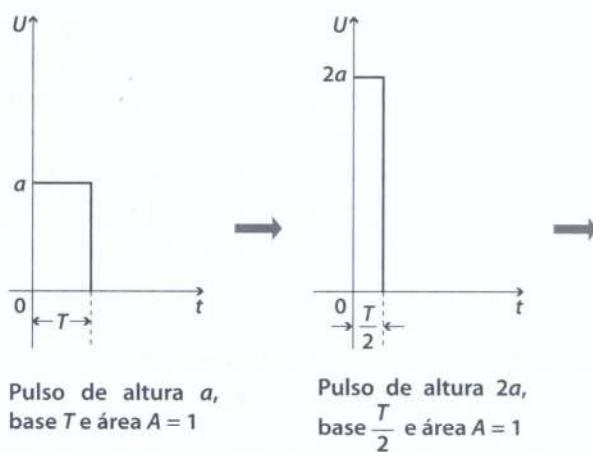


Figura 6.7 | Impulso.

refere à unidade com que é medido o impulso: ele é medido pela área e não pela altura. Por exemplo, um impulso de tensão não será medido em volts, mas em volts  $\times$  segundo, porque o que se mede realmente é a área subtendida pela função  $\delta(t)$ . No caso da corrente elétrica, por exemplo, o impulso será medido em Amperes  $\times$  segundo, ou seja, em Coulombs.

## 6.4 Dinâmica dos sistemas de 1<sup>a</sup> ordem

Já dissemos que os sistemas de entrada e saída únicas, lineares, invariantes no tempo, podem ter seu

modelo matemático reduzido a apenas uma equação diferencial linear de parâmetros constantes. A ordem ( $n$ ) dessa equação diferencial é igual à ordem mais elevada da derivada da variável de saída (isto é, variável a ser determinada). Essa é também a ordem do sistema. Supondo condições iniciais nulas ( $C.I. = 0$ ), a transformada de Laplace dessa equação leva-nos à função de transferência do sistema que ela descreve.

### ■ 6.4.1 Função de transferência e resposta impulsiva

Do que foi dito anteriormente, o modelo matemático de um sistema de primeira ordem pode ser expresso por uma equação diferencial de primeira ordem, isto é, uma equação diferencial do tipo

$$\dot{y} + ay = Ku(t)$$

sendo  $u = u(t)$  a variável de entrada do sistema,  $y = y(t)$  a variável de saída e  $\dot{y} = dy/dt$  a derivada dessa variável. Além disso, estamos supondo,  $a > 0$  e  $K > 0$ .

A função de transferência que resulta é habitualmente apresentada sob duas diferentes formas normais:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s + a}$$

(que é a 1<sup>a</sup> forma normal, ou 1<sup>a</sup> forma padrão)

$$\text{e } G(s) = \frac{K_g}{\tau s + 1}$$

(2<sup>a</sup> forma normal, ou 2<sup>a</sup> forma padrão), onde  $K_g = \frac{K}{a}$  é a constante de ganho estático do sistema e  $\tau = 1/a$  é a constante de tempo.

Esse sistema tem apenas um polo real na posição  $(-a)$ , do plano  $s$ .

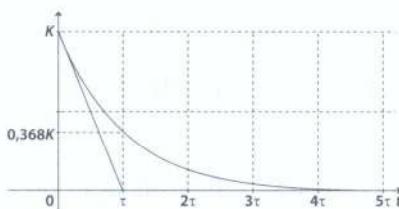
A resposta impulsiva que pode ser obtida pela transformada inversa de Laplace da própria função de transferência é:

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[K/(s + a)] = Ke^{-at} \quad \text{para } t > 0$$

Denomina-se constante de tempo do sistema a constante  $\tau = 1/a$ . Então, para  $t = \tau$ , na expressão de  $g(t)$ , resulta  $g(\tau) = Ke^{-1} = 0,368K$ , ou seja, decorrido um tempo  $t = \tau$  desde o início da resposta, esta fica

reduzida a 36,9% de seu valor inicial. Outra propriedade que pode ser demonstrada é que o segmento de reta que liga o ponto inicial da curva de resposta ao instante  $t = \tau$  no eixo dos tempos é tangente à curva no ponto inicial (ver Figura 6.8). Essas propriedades da constante de tempo auxiliam a elaboração de um esboço em escala da resposta de um sistema de primeira ordem a um impulso de valor  $K$ .

Note que todas as funções do tempo que resultam da inversão da transformada de Laplace são supostas nulas para  $t < 0$ , salvo informação em contrário. Por isso, na determinação da resposta de um sistema, a determinada excitação, daremos a expressão dessa resposta em função do tempo apenas para  $t \geq 0$ .



**Figura 6.8** Resposta impulsiva de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem.

#### Exemplo 6.1

Uma grandeza mecânica que pode assumir aproximadamente as características de um impulso é uma força de impacto ou de choque. De fato, trata-se de uma força de grande intensidade e de duração muito pequena, que pode ser considerada com boa aproximação uma força impulsiva. O impulso equivalente é medido aproximadamente pela grande intensidade da força ( $F$ ) multiplicada pela sua pequena duração ( $\Delta T$ ):  $u(t) = F\Delta T$ . Como exemplo, consideremos um carro de  $M = 800$  kg de massa sujeito a atrito viscoso de coeficiente  $B = 50$  N/(m/s) e submetido a uma força de impacto de 10.000 N durante 0,5 s (ver Figura 6.9). Determine a velocidade logo após o impacto e o tempo que decorre até que ela se reduza a 36,8% do valor inicial.

Solução:

Impulso equivalente:

$$u(t) = F\Delta T = 5000$$

Modelo do sistema:

$$M \frac{dv}{dt} + Bv(t) = u(t)$$

sendo  $v(t)$  a velocidade do móvel.

Função de transferência:

$$G(s) = \frac{V(s)}{U(s)} = \frac{1/M}{s + B/M} = \frac{0,00125}{s + 0,0625}$$

Com base no estudo feito anteriormente, podemos escrever a resposta impulsiva como sendo

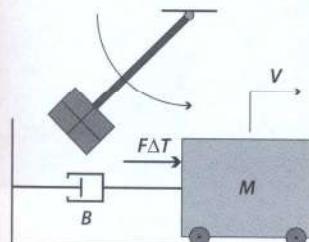
$$g(t) = \frac{F\Delta T}{M} e^{-\frac{B}{M}t} = 6,25 e^{-0,0625t}$$

para  $t \geq 0$

Velocidade inicial:  $v = 6,25 \text{ m/s} = 22,5 \text{ km/h}$ .

Para que a velocidade caia a 36,8% do valor inicial, deve decorrer um intervalo de tempo igual à constante de tempo do sistema, que no caso é:

$$\tau = \frac{1}{0,0625} = 16 \text{ segundos.}$$



Um carro  $M$  sujeito a atrito viscoso de coeficiente  $B$ .

Figura 6.9

### ■ 6.4.2 Resposta ao degrau unitário

Se o sinal de entrada for  $u(t) = h(t) =$  degrau unitário, teremos  $U(s) = 1/s$  e a resposta

$$Y(s) = G(s) U(s), \text{ será}$$

$$Y(s) = \frac{K}{(s + a)} U(s) = \frac{K}{s(s + a)}$$

ou, desenvolvendo em frações parciais

$$Y(s) = \frac{K/a}{s} - \frac{K/a}{s + a}$$

A transformada inversa de Laplace permite determinar a resposta no tempo:

$$y(t) = \frac{K}{a}(1 - e^{-at}) \quad \text{para } t \geq 0$$

O valor inicial da resposta é  $y(0) = 0$ , e valor final é

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{K}{a} (1 - e^{-at}) \right) = \frac{K}{a} \quad t \geq 0$$

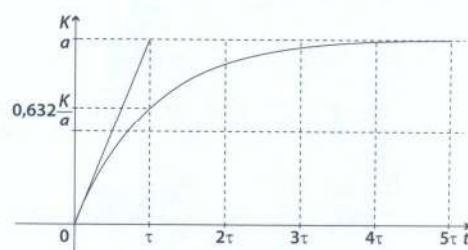
$\frac{K}{a} = K_g$  é a constante de ganho, e  $\frac{1}{a} = \tau$  é a constante de tempo do sistema.

A curva de resposta ao degrau tem como assíntota a reta paralela ao eixo dos tempos, que corresponde ao valor final da resposta.

Note que a expressão da resposta evidencia os dois componentes que a compõem: o componente transitório, que é uma exponencial amortecida ( $-K/a)e^{-at}$  que desaparece mais ou menos rapidamente com o decorrer do tempo e o componente forçado ( $K/a$ ) permanece indefidamente. A primeira parcela é resposta transitória, e a segunda, a resposta de regime permanente.

Considere o segmento de reta que sai da origem e encontra a reta do valor final no ponto em que  $t = \tau$  (Figura 6.10). A curva de resposta ao degrau é tangente a esse segmento na origem. Além disso, no instante  $t = \tau$ , o valor da resposta é igual  $1 - e^{-1} = 0,632$  do valor final da resposta (63,2% do valor final). Essas duas propriedades facilitam a construção de um gráfico da curva de resposta.

Costuma-se, ainda, definir para essa resposta ao degrau dos sistemas de primeira ordem as seguintes grandezas:



Resposta ao degrau unitário de um sistema de primeira ordem com ganho unitário ( $K/a = 1$ ).  
Figura 6.10

(1) Tempo de subida da resposta ( $t_s$ ): intervalo de tempo que decorre para que o sinal evolua de 10% a 90% do valor final. Facilmente, verifica-se que esse valor  $t_s = 2,2\tau = 2,2/a$ .

(2) Tempo de acomodação ou de assentamento ( $t_{ac}$ ): é o instante em que a resposta entra na faixa de  $\pm 2\%$  em torno do valor final e aí permanece. Tem-se muito aproximadamente  $t_{ac} = 4\tau = 4/a$ .

### ■ 6.4.3 Resposta à rampa unitária

Se o sinal de entrada for  $u(t) = t b(t)$  = rampa unitária, teremos  $U(s) = 1/s^2$ , e a resposta  $Y(s) = G(s) U(s)$ , será:

$$Y(s) = \frac{K}{s^2(s+a)}$$

ou, expandindo em frações parciais

$$Y(s) = \frac{K/a}{s^2} - \frac{K/a^2}{s} + \frac{K/a^2}{s+a}$$

A transformada inversa de Laplace permite determinar a resposta no tempo:

$$y(t) = \frac{K}{a} \left\{ t - \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \right\} \quad \text{para } t \geq 0$$

## Problemas resolvidos 1

### Exemplo 6.2

No circuito  $RC$  da Figura 6.11,  $v_1(t)$  é a tensão aplicada e  $v_2(t)$ , a tensão de saída. Determine a função de transferência e a resposta do circuito quando  $v_1$  for um degrau de 12 volts. Dados  $R = 50 \text{ k}\Omega$  e  $C = 10 \mu\text{F}$ .

Solução:

Podemos considerar o circuito como um divisor de tensão:

$$V_2(s) = \frac{\frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}} V_1(s) \quad \text{aproximado}$$

$$V_1(s) = \frac{1}{RCS + 1} V_2(s)$$

$$G(s) = \frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}}$$

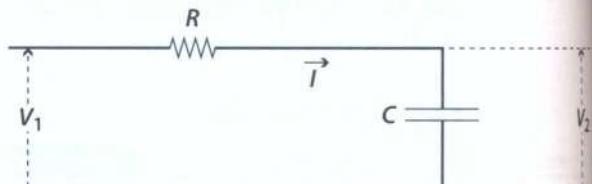
No caso,  $RC = 50 \cdot 10^3 \cdot 10^{-6} = 0,5$  segundo. Logo,

$$G(s) = \frac{2}{s+2}$$

$$\text{Sendo } V_1(s) = \frac{12}{s} \text{ temos: } V_2(s) = \frac{24}{s(s+2)}$$

A resposta no tempo pela equação já conhecida é:

$$y(t) = V_1 \frac{K}{a} (1 - e^{-at}), \text{ para } t \geq 0.$$



**Figura 6.11** Circuito.

Resulta:

$$y(t) = 12(1 - e^{-2t})$$

A constante de tempo é de 0,5 segundo, e o valor final da resposta, 12 V.

### Exemplo 6.3

A Figura 6.12 representa um circuito com dois amplificadores operacionais.

São dados:  $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ ;  $R_2 = 20 \text{ k}\Omega$ ;  $R = 200 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 1 \mu\text{F}$ .

Determine:

(a) A função de transferência  $G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}$  do circuito.

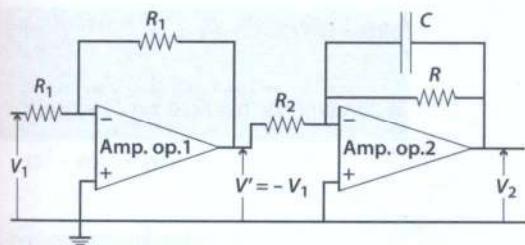
(b) A constante de tempo e de ganho do circuito.

(c) A resposta a um degrau de 0,5 V.

Solução:

Note que o primeiro amplificador operacional apenas inverte o sinal da variável de entrada. Logo, a função de transferência desse amplificador é:

$$G_1(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = -1$$

**Figura 6.12** Circuito com dois amplificadores operacionais.

e a entrada no segundo amplificador será  $V' = -V_1$ .  
Item (a)

Comecemos por calcular a impedância equivalente de realimentação do segundo amplificador. Trata-se de uma associação  $RC$  em paralelo:

$$Z(s) = \frac{R}{R + \frac{1}{Cs}} = \frac{R}{RCs + 1} = \frac{1}{Cs + \frac{1}{RC}}$$

$$G_2(s) = \frac{V_2(s)}{V'(s)} = -\frac{Z(s)}{R_2} =$$

$$-\frac{R}{R_2} \frac{1}{RCs + 1} = -\frac{10}{0,2s + 1}$$

$$G_2(s) = -\frac{50}{s + 5}$$

$$G(s) = G_1(s) \cdot G_2(s) = \frac{50}{s + 5}$$

Item (b)

Resulta do item anterior:

Constante de ganho  $K_g = \frac{R}{R_2} = 10$  e constante de tempo  $\tau = RC = 0,2$  s.

Item (c)

Resposta ao degrau  $u(t) = 0,5 h(t)$ :

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{25}{s(s+5)} = \left( \frac{5}{s} - \frac{5}{s+5} \right)$$

$$y(t) = 5(1 - e^{-5t}) \text{ para } t \geq 0.$$

**Exemplo 6.4**  
Um sistema possui uma função de transferência  $G(s) = 20/(s + 25)$ . Determine a constante de tempo, o tempo de subida e o tempo de acomodação. Qual a constante de ganho? Qual o valor final da resposta a um degrau unitário?

Solução:

Constante de ganho	$K_g = (20/25) = 0,8$
Constante de tempo	$\tau = 1/25 = 0,04$ s
Tempo de subida	$T_s = 2,2\tau = 0,088$ s
Tempo de acomodação	$T_{ac} = 4\tau = 0,16$ s
Valor final da resposta	$y(\infty) = 0,8$

### Exemplo 6.5

Qual a resposta a uma rampa unitária do sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = 5/(s + 2)?$$

Solução:

Um sistema de primeira ordem com função de transferência  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s + a}$  tem como resposta

$$\text{à rampa unitária } \left( U(s) = \frac{1}{s^2} \right)$$

$$y(t) = \frac{K}{a} [t - \frac{1}{a}(1 - e^{-at})]$$

No presente caso, temos  $K = 5$  e  $a = 2$ .

Resulta:

$$y(t) = 2,5[t - 0,5(1 - e^{-2t})]$$

### Exemplo 6.6

O rotor indicado na Figura 6.13 pode girar livremente em torno de seu eixo, sujeito apenas ao atrito viscoso nos mancais. O momento de inércia do rotor é de  $J = 0,03$  kgm<sup>2</sup> e o coeficiente de atrito viscoso,  $2\beta = 0,0015$  Nm/(rad/s). A velocidade de rotação inicial do rotor é  $\Omega_0 = 120$  rad/s. Determine a resposta de velocidade do sistema. Qual a constante de tempo do sistema?

Solução:

O modelo matemático do rotor é:

$$J \frac{d\omega}{dt} + 2\beta\omega = u(t)$$

Note que  $\Omega_0 = 120$  é uma condição inicial do sistema e que o comportamento do rotor é livre, isto é,  $u(t) = 0$ . Pela transformada de Laplace da equação apresentada, temos:

$$J(s\Omega(s) - \Omega_0) + 2\beta\Omega(s) = 0$$

$$(Js + 2\beta)\Omega(s) = J\Omega_0$$

$$\Omega(s) = \frac{\Omega_0}{s + \frac{2\beta}{J}} = \frac{120}{s + 0,05}$$

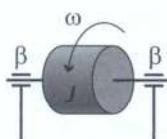


Figura 6.13 Rotor.

$$\omega(t) = 120 e^{-0.05t} \text{ rad/s}$$

A constante de tempo é  $\tau = 20$  segundos.

## 6.5 Sistemas de 2<sup>a</sup> ordem – classificação

Estudaremos a seguir a dinâmica dos sistemas de 2<sup>a</sup> ordem.

Contrariamente ao que ocorre com os sistemas de 1<sup>a</sup> ordem, cujo comportamento é bastante uniforme, o comportamento dos sistemas de 2<sup>a</sup> ordem varia radicalmente com o valor dos parâmetros que apresentam. Daí a necessidade de uma classificação prévia, para o bom entendimento dos fenômenos que ocorrem em cada caso. É o que faremos a seguir.

Como já sabemos, o modelo matemático básico de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem pode ser expresso por uma equação diferencial do tipo

$$\ddot{y} + p\dot{y} + qy = Ku$$

onde  $u = u(t)$  é a variável de entrada do sistema e  $y(t)$  é a variável de saída, sendo, ainda,  $\dot{y} = dy/dt$  e  $\ddot{y} = d^2y/dt^2$ . Os coeficientes  $p$ ,  $q$  e  $K$  são constantes.

A função de transferência na primeira forma normal será, então:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + ps + q}$$

que, entretanto, costuma ser escrita com a notação:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}$$

onde  $\alpha = p/2$  e  $\omega_n^2 = q$ . Ou, ainda, na segunda forma normal:

$$G(s) = \frac{K_g}{(s/\omega_n)^2 + 2\zeta(s/\omega_n) + 1}$$

$$\text{com } K_g = K/(\omega_n)^2 \quad \text{e} \quad \zeta = \alpha/\omega_n$$

Por razões de interpretação física, adotam-se as seguintes denominações:

$\omega_n$ : Frequência de ressonância do sistema sem amortecimento.

$\alpha$ : Coeficiente de amortecimento.

$\zeta$ : Grau de amortecimento.

$K_g$ : Constante de ganho generalizada de frequência zero.

$K$ : Constante de ganho imprópria ou pseudoconstante de ganho.

Note que, para que o sistema seja estável, devemos ter  $\alpha > 0$ , bem como  $(\omega_n)^2 > 0$ . Essa hipótese garante que os polos do sistema se situem no semiplano esquerdo do plano  $s$ , o que é uma garantia de estabilidade, conforme veremos em outro capítulo.

A equação característica pode ser escrita:

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 = 0$$

e os polos do sistema resultam

$$s_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} \quad \text{ou}$$

Temos, então, os seguintes casos a considerar:

- (a) Dois polos reais, desiguais, isto é,  $\alpha^2 > \omega_n^2$  ou  $\zeta > 1$ . Nesse caso, diz-se que o sistema é *superamortecido*.
- (b) Polos reais e iguais, isto é,  $\alpha^2 = \omega_n^2$  ou  $\zeta = 1$ . É o caso dos sistemas com *amortecimento crítico*.
- (c) Polos complexos conjugados, isto é,  $\alpha^2 < \omega_n^2$  ou  $0 < \zeta < 1$ . O sistema é *subamortecido*.

As denominações adotadas são justificadas pelo tipo de resposta característica que os sistemas apresentam em cada caso.

A seguir estudaremos cada um desses casos separadamente.

## 6.6 Sistema superamortecido

Neste caso, os polos são reais e desiguais, e a equação característica

$$Q(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 = 0$$

tem-se  $\alpha^2 > \omega_n^2$  e  $\zeta = (\alpha/\omega_n) > 1$ .

Assim, podemos fazer

$$\alpha^2 - \omega_n^2 = \beta^2$$

e, em consequência:

$$s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = -\alpha + \beta$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = -\alpha - \beta$$

Como os radicandos são positivos, já que  $\alpha^2 > \omega_n^2$ , teremos dois polos reais e desiguais. Como, ainda,  $\alpha > \beta$ , ambos os polos serão negativos (ver Figura 6.14). Podemos, então, escrever:

$$s_1 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = -a$$

$$s_2 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_n^2} = -b$$

com  $a$  e  $b$  positivos e  $b > a$ .

O polinômio característico, sob forma fatorada, será:

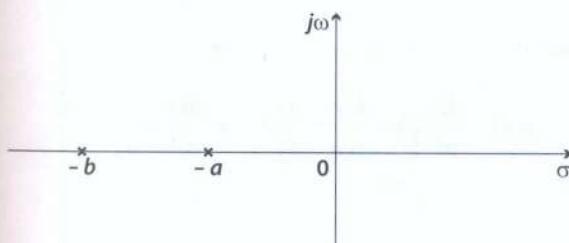
$$Q(s) = (s - s_1)(s - s_2) = (s + a)(s + b)$$

E a função de transferência, na primeira forma normal, é:

$$G(s) = \frac{K}{(s + a)(s + b)}$$

Ou, na 2ª forma normal:

$$G(s) = \frac{K_g}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$$



**Figura 6.14** Polos reais desiguais. Sistema superamortecido.

Sendo  $K_g = \frac{K}{ab}$ , a constante de ganho de frequência zero e  $\tau_1 = \frac{1}{a}$  e  $\tau_2 = \frac{1}{b}$  as constantes de tempo do sistema.

### ■ 6.6.1 Resposta impulsiva

A resposta impulsiva pode ser obtida facilmente, expandindo-se a função de transferência em frações parciais, obtendo-se em seguida a transformada inversa de Laplace:

$$G(s) = \frac{K}{(s + a)(s + b)} = \frac{K}{b - a} \left\{ \frac{1}{s + a} - \frac{1}{s + b} \right\}$$

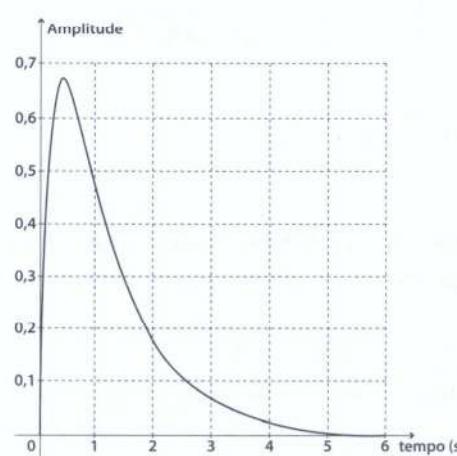
$$g(t) = L^{-1} G(s) = \frac{K}{b - a} (e^{-at} - e^{-bt})$$

para  $t \geq 0$

Vemos que a resposta impulsiva, ou resposta característica, nesse caso, é a soma algébrica de duas exponenciais decrescentes, de constantes de tempo diferentes:

$$\tau_1 = 1/a \quad \text{e} \quad \tau_2 = 1/b$$

Os sistemas superamortecidos comportam-se como a superposição de dois sistemas de primeira ordem. O gráfico da resposta impulsiva de tal sistema está na Figura 6.15:



**Figura 6.15** Resposta impulsiva – sistema de 2ª ordem superamortecido.

## ■ 6.6.2 Resposta ao degrau unitário

De forma análoga, pode-se calcular facilmente a resposta ao degrau unitário.

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s(s+a)(s+b)}$$

Expandindo em frações parciais, obtém-se:

$$Y(s) = \frac{K}{s(s+a)(s+b)} = \frac{K}{ab} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{b}{(b-a)(s+a)} + \frac{a}{(b-a)(s+b)} \right\}$$

ou, no domínio do tempo

$$y(t) = \frac{K}{ab} \left[ 1 - \left( \frac{b}{b-a} e^{-at} - \frac{a}{b-a} e^{-bt} \right) \right]$$

## ■ 6.6.3 Resposta à rampa unitária

A transformada de Laplace de uma rampa unitária é  $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s^2}$  e, então, a resposta de um sistema de 2ª ordem a essa rampa é:

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s^2} = \frac{K}{s^2(s+a)(s+b)}$$

O desenvolvimento em frações parciais dá-nos:

$$Y(s) = \frac{K}{ab} \left\{ \frac{1}{s^2} - \frac{a+b}{abs} + \frac{b}{a(b-a)(s+a)} - \frac{a}{b(b-a)(s+b)} \right\}$$

A transformada inversa dessa expressão é a resposta, em função do tempo, desse sistema à rampa unitária:

$$y(t) = \frac{K}{ab} \left\{ t - \frac{a+b}{ab} + \frac{b}{a(b-a)} e^{-at} - \frac{a}{b(b-a)} e^{-bt} \right\}$$

Pode-se verificar que o valor inicial da resposta nula ( $y(0) = 0$ ) e à medida que  $t \rightarrow \infty$ , a resposta te a acompanhar a rampa  $\frac{K}{ab} \left( t - \frac{a+b}{ab} \right)$ .

## ■ 6.6.4 Resposta ao degrau unitário de um sistema dotado de dois polos reais e um zero

Seja o sistema

$$G(s) = \frac{K(s+c)}{(s+a)(s+b)}$$

A resposta ao degrau unitário no domínio da frequência será:

$$Y(s) = \frac{K(s+c)}{s(s+a)(s+b)} = K \left\{ \frac{A}{s} + \frac{B}{s+a} + \frac{C}{s+b} \right\}$$

Teremos

$$A = \left. \frac{s+c}{(s+a)(s+b)} \right|_{s=0} = \frac{c}{ab}$$

$$B = \left. \frac{s+c}{s(s+b)} \right|_{s=-a} = \frac{c-a}{-a(b-a)}$$

e

$$C = \left. \frac{s+c}{s(s+a)} \right|_{s=b} = \frac{c-b}{b(b-a)}$$

Resulta:

$$Y(s) = K \left\{ \frac{c}{abs} - \frac{(c-a)}{a(b-a)(s+a)} + \frac{(c-b)}{b(b-a)(s+b)} \right\}$$

Passando para o domínio do tempo, vem

$$y(t) = K \left\{ \frac{c}{ab} - \frac{(c-a)}{a(b-a)} e^{-at} + \frac{(c-b)}{b(b-a)} e^{-bt} \right\}$$

ou, ainda,

$$y(t) = \frac{Kc}{ab} \left\{ 1 - \frac{b(c-a)}{c(b-a)} e^{-at} + \frac{a(c-b)}{c(b-a)} e^{-bt} \right\}$$

## Problemas resolvidos 2

### Exemplo 6.7

Dado o sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^2 + 5s + 6}$$

determine as constantes de tempo e a resposta ao degrau unitário.

Solução:

Polos:  $s_1 + s_2 + 5s + 6 = (s + 2)(s + 3) = 0 \therefore$   
polos em  $-2$  e  $-3$

Logo,

$$a = 2 \quad b = 3$$

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{6}{s^2 + 5s + 6} = \frac{6}{(s+2)(s+3)}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{6}{s(s+2)(s+3)}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{1}{s} - \frac{3}{(s+2)} + \frac{2}{(s+3)}$$

Pela transformada inversa de Laplace, obtemos a resposta:

$$y(t) = 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

O mesmo resultado pode ser obtido diretamente pela aplicação da fórmula:

$$y(t) = \frac{K}{ab} \left[ 1 - \left( \frac{b}{b-a} e^{-at} - \frac{a}{b-a} e^{-bt} \right) \right] = \\ 1 - 3e^{-2t} + 2e^{-3t}$$

### Exemplo 6.8

Dado o circuito da Figura 6.16, cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{2.500}{(s+25)(s+50)}$$

determine a resposta desse sistema a um degrau unitário. C.I. = 0.

Solução:

$$v_1(t) = h(t) = \text{degrau unitário} \rightarrow$$

$$V_1(s) = \frac{1}{s}$$

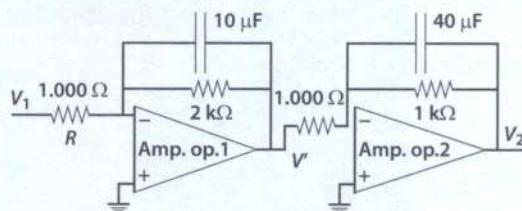


Figura 6.16 Circuito.

$$V_2(s) = G(s) V_1(s) =$$

$$\frac{2.500}{s(s+25)(s+50)} = \\ \frac{2}{s} - \frac{4}{s+25} + \frac{2}{s+50}$$

Resulta:

$$v_2(t) = 2(1 - 2e^{-25t} + e^{-50t})$$

### Exemplo 6.9

Obtenha a resposta  $y(t)$  a uma rampa unitária do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{16s}{s^2 + 6s + 8}$$

Solução:

A transformada de Laplace de uma rampa unitária é  $\frac{1}{s^2}$ . Logo, a resposta do sistema dada uma rampa unitária é:

$$Y(s) = \frac{16s}{s^2 + 6s + 8} \cdot \frac{1}{s^2} = \\ \frac{16}{s(s+2)(s+4)}$$

Vemos que, nesse caso, o cancelamento de um dos polos do sinal com o zero do sistema na origem faz com que a resposta à rampa seja igual à resposta ao degrau de um sistema com os mesmos polos do sistema dado, mas sem o zero.

A resposta pode ser obtida por desenvolvimento em frações parciais ou pela aplicação da fórmula apropriada, com  $a = 2$ ,  $b = 4$  e  $K = 16$ .

$$y(t) = \frac{K}{ab} \left[ 1 - \left( \frac{b}{b-a} e^{-at} - \frac{a}{b-a} e^{-bt} \right) \right] = \\ 2 \left[ 1 - 2e^{-2t} + e^{-4t} \right]$$

**Exemplo 6.10**

Obtenha a resposta  $y(t)$  a uma rampa unitária do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{16}{s^2 + 6s + 8}$$

Solução:

A transformada de Laplace de uma rampa unitária é  $\frac{1}{s^2}$ :

$$Y(s) = \frac{16}{s^2(s^2 + 6s + 8)} = \frac{16}{s^2(s+2)(s+4)}$$

A resposta pode ser obtida por desenvolvimento em frações parciais ou pela aplicação da fórmula acima deduzida para o caso da rampa. De uma ou de outra forma, obtemos

$$Y(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{1,5}{s} + \frac{2}{s+2} - \frac{0,5}{s+4}$$

$$y(t) = 2t - 1,5 + 2e^{-2t} - 0,5e^{-4t}$$

**Exemplo 6.11**

Calcule a resposta ao degrau unitário do sistema dado pela função de transferência

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10(s+2)}{(s+1)(s+4)}$$

Solução:

Neste caso, temos um sistema superamortecido, isto é, com dois polos reais, mas dotado de um zero situado entre os polos.

Podemos obter o resultado por desenvolvimento em frações parciais ou por aplicação da fórmula desenvolvida anteriormente para esse caso.

Pela expansão em frações parciais, temos:

$$Y(s) = \frac{10}{2s} - \frac{10}{3(s+1)} - \frac{10}{6(s+4)}$$

**6.7 Sistema criticamente amortecido**

Neste caso, os polos são reais e iguais. Para que a expressão geral da função de transferência

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}$$

Pela transformada inversa, obtemos:

$$y(t) = 5 - \frac{10}{3}e^{-t} - \frac{10}{6}e^{-4t}$$

Por outro lado, utilizando a fórmula já pronta, obtemos:

$$y(t) = \frac{Kc}{ab} \left\{ 1 - \frac{b(c-a)}{c(b-a)} e^{-at} + \frac{a(c-b)}{c(b-a)} e^{-bt} \right\}$$

Sendo, aqui,  $K = 10$ ,  $a = 1$ ,  $B = 4$  e  $c = 2$ , o resultado final é:

$$y(t) = 5 \left\{ 1 - \frac{2}{3}e^{-t} - \frac{1}{3}e^{-4t} \right\}$$

O mesmo obtido anteriormente.

**Exemplo 6.12**

Calcule a resposta ao degrau do sistema dado por:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s(s+5)}$$

Solução:

Neste caso,

$$Y(s) = \frac{10}{s^2(s+5)} = \frac{2}{s^2} - \frac{0,4}{s} + \frac{0,4}{s+5}$$

$$y(t) = 2t - 0,4 + 0,4e^{-5t}$$

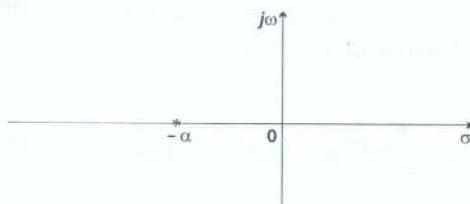
Note que, devido ao polo na origem, a resposta ao degrau tende para o infinito, o que caracteriza o fato de o sistema ser instável, e não superamortecido.

tenha dois polos reais e iguais, o denominador deverá ser da forma

$$s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 = (s + \alpha)^2 = s^2 + 2\alpha s + \alpha^2$$

Isto é, devemos ter (ver Figura 6.17):

$$\alpha^2 = \omega_n^2, \quad \zeta = (\alpha/\omega_n) = 1 \quad \text{e} \quad s_1 = s_2 = -\alpha$$



**Figura 6.17** Dois polos iguais em  $-\infty$ .

A função de transferência para esse caso será, então:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{(s + \alpha)^2}$$

### ■ 6.7.1 Resposta impulsiva

A resposta ao impulso unitário, sendo simplesmente a transformada inversa da função de transferência, pode ser obtida diretamente da tabela de transformadas de Laplace.

Logo, para  $t \geq 0$ , a resposta impulsiva é:

$$g(t) = Kte^{-\alpha t}$$

### ■ 6.7.2 Resposta ao degrau unitário

A resposta de um sistema crítico ao degrau unitário é:

$$Y(s) = \frac{K}{s(s + \alpha)^2} = K \left\{ \frac{1}{\alpha^2 s} - \frac{1}{\alpha(s + \alpha)^2} - \frac{1}{\alpha^2(s + \alpha)} \right\}$$

ou

$$Y(s) = \frac{K}{\alpha^2} \left\{ \frac{1}{s} - \frac{\alpha}{(s + \alpha)^2} - \frac{1}{(s + \alpha)} \right\}$$

Pela transformada inversa de Laplace, obtemos:

$$y(t) = \frac{K}{\alpha^2} \{1 - \alpha te^{-\alpha t} - e^{-\alpha t}\} = \frac{K}{\alpha^2} \{1 - (\alpha t + 1)e^{-\alpha t}\}$$

#### Exemplo 6.13

Determine as respostas do circuito da Figura 6.18 (a) ao impulso unitário e (b) ao degrau unitário.

$$R = 1.000 \Omega \quad R_1 = R_2 = 2 \text{ k}\Omega \quad C_1 = C_2 = 10 \mu\text{F}$$

Determine a função de transferência e a resposta característica.

Solução:

Comecemos por calcular a função de transferência do sistema:

$$Z_1(s) = Z_2(s) = \frac{1/C_1}{s + 1/(R_1 C_1)} = \frac{100.000}{s + 50}$$

$$V'_1(s) = \frac{-Z_1(s)}{R} V_1(s) = \frac{-100}{s + 50} V_1(s)$$

$$V'_2(s) = \frac{-Z_2(s)}{R} V'_1(s) = \frac{-100}{s + 50} V'_1(s)$$

Portanto, a função de transferência será:

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{10^4}{(s + 50)^2}$$

(a) A resposta impulsiva obtida pela transformada inversa de Laplace resulta, para  $t \geq 0$ :

$$g(t) = 10.000te^{-50t}$$

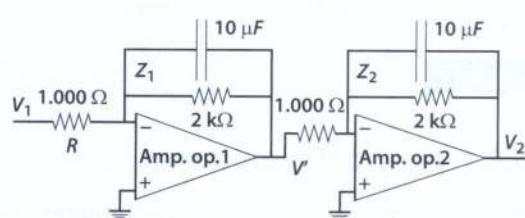
(b) Resposta ao degrau unitário:

Utilizando a expressão da resposta ao degrau unitário para sistemas com amortecimento crítico

$$y(t) = \frac{K}{\alpha^2} \{1 - (\alpha t + 1)e^{-\alpha t}\}$$

Sendo, no caso,  $K = 10.000$  e  $\alpha = 50$ , resulta:

$$y(t) = 4 \{1 - (50t + 1)e^{-50t}\}$$



**Figura 6.18** Circuito do exemplo 6.13.

### 6.8 Sistema subamortecido

Os sistemas subamortecidos têm um par de polos complexos conjugados com parte real negativa.

A resposta impulsiva desses sistemas é uma senoide amortecida que empresta à resposta transitória desses sistemas um caráter oscilatório. A função de transferência de um sistema subamortecido de 2<sup>a</sup> ordem, isento de zeros, pode ser apresentada sob a forma:

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} = \frac{K}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

com

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}.$$

Na análise a seguir, vamos supor, ainda, que todos os coeficientes da função de transferência são positivos.

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n}$$

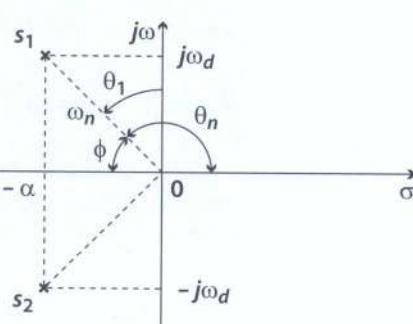
Nos sistemas subamortecidos  $\zeta < 1$  e, portanto,  $\alpha < \omega_n$ .

Os polos são as raízes do polinômio característico

$$Q(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2 = (s + \alpha)^2 + \omega_d^2$$

ou seja (ver Figura 6.19):

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d$$



**Figura 6.19** Polos de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem subamortecido.

### ■ 6.8.1 Resposta impulsiva

Sabemos que a resposta ao impulso unitário é obtida pela transformada inversa da função de transferência

$$G(s) = \frac{K}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

que pode ser facilmente obtida a partir da tabela de transformadas de Laplace:

$$g(t) = \frac{K}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t) \quad \text{para } t \geq 0$$

### ■ 6.8.2 Resposta ao degrau unitário

A resposta ao degrau unitário é muito importante porque a ela estão associadas várias grandezas que são muito utilizadas como especificações dos sistemas de controle. Para os sistemas subamortecidos em que a função de transferência é apresentada com as notações

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} = \frac{K}{(s + \alpha)^2 + \omega_d^2}$$

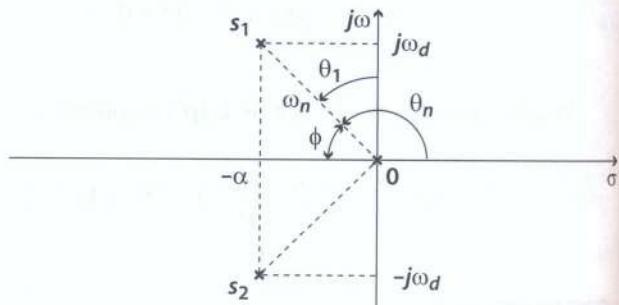
a resposta ao degrau unitário no domínio da frequência é  $y(s) = \frac{K}{s[(s + \alpha)^2 + \omega_d^2]}$  e a expressão no domínio do tempo é

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right\}$$

para  $t \geq 0$  e com  $\phi = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right)$ . Ver Figura 6.20.

Essa fórmula geral da resposta ao degrau unitário pode ser deduzida nos mesmos moldes da dedução utilizada no caso do Exemplo 6.14.

Graficamente, a resposta ao degrau típica desses sistemas é a indicada na Figura 6.21.



**Figura 6.20** O polo na origem é devido ao degrau.

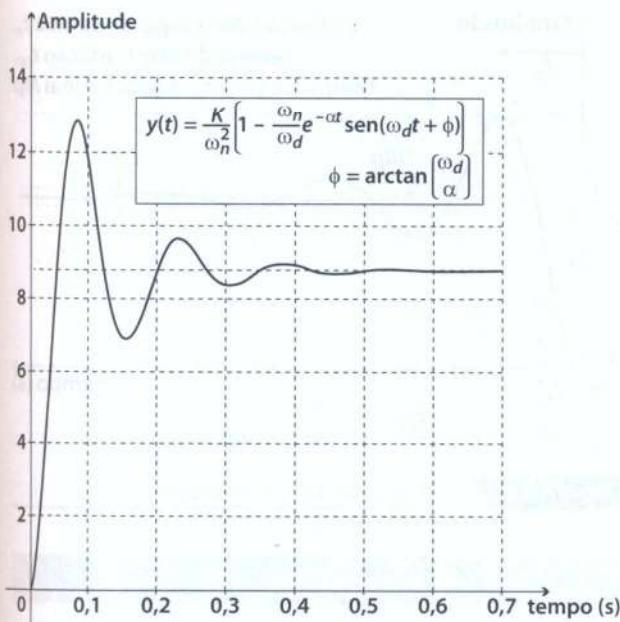


Figura 6.21 Resposta ao degrau.

### 6.8.3 Índices de desempenho

A esse tipo de resposta estão associadas definições de várias grandezas que são muito utilizadas como especificações do critério de desempenho dos sistemas de controle. Elas permitem também obter facilmente a função de transferência do sistema a partir do gráfico da resposta ao degrau. Além disso, essas definições podem ser, em muitos casos, extrapoladas com boa aproximação, para sistemas de ordem superior à segunda, com base no conceito de polos dominantes (que serão vistos adiante). As definições são as seguintes:

■ **Tempo de subida ( $t_s$ )**. É o intervalo de tempo em que o sinal evolui de 10% a 90% do valor final da resposta. Alguns autores adotam de 5% a 95% do valor final e, em alguns casos, de 0 a 100% do valor final da resposta. Geralmente, adota-se esta última definição para o caso dos sistemas subamortecidos. Nesse caso, o tempo de subida pode ser calculado pela fórmula

$$t_s = \frac{\pi - \phi}{\omega_d} \quad \text{com} \quad \phi = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right)$$

- **Tempo de atraso ( $t_d$ )**. É o tempo necessário para que a resposta alcance 50% do valor final pela primeira vez.
- **Instante de pico ( $t_p$ )**. É o tempo que decorre até o primeiro valor de pico (valor máximo) da resposta.

$$t_p = \frac{\pi}{\omega_d}$$

- **Máximo sobressinal ( $M_p$ )**. O máximo sobressinal é o máximo valor alcançado pela resposta do sistema (valor de pico) menos o valor final da resposta. É geralmente apresentado em valor relativo; pode ser calculado em função do grau de amortecimento.

$$M_p = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)}$$

Se o valor final da resposta diferir da unidade, é habitual que se dê o máximo sobressinal, em porcentagem:

$$M_p \% = \frac{y(t_p) - y(\infty)}{y(\infty)} \cdot 100\%$$

O máximo sobressinal pode ser calculado em função dos parâmetros  $\alpha$  e  $\omega_d$  ou em função do grau de amortecimento  $\zeta$  do sistema subamortecido:

$$M_p = e^{\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

ou

$$M_p = e^{\frac{-\alpha\pi}{\omega_d}}$$

O grau de amortecimento  $\zeta$  pode também ser calculado em função de  $M_p$ :

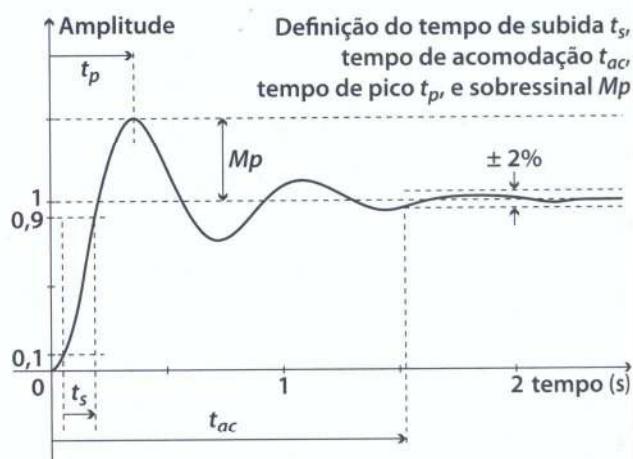
$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(\ln M_p)^2}}}$$

- **Tempo de acomodação ( $t_{ac}$ )**. É o tempo necessário para que a resposta do sistema se estabilize dentro de certo

percentual de seu valor final. Duas ou três porcentagens de tolerância são comumente utilizadas: 1%, 2% ou mesmo 5%. Para que um sistema de 2<sup>a</sup> ordem superamortecido se estabilize dentro da faixa de  $\pm 2\%$ , pode-se considerar um tempo de acomodação de 4 constantes de tempo.

$$t_{ac} = 4\tau = \frac{4}{\alpha}$$

A Figura 6.22 ilustra e esclarece as várias grandezas definidas anteriormente.



**Figura 6.22** Definição do tempo de subida.

### Problemas resolvidos 3

#### Exemplo 6.14

Determine a resposta ao degrau unitário do sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{25}{s^2 + 6s + 25}$$

Solução:

A resposta ao degrau pode ser obtida pela transformada inversa da resposta no domínio da frequência

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{25}{s(s^2 + 6s + 25)} = \\ &= \frac{25}{s((s+3)^2 + 16)} \\ Y(s) &= \frac{A}{s} + \frac{Bs+C}{s^2 + 6s + 25} = \\ &= \frac{As^2 + 6As + 25A + Bs^2 + Cs}{s(s^2 + 6s + 25)} \end{aligned}$$

Comparando os numeradores desta última expressão com o da fórmula anterior e igualando os termos de mesma potência, vem

$$25A = 25 \therefore A = 1$$

$$6A + C = 0 \therefore C = -6$$

$$A + B = 0 \therefore B = -1$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+6}{(s+3)^2 + 16} =$$

$$\frac{1}{s} - \left\{ \frac{s+3}{((s+3)^2 + 16)} + \frac{3}{4} \frac{4}{(s+3)^2 + 16} \right\}$$

$$y(t) = 1 - e^{-3t} \left\{ \cos(4t) + \frac{3}{4} \sin(4t) \right\}$$

Com um pequeno auxílio da trigonometria podemos dar a essa equação uma forma mais compacta e elegante. Para isso, dividimos e multiplicamos os termos entre parênteses por 'raiz quadrada da soma dos quadrados dos coeficientes de seno e cosseno':

$$\sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{16}} = \frac{5}{4}$$

Resulta:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{5}{4} e^{-3t} \\ &\quad \left\{ \frac{4}{5} \cos(4t) + \frac{3}{5} \sin(4t) \right\} \end{aligned}$$

Fazendo, agora

$$\sin(\phi) = \frac{3}{5}, \quad \cos(\phi) = \frac{4}{5}$$

$$\text{e consequentemente } \phi = \arctan\left(\frac{4}{3}\right) = 53,13^\circ$$

podemos escrever:

$$\begin{aligned} y(t) &= 1 - \frac{5}{4} e^{-3t} \left\{ \sin(\phi) \cos(4t) + \right. \\ &\quad \left. \cos(\phi) \sin(4t) \right\} = 1 - \frac{5}{4} e^{-3t} \sin(4t + \phi) \end{aligned}$$

Resposta final:

$$y(t) = 1 - \frac{5}{4} e^{-3t} \sin(4t + 53,13^\circ)$$

O mesmo resultado pode ser facilmente obtido diretamente pela simples aplicação da fórmula apresentada anteriormente:

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

$$K = 25 \quad \alpha = 3 \quad \omega_n = \sqrt{25} = 5$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 4$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right) = 53,13^\circ$$

Substituindo na expressão acima:

$$y(t) = 1 - 1,25 e^{-4t} \sin(4t + 53,13^\circ)$$

Pode-se verificar facilmente que para  $t = 0$ :

$$y(0) = 1 - 1,25 \sin(53,13^\circ) = 1 - 1,25 \cdot 0,8 = 0$$

### Exemplo 6.15

Dado o sistema de 2ª ordem representado pelo diagrama de blocos da Figura 6.23:

- Determine a função de transferência  $F(s) = Y(s)/U(s)$  e verifique se o sistema é super, sub ou criticamente amortecido;
- Determine as grandezas relevantes do sistema.
- Calcule a resposta ao degrau unitário.

Solução:

- Função de transferência de malha fechada:

$$F(s) = \frac{2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{2}{(s+1)^2 + 1}$$

Polos:  $1 \pm j$ . Não há zeros. Polos complexos indicam que o sistema é subamortecido.

- Grandezas relevantes: constante de ganho estático  $K_g = 1$ ; coeficiente de amortecimento  $\alpha = 1$ ; frequência de ressonância do sistema sem amortecimento  $\omega_n = \sqrt{2} = 1,4142$ ; frequência do sistema com amortecimento  $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 1$ ; grau de amortecimento  $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ . Esse valor do grau de amortecimento ( $0 < \zeta < 1$ ) confirma que o sistema é subamortecido.

(c) Resposta ao degrau unitário  $h(t)$

$$Y(s) = F(s) \frac{1}{s} = \frac{2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

A transformada inversa pode ser obtida como segue

$$Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{As + B}{s^2 + 2s + 2} = \frac{(1+A)s^2 + (2+B)s + 2}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

Resulta:  $A = -1$  e  $B = -2$   $\therefore$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s+2}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{s} - \left( \frac{s+1}{(s+1)^2 + 1} + \frac{1}{(s+1)^2 + 1} \right)$$

$$y(t) = 1 - e^{-t} (\cos t + \operatorname{sen} t) =$$

$$1 - \sqrt{2} e^{-t} \operatorname{sen}(t + 45^\circ)$$

O mesmo resultado pode ser obtido diretamente pela aplicação da fórmula já deduzida:

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

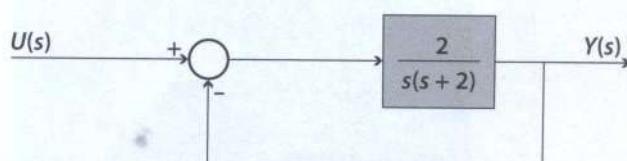
$$K = 2 \quad \alpha = 1 \quad \omega_n = \sqrt{2} = 1,14$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 1$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right) = 45^\circ$$

Substituindo na expressão acima:

$$y(t) = 1 - \sqrt{2} e^{-t} \operatorname{sen}(t + 45^\circ)$$



**Figura 6.23** Diagrama de blocos.

**Exemplo 6.16**

Dado o circuito da Figura 6.24, cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{s^2 + 2s + 10}$$

determine a resposta desse sistema a um degrau unitário. C.I. = 0.

Solução:

Resposta ao degrau unitário:

$$\begin{aligned} V_2(s) &= \frac{1}{s(s^2 + 2s + 10)} = \frac{1}{s((s+1)^2 + 9)} = \\ &= \frac{1}{s(s+2s+10)} = \frac{0,1}{s} + \frac{Bs+C}{s+2s+10} = \\ &= \frac{0,1s^2 + 0,2s + 1 + Bs^2 + Cs}{(s+1)^2 + 9} \end{aligned}$$

Comparando os numeradores da primeira e da última fração, obtemos:  $B = -0,1$  e  $C = -0,2$ .

$$\begin{aligned} V_2(s) &= 0,1 \left( \frac{1}{s} - \frac{s+2}{(s+1)^2 + 9} \right) = \\ &= 0,1 \left( \frac{1}{s} - \frac{s+1}{(s+1)^2 + 9} - \frac{1}{3} \frac{3}{(s+1)^2 + 9} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_2(t) &= 0,1 \left( 1 - e^{-t} \left( \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t \right) \right) = \\ &= 0,1 \left( 1 - \frac{\sqrt{10}}{3} e^{-t} \sin(3t + 71,6^\circ) \right) \end{aligned}$$

$$V_2(t) = 0,1(1 - 1,054e^{-t} \sin(3t + 71,6^\circ))$$

O mesmo resultado pode ser facilmente obtido pela aplicação da fórmula anteriormente deduzida:

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

$$K = 1 \quad \alpha = 1 \quad \omega_n = \sqrt{10} = 3,16$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 3$$

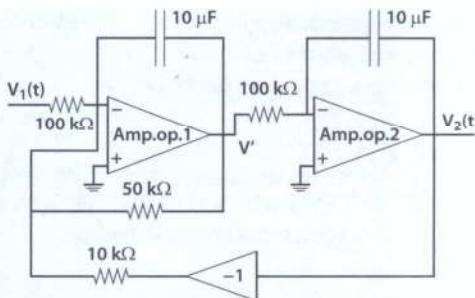
$$\phi = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha} \right) = 71,56^\circ$$

Substituindo na expressão acima:

$$y(t) = 1 - 1,054e^{-t} \sin(71,56^\circ)$$

Verificação: para  $t = 0$

$$y(t) = 1 - 1,054 \sin(71,56^\circ) = 0$$



**Figura 6.24** Circuito.

**Exemplo 6.17**

A Figura 6.25 representa a resposta de um sistema a um degrau unitário. Determine, a partir do gráfico: a constante de tempo; o tempo de subida (de zero a 100%); o tempo de pico; o sobressinal (em porcentagem); o tempo a acomodação com base em 2% de erro; o valor da frequência  $\omega_d = \frac{2\pi}{T_d}$ .

Solução:

Sabemos que resposta ao degrau de um sistema de 2ª ordem é

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

$$\text{para } t \geq 0 \text{ e com } \phi = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha} \right)$$

No caso, vamos obter no gráfico as seguintes medidas:

$$M_p = 0,5; T_d = 1,45 \text{ s e } \frac{K}{\omega_n^2} = 5$$

A partir daí, temos:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{\pi^2}{(\ln M_p)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{3,14^2}{(0,693)^2}}} = 0,215$$

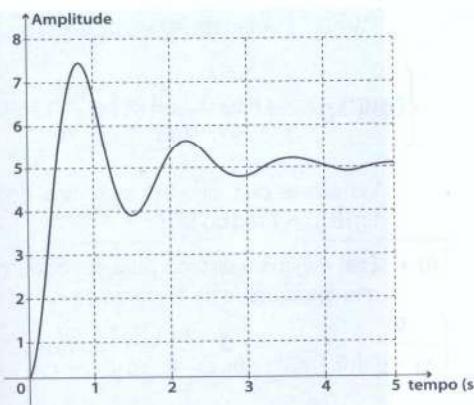
$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{6,28}{1,45} = 4,332 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{4,332}{\sqrt{1-0,215^2}} = 4,436$$

$$\alpha - \zeta \omega_n = 0,215 \cdot 4,436 = 0,954$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha} \right) = \arctan \left( \frac{4,332}{0,954} \right)$$

$$\phi = \arctan(4,54) = 77,6^\circ$$



**Figura 6.25** Resposta de um sistema a um degrau unitário.

Substituindo esses valores na equação inicial, resulta:

$$y(t) = 5(1 - 1,024 e^{-0,954t} \operatorname{sen}(4,332 t + 77,6^\circ))$$

Constante de tempo:

$$\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{0,954} = 1,048$$

Tempo de acomodação:  $t_{ac} = 4\tau = 4,193$  na faixa de 2%.

### Exemplo 6.18

Um motor de c.c. aciona um rotor de momento de inércia  $J$  sujeito a atrito viscoso de coeficiente  $\beta$  e preso por uma mola, a uma parede fixa (Figura 6.26). A tensão aplicada ao circuito de armadura é  $V_a(t)$ , e a posição angular do rotor,  $\theta = \theta(t)$ . O campo magnético do motor é produzido por um ímã permanente.  $C.I. = 0$ .

- Escreva as equações do sistema no domínio do tempo e no domínio da frequência.
- Construa um diagrama de blocos de entrada  $V_a(s)$  e saída  $\theta(s)$ .
- Determine numericamente a função de transferência  $G(s) = \theta(s)/V_a(s)$ .
- Determine polos e zeros de  $G(s)$  e faça uma representação gráfica no plano  $s$ .
- Determine a resposta do sistema a um degrau de 30 V e faça um esboço de  $\theta = \theta(t)$ .

Dados numéricos:

$$\begin{aligned} R_a &= 5 \Omega; \quad \beta = 0,2 \text{ Nm/(rad/s)}; \\ K_m &= 0,5 \text{ V/(rad/s)}; \quad J = 0,05 \text{ kgm}^2; \\ K &= 3 \text{ Nm/rad}. \end{aligned}$$

Solução:

Item (a)

Equações do sistema, no domínio do tempo e no domínio da frequência:

Equação do circuito de armadura:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= R_a i_a(t) + e(t) \\ V_a(s) &= R_a I_a(s) + E(s) \end{aligned}$$

Equação da força eletromotriz (f.e.m.):

$$e_m(t) = K_m \frac{d\theta}{dt};$$

$$E_m(s) = K_m s \Theta(s)$$

Equação do conjugado motor (eletromagnético):

$$C_m(t) = K_m i_a(t);$$

$$C_m(s) = K_m I_a(s)$$

Equação do conjugado resistente (eletromagnético):

$$C_m(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2} + \beta \frac{d\theta}{dt} + K\theta$$

$$C_m(s) = (Js^2 + \beta s + K)\Theta(s)$$

Item (b)

Diagramas de blocos (figuras 6.27, 6.28 e 6.29).

Item (c)

Função de transferência numérica:

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{V_a(s)} = \frac{2}{s^2 + 5s + 60}$$

Item (d)

Polos e zeros:

Por inspeção, obtém-se:

$$K = 2 \quad \alpha = 2,5 \quad \omega_n = \sqrt{60} = 7,746$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 7,33$$

Polos:

$$s_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_d = -2,5 \pm j7,33$$

Zeros: não há.

Item (e)

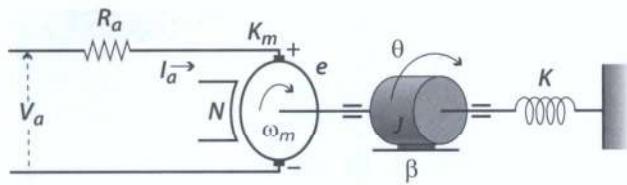
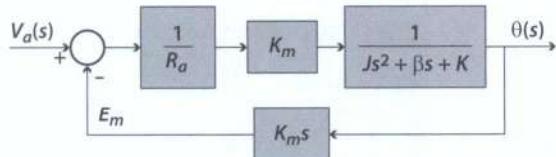
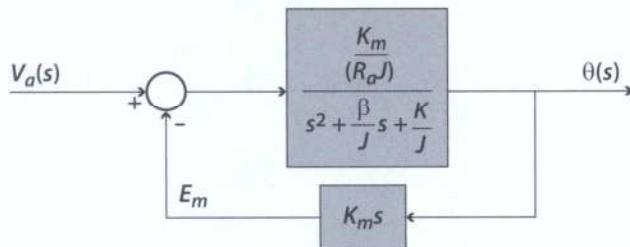
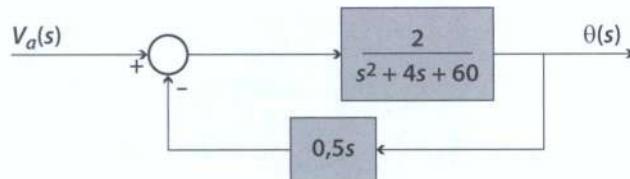
Resposta do sistema a um degrau de 30 V e esboço de  $\theta = \theta(t)$ :

A fórmula geral para a resposta ao degrau unitário é:

$$\theta(t) = \frac{K}{\omega_n^2} [1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \operatorname{sen}(\omega_d t + \phi)]$$

com

$$\phi = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha} \right) = \arctan 2,93 = 71,16^\circ$$

**Figura 6.26** Motor.**Figura 6.27** Diagrama de blocos do motor.**Figura 6.28** Diagrama de blocos do motor parcialmente reduzido.**Figura 6.29** Diagrama de blocos número do motor.

Para um degrau de 30 volts, temos, então:

$$\theta(t) = [1 - 1,056e^{-2.5t} \sin(7,33t + 71,16)]$$

Verifica-se, pois, que a posição final do rotor é  $\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 1$  rad ou 57,3°.

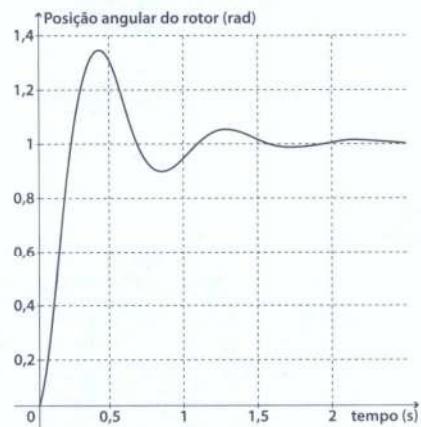
Esse mesmo resultado pode ser obtido diretamente por meio do 'teorema do valor final':

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} \theta(s) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( sG(s) \frac{30}{s} \right) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{2}{s^2 + 5s + 60} \right) = 30 \frac{2}{60} = 1 \text{ rad}$$

A Figura 6.30 é o esboço da resposta do sistema.

**Figura 6.30** Resposta a um degrau de 30 volts.

## 6.9 Sistema subamortecido de 2ª ordem dotado de um zero real

Trata-se de um sistema com um par de polos complexos conjugados e um zero real. A função de transferência de tal sistema é:

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} = \frac{K(s+a)}{(s+\alpha)^2 + \omega_d^2}$$

com

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2}$$

Como sempre, estamos considerando todas as constantes como positivas.

A resposta ao degrau unitário, no domínio da frequência, é:

$$Y(s) = \frac{K(s+a)}{s(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)} = \frac{K(s+a)}{s((s+\alpha)^2 + \omega_d^2)}$$

### ■ 6.9.1 Resposta ao degrau unitário

A resposta ao degrau unitário, no domínio da frequência, é:

$$Y(s) = \frac{K(s+a)}{s(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)} = \frac{K(s+a)}{s((s+\alpha)^2 + \omega_d^2)}$$

ou, em função do tempo:

$$y(t) = \frac{Ka}{\omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{\rho_a \omega_n}{\alpha \omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right\}$$

com

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} \quad \rho_a = \sqrt{(\alpha - \omega_d)^2 + \omega_d^2}$$

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{\alpha}{\omega_d} \right) \quad \theta_a = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha - \omega_d} \right)$$

$$\text{e } \phi = \theta_a - \theta_1 + 90^\circ$$

Os dois polos complexos e zero são do sistema. O polo na origem é do degrau (ver Figura 6.31).

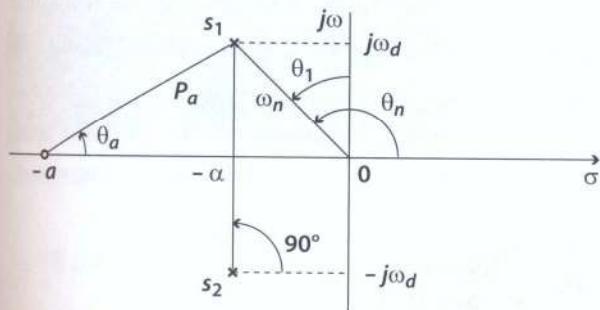


Figura 6.31 Polos.

### Exemplo 6.19

Determine a resposta ao degrau unitário dos sistemas cujas funções de transferência são dadas a seguir:

$$G_1(s) = \frac{5(5+s)}{s^2 + 6s + 25}$$

$$G_2(s) = \frac{5(5-s)}{s^2 + 6s + 25}$$

Solução:

Nos dois casos (sistema de 2ª ordem, sub-mortecido, com um zero real), a resposta ao degrau unitário é dada pela expressão abaixo.

$$y(t) = \frac{Ka}{\omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{\rho_a \omega_n}{\alpha \omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right\}$$

$$\text{com } \phi = \theta_a - \theta_1 + 90^\circ$$

No primeiro caso, temos:

$$G_1(s) = \frac{5(5+s)}{s^2 + 6s + 25}$$

$$K = 5 \quad \alpha = 3 \quad \omega_n = 5$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 4 \quad \alpha = 5$$

$$\rho_a = \sqrt{(5-3)^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 4,47$$

$$\theta_a = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha - \omega_d} \right) = \arctan(2) = 63,4^\circ$$

$$\theta_1 = \arctan \left( \frac{\alpha}{\omega_d} \right) = \arctan \left( \frac{3}{4} \right) = 36,87$$

$$\phi = \theta_a - \theta_1 + 90^\circ \quad \text{resulta}$$

$$\phi = -36,87 + 90 + 63,4 = 116,53$$

$$y(t) = \left\{ 1 - \frac{4,47}{5} \frac{5}{4} e^{-3t} \sin(4t + 116,53^\circ) \right\}$$

$$y(t) = 1 - 1,118 e^{-3t} \sin(4t + 116,53^\circ)$$

Verificação: Para  $t = 0$

$$y(0) = 1 - 1,118 \sin(116,53^\circ) = \\ 1 - 1,118 \cdot 0,895 = 0$$

No segundo caso, temos:

$$G_2(s) = \frac{5(5-s)}{s^2 + 6s + 25}$$

No segundo caso, a diferença em relação ao primeiro é o sinal negativo em  $s$  no numerador. Nesse caso, o zero está no semiplano direito (SPD) do plano  $s$ . Em consequência, o ângulo  $\theta_a$  correspondente a esse zero é negativo, na fórmula geral já é conhecida:

$$y(t) = \\ \frac{Ka}{\omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{\rho_a \omega_n}{\alpha \omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta_a - \theta_1 + 90^\circ) \right\}$$

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{-4}{8}\right) = -26,57^\circ$$

$$p_a = \sqrt{(-5-3)^2 + 4^2} = \sqrt{80} = 8,94$$

$$K = 5 \quad \alpha = 3 \quad \omega_n = 5$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 4 \quad \alpha = 5$$

Fazendo

$$\phi = -\theta_a - \theta_1 - 90^\circ \quad \theta_1 = 36,87^\circ$$

$$\phi = -36,87^\circ + 90^\circ - 26,57^\circ = 26,56^\circ$$

$$y(t) = \left\{ 1 - \frac{8,94 \cdot 5}{5 \cdot 4} e^{-3t} \sin(4t + 26,56^\circ) \right\}$$

para  $t \geq 0$

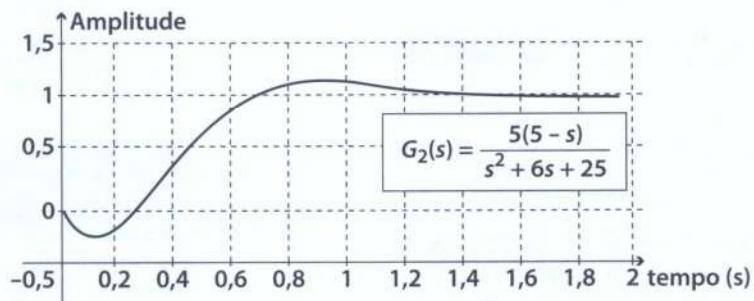
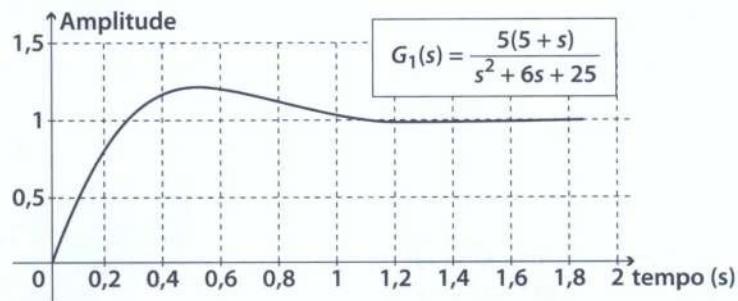
$$y(t) = \left\{ 1 - 12,235 e^{-3t} \sin(4t + 26,56^\circ) \right\} \quad \text{para } t \geq 0$$

Uma primeira verificação pode ser feita, sabendo-se que a resposta deve ser nula no instante inicial. De fato, para  $t = 0$  temos:

$$y(0) = \left\{ 1 - 12,235 \sin(26,56^\circ) \right\} =$$

$$1 - 12,235 \cdot 0,447 = 0,00$$

Note que, pelo gráfico da resposta (Figura 6.32), se vê que ela adquire, inicialmente, valores negativos, apesar de a entrada em degrau ser positiva. Isso em geral acontece quando existe um ou mais zeros no SPD, como é o caso.



**Figura 6.32** Gráfico das respostas ao degrau unitário em sistemas dotados de 2 polos complexos e um zero real.

## 6.10 Sistema de 3<sup>a</sup> ordem

Os sistemas de terceira ordem podem ter três polos reais ou apenas um polo real mais um par de polos complexos conjugados. Isso permite, de certa forma, estender aos sistemas de 3<sup>a</sup> ordem a classificação apresentada para os sistemas de 2<sup>a</sup> ordem, vista anteriormente. Como nos de 2<sup>a</sup> ordem, os primeiros não apresentam transitório oscilante, enquanto nos segundos os transitórios são geralmente oscilatórios. Fica de fora apenas a questão dos sistemas críticos. Talvez pudéssemos falar em sistemas de 3<sup>a</sup> ordem críticos (três polos coincidentes) ou semicríticos (dois polos coincidentes e outro distinto), mas essa nomenclatura não é habitual. Além de esses casos particulares terem pouca importância prática, não serão abordados aqui.

### 6.10.1 Sistemas com três polos reais

A função de transferência de um sistema com três polos reais ( $-a, -b, -c$ ), isento de zeros, pode ser escrita da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

ou

$$G(s) = \frac{K}{s^3 + (a+b+c)s^2 + (ab+bc+ca)s + abc}$$

### 6.10.2 Resposta ao degrau unitário

Neste caso,

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s(s+a)(s+b)(s+c)}$$

Fazendo a expansão de  $Y(s)$  em frações parciais, calculando os resíduos e determinando as transformadas inversas de Laplace, obtemos:

$$y(t) = K \left\{ \frac{1}{abc} - \frac{e^{-at}}{a(b-a)(c-a)} - \frac{e^{-bt}}{b(a-b)(c-b)} - \frac{e^{-ct}}{c(a-c)(b-c)} \right\}$$

ou

$$y(t) = \frac{K}{abc} \left\{ 1 + \frac{bc(b-c)e^{-at} + ca(c-a)e^{-bt} + ab(a-b)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \right\}$$

ambas para  $t \geq 0$ .

A resposta é a soma de uma constante mais três exponenciais decrescentes, uma para cada polo, como era de se prever. Note que a condição de  $C.I. = 0$  é facilmente verificável.

#### Exemplo 6.20

Determine a resposta ao degrau unitário do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{6}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Solução:

Aplicando a fórmula da resposta ao degrau unitário

$$y(t) = \frac{K}{abc} \left\{ 1 + \frac{bc(b-c)e^{-at} + ca(c-a)e^{-bt} + ab(a-b)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \right\}$$

em que

$$a = 1 \quad b = 2 \quad c = 3 \quad K = 6$$

vem

$$y(t) = 1 \left\{ 1 + \frac{6(-1)e^{-at} + 3(2)e^{-bt} + 2(-1)e^{-ct}}{(-1)(-1)(2)} \right\} =$$

$$1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t}$$

$$y(t) = 1 \left\{ 1 + \frac{-6e^{-at} + 6e^{-bt} - 2e^{-ct}}{2} \right\} =$$

$$1 - 3e^{-t} + 3e^{-2t} - e^{-3t}$$

ambas válidas para  $t \geq 0$ .

$$y(0) = 1 - 3 + 3 - 1 = 0$$

### ■ 6.10.3 Sistemas com um polo real e dois polos complexos conjugados

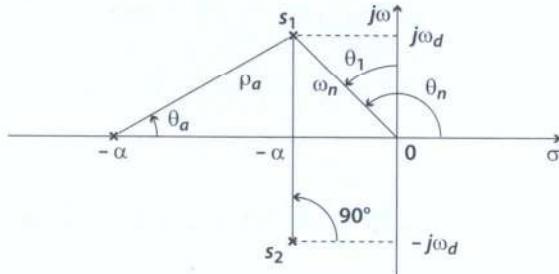
A função de transferência desse sistema é

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2)} = \frac{K}{(s+a)((s+\alpha)^2 + \omega_d^2)}$$

sendo

$$\omega_d = \sqrt{(a-\alpha)^2 + \omega_n^2}$$

Como sempre, estamos considerando todas as constantes como positivas (Figura 6.33).



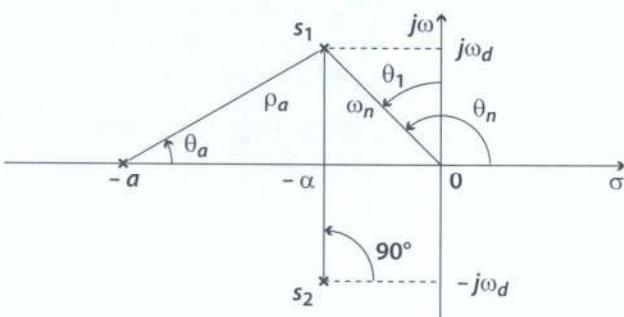
**Figura 6.33** Polos.

### ■ 6.10.4 Resposta ao degrau unitário

No domínio da frequência, a resposta ao degrau unitário é

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{K}{s(s+a)((s+\alpha)^2 + \omega_d^2)}$$

A transformada inversa  $y(t)$  dessa função pode, como sempre, conforme Figura 6.34, ser obtida a par-



**Figura 6.34** Polos.

tir da expansão em funções parciais de  $Y(s)$ . O resultado que se obtém é o seguinte:

$$y(t) = \frac{K}{a\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\rho_a^2} e^{-at} + \frac{a\omega_n}{\rho_a \omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t - \phi) \right)$$

com

$$\omega_n = \sqrt{\alpha^2 + \omega_d^2} \quad \phi = \theta_a + \theta_n = \theta_a + \theta_1 + 90^\circ$$

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{\omega_d}{a-\alpha}\right) \quad \theta_n = \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right) + 90^\circ$$

#### Exemplo 6.21

Determine a resposta ao degrau unitário do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{250}{(s+10)(s^2+4s+25)}$$

Solução:

Neste caso, temos:

$$y(t) = \frac{K}{a\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\rho_a^2} e^{-at} + \frac{a\omega_n}{\rho_a \omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t - \phi) \right)$$

com

$$K = 250 \quad a = 10 \quad \alpha = 2 \quad \omega_n = 5$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \sqrt{25 - 4} = 4,58$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{2}{4,58}\right) + 90 = 23,59 + 90 = 113,59$$

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{4,58}{10-2}\right) = \arctan(0,573) = 29,79$$

$$\phi = 29,79 + 113,59 = 143,38$$

$$\rho_a = \sqrt{(a-\alpha)^2 + \omega_d^2} = \sqrt{85} = 9,22$$

Substituindo esses valores numéricos na equação de resposta ao degrau, resulta:

$$y(t) = 1 - \frac{25}{85} e^{-10t} - \frac{50}{9,22 \cdot 4,58} e^{-2t} \operatorname{sen}(4,58t - 143,38^\circ)$$

ou

$$y(1) = 1 - 0,294 e^{-10t} + 1,184 e^{-2t} \operatorname{sen}(4,58t - 143,38^\circ)$$

para  $t > 0$ .

Verificação das condições iniciais nulas ( $C.I. = 0$ ):

$$y(1) = 1 - 0,294 + 1,184 \operatorname{sen}(-143,38^\circ) = 0$$

$$y(t) = \frac{K}{abc} \left\{ 1 + \frac{be^{-at}}{(a-b)} - \frac{ae^{-bt}}{(a-b)} - \frac{+abe^{-ct}}{c^2} \right\} = \frac{K}{abc} \left\{ 1 + \frac{be^{-at}}{(a-b)} - \frac{ae^{-bt}}{(a-b)} \right\}$$

Pelo fato de ser  $c^2 \gg ab$ , vemos que a presença do terceiro polo tem uma contribuição muito menor que a dos outros dois polos na resposta do sistema. Assim, a resposta desse sistema de 3ª ordem aproxima-se da de um sistema de 2ª ordem. Esse mesmo fato também ocorre para a resposta aos vários tipos de excitação (veja, por exemplo, o caso da resposta impulsiva). Por isso, os outros dois polos mais próximos da origem são denominados polos dominantes do sistema.

A conceituação de polos dominantes estende-se facilmente aos sistemas de 3ª ordem com um par de polos complexos e um polo real. De fato, nesse caso, a resposta ao degrau é dada por:

$$y(t) = \frac{K}{a\omega_n^2} \left\{ 1 - \frac{\omega_n^2}{\rho_a^2} e^{-at} + \frac{a\omega_n}{\rho_a \omega_d} e^{-at} \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) \right\}$$

Se o polo real estiver muito mais afastado da origem que os polos complexos ( $\rho_a \gg \alpha$ ), a equação acima escrita sob a forma

$$y(t) = \frac{K}{a\rho_a^2 \omega_n^2} \left\{ \rho_a^2 - \omega_n^2 e^{-at} + \frac{a\rho_a \omega_n}{\omega_d} e^{-at} \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) \right\}$$

mostrará que a parcela correspondente aos polos complexos se torna muito maior que a do polo real, pois  $a\rho_a \gg \omega_n^2$ . Então, também aqui, o comportamento do sistema aproxima-se da de um sistema de 2ª ordem subamortecido contendo apenas o par de polos complexos conjugados.

O conceito de polos dominantes estende-se também aos sistemas com mais de três polos.

## ■ 6.10.5 Polos dominantes

Vamos examinar, agora, um aspecto importante para os sistemas dotados por três ou mais polos. Começemos por relembrar as respostas ao degrau dos sistemas com três polos, tanto no caso em que os três polos são reais como no caso em que há um polo real e dois complexos conjugados.

Consideremos, inicialmente, o sistema com três polos reais. A fórmula do cálculo da resposta ao degrau unitário é, como já vimos:

$$y(t) = \frac{K}{abc} \left\{ 1 + \frac{bc(b-c)e^{-at} + ca(c-a)e^{-bt} + ab(a-b)e^{-ct}}{(a-b)(b-c)(c-a)} \right\}$$

Vamos supor que um dos polos, por exemplo o polo em  $-c$ , se distancia dos demais ( $c > a > b$  e portanto  $c^2 \gg a \times b$ ). Essa expressão pode, então, ser rescrita com muito boa aproximação:

$$y(t) = \frac{K}{abc} \left\{ 1 + \frac{bc(-c)e^{-at} + ca(c)e^{-bt} + ab(a-b)e^{-ct}}{(a-b)(-c)(c)} \right\}$$

**Exemplo 6.22**

Dado o sistema de terceira ordem

$$G(s) = \frac{200}{s^3 + 22s^2 + 45s + 100} = \frac{200}{(s+20)(s^2 + 2s + 5)}$$

verifique, por meio da determinação da resposta ao degrau unitário, que ele pode ser reduzido com muito boa aproximação ao sistema de 2ª ordem que contém apenas os polos dominantes do sistema dado:

$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + 2s + 5)}$$

Solução:

No sistema dado, os valores numéricos são:

$$\alpha = 20 \quad \omega_n = \sqrt{5} = 2,236$$

$$\omega_d = 2 \quad K = 200$$

$$\theta_n = \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + 90 = 26,56 + 90 = 116,56^\circ$$

$$\theta_d = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\alpha - \omega_n}\right) = \arctan(0,105) = 6,01^\circ$$

$$\phi = \theta_n + \theta_d = 122,57^\circ$$

$$p_d = \sqrt{(\alpha - \omega_n)^2 + \omega_d^2} = \sqrt{365} = 19,105$$

$$y(t) = 2 \left[ 1 - 0,014 e^{-20t} + \right.$$

$$\left. 1,171 e^{-t} \sin(2t - 122,57^\circ) \right]$$

Note que o coeficiente relativo ao polo real (0,014) é muito menor que o correspondente ao par de polos complexos conjugados (1,171). Considerando, agora, o sistema o sistema de 2ª ordem, contendo apenas os polos dominantes do de 3ª ordem, a saber:

$$G(s) = \frac{10}{(s^2 + 2s + 5)}$$

cujá resposta ao degrau unitário já é conhecida e vai aqui repetida

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right)$$

sendo agora

$$\phi = \arctan\left(\frac{\omega_d}{\alpha}\right) = 63,435^\circ$$

Numericamente, resulta:

$$y(t) = 2 (1 - 1,118 e^{-t} \sin(2t + 63,435^\circ))$$

As duas expressões numéricas, relativas às respostas ao degrau dos dois sistemas, podem ser calculadas sem maiores dificuldades, por exemplo com auxílio de planilha, como o Microsoft Excel, ou melhor, o Matlab (nesse caso, é mais fácil; basta usar diretamente as funções de transferência), e em seguida plotadas para efeito comparativo. A Figura 6.35 indica o resultado e mostra que os dois sistemas têm respostas praticamente idênticas.

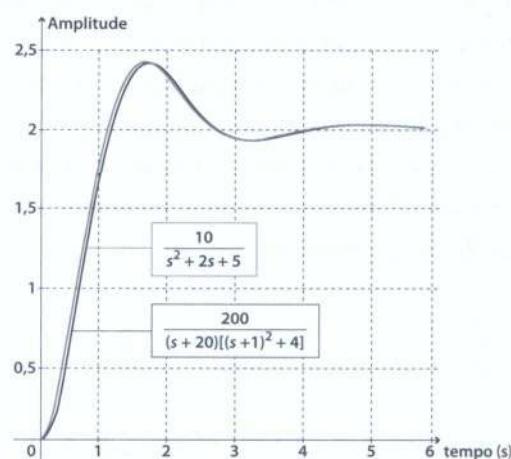


Figura 6.35 Resposta ao degrau unitário comparativo de um sistema com polos dominantes (Exemplo 6.22).

## 6.11 Presença de zeros na função de transferência

Em geral, uma função de transferência apresenta polos e zeros. Os polos, que são as raízes da equação característica do sistema, determinam a natureza da resposta impulsiva, fixando matematicamente o tipo das funções que a compõem, bem como as condições de estabilidade do sistema. Um exemplo comparativo pode ilustrar esse ponto:

$$G_1(s) = \frac{80}{(s+5)(s+7)} = \frac{40}{s+5} - \frac{40}{s+7}$$

$$g_1(t) = 40(e^{-5t} - e^{-7t})$$

$$G_2(s) = \frac{20(s+4)}{(s+5)(s+7)} = \frac{-10}{s+5} + \frac{30}{s+7}$$

$$g_2(t) = 10(-e^{-5t} + 3e^{-7t})$$

$$G_3(s) = \frac{20(-s+4)}{(s+5)(s+7)} = \frac{90}{s+5} - \frac{110}{s+7}$$

$$g_3(t) = 10(9e^{-5t} - 11e^{-7t})$$

Vemos que, pelo desenvolvimento da função de transferência em frações parciais, cada parcela traz uma particular contribuição para a formação da resposta característica do sistema, cuja natureza matemática depende da localização dos polos do sistema. Nos exemplos acima, cada parcela, em cada um dos casos, gera uma exponencial atenuada. Os zeros da função de transferência, por sua vez, não alteram a natureza de cada uma das parcelas dessa resposta; eles influenciam apenas na determinação do valor e do sinal algébrico de cada um desses componentes, pois contribuem apenas para o cálculo dos resíduos (o valor dos numeradores), na expansão em frações parciais. Assim, embora a natureza das curvas não seja alterada pela localização dos zeros da função de transferência, a aparência e o posicionamento da curva de resposta são altamente influenciados por eles.

## 6.12 Generalização – sistemas com mais de três polos

Já vimos que os sistemas básicos para estudo da resposta dinâmica dos sistemas lineares são os de 1ª e de 2ª ordens. De fato, suponhamos inicialmente um sistema qualquer, mas que tenha apenas polos reais simples (não repetidos). Os zeros podem ser quaisquer, desde que sejam em número menor que os polos. A expansão da função de transferência desse sistema em frações parciais, todas de 1ª ordem, mostra que esse sistema pode ser considerado como uma soma ou superposição de sistemas de 1ª ordem. En-

tretanto, no caso em que a expansão inclui polos reais e complexos ou até mesmo imaginários puros, não podemos supor o sistema como composto somente por sistemas de 1ª ordem, simplesmente porque tais sistemas não podem contribuir para o aparecimento de polos complexos ou imaginários. Estes, que aparecem aos pares como polos conjugados, só podem provir de sistemas de 2ª ordem, subamortecidos ou críticos. Então, a resposta de um sistema complexo pode ser convenientemente analisada a partir apenas dos sistemas considerados básicos, isto é, a partir das propriedades dos sistemas de 1ª e 2ª ordens que compõem o sistema dado.

### Exemplo 6.23

Considere o sistema de 4ª ordem dotado de dois polos reais e um par de polos complexos conjugados

$$G(s) = \frac{125(s+2)}{(s^4 + 12s^3 + 53,25s^2 + 116,25s + 125)} = \frac{125(s+2)}{(s+4)(s+5)(s^2 + 3s + 6,25)}$$

Determine a resposta ao degrau desse sistema.

Solução:

A resposta ao degrau é obtida calculando-se a transformada inversa de Laplace de

$$Y(s) = G(s) \frac{1}{s} = \frac{125(s+2)}{s(s+4)(s+5)(s^2 + 3s + 6,25)}$$

Expandindo essa função em frações parciais, vem

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{2}{s} + \frac{6,098}{s+4} - \frac{4,615}{s+5} + \\ &\quad \frac{-1,741 + 0,977j}{s+1,5 - 2j} + \\ &\quad \frac{-1,741 - 0,977j}{s+1,5 + 2j} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= 2 + 6,098e^{-4t} - 4,615e^{-5t} + \\ &\quad 3,99e^{-1,5t} \cos(2t + 150,7^\circ) \end{aligned}$$

## Considerações finais

Inicialmente, neste capítulo, foi explicado que a resposta de um sistema LIT a uma excitação qualquer consta de duas partes: componente natural e componente forçado ou de regime permanente. Os sistemas nos quais a resposta natural desaparece com o tempo são denominados sistemas estáveis. Quando isso não acontece, o sistema é instável. Depois dessa análise, foram apresentados os sinais de entrada mais comumente utilizados: o degrau, a rampa, a parábola e o impulso, que é um modelo teórico, mas muito importante, de excitação do sistema. A partir daí foi iniciado o estudo da dinâmica dos sistemas propriamente dita. Iniciou-se pelos sistemas de 1<sup>a</sup> ordem, ilustrado por vários exemplos e seguiu-se com uma coleção de problemas propostos. Depois, foi apresentada a dinâmica dos sistemas de 2<sup>a</sup> ordem. Vimos que, contrariamente ao que ocorre com os sistemas de 1<sup>a</sup> ordem, cujo comportamento é bastante uni-

forme, o comportamento dos sistemas de 2<sup>a</sup> ordem varia radicalmente com o valor dos parâmetros que apresentam. Por isso, foi necessário o estabelecimento de uma classificação prévia, em sistemas (a) superamortecidos, (b) criticamente amortecidos e (c) subamortecidos. Foi, então, feito um estudo por-menorizado dos sistemas de cada item dessa classificação, sempre acompanhada de vários problemas resolvidos. Estudamos especialmente a resposta ao degrau, que é um sinal de teste muito importante, particularmente para os sistemas reguladores. Apresentamos algumas fórmulas que facilitam o cálculo da resposta impulsiva e da resposta ao degrau. Examinamos, ainda, os sistemas de 3<sup>a</sup> ordem, que também são muito frequentes. Acreditamos, assim, que o cálculo da resposta a qualquer excitação para sistemas de qualquer ordem ficou suficientemente esclarecido.

## Problemas propostos – sistemas de 1<sup>a</sup> ordem

- A velocidade de rotação em rad/s de um rotor em várias situações é dada pelas seguintes funções do tempo, a partir de  $t = 0$ :
  - $\omega(t) = 10e^{-5t}$
  - $\omega(t) = 100(1 - e^{-0.05t})$
  - $\omega(t) = -50e^{-2t}$

Faça, para cada caso, um esboço de  $\omega$  em função do tempo, indicando a velocidade inicial, a velocidade final e a constante de tempo.
- Consideremos um motor de corrente contínua (c.c.) considerado como sistema de 1<sup>a</sup> ordem, cuja entrada é a tensão aplicada e a saída é a velocidade de rotação  $\omega(t)$  em rpm. Para uma tensão de 20 V, a velocidade final adquirida pelo motor é de 500 rpm. Além disso, verificou-se que decorrem 25 s para que a rotação atinja 316 rpm. Determine a função de transferência do motor. Escreva também a equação da rotação (em rpm), em função do tempo.
- Observação:** Note que 316 rpm é 63,2% da velocidade de rotação final do motor.
- O motor elétrico do problema anterior está funcionando há algum tempo com velocidade de regime quando é subitamente desligado pela abertura de uma chave. Determine a equação da velocidade em rpm, a partir do instante em que foi desligado. Quanto tempo decorre até a parada completa que

se admite ocorrer 5 constantes de tempo depois de desligado?

- Um sistema possui uma função de transferência  $G(s) = 20/(s + 25)$ . Determine a constante de tempo, o tempo de subida e o tempo de acomodação. Qual a constante de ganho? Qual o valor final da resposta a um degrau unitário?
- O diagrama de blocos da Figura 6.36 representa um servomotor de c.c.:  $V_a$  é a tensão de armadura em volts;  $\Omega$  é a velocidade de rotação em rad/s.   
 (a) Qual a constante de tempo desse motor (em segundos)?  
 (b) Qual a resposta a um degrau de tensão de 20 V (em rad/segundo)?  
 (c) Faça um esboço da velocidade em função do tempo.  
 (d) Qual é, nesse caso, a velocidade final do motor em rpm ( $1 \text{ rad/s} = 9,55 \text{ rpm}$ ).

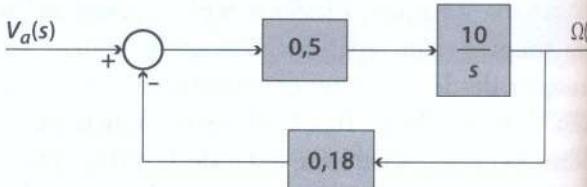


Figura 6.36 Diagrama de blocos.

6. Um bloco de massa  $M = 1$  kg pode deslizar sobre uma plataforma horizontal, mas fica sujeito na base a um atrito viscoso de coeficiente  $0,1$  Ns/m. No instante  $t = 0$ , é aplicada uma força de impacto muito intensa ( $10.000$  N), mas de curta duração ( $0,01$  s). Essa força pode ser considerada como sendo um impulso. Qual o valor desse impulso? Qual a velocidade  $v(t)$  do bloco a partir de  $t = 0$ ?

7. Qual a resposta a uma rampa unitária do sistema cuja função de transferência é  $G(s) = 5/(s + 2)$ ? Informação: Um sistema de 1<sup>a</sup> ordem com função

de transferência  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s + a}$  tem como resposta à rampa unitária  $(U(s) = \frac{1}{s^2})$ :

$$y(t) = \frac{K}{a} \left\{ t - \frac{1}{a} (1 - e^{-at}) \right\}$$

8. Qual a resposta do sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 6.37, a uma rampa unitária?

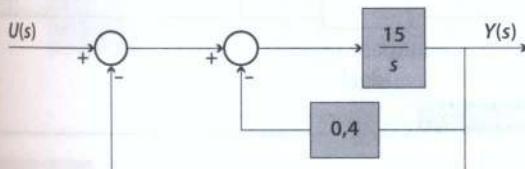


Figura 6.37 Diagrama de blocos.

9. No circuito da Figura 6.38 se tem um amplificador operacional associado a dois resistores e um capacitor:

- (a) Determine a função de transferência

$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)}.$$

- (b) Indique o valor do ganho  $K_g$  (constante de ganho de frequência zero).

- (c) Indique o valor da constante de tempo do circuito.

- (d) Calcule a resposta do sistema ( $v_2(t)$ ) para o caso em que a entrada é um degrau unitário de tensão ( $v_1(t) = h(t)$ ).

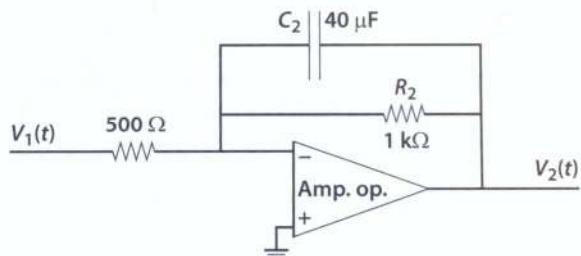


Figura 6.38 Circuito.

10. Um bloco retangular de massa  $M = 2$  kg pode deslocar-se sobre um plano horizontal, estando sujeito apenas a um atrito viscoso de coeficiente  $B = 0,5$  N/(m/s). Inicialmente em repouso, esse bloco é submetido a uma força horizontal de  $1.000$  N durante um intervalo de  $0,01$  s. Qual a velocidade inicial? Qual a constante de tempo desse sistema? Supondo que ele esteja praticamente em repouso depois de  $5$  constantes de tempo, qual a distância total percorrida?

Sugestão: Considere a ação sobre o bloco como sendo um impulso de valor  $1.000 \cdot 0,01 = 10$  Ns.

11. Um rotor, como o indicado na Figura 6.39, pode girar em torno de seu eixo, sujeito apenas ao atrito viscoso nos mancais. O momento de inércia do rotor é de  $J = 0,05$  kg · m<sup>2</sup> e o coeficiente de atrito viscoso é  $\beta_0 + \beta_1 = 0,02$  Nm/(rad/s). A velocidade de rotação inicial do rotor é  $\Omega_0 = 1.200$  rpm. Determine a resposta de velocidade do sistema. Qual a constante de tempo do sistema?

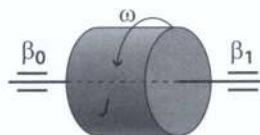


Figura 6.39 Rotor.

12. Um bloco de massa  $M = 1$  kg pode deslizar sobre uma plataforma horizontal, mas fica sujeito na base a um atrito viscoso de coeficiente  $0,1$  Ns/m. No instante  $t = 0$ , é aplicada uma força de impacto muito intensa ( $10.000$  N), mas de curta duração ( $0,01$  s). Essa força pode ser considerada como se fosse um impulso. Qual o valor desse impulso? Qual a velocidade  $v(t)$  do bloco a partir de  $t = 0$ ?

## Problemas propostos – sistemas de 2<sup>a</sup> ordem

13. Calcule a resposta a um degrau unitário do sistema cuja função de transferência é dada abaixo.

$$G(s) = \frac{20(s+1)}{(s+4)(s+5)}$$

14. A resposta de determinado sistema a um degrau unitário aplicado no instante  $t = 0$  é:

$$v(t) = 10e^{-t} \sin(2t)$$

Determine a função de transferência desse sistema e desenhe cuidadosamente o gráfico de  $v(t)$  em função do tempo.

15. A resposta de determinado sistema a um degrau unitário aplicado no instante  $t = 0$  é:

$$v(t) = 10e^{-t} \cos(2t)$$

Determine a função de transferência desse sistema e desenhe cuidadosamente o gráfico de  $v(t)$  em função do tempo.

16. Sendo a função de transferência de um sistema

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{s^2 + 6s + 25}$$

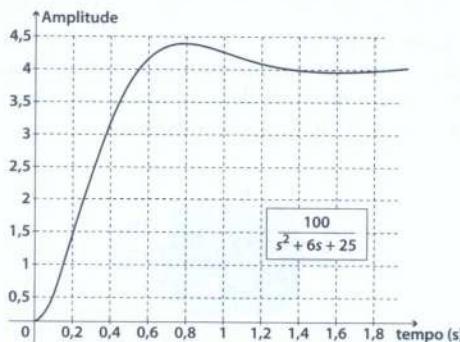
(a) Calcule a resposta desse sistema a um degrau unitário.

(b) Verifique se o gráfico da Figura 6.40 descreve corretamente a resposta do problema.

Fórmulas úteis:

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left[ 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right]$$

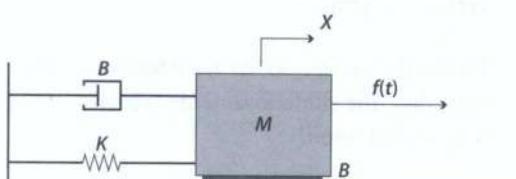
$$\phi = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha} \right)$$



**Figura 6.40** Resposta ao degrau unitário.

17. Um bloco de massa  $M$  ligado por um amortecedor e uma mola a uma parede fixa está sob a ação da força  $f(t)$ , como indica a Figura 6.41.

Dados:  $M = 1 \text{ kg}$ ;  $B = 20 \text{ N/(m/s)}$ ;  $K = 64 \text{ N/m}$ . Sendo a força  $f(t) = 160$  b(t) = degrau de 160 N, determine a função de transferência  $G(s) = X(s)/F(s)$ , o deslocamento e a velocidade em função do tempo, para o caso da força descrita. Qual a velocidade máxima alcançada pelo móvel?



**Figura 6.41** Diagrama de blocos.

18. Dado o sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{12s + 40}{s^2 + 10s + 24}$$

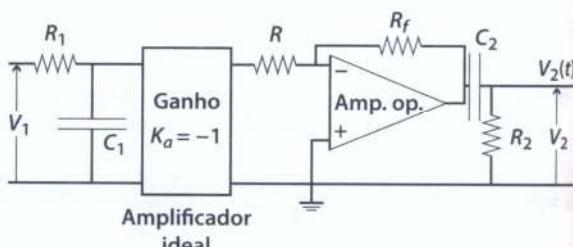
determine as constantes de tempo e as respostas ao impulso e ao degrau unitários.

19. Determine a função de transferência  $G(s) = (V_2(s)/V_1(s))$  do circuito indicado na Figura 6.42. Determine os polos e zeros e represente-os no plano  $s$ . Qual a resposta do sistema a um degrau unitário de tensão? Dados numéricos:

$$R_1 = 10^4 \Omega; C_1 = 10 \mu F$$

$$R = 2 \cdot 10^4 \Omega; R_f = 10^5 \Omega$$

$$R_2 C_2 = 1 \text{ s}$$



**Figura 6.42** Circuito.

20. Sendo a função de transferência de um circuito

$$\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1.600}{s^2 + 10s + 160}$$

(a) Calcule a resposta desse circuito a um degrau unitário de tensão.

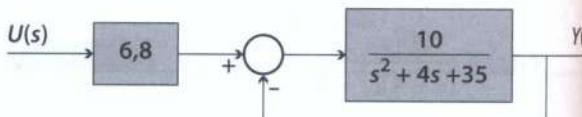
(b) Faça um esboço cuidadoso da curva de resposta encontrada no item anterior.

Fórmulas úteis:

$$y(t) = \frac{K}{\omega_n^2} \left[ 1 - \frac{\omega_n}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \phi) \right]$$

$$\phi = \arctan \left( \frac{\omega_d}{\alpha} \right)$$

21. Determine a resposta ao degrau unitário do sistema indicado no diagrama de blocos da Figura 6.43.



**Figura 6.43** Diagrama de blocos.

22. O sistema da Figura 6.44 representa um servomotor de c.c. de ímã permanente, controlado pela tensão de armadura através de um amplificador de potência cujo ganho de tensão é  $K_a = 1$ . A carga do motor é representada pelo momento de inércia  $J$  da parte girante. Os atritos são desprezíveis. A Figura 6.45 representa o diagrama de blocos desse sistema, tendo como entrada a tensão aplicada no filtro  $RC$  e como saída a velocidade angular do rotor. Determine a resposta  $\omega(t)$  do rotor a um degrau de tensão  $u(t) = 10 b(t)$  volts.

Dados numéricos:  $R = 10 \text{ k}\Omega$ ;  $C = 10 \mu\text{F}$ ;  $K_m = 0,04 \text{ V}/(\text{rad/s})$ ;  $R_a = 10 \Omega$ ;  $J = 10^{-5} \text{ m}^2\text{kg}$ .

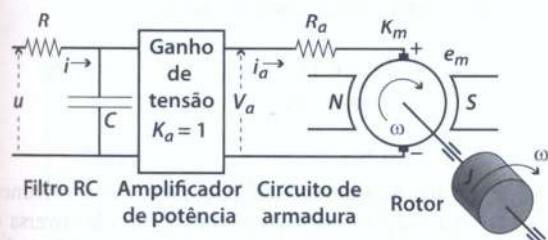


Figura 6.44 Servomotor de c.c.

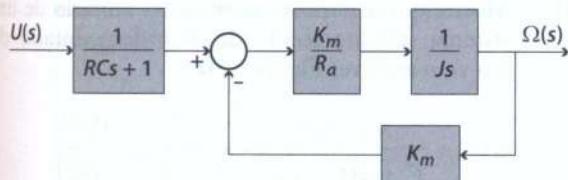


Figura 6.45 Diagrama de blocos.

23. No sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 6.46, tem-se:

$$G(s) = 40/(s^2 + 9s + 8).$$



Figura 6.46 Diagrama de blocos.

Determine:

- A função de transferência  $F(s) = Y(s)/U(s)$ .
- Os polos e zeros do sistema. Faça uma representação gráfica no plano  $s = \sigma + j\omega$ .
- O grau de amortecimento. Indique também se o sistema é sub, super ou criticamente amortecido.
- A resposta impulsiva. Faça um esboço cuidadoso em escala aproximada.

24. Obtenha a resposta  $y(t)$  do sistema cuja função de transferência é indicada a seguir, a um degrau unitário e a uma rampa unitária.

$$G(s) = \frac{16s}{(s^2 + 6s + 8)}$$

25. No diagrama de blocos da Figura 6.47,  $G(s) = 20/(s+4)$  e  $H(s) = 0,1$ . Determine:
- A função de transferência  $F(s) = Y(s)/U(s)$ .
  - Qual o grau de amortecimento  $\zeta$ , e a constante de tempo  $\tau$  do sistema?
  - Calcule o sobressinal e o tempo de pico da resposta a um degrau unitário.
  - Calcule também a frequência  $\omega_d$  de ressonância com amortecimento e o tempo de subida de 0 a 100%.
  - Finalmente, faça um esboço cuidadoso da resposta do sistema a um degrau unitário.

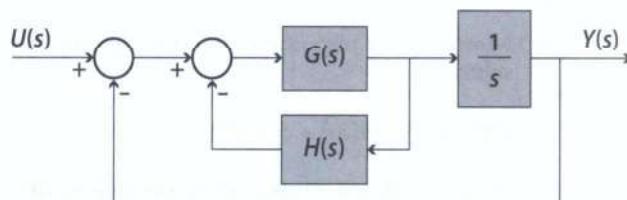


Figura 6.47 Diagrama de blocos.

26. Para o sistema de 2ª ordem indicado a seguir, determine o grau de amortecimento  $\zeta$ , a frequência de ressonância natural do sistema ( $\omega_n$ ), a frequência de ressonância do sistema com amortecimento ( $\omega_d$ ), o tempo de subida ( $t_s$  - critério de 0 a 100%), o tempo de pico ( $t_p$ ), o tempo de acomodação ( $t_{ac}$ ) e o sobressinal ( $M_p\%$ ). Faça um esboço da resposta do sistema a um degrau unitário.

$$F(s) = \frac{169}{s^2 + 10s + 169}$$

27. A Figura 6.48 representa a resposta ao degrau de um sistema. Determine a partir do gráfico da figura: o tempo de pico; o sobressinal (em porcentagem); e o tempo a acomodação. Determine também a função de transferência.

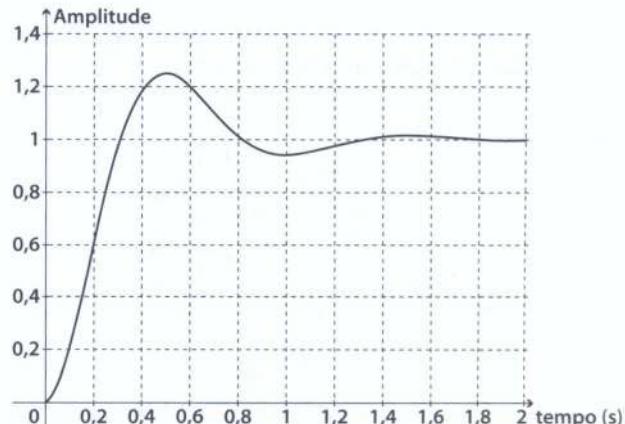


Figura 6.48 Resposta ao degrau unitário.

28. Determine a resposta ao impulso unitário do sistema cuja função de transferência é

$$G_1(s) = \frac{(s+25)}{s^2 + 8s + 25}$$

obedecendo à seguinte sequência:

- (a) Mostre que essa função de transferência pode ser escrita como segue:

$$G_1(s) = \frac{21}{(s+4)^2 + 9} + \frac{s+4}{(s+4)^2 + 9}$$

- (b) Mostre que a resposta ao impulso unitário resulta:

$$g(t) = e^{-4t}(7\sin(3t) + \cos(3t))$$

- (c) Recorde um pouco da trigonometria e mostre que essa resposta pode ser escrita sob a forma:

$$g(t) = 7,07e^{-4t} \sin(3t + 8,13^\circ)$$

29. Determine a resposta ao degrau unitário do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{(s+25)}{s^2 + 8s + 25}$$

Faça inicialmente o cálculo pelo desenvolvimento em frações parciais e transformada inversa de Laplace. Depois, utilize a fórmula dada a seguir, deduzida para o caso de sistemas com um par de polos complexos e um zero real.

#### Observação:

Sistema de 2ª ordem, subamortecido, com um zero real em  $-a$  (ver Figura 6.49):

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} = \frac{K(s+a)}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]}$$

A resposta ao degrau unitário nesse caso é dada pela expressão vista anteriormente.

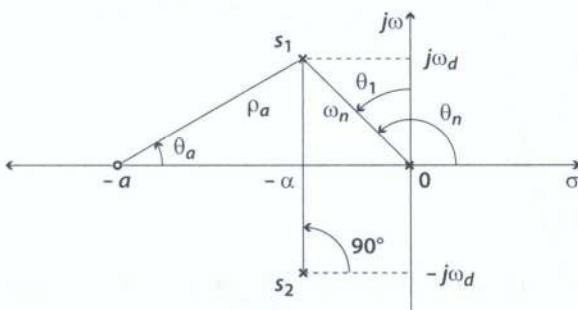


Figura 6.49 Polos.

$$y(t) = \frac{Ka}{\omega_n^2} \left[ 1 - \frac{\rho_a \omega_n}{a \omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta_a) \right]$$

$$\text{com } \phi = \theta_a - \theta_1 + 90^\circ$$

$$\rho_a = \sqrt{(a-\alpha)^2 + \omega_d^2}$$

$$\theta_a = \arctan\left(\frac{\omega_d}{a-\alpha}\right) \quad \theta_1 = \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right)$$

30. Determine a resposta ao degrau unitário do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{25(s+1)}{s^2 + 8s + 25}$$

Faça inicialmente o cálculo pelo desenvolvimento em frações parciais e transformada inversa de Laplace. Depois, verifique o resultado utilizando a fórmula indicada no problema anterior.

31. Mostre que a resposta ao impulso unitário de um sistema subamortecido de 2ª ordem dotado de um zero real (ver Figura 6.50)

$$G(s) = \frac{K(s+a)}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2} = \frac{K(s+a)}{[(s+\alpha)^2 + \omega_d^2]}$$

é dada pela expressão

$$g(t) = \frac{K \rho_a}{\omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t + \theta_a)$$

sendo

$$\rho_a = \sqrt{(a-\alpha)^2 + \omega_d^2} \quad \text{e } \theta_a = \arctan\left(\frac{\omega_d}{a-\alpha}\right)$$

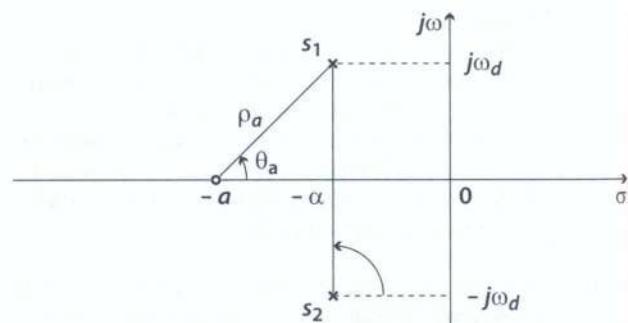


Figura 6.50 Polos.

32. Determine a resposta ao degrau unitário do sistema de 3ª ordem cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{3}{s^3 + 4,5s^2 + 5s + 1,5}$$

Faça inicialmente o cálculo por meio do desenvolvimento em frações parciais e transformada inversa de Laplace. Depois, utilize a fórmula dada a seguir, deduzida para o caso de sistemas de 3ª ordem com polos reais, e compare os resultados.

**Observação:**

A fórmula geral para cálculo da resposta ao degrau unitário de um sistema de 3ª ordem com polos reais (em  $-a, -b$  e  $-c$ ) e isento de zeros é:

$$g(t) = \frac{K}{abc}$$

$$\left\{ 1 + \frac{bc(c-b)e^{-at} + ca(a-c)e^{-bt} + ab(b-a)e^{-ct}}{(b-a)(c-b)(a-c)} \right\}$$

33. Mostre que a resposta ao impulso unitário de um sistema de 3ª ordem com polos reais desiguais e isento de zeros

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

é

$$g(t) = K \left\{ \frac{e^{-at}}{(b-a)(c-a)} + \frac{e^{-bt}}{(a-b)(c-b)} + \frac{e^{-ct}}{(a-c)(b-c)} \right\}$$

Verifique também que a condição inicial é nula ( $C.I. = 0$ ).

34. Determine a resposta ao degrau unitário do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{400}{(s+10)(s^2+1,256s+40)}$$

Verifique também que o valor inicial da resposta é nulo.

**Observação:**

Trata-se de um sistema isento de zeros, com dois polos complexos conjugados e mais um polo real.

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s^2+2\alpha s+\omega_n^2)}$$

A fórmula geral da resposta de tal sistema a um degrau unitário é:

$$y(t) = \frac{K}{a\omega_n^2} \left( 1 - \frac{\omega_n^2}{\rho_a^2} e^{-\rho_a t} - \frac{a\omega_n}{\rho_a \omega_d} e^{-\alpha t} \sin(\omega_d t - \theta_d - \theta_1 + 90^\circ) \right)$$

com

$$\begin{aligned} \rho_a &= \sqrt{(a-\alpha)^2 + \omega_d^2} & \omega_d &= \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} \\ \theta_1 &= \arctan\left(\frac{\alpha}{\omega_d}\right) & \theta_d &= \arctan\left(\frac{\omega_d}{a-\alpha}\right) \end{aligned}$$

35. Determine a resposta ao degrau unitário do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{500}{(s+10)(s^2+6s+25)}$$

Verifique a condição inicial.

36. Admitindo, na questão anterior, que o par de polos complexos possa ser considerado como polos dominantes do sistema, calcule a resposta ao degrau unitário do sistema reduzido apenas aos polos complexos, mas mantendo inalterado o valor final da resposta. Construa um gráfico comparativo das respostas.

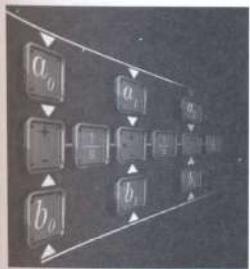
37. Mostre que a resposta ao degrau unitário de um sistema de 4ª ordem com polos reais desiguais e isento de zeros

$$G(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)(s+d)}$$

é

$$y(t) = K \left\{ \frac{1}{abcd} - \frac{e^{-at}}{a(b-a)(c-a)(d-a)} - \frac{e^{-bt}}{b(a-b)(c-b)(d-b)} - \frac{e^{-ct}}{c(a-c)(b-c)(d-c)} - \frac{e^{-dt}}{d(a-d)(b-d)(c-d)} \right\}$$

# capítulo 7



## Resposta em frequência

Vimos no capítulo anterior que a resposta de um sistema linear a uma excitação qualquer tem dois componentes: a resposta transitória, que nos sistemas estáveis desaparece mais ou menos rapidamente com o decorrer do tempo, e a resposta forçada, que permanece inalterada enquanto o sinal de entrada for atuante. A soma desses dois componentes é, às vezes, denominada resposta completa. Nas especificações de desempenho e na dinâmica dos sistemas de controle, os dois

componentes têm implicações da maior importância, como veremos ao longo deste curso. Neste capítulo, vamos estudar o caso da resposta forçada de um sistema linear a uma entrada senoidal. Os sinais senoidais constituem, por si mesmos, uma das classes de sinais mais importantes a que estão sujeitos os sistemas dinâmicos. Veremos a seguir como a resposta forçada de um sistema a sinais senoidais de várias frequências fornece importantes informações sobre o desempenho desse sistema.

### 7.1 Generalidades

O objetivo deste estudo é a determinação da resposta forçada de um sistema linear, invariante no tempo, a uma excitação senoidal  $u(t)$ :

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_0)$$

Veremos que essa resposta forçada que representaremos,  $y_F(t)$ , será também uma função senoidal de mesma frequência  $\omega$ , mas geralmente de amplitude e ângulo de fase diferentes daqueles da função de excitação.

$$y_F(t) = Y_m \cos(\omega t + \theta'_0)$$

Essa resposta é, às vezes, também denominada resposta harmônica do sistema.

O método a ser desenvolvido permitirá a determinação da resposta forçada no domínio do tempo, a partir da função de transferência do sistema de forma direta, sem necessidade do recurso ao cálculo da transformada inversa de Laplace.

Veremos também como é possível estudar o comportamento dessa resposta forçada em função da frequência  $\omega$  do sinal de entrada.

O andamento da resposta harmônica, considerada como função da frequência  $\omega$ , é denominada resposta em frequência do sistema considerado.

É muito útil a representação da resposta em frequência por meio de um duplo diagrama, ou seja, um gráfico geralmente logarítmico do ganho de amplitude  $|Y_m/U_m|$  em função da frequência  $\omega$  e outro, do ângulo de defasagem  $\phi = \theta'_0 - \theta_0$ , também em função da frequência. Esses gráficos podem ser construídos de forma bastante precisa por um processo engenhoso, vindo a constituir os chamados diagramas de Bode.

Os diagramas de resposta em frequência também podem ser obtidos experimentalmente, a partir de medidas feitas diretamente no sistema em estudo ou em modelo simulado. De qualquer forma, esses diagramas têm grande importância prática, pois são úteis na análise de desempenho, nos processos de síntese (projetos) e na identificação de sistemas e subsistemas físicos.

## 7.2 Função senoidal de transferência

Estudaremos inicialmente a resposta harmônica de um sistema linear invariante no tempo a uma entrada do tipo:

$$u(t) = \cos\omega t$$

cuja amplitude é unitária e o ângulo de fase inicial é nulo. No domínio da frequência, teremos:

$$U(s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

cujos polos são  $s_1 = +j\omega$  e  $s_2 = -j\omega$ .

Considerando a Figura 7.1 e sendo  $G(s)$  a função de transferência do sistema e  $Y(s)$  a resposta à excitação  $U(s)$ , teremos:

$$Y(s) = G(s) \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\text{ou } G(s) \frac{s}{(s - j\omega)(s + j\omega)}$$

Desenvolvendo a resposta  $Y(s)$  em frações parciais, teremos certo número de frações provenientes do desdobramento de  $G(s)$  e mais duas provenientes da função de excitação harmônica  $U(s)$ .

$$Y(s) = \frac{A}{s+a} + \frac{B}{s+b} + \dots + \frac{C_1}{s-j\omega} + \frac{C_2}{s+j\omega}$$

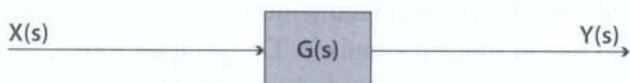
<b>Frações provenientes de <math>G(s)</math></b>	<b>Frações provenientes de <math>U(s)</math></b>
--	--

sendo

Resposta completa =  $Y(s)$

Frações de  $G(s)$  = Resposta livre =  $Y_L(s)$

Frações de  $U(s)$  = Resposta forçada =  $Y_F(s)$



**Figura 7.1** Diagrama de blocos.

As frações geradas pelos polos de  $G(s)$  dão origem à parte livre ou transitória  $Y_L(s)$  da resposta. Por outro lado, a resposta forçada  $Y_F(s)$  é proveniente das frações parciais geradas pelos polos da função de excitação  $U(s)$ . Teremos, então:

$$Y(s) = Y_L(s) + Y_F(s)$$

No domínio do tempo, teremos:

$$y(t) = y_L(t) + y_F(t)$$

sendo, evidentemente:

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)], \quad y_L(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_L(s)], \quad y_F(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y_F(s)]$$

No caso, estamos interessados apenas na resposta forçada, que, no domínio da frequência, é:

$$Y_F(s) = \frac{C_1}{s - j\omega} + \frac{C_2}{s + j\omega}$$

Necessitamos determinar apenas  $C_1$  e  $C_2$ . Essas constantes podem ser obtidas pelo método habitual, ou seja:

$$C_1 = \left[ Y(s)(s - j\omega) \right]_{s=j\omega} = \left[ G(s) \frac{s}{s + j\omega} \right]_{s=j\omega} = \frac{1}{2} G(j\omega)$$
  

$$C_2 = \left[ Y(s)(s + j\omega) \right]_{s=-j\omega} = \left[ G(s) \frac{s}{s - j\omega} \right]_{s=-j\omega} = \frac{1}{2} G(-j\omega)$$

Note que  $G(j\omega)$  e  $G(-j\omega)$  são funções complexas conjugadas da variável  $j\omega$ . Sob forma retangular, elas apresentam a mesma parte real e partes imaginárias simétricas. Sob forma polar, apresentam o mesmo módulo, mas ângulos de fase opostos, ou seja:

$$G(j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] + j\operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

$$G(-j\omega) = \operatorname{Re}[G(j\omega)] - j\operatorname{Im}[G(j\omega)]$$

ou, ainda,

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \left| G(j\omega) \right| e^{j\phi} \\ G(-j\omega) &= \left| G(j\omega) \right| e^{-j\phi} \end{aligned}$$

onde

$$\phi = \arctan \left\{ \frac{\text{Im} \left[ G(j\omega) \right]}{\text{Re} \left[ G(j\omega) \right]} \right\}$$

Podemos, então, escrever:

$$C_1 = \frac{1}{2} \left| G(j\omega) \right| e^{j\phi} \text{ e } C_2 = \frac{1}{2} \left| G(j\omega) \right| e^{-j\phi}$$

ou ainda:

$$Y_F(s) = \frac{1}{2} \left| G(j\omega) \right| \left[ \frac{e^{j\phi}}{s - j\omega} + \frac{e^{-j\phi}}{s + j\omega} \right]$$

A resposta forçada no domínio do tempo será, então:

$$\begin{aligned} Y_F(t) &= \frac{1}{2} \left| G(j\omega) \right| \left[ e^{j(\omega t + \phi)} + e^{-j(\omega t + \phi)} \right] \text{ ou} \\ Y_F(t) &= \left| G(j\omega) \right| \cos(\omega t + \phi) \end{aligned}$$

Vemos, pois, que a resposta forçada do sistema a uma excitação harmônica do tipo  $u(t) = \cos(\omega t)$  é também uma função harmônica de mesma frequência  $\omega$  que a excitação, mas de amplitude e ângulo de fase dados por:

$$Y_m = \left| G(j\omega) \right| \text{ e } \theta'_0 = \phi$$

Vê-se que a amplitude da resposta forçada é o módulo de  $G(j\omega)$ , e o ângulo de fase e o ângulo da resposta  $\theta'_0$  são o argumento de  $G(j\omega)$ . Então, ambas as informações necessárias para a determinação da resposta estão contidas na função:

$$G(j\omega) = [G(s)]_{s=j\omega}$$

que pela sua importância é denominada *função senoidal de transferência* ou, também, *função harmônica de transferência*.

### Exemplo 7.1

Dado o sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{100}{s + 100}, \text{ determine:}$$

- (a) A função harmônica de transferência.
- (b) A amplitude da resposta harmônica a uma entrada senoidal  $u(t) = 5 \sin(2\pi ft)$  para uma frequência de 15,916 Hz.
- (c) O ângulo de defasagem  $\phi$  da saída em relação à entrada.

Solução:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi 15,916 = 100 \text{ rad/s}$$

$$(a) G(j\omega) = \frac{100}{100 + j\omega}.$$

Para  $\omega = 100$  rad/s, resulta:

$$\begin{aligned} G(j100) &= \frac{100}{100 + j100} = \frac{1}{\sqrt{2}[45^\circ]} = \\ &0,707 \underline{-45^\circ} \end{aligned}$$

- (b) Amplitude da resposta harmônica, para  $\omega = 100$  rad/s:

$$Y_m = 5 |G(j100)| = \frac{5}{\sqrt{2}} = 3,536$$

- (c) Ângulo de defasagem

$$\phi = -45^\circ$$

Finalmente:  $y(t) = 3,536 \sin(100t - 45^\circ)$

### Exemplo 7.2

No circuito *RL*-série da Figura 7.2, a força electromotriz do gerador é:

$$e(t) = E_m \cos \omega t$$

Determine a corrente forçada,  $i_r(t)$ , no circuito.

Solução:

Determinaremos inicialmente a função de transferência.

$$G(s) = \frac{I(s)}{E(s)} = \frac{1}{R + Ls}$$

Fazendo  $s = j\omega$ , obtemos a função harmônica de transferência.

$$G(j\omega) = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{1 \angle \phi}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

onde

$$\phi = -\arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)$$

Logo, teremos:

$$i_F(t) = \frac{E_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t + \phi)$$

Note que nesse caso a função harmônica de transferência é a própria admitância, ou seja, o inverso da impedância do circuito:

$$G(j\omega) = \frac{1}{Z(j\omega)}$$

onde  $Z(j\omega)$  é a impedância complexa do circuito.

Finalmente:

$$y(t) = 20 \times 0,263 \sin(5t + 30^\circ - 113,2^\circ) \text{ ou}$$

$$y(t) = 5,252 \sin(5t - 83,2^\circ).$$

### 7.3 Fasores de entrada e saída

A função harmônica de transferência permite determinar também a resposta forçada de um sistema linear invariante no tempo a uma excitação harmônica do tipo geral, ou seja:

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \theta_0)$$

De fato, se a excitação tiver a forma

$$u(t) = U_m \cos \omega t$$

a amplitude será  $U_m$  vezes maior que no caso anterior, em que a amplitude era unitária  $u(t) = \cos \omega t$ . Em virtude da consideração de linearidade do sistema, a resposta será:

$$y_F(t) = U_m |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi)$$

isto é, a resposta forçada terá uma amplitude,

$$Y_m = |G(j\omega)| U_m$$

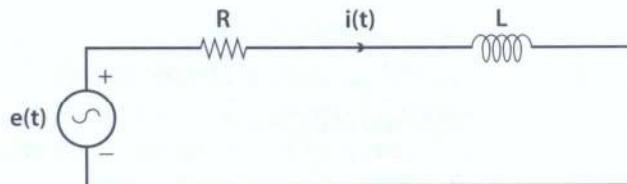
Note, então, que o módulo da função harmônica de transferência deve ser interpretado como ganho de amplitude do sistema, ou seja:

$$|G(j\omega)| = \frac{Y_m}{U_m}$$

Note, ainda, que esse ganho é função da frequência da função de excitação.

Se considerarmos, agora, a função harmônica de excitação sob sua forma mais geral, que difere da anterior apenas quanto ao ângulo de fase inicial  $\phi_0$ , a obtenção da resposta pode ser feita imediatamente a partir da equação vista anteriormente, pelo fato de ser o sistema invariante no tempo.

De fato, como a presença do ângulo de fase inicial  $\phi_0$  pode ser interpretada como simples diferença entre as origens de contagem das escalas de tempo e como o sistema é invariante no tempo, essa diferença se reflete na resposta, que será, então:



**Figura 7.2** Circuito.

#### Exemplo 7.3

Dado o sistema mecânico cuja função de transferência é  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^2 + 7s + 10}$ , determine a resposta harmônica à excitação senoidal  $u(t) = 20 \sin(5t + 30^\circ)$ .

Solução:

$$G(j\omega) = \frac{10}{(10 - \omega^2) + j7\omega}$$

Para  $\omega = 5$  rad/s, resulta:

$$G(j10) = \frac{10}{-15 + j35} = \frac{10}{38,08 \angle 113,2^\circ} = \\ 0,263 \angle -113,2^\circ$$

$$y(t) = U_m |G(j\omega)| \cos(\omega t + \phi + \theta_0) \quad \text{ou}$$

$$Y_m = |G(j\omega)| U_m \quad \text{e} \quad \theta' = \phi + \theta_0$$

Vemos, portanto, que a função harmônica de transferência  $G(j\omega)$  fornece os dados necessários e suficientes para a determinação da resposta do sistema a uma excitação harmônica conhecida.

O módulo  $|G(j\omega)|$  é o ganho de amplitude do sistema, e o ângulo de fase  $\phi$  de  $G(j\omega)$  indica a defasagem entre os sinais de resposta e de entrada. Por esta razão, denomina-se ângulo de defasagem, como indicado na Figura 7.3.

Definem-se também os seguintes fasores:

$$U(j\omega) = U_m e^{j\theta_0} \quad \text{e} \quad Y(j\omega) = Y_m e^{j\theta'}$$

que representam no domínio da frequência os sinais harmônicos que constituem respectivamente a entrada e a saída forçada do sistema em estudo. Esses fasores estão representados na Figura 7.3.

A relação entre  $Y(j\omega)$  e  $U(j\omega)$  resulta:

$$\frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{Y_m e^{j\theta'}}{U_m e^{j\theta_0}} = |G(j\omega)| e^{j(\theta' - \theta_0)} = \\ |G(j\omega)| e^{j\phi} = G(j\omega)$$

$$Y(j\omega) = G(j\omega) U(j\omega)$$

de onde se conclui que a função harmônica de transferência  $G(j\omega)$  é um operador que transforma o fator de entrada  $U(j\omega)$  no fator de saída  $Y(j\omega)$ .

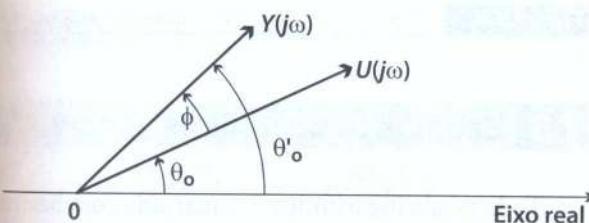


Figura 7.3 Fasores.

## 7.4 Representações gráficas da resposta em frequência

É extremamente útil a representação gráfica de  $G(j\omega)$  em função da frequência  $\omega$  no intervalo de zero a infinito. Essa representação gráfica, que permite uma visualização da resposta em frequência do sistema, é feita usualmente sob duas formas, ou seja: por meio de diagramas polares, tendo a frequência  $\omega$  como parâmetro, ou por meio de um par de gráficos cartesianos, um deles representando o módulo  $|G(j\omega)|$  e o outro, o ângulo de fase  $\phi$ , em função de  $\omega$ , como variável independente. Estes últimos são também chamados diagramas de Bode.

Nos diagramas polares, a função harmônica de transferência é representada no plano complexo, onde o eixo das abscissas contém a parte real de  $G(j\omega)$  e o eixo das ordenadas, a parte imaginária de  $G(j\omega)$ . Evidentemente, nesse plano, cada ponto define um vetor cujo módulo é o ganho  $|G(j\omega)|$  e o ângulo de fase,  $\phi$ . À medida que  $\omega$  varia no intervalo de zero a infinito, a extremidade do vetor  $G(j\omega)$  descreve uma curva que, para cada valor do parâmetro  $\omega$ , indica o ganho e o ângulo de defasagem da resposta em frequência. É a curva polar de resposta em frequência do sistema.

Na Figura 7.4 temos um exemplo de representação polar desse tipo.

$$G(j\omega) = |G(j\omega)| \angle \phi$$

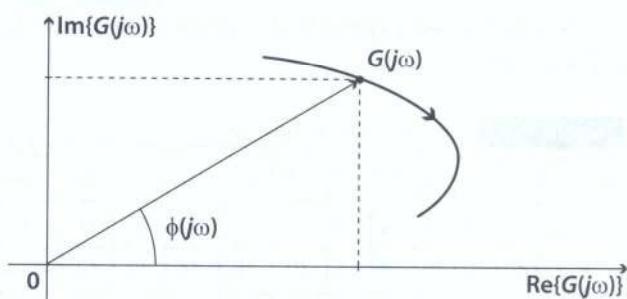


Figura 7.4 Representação polar.

Na representação cartesiana, como já vimos, a resposta em frequência desdobra-se em dois gráficos, ou seja, um representando o ganho  $|G(j\omega)|$  em função da frequência e outro representando o ângulo de fase  $\phi$ , também em função da frequência. Tipicamente, nesses gráficos, a variável  $\omega$  é representada em escala logarítmica no eixo das abscissas, e o ganho é dado em decibéis (dB), no eixo das ordenadas do primeiro gráfico, ou seja:

$$Y_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega)|$$

A vantagem de representar  $\omega$  em escala logarítmica é conseguir um amplo intervalo de variação da frequência dentro das dimensões limitadas do gráfico. A representação do ganho em dB é utilizada por tradição. Além disso, a utilização de logaritmos no eixo das ordenadas, nesse caso, facilita a construção dos gráficos. No gráfico do ângulo de fase a escala do eixo das abscissas coincide com a do primeiro gráfico; portanto, utiliza escala logarítmica para representação de  $\omega$ , mas o ângulo de defasagem  $\phi$  é apresentado em escala linear e geralmente medido em graus.

A seguir, apresentamos, a título de exemplo, as várias formas de representação da resposta em frequência de um sistema, cuja função de transferência é:

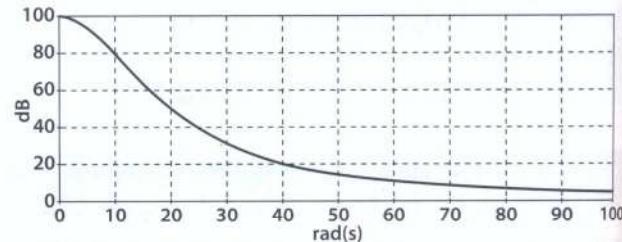
$$G(j\omega) = \frac{K_a}{(1 + j\omega RC)^2} = \frac{100}{\left(1 + \frac{j\omega}{20}\right)^2}$$

A partir dessa expressão, foi construída a Tabela 7.1, a seguir.

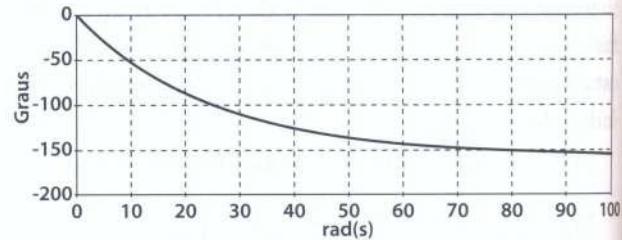
**Tabela 7.1** Representações gráficas

$\omega$ (rad/s)	0	5	10	15	20	30	40	50	60	100	$\rightarrow \infty$
$ G(j\omega) $	100	94	80	64	50	31	20	13,8	10	3,8	$\rightarrow 0$
$Y_{\text{dB}}$	40	39	38	36	34	30	26	23	20	12	$\rightarrow -\infty$
$\phi^\circ$	0	-28	-53	-74	-90	-113	-127	-136	-143	-157	$\rightarrow -180$

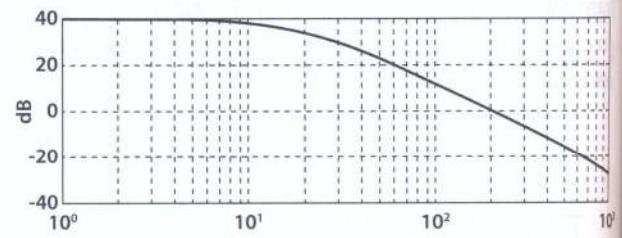
As representações gráficas a seguir são baseadas nessa tabela (figuras 7.5 a 7.8).



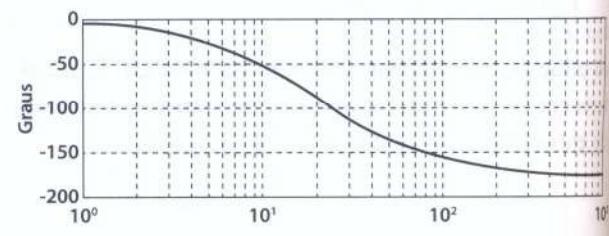
**Figura 7.5** Resposta em frequência: diagrama linear de ganho.



**Figura 7.6** Resposta em frequência: diagrama linear de fase.



**Figura 7.7** Resposta em frequência: diagrama monolog com ganho em dB.



**Figura 7.8** Resposta em frequência: diagrama monolog de fase.

## 7.5 Escalas logarítmicas

Toda escala logarítmica é construída com base em um sistema de abscissas lineares. Por exemplo, se desejarmos representar  $\omega$  em escala logarítmica ao longo do eixo  $OO'$ , começaremos por construir nesse eixo um sistema de abscissas lineares ( $O, x$ ), conforme a Figura 7.9:

Figura 7.9 Escala linear em  $x$ .

Depois, definimos a escala logarítmica de  $\omega$  pela expressão  $x = K \log(\omega)$ , onde  $K$  é uma constante arbitrária denominada fator de escala.

Fazendo inicialmente  $K = 1$ , resulta  $x = \log(\omega)$  e também  $\omega = 10^x$ , conforme a Figura 7.10.

Considera-se como origem da escala logarítmica o ponto em que  $x = 0$  e, portanto,  $\omega = 1$ , conforme a Figura 7.10. No ponto  $x = 1$ , tem-se  $\omega = 10$ . Para  $x = 2$ , tem-se  $\omega = 100$ , e assim por diante. Um segmento unitário na escala  $x$  corresponde a um fator 10 na escala  $\omega$ , isto é, se  $x_2 = x_1 + 1$ , resulta, em correspondência,  $\omega_2 = 10\omega_1$ . Por isso, um segmento unitário na escala  $x$  é denominado segmento de uma década, na escala  $\omega$ .

Note, então, que os segmentos nas escalas logarítmicas, em vez de aditivos, são multiplicativos. O segmento que nessa escala vai do ponto 1 ao ponto 2 é denominado segmento de uma oitava. No segmento de uma oitava, o valor da extremidade é igual ao valor da origem multiplicada por 2. Se começa no 1, vai até o 2. Se começa no 2, vai até o 4. Se começa no 8, vai até o 16. E assim por diante. No sentido inverso, ele divide por 2. As figuras 7.11 e 7.12 procuram explicar esse fato.

A relação entre os valores de  $x$  e os valores inteiros de  $\omega$  correspondentes à primeira década da escala logarítmica está indicada na Tabela 7.2:

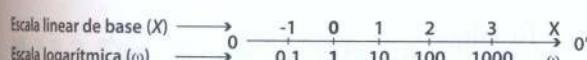
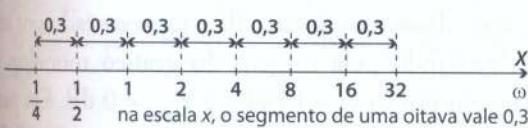
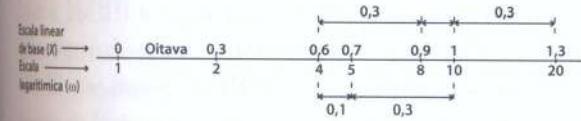
Figura 7.10 Escala logarítmica em  $\omega$ .Figura 7.11 Escala logarítmica em  $\omega$ .Figura 7.12 Escala logarítmica em  $\omega$ .

Tabela 7.2

$\omega$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x$	0	0,30	0,48	0,60	0,70	0,78	0,85	0,90	0,95	1,00

Nos diagramas de Bode, a escala logarítmica em  $\omega$ , como definimos anteriormente, é usada no eixo das abscissas.

No eixo das ordenadas, a escala em dB (decibel) é representada por:

$$Y_{\text{dB}} = 20 \log(Y)$$

onde, no gráfico de Bode,  $Y = |G(j\omega)|$ .

A relação entre  $Y_{\text{dB}}$  e  $Y$  é ilustrada nas figuras 7.13 e 7.14.

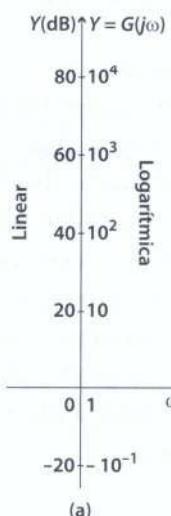
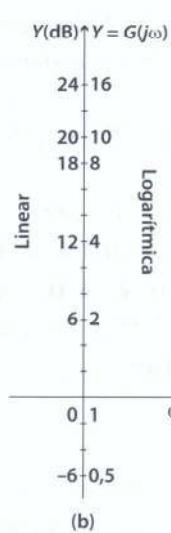
Figura 7.13 (a) Escala logarítmica em  $\omega$ .Figura 7.13 (b) Escala logarítmica em  $\omega$ .

Figura 7.14 Escala logarítmica em dB.

Note que, neste caso, a escala linear é a da variável  $Y_{dB}$ , enquanto a variável  $Y$  é representada em escala logarítmica, com fator de escala  $K = 20$ .

## 7.6 Diagramas de Bode de funções de transferência simples

Denominamos aqui funções de transferência simples, aquelas que ou são constantes ou possuem apenas um polo ou um zero reais. Temos cinco casos a considerar:

- (1) Função de transferência constante  $G(s) = K_g$ .
- (2) Função de transferência com um polo na origem.
- (3) Função de transferência com um zero na origem.
- (4) Função de transferência com um polo real fora da origem.
- (5) Função de transferência com um zero real fora da origem.

Estudaremos, inicialmente, para esses casos simples, as curvas de resposta em frequência e sua representação aproximada por poligonais assintóticas, que constituem os denominados diagramas de Bode dos respectivos sistemas. Consideraremos, em seguida, o caso de sistemas que possuem vários polos e zeros reais. Por último, examinaremos o caso de sistemas de polos e/ou zeros complexos conjugados.

Os diagramas de resposta em frequência de um sistema são obtidos, como já vimos, a partir da função harmônica de transferência.

### 7.6.1 Função de transferência constante

$G(s) = K_g$ . Temos também  $G(j\omega) = K_g$ , cujo valor em dB, evidentemente, é constante:

$$Y(\text{dB}) = K_g(\text{dB}) = 20 \log_{10} |K_g|$$

Note que se  $|K_g| \geq 1$ , resulta  $K_g(\text{dB}) \geq 0$ , e se  $|K_g| < 1$ , resulta  $K_g(\text{dB}) < 0$ . O ângulo de fase, porém, será  $\phi = 0$  se  $K_g > 0$ , e será  $\phi = \pm 180^\circ$  se  $K_g < 0$ . Nas figuras 7.15 a 7.17, temos a representação desses vários casos.

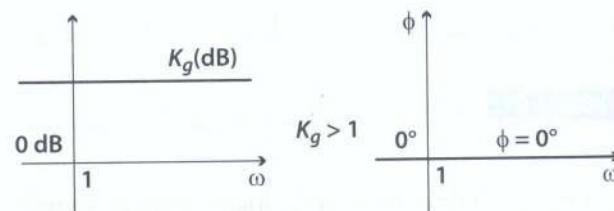


Figura 7.15 Representação.

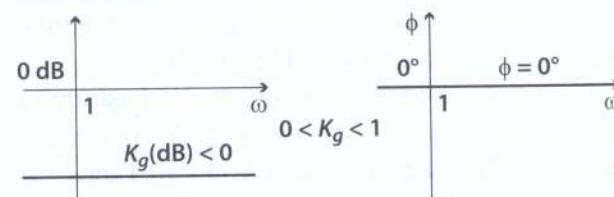


Figura 7.16 Representação.

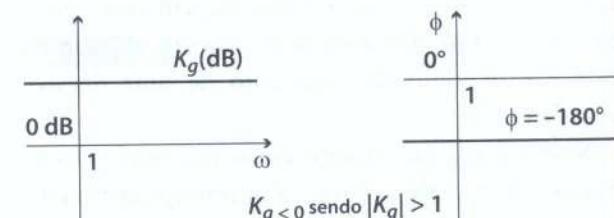


Figura 7.17 Representação.

### 7.6.2 Função de transferência com um polo na origem

$$G(s) = \frac{1}{s}$$

$$G(j\omega) = \frac{1}{j\omega} = \frac{-j}{\omega}$$

Resulta:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\omega} \angle (-90^\circ) \quad \therefore \quad Y(\text{dB}) = -20 \log_{10}(\omega) \quad \text{e}$$

$$\phi = -90^\circ$$

A partir dessa equação, pode-se demonstrar que o ganho dessa função em dB é representado por uma reta passando pela origem do gráfico monolog, ou seja, pelo ponto  $\omega = 1 \text{ rad/s}$  e  $Y_{(\text{dB})} = 0 \text{ dB}$ . Ela passa também pelo ponto  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  e  $Y_{(\text{dB})} = -20 \text{ dB}$ . Por isso, diz-se que essa reta tem uma inclinação de  $-20 \text{ dB}$

por década ou  $-20 \text{ dB/dec}$ . Como essa reta passa também pelo ponto  $\omega = 2 \text{ rad/s}$ ,  $Y_{(\text{dB})} = -6 \text{ dB}$ , pode-se dizer que sua inclinação é de  $-6 \text{ dB}$  por oitava, ou seja,  $-6 \text{ dB}/8^{\text{a}}$ . Pode-se, ainda, dizer que essa é a inclinação  $-1$ . Já o ângulo de fase correspondente a um polo na origem tem valor constante de  $-90^\circ$ . É representado no gráfico de resposta em frequência de fase por uma reta paralela ao eixo  $\omega$ , indicando  $-90^\circ$ .

Os diagramas de resposta em frequência de ganho e de fase correspondentes a um polo na origem estão representados adiante, nas figuras 7.18 e 7.19.

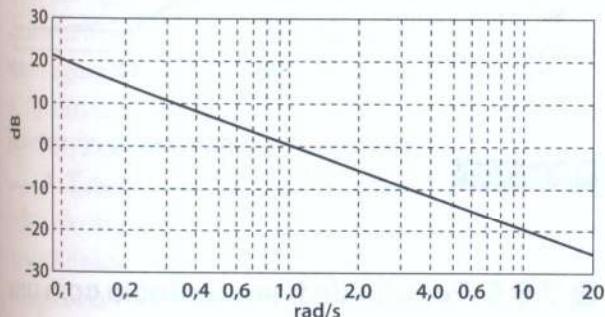


Figura 7.18 Diagrama de ganho de um polo na origem.

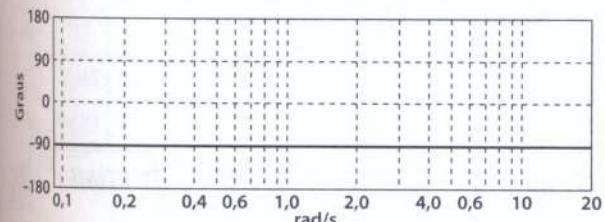


Figura 7.19 Diagrama de fase de um polo na origem.

### ■ 7.6.3 Função de transferência com apenas um zero na origem

$$G(s) = s$$

Resulta:

$$G(j\omega) = j\omega = \omega | 90^\circ \quad Y(\text{dB}) = 20 \log_{10}(\omega) \quad \text{e} \\ \phi = 90^\circ$$

Como no caso anterior, a partir dessa equação podemos demonstrar que o ganho dessa função em dB (que é  $Y(\text{dB})$ ) é representado por uma reta passando pela origem do gráfico monolog, com uma inclinação de  $+20 \text{ dB/dec}$ , ou seja,  $6 \text{ dB/8}^{\text{a}}$ , ou, ainda, inclinação  $+1$ . O ângulo de fase, neste caso, é representado por uma reta horizontal na altura de  $+90^\circ$  (figuras 7.20 e 7.21).

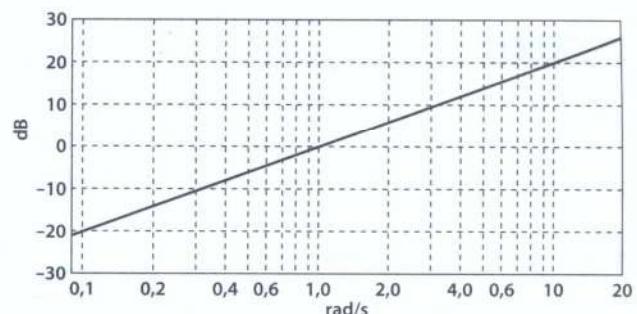


Figura 7.20 Diagrama de ganho de um zero na origem.

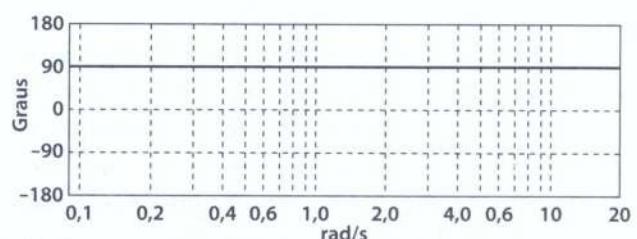


Figura 7.21 Diagrama de fase de um zero na origem.

### ■ 7.6.4 Função de transferência com um polo real fora da origem

Seja o polo real  $s = -a$ .

Neste caso,

$$G(s) = \frac{a}{(s + a)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{a}\right)}$$

e

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right)} = \frac{e^{j\phi_a}}{\left|1 + \frac{j\omega}{a}\right|} = \\ \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/a)^2}} e^{j\phi_a}$$

onde a fase é  $\phi_a = -\arctan(\omega/a)$

O ganho em dB é dado por:

$$Y(\text{dB}) = G(\text{dB}) = -20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{a} \right|$$

Essas expressões permitem calcular o ganho em dB e o ângulo de fase em função da frequência  $\omega$  conforme Tabela 7.3, para o caso em que se tem  $a = 1$ .

Resposta em frequência de um polo real fora da origem (na posição -1)

Tabela 7.3

$\omega$	0,1	0,2	0,5	0,8	1,0	1,25	2,0	5,0	10,0
$Y_{(\text{dB})}$	-0,04	-0,20	-1,0	-2,1	-3,0	-5,1	-7,0	-14,1	-20,0
$\phi^\circ$	-5,70	-11,3	-26,6	-38,7	-45,0	-51,3	-63,4	-78,7	-84,3

A Figura 7.22 mostra a poligonal assintótica e a curva correta da resposta em frequência de ganho de um sistema que possui apenas um polo real fora da origem (no exemplo temos  $a = 1$ ).

Vemos que o maior desvio entre a poligonal assintótica de ganho e a curva ocorre para  $\omega = a$  e é de -3 dB. Uma oitava antes e outra depois da frequência de corte, isto é, nas frequências  $\omega = 0,5a$  e  $\omega = 2a$ , o desvio entre a poligonal e a curva é aproximadamente igual a -1 dB. Finalmente, a uma década do ponto  $\omega = a$ , isto é, a uma década da frequência de ângulo, o desvio é desprezível, e a curva confunde-se com a poligonal assintótica.

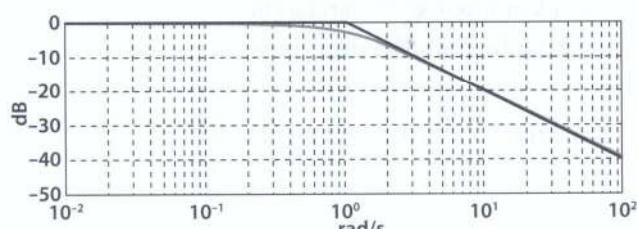
Para estudar a curva de resposta em frequência do ângulo de fase  $\phi_a$ , começemos por lembrar que

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \phi_a = 0^\circ \quad \text{e} \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} \phi_a = -90^\circ$$

Além disso, para  $\omega = a$  resulta  $\phi_a = -45^\circ$ .

Com base nessas observações e com auxílio dos dados da Tabela 7.3, torna-se fácil construir a curva que representa  $\phi_a$  em função de  $\omega$ . Note que essa curva é simétrica em relação ao ponto  $(\omega = a, \phi_a = -45^\circ)$ , conforme mostra a Figura 7.22.

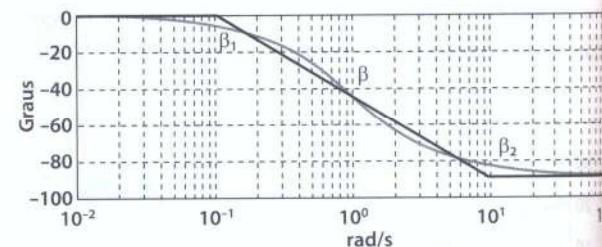
O diagrama de resposta em frequência de fase pode, com razoável aproximação, ser substituído por uma poligonal assintótica, construída da seguinte maneira: marcam-se os pontos  $\beta_1$  ( $\omega = a/10, \phi_a = 0^\circ$ ) e  $\beta_2$  ( $\omega = 10a, \phi_a = -90^\circ$ ). A poligonal assintótica procurada tem um primeiro segmento coincidente com  $\phi_a = 0^\circ$ , desde a origem em  $\omega = 0$  até a extremidade



Polygonal e curva exata de ganho de um polo real fora da origem (na posição -1).

Figura 7.22

em  $\beta_1$ ; um segundo segmento ( $\beta_1, \beta_2$ ) que vai de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  e, finalmente, um terceiro segmento coincidente com  $\phi_a = -90^\circ$ , início em  $\beta_2$  e extremidade  $\omega = \infty$ . A Figura 7.23 permite-nos comparar essa poligonal com a curva exata. Note que os desvios são de aproximadamente  $6^\circ$  nos pontos  $\beta_1$  e  $\beta_2$  e são praticamente os desvios máximos encontrados ao longo de todo o diagrama.



Polygonal e curva exata de fase de um polo real fora da origem (na posição -1).

### ■ 7.6.5 Função de transferência com um zero real fora da origem

Seja o zero real  $s = -b$ .

$$\text{Neste caso, } G(s) = \frac{s + b}{b} = 1 + \frac{s}{b}$$

e

$$G(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{b} = \left| 1 + \frac{j\omega}{b} \right| e^{j\phi_b} = \left( \sqrt{1 + (\omega/b)^2} \right) e^{j\phi_b}$$

onde  $\phi_b = \arctan(\omega/b)$ .

Esse zero real pode situar-se no plano  $s$  tanto lado esquerdo como do lado direito, sem que isso afete a estabilidade do sistema.

Entretanto, vamos considerar, inicialmente, zero real no SPE, o que significa ser  $b > 0$  nas fórmulas acima.

Em qualquer caso, teremos:

$$Y_{\text{dB}} = 20 \log \left| 1 + \frac{j\omega}{b} \right| = 20 \log \sqrt{1 + (\omega/b)^2}$$

e

$$\phi_b = \arctan(\omega/b)$$

Em particular, para  $\omega = b$ , vem:

Figura 7.23

$$Y_{\text{dB}} = 20 \log |1 + j| = 20 \log \sqrt{2} = 3 \text{ dB}$$

$$\text{e } \phi_b = \arctan(1) = 45^\circ$$

As poligonais e a curva de resposta em frequência de ganho serão simétricas às do caso anterior em relação ao eixo  $(0, \omega)$  das abscissas, isto é, ao eixo  $Y_{(\text{dB})} = 0$ . A poligonal terá um ramo de 0 dB para  $0 \leq \omega \leq b$  e um lado ascendente, com inclinação de +20 dB/déca- da (ou seja, 6 dB/8<sup>a</sup>, ou, ainda, inclinação +1) a partir de  $\omega = b$ .

No caso da resposta em frequência de fase, teremos um primeiro segmento coincidente com  $\phi_a = 0^\circ$ , desde a origem em  $\omega = 0$  até a extremidade em  $\beta_1$ ; um segundo segmento  $(\beta_1, \beta_2)$  que vai de  $0^\circ$  a  $+90^\circ$ ; e, finalmente, um terceiro segmento coincidente com  $\phi = 90^\circ$ , início em  $\beta_2$  e extremidade  $\omega = \infty$ .

A Tabela 7.4 apresenta os valores do ganho em dB e do ângulo de fase  $\phi_b$ , em função da frequência normalizada  $(\omega/b)$ , para duas décadas centradas na frequência correspondente ao zero real considerado.

Resposta em frequência de um zero real fora da origem

Tabela 7.4

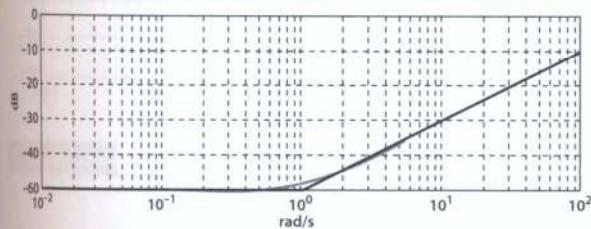
$\omega/b$	0,1	0,2	0,5	0,8	1,0	1,25	2,0	5,0	10,0
$Y_{(\text{dB})}$	0,04	0,20	1,0	2,1	3,0	5,1	7,0	14,1	20,0
$\phi^\circ$	5,70	11,3	26,6	38,7	45,0	51,3	63,4	78,7	84,3

As figuras 7.24 e 7.25 mostram curvas e as poligonais de resposta em frequência de ganho e de fase para o caso de um zero real situado no SPE do plano s.

Finalmente, consideremos o caso de zeros reais positivos, isto é, situados no semiplano direito (SPD) do plano s.

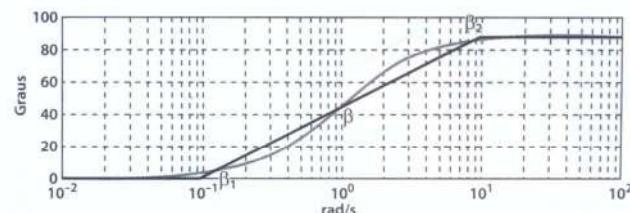
Assim, com  $b > 0$ , teremos:

Zero real  $s = b$ .



Poligonal e curva exata de ganho de um zero real fora da origem (na posição -1).

Figura 7.24



Poligonal e curva exata de fase de um zero real fora da origem (na posição -1).

$$\text{Neste caso, } G(s) = \frac{b - s}{b} = 1 - s/b$$

e

$$G(j\omega) = 1 - \frac{j\omega}{b} = \left| 1 + \frac{j\omega}{b} \right| e^{j\phi_b} = \sqrt{1 + (\omega/b)^2} |\phi_b|$$

$$\text{com } \phi_b = \arctan(-\omega/b) = -\arctan(\omega/b).$$

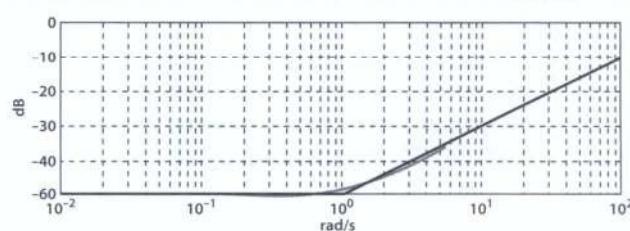
Note que o módulo é o mesmo, enquanto o ângulo de fase também é simétrico em relação ao de um zero simetricamente situado no SPE.

Assim, a curva de resposta em frequência de ganho de um zero real no SPD coincide com a de um zero simetricamente situado no SPE, conforme indica a Figura 7.26.

Agora, a resposta em frequência de fase de um zero real no SPD confunde-se com a de um polo situado simetricamente no SPE em  $(a = b)$ , conforme indica a Figura 7.27.

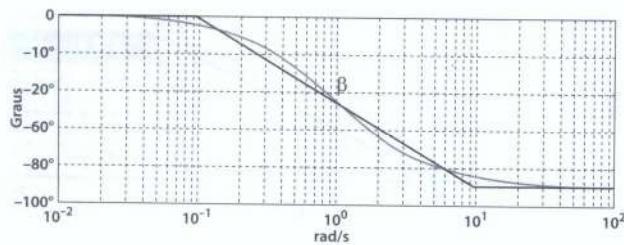
Observe que os sistemas que possuem todos os zeros e todos os polos no SPE são denominados sistemas de fase mínima. Se um ou mais zeros se situarem no SPD, o sistema denomina-se fase não mínima.

Na prática, a grande maioria dos sistemas é de fase mínima.



Poligonal e curva exata de um zero real situado no SPD do plano s (na posição +1).

Figura 7.26



**Figura 7.27** Poligonal e curva exata de um zero real situado no SPD do plano  $s$  (na posição +1).

## 7.7 Resposta em frequência de um sistema com polos e zeros reais

Vejamos alguns exemplos.

### Exemplo 7.4

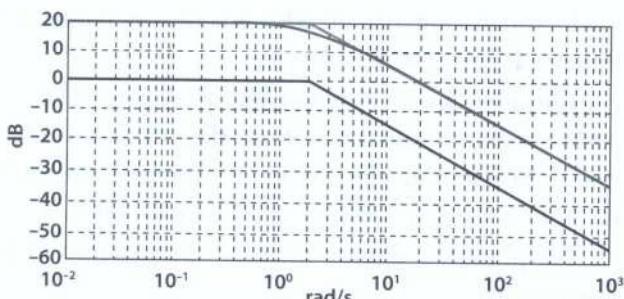
Traçar o diagrama de resposta em frequência de ganho e de fase do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{20}{(s+2)} = \frac{10}{\left(\frac{s}{2} + 1\right)}$$

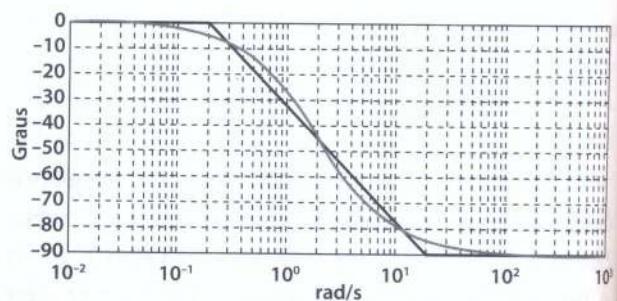
Solução: figuras 7.28 e 7.29.

Consideremos agora uma função de transferência com uma constante de ganho, um polo e um zero:

$$G(s) = \frac{K(s+b)}{(s+a)} = \frac{K_g(1+s/b)}{(1+s/a)}$$



**Figura 7.28** Poligonal de ganho, exemplo 7.4.



**Figura 7.29** Poligonal de fase, exemplo 7.4.

### Exemplo 7.5

Determine a resposta em frequência do filtro passa baixas indicado na Figura 7.30.

Dados:  $R_2C = 0,025$  s;  $(R_1 + R_2)C = 0,10$  s.

Solução:

A função de transferência do circuito é

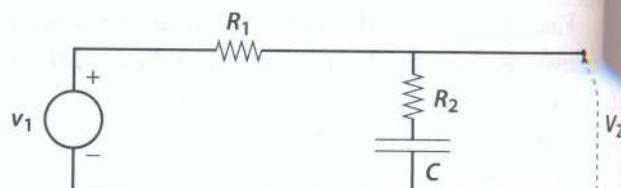
$$G(s) = \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1 + R_2Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs}$$

Numericamente,  $G(s) = \frac{1 + 0,025s}{1 + 0,10s}$  ou, ainda

$$G(s) = \frac{1 + \frac{s}{40}}{1 + \frac{s}{10}}, \text{ o que indica um polo em } -10$$

e um zero em -40 e constante de ganho  $K_g=1$ . O ganho, sendo unitário, é representado pelo eixo das abscissas (dB = 0).

As figuras 7.31 a 7.36 apresentam as poligonais parciais e resultantes de ganho e de fase. As figuras 7.35 a 7.36 mostram as poligonais resultantes (de ganho e fase) e as respectivas curvas exatas.



**Figura 7.30** Circuito.

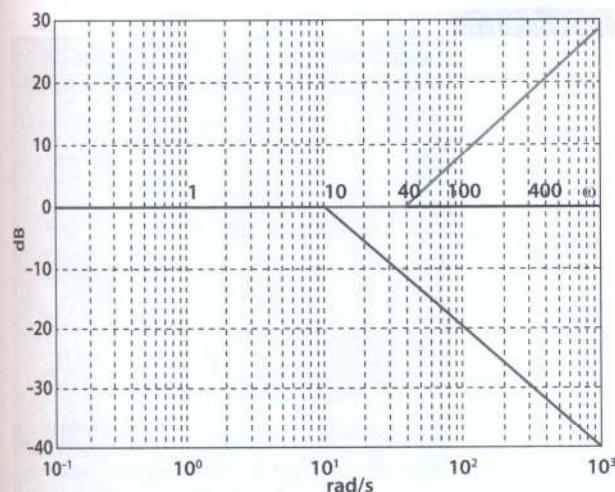


Figura 7.31 Poligonais componentes de ganho.

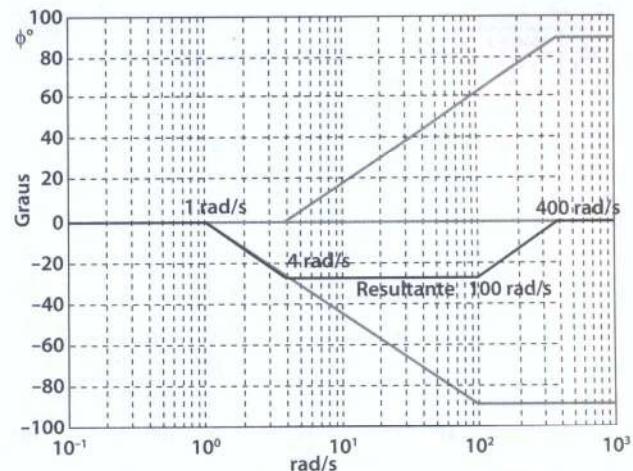


Figura 7.34 Poligonais componentes mais poligonal resultante de fase.

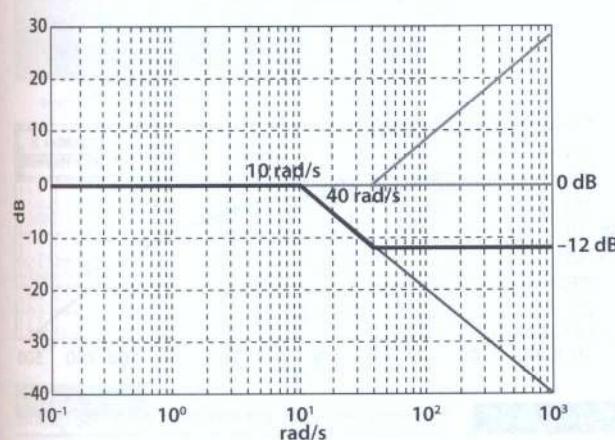


Figura 7.32 Poligonais componentes mais poligonal resultante de ganho.

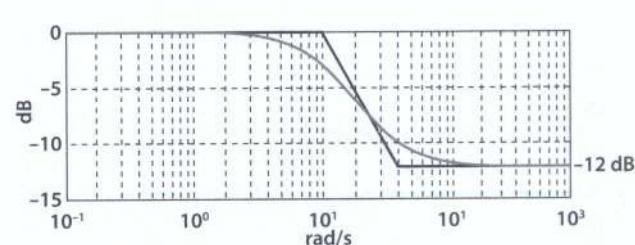


Figura 7.35 Poligonal e curva correta de R.F. de ganho.

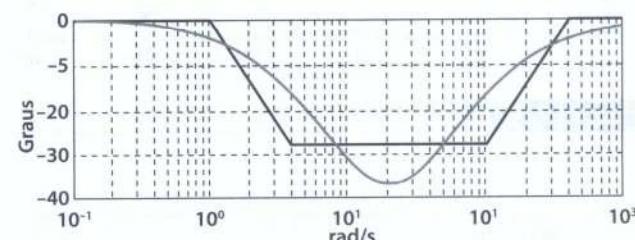


Figura 7.36 Poligonal e curva correta de R.F. de fase.

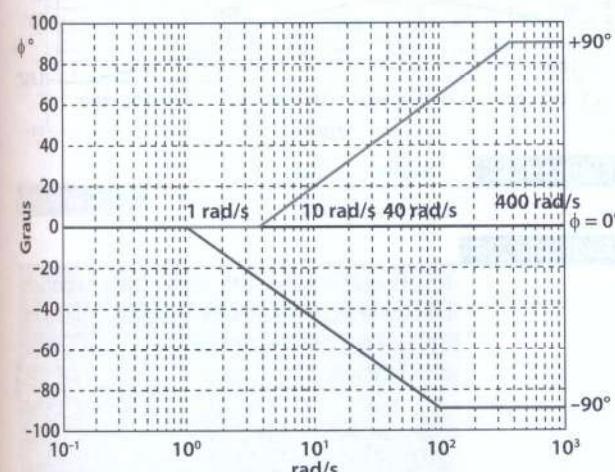


Figura 7.33 Poligonais componentes de fase.

**Exemplo 7.6**

Nas figuras 7.37 e 7.38 temos as poligonais parciais e as respectivas poligonais resultantes de ganho e de fase do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{100(s+2)}{s+10} = \frac{20(0,5s+1)}{0,1s+1}$$

Nas figuras 7.39 e 7.40 temos as poligonais resultantes e as curvas corretas de resposta em frequência do mesmo sistema anterior.

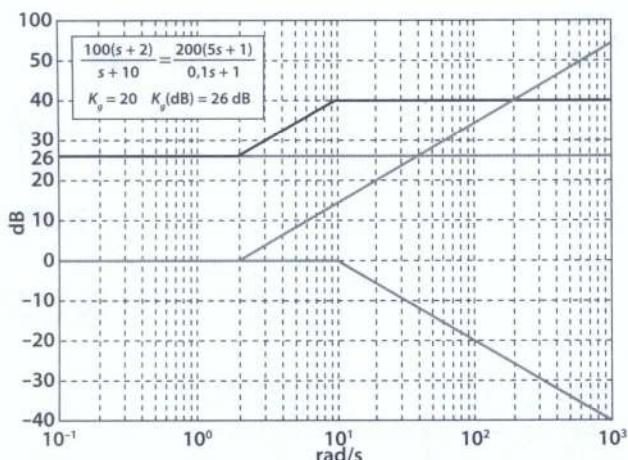


Figura 7.37 Poligonais de ganho.

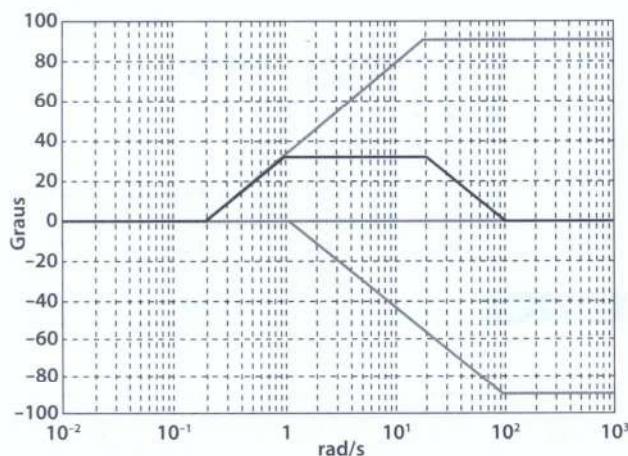


Figura 7.38 Poligonais de fase.

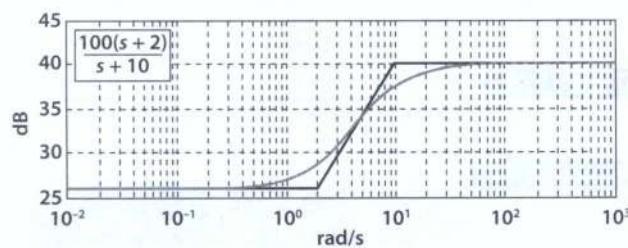


Figura 7.39 Poligonal e curva de ganho.

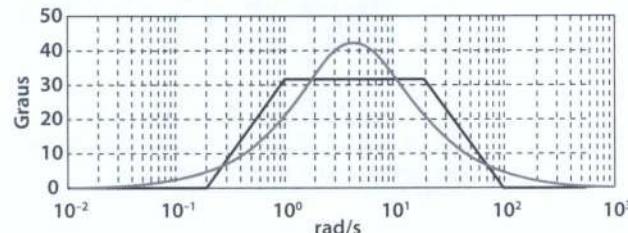


Figura 7.40 Poligonal e curva de fase.

**Exemplo 7.7**

Desenhar as poligonais assintóticas de ganho e de fase do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{2.500(s+2)}{s(s+10)(s+50)} =$$

$$\frac{10\left(\frac{s}{2}+1\right)}{s\left(\frac{s}{10}+1\right)\left(\frac{s}{50}+1\right)}$$

Solução nas figuras 7.41 (poligonal assintótica de ganho) e 7.42 (poligonal assintótica de fase).

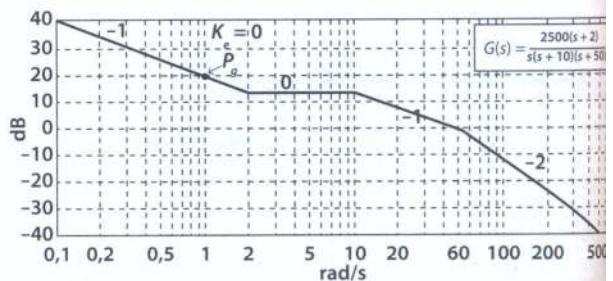


Figura 7.41 Poligonal de resposta em frequência de ganho

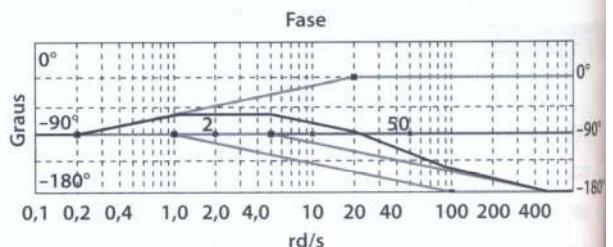


Figura 7.42 Poligonal de fase.

**Exemplo 7.8**

Nas figuras 7.43 e 7.44 temos as poligonais parciais e as respectivas poligonais resultantes de ganho e de fase do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{4 \cdot 10^7(s+2)}{(s+10)(s+400)(s+1000)}$$

Nas figuras 7.45 e 7.46 temos as poligonais assintóticas e as curvas corretas de ganho e fase.

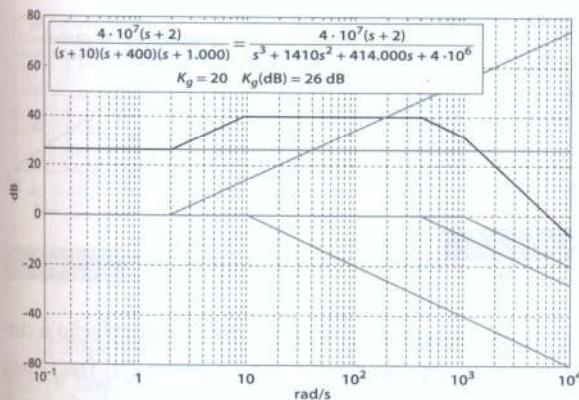


Figura 7.43 Poligonal de ganho, Exemplo 7.8.

## 7.8 Sistemas com polos complexos conjugados

Até aqui examinamos a resposta em frequência de sistemas somente com polos e zeros reais. Para completar o estudo, devemos estudar, ainda, sistemas dotados também de polos e zeros complexos. O caso de polos (ou zeros) puramente imaginários pode ser entendido como caso particular dos polos (ou zeros) complexos.

Abordaremos inicialmente o caso de um sistema possuindo unicamente um par de polos complexos conjugados e ganho unitário. A função de transferência de tal sistema tem a forma:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\alpha s + \omega_n^2}$$

com  $0 < \frac{\alpha}{\omega_n} < 1$ , ou, na segunda forma normal:

$$G(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{s}{\omega_n} + 1}$$

com  $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n}$ , portanto também com  $0 < \zeta < 1$ .

A função harmônica de transferência correspondente é:

$$G(j\omega) = \frac{1}{\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2 + 2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}$$

$\underbrace{1}_{\phi}$

sendo

$$\phi = -\arctan \left( \frac{2\zeta \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right)$$

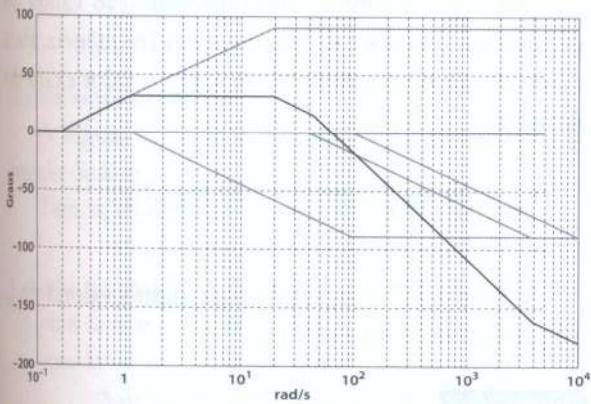


Figura 7.44 Poligonal de fase , Exemplo 7.8.

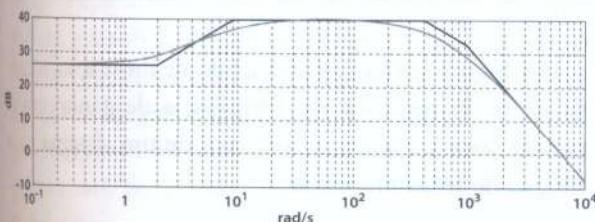


Figura 7.45 Poligonal e curva de ganho, Exemplo 7.8.

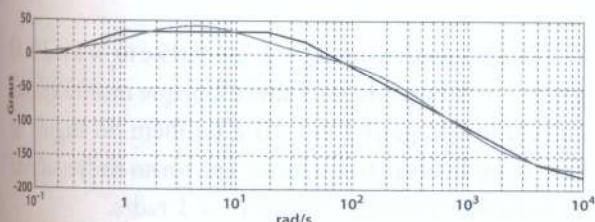


Figura 7.46 Poligonal e curva corrigida de fase, Exemplo 7.8.

e o ganho em dB será:

$$Y_{\text{dB}} = 20 \log_{10} |G(j\omega)| = -20 \log_{10} \left| 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 + j2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right|.$$

Neste caso, para a obtenção da poligonal assintótica da curva de resposta em frequência, adota-se uma dupla aproximação. A primeira consiste em desprezar o termo imaginário  $[2\zeta j\omega/\omega_n]$ . De fato, verifica-se facilmente que, para  $\omega < \omega_n$  e  $\omega > \omega_n$ , essa aproximação é muito boa. Resulta, então:

$$Y_{\text{dB}} = -20 \log \left| 1 + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right|$$

A segunda aproximação é semelhante à utilizada no caso de polos reais fora da origem:

$$Y_{\text{dB}} = -20 \log \left| 1 + \left( \frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2 \right| = \begin{cases} = -20 \log 1 = 0, & \text{para } \omega \leq \omega_n \\ = -20 \log \left| \left( \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2 \right|, & \text{para } \omega \geq \omega_n \end{cases}$$

A poligonal assintótica que daí resulta é constituída por duas semirretas, a saber:

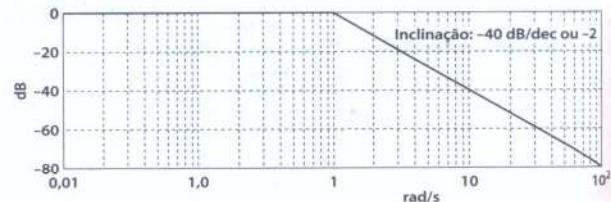
$$\begin{aligned} \text{para } \omega \leq \omega_n \quad Y_{\text{dB}} &= 0 \\ \text{para } \omega \geq \omega_n \quad Y_{\text{dB}} &= -40(\log \omega - \log \omega_n) \\ \text{ou, } Y_{\text{dB}} &= -40(x - x_n), \quad \text{para } x \geq x_n \end{aligned}$$

em que  $x$  é a abscissa da escala linear de base:

$$x = \log \omega \quad \text{e} \quad x_n = \log \omega_n$$

Logo, a última expressão de  $Y_{\text{dB}}$  representa uma semirreta de origem no ponto  $(\omega = \omega_n, Y_{\text{dB}} = 0)$  e de inclinação  $-40 \text{ dB/década}$  (ou  $-12 \text{ dB por oitava}$ , ou simplesmente inclinação  $-2$ ).

A poligonal de ganho de um sistema de 2ª ordem com  $K = 1$  e  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$  está indicada na Figura 7.47.



**Figura 7.47** Sistemas de 2ª ordem: ganho.

Essa poligonal apresenta erros em relação à curva exata de representação da resposta em frequência de ganho, os quais são, às vezes, consideráveis nas proximidades da frequência de ressonância  $\omega_n$ . Esses erros, que dependem essencialmente do grau de amortecimento  $\zeta$ , devem forçosamente ser corrigidos para que se tenha uma representação válida do andamento da curva de resposta em frequência. Para a frequência de ressonância  $\omega = \omega_n$ , o valor exato do ganho é:

$$Y_{\text{dB}} = 20 \log |G(j\omega_n)| = -20 \log |2\zeta|$$

A Tabela 7.5 representa, para alguns valores de  $\zeta$ , o  $Y_{\text{dB}}$  exato no ponto  $\omega = \omega_n$ .

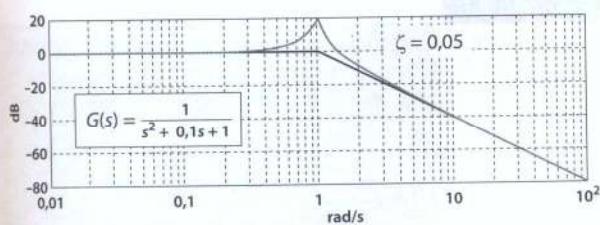
**Tabela 7.5** Altura  $Y_{\text{dB}}$  do pico em função de  $\zeta$

$\zeta$	0,00	0,01	0,05	0,10	0,20	0,25	0,30	0,40	0,50	0,60	0,70	0,80	0,90	1,00
$Y_{\text{dB}}$	$\infty$	34	20	14	8	6	4,5	2	0	-1,6	-3	-4	-5	-6

A Figura 7.48 mostra, a título de ilustração, a curva exata de resposta em frequência de ganho comparada com a poligonal, no caso de um sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0,1s + 1}$$

Neste caso, temos  $K = 1$ ,  $\zeta = 0,05$  e  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ . O gráfico está baseado na Tabela 7.6, que mostra valores calculados do ganho em dB e também do ângulo de fase para diversas frequências em torno da frequência de ressonância que, no caso, é  $\omega_n = 1 \text{ rad/s}$ .

Figura 7.48 Sistemas de 2<sup>a</sup> ordem: ganho.

O andamento da resposta em frequência do ângulo de fase, por sua vez, é dado pela expressão

$$\phi = -\arctan \left( \frac{2\zeta \omega / \omega_n}{1 - (\omega / \omega_n)^2} \right)$$

já vista anteriormente.

A Figura 7.49 dá a representação geométrica do ângulo de fase.

Temos, evidentemente, os seguintes limites:

para $\omega \rightarrow 0$	$\phi \rightarrow 0$
para $\omega = \omega_n$	$\phi = -90^\circ$
para $\omega \rightarrow \infty$	$\phi \rightarrow -180^\circ$

A curva que se obtém é simétrica em relação ao ponto  $(\omega = \omega_n, \phi = -90^\circ)$ , mas seu andamento depende essencialmente do grau de amortecimento  $\zeta$ . Neste caso, o uso da poligonal auxiliar que vai de uma década antes a uma década depois de  $\omega_n$  é de pouca valia para o traçado da curva de resposta em frequência de fase. A Figura 7.50 ilustra o andamento da resposta em frequência de fase para o caso de um par de zeros complexos com  $\zeta = 0,05$ .

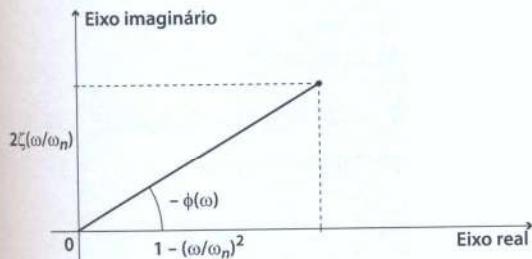


Figura 7.49 Representação geométrica do ângulo de fase.

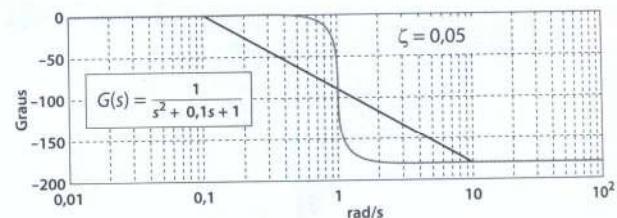
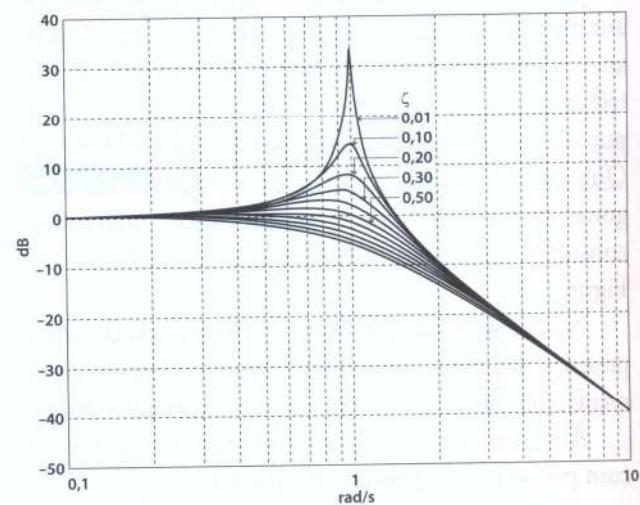
Figura 7.50 Sistemas de 2<sup>a</sup> ordem: fase.

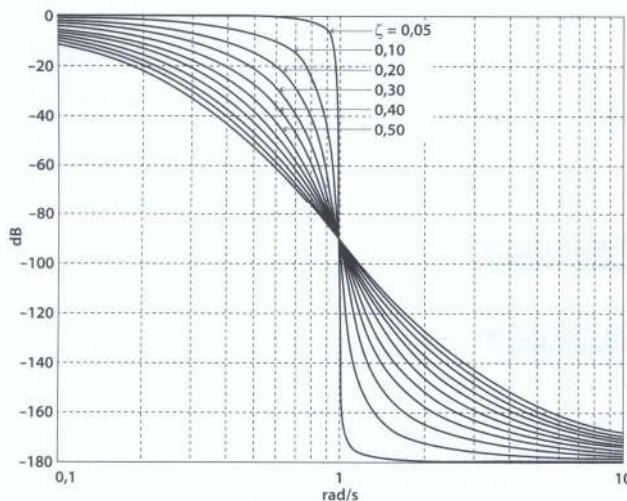
Tabela 7.6 Resposta em frequência (figuras 7.49 e 7.50)

$\omega$ rad/s	0,1	0,2	0,4	0,8	1,0	1,25	2,0	4,0	10,0
dB	0,09	0,35	1,50	8,66	20,0	4,79	-9,56	-23,5	-39,9
$\phi^\circ$	-0,58	-1,19	-2,73	-12,5	-90	-167	-176	-178	-179,4

Como dissemos, o traçado da poligonal não auxilia muito a construção da curva de resposta em frequência de fase dos sistemas com um par de polos complexos. Mesmo as poligonais de ganho devem, geralmente, ser fortemente corrigidas. Então, para auxiliar o traçado dos diagramas de Bode dos sistemas com polos complexos, os livros costumam apresentar uma família de curvas normalizadas de resposta de ganho e de fase desses sistemas, para vários valores do grau de amortecimento. Essas curvas estão reproduzidas nas figuras 7.51 e 7.52.

No caso de um par de zeros complexos, as curvas (e as poligonais) são iguais, mas posicionadas simetricamente.

Figura 7.51 Sistemas de 2<sup>a</sup> ordem: ganho.



**Figura 7.52** Sistemas de 2<sup>a</sup> ordem: fase.

camente em relação ao eixo  $\omega$  das frequências (eixo de 0 dB). Nesse caso, em vez de as curvas de ganho apresentarem picos junto à frequência de ressonância, apresentam vales, tanto mais profundos quanto menores forem os coeficientes (positivos)  $\zeta$ . Já as curvas de fase vêm de 0°, em frequência zero, passando por 90° quando  $\omega = \omega_n$  e tendendo a 180° quando a frequência vai para infinito.

## 7.9 Sistemas com polos e zeros reais e complexos

Nesse caso, a construção das poligonais assintóticas de ganho, nos diagramas de resposta em frequência, são semelhantes às que foram descritas anteriormente, para o caso de polos e zeros reais apenas. A única diferença está no fato de que a contribuição do par de polos ou zeros complexos se faz por segmentos com inclinações de  $\pm 40$  dB/década. Quando for traçada a curva exata a partir da poligonal, no caso dos polos complexos, é conveniente consultar as curvas normalizadas apresentadas na Figura 7.52.

No que se refere à resposta em frequência de fase, a presença dos polos (ou zeros) complexos impõe, certamente, consulta às curvas normalizadas correspondentes.

A seguir daremos alguns exemplos de problemas com polos (e zeros) reais e complexos.

### Exemplo 7.9

Construir o diagrama de resposta em frequência de ganho e de fase dos sistemas cujas funções de transferência estão indicadas abaixo.

(a)

$$F_1(s) = \frac{160 s}{(s+0,4)(s^2+0,8s+16)}$$

$$K_g = 20 \log$$

(b)

$$F_2(s) = \frac{10^6 s^2}{(s^2+1,25s+25)(s+20)(s+50)}$$

Solução (a):

$$F_1(s) = \frac{25 s}{((s/0,4) + 1)((s/4)^2 + 0,2(s/4) + 1)}$$

$$K_g(\text{dB}) = 20 \log(25) = 28 \text{ dB}; \\ \omega_n = 4; \quad \zeta = 0,1;$$

$$\text{Pico de ganho em } \omega_n = 4: -20 \log(2\zeta) = -20 \log(0,2) = 14 \text{ dB}$$

Ver figuras 7.53 e 7.54

Solução (b):

A função de transferência dada também pode ser escrita na forma:

$$F_2(s) = \frac{40 s^2}{((s/5)^2 + 0,25(s/5) + 1)((s/20) + 1)((s/50) + 1)}$$

Os polos desse sistema são:

$$-20; -50; -0,625 + j4,961; -0,625 - j4,961;$$

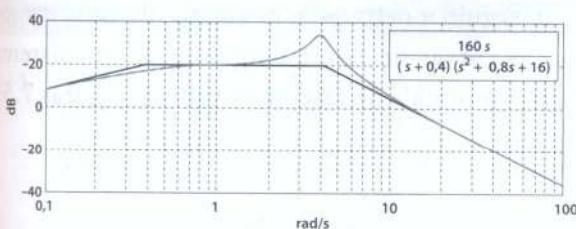
Temos também:

$$K_g(\text{dB}) = 20 \log(40) = 32 \text{ dB}; \quad \omega_n = 5; \quad \zeta = 0,125;$$

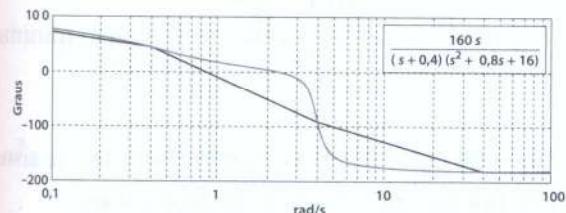
Altura do pico:

$$Y_{\text{dB}} = -20 \log(2\zeta) = -20 \log(0,25) = 12 \text{ dB}$$

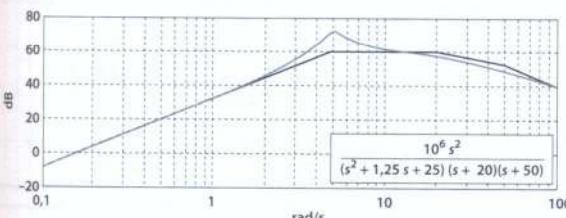
(ver figuras 7.55 e 7.56)



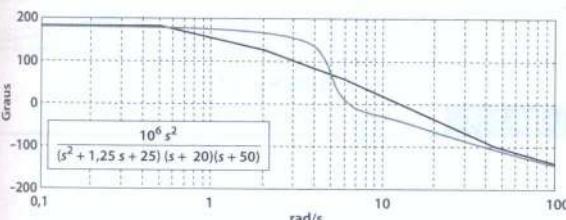
Resposta em frequência: diagrama de ganho em dB, Exemplo 7.9(a).



Resposta em frequência: diagrama de fase, Exemplo 7.9(a).



Resposta em frequência: diagrama de ganho em dB, Exemplo 7.9(b).



Resposta em frequência: diagrama de fase, Exemplo 7.9(b).

### Exemplo 7.10

Desenhe os diagramas de resposta em frequência de ganho e fase do sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{4(s^2 + s + 25)}{s^2(s + 20)}$$

Ver figuras 7.57 e 7.58.

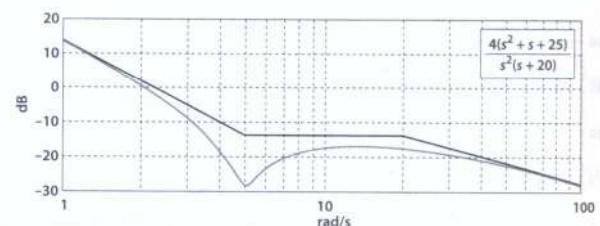
Solução:

Polos: dois polos na origem e um polo em  $-20$

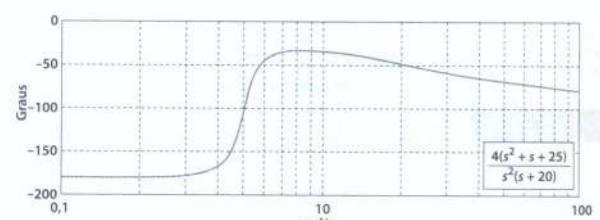
Zeros: um par de zeros complexos:  
 $-0,5 \pm j4,975$

$$K_g = 4 \cdot 25 / 20 = 5 \quad \therefore$$

$$K_g (\text{dB}) = 20 \log(5) = 14 \text{ dB}$$



Resposta em frequência: diagrama de ganho em dB, Exemplo 7.10.



Resposta em frequência: diagrama de fase, Exemplo 7.10.

## 7.10 Sistemas de fase mínima e não mínima

Denominam-se sistemas de fase mínima aqueles que não possuem nem polos nem zeros no semiplano direito (*SPD*) do plano  $s$ . Essa definição é válida para sistemas cuja função de transferência é uma relação de polinômios em  $s$ .

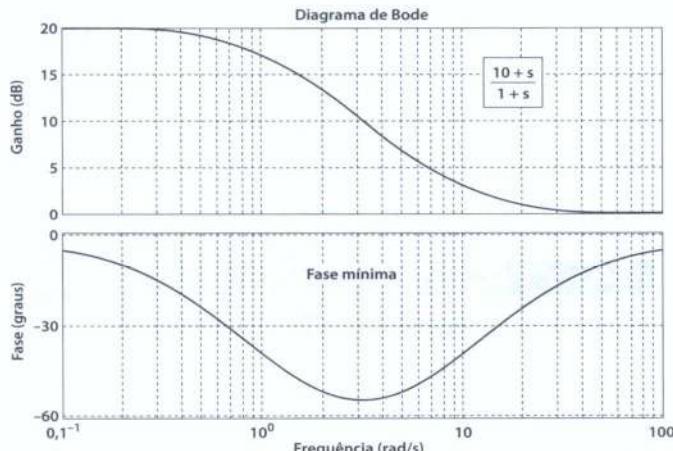
Note que dois sistemas, um de fase mínima e outro de fase não mínima correspondente, têm a mesma curva de resposta em frequência de ganho, mas os diagramas de fase evidentemente diferem, pois o sistema de fase mínima apresenta para qualquer frequência  $\omega$  um atraso de fase menor ou eventualmente igual ao do sistema de fase não mínima.

A seguir mostramos, por meio de dois exemplos, as curvas de fase e de ganho de um sistema de fase mínima e de fase não mínima (figuras 7.59 e 7.60).

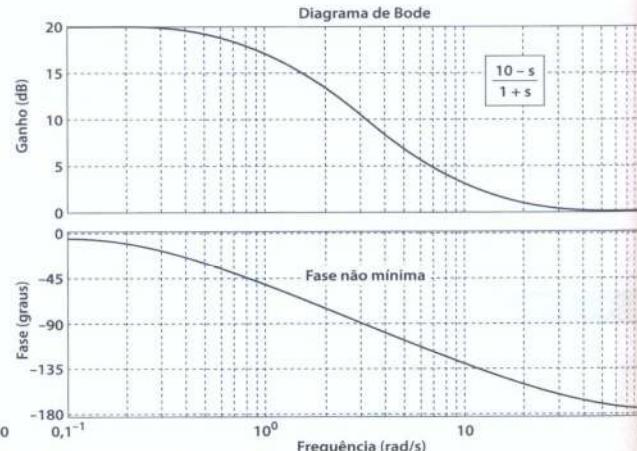
$$G_1(s) = \frac{10 + s}{1 + s} = \frac{10(1 + \frac{s}{10})}{1 + s} \rightarrow \text{Fase mínima}$$

$$G_2(s) = \frac{10 - s}{s + 1} = \frac{10(1 - \frac{s}{10})}{1 + s} \rightarrow \text{Fase não mínima}$$

Na prática, os sistemas ou componentes de sistemas de fase não mínima não são frequentes.



**Figura 7.59** Fase mínima.



**Figura 7.60** Fase não mínima.

## Considerações finais

Inicialmente, definiu-se no capítulo o que se entende por resposta em frequência. Depois, apresentou a definição e as propriedades da função de transferência senoidal, aqui também denominada função harmônica de transferência. Em seguida, foram apresentadas as representações gráficas da resposta em frequência e uma leve recordação das escalas logarítmicas. O capítulo apresentou detalhadamente os métodos clássicos de construção

gráfica dos denominados diagramas de Bode: primeiramente, para o caso de sistemas simples (com no máximo um polo ou um zero), depois para sistemas com polos e zeros reais e, finalmente, com polos e zeros complexos. Foram abordadas tanto as construções dos diagramas assintóticos como o ajuste para obtenção das curvas corretas. No final, foi apresentada uma informação sobre sistemas de fase mínima e não mínima.

## Problemas propostos

1. Desenhe as poligonais assintóticas e os diagramas de resposta em frequência de ganho e de fase dos sistemas cujas funções de transferência estão indicadas a seguir. Calcule também, em dB, as constantes de ganho de frequência zero.

$$(a) G_a(s) = \frac{20}{(s+2)}$$

$$(b) G_b(s) = \frac{20}{s(s+2)}$$

$$(c) G_c(s) = \frac{400}{(s+2)(s+5)}$$

2. Desenhe as poligonais assintóticas e os diagramas de resposta em frequência de ganho e de fase dos sistemas cujas funções de transferência estão indicadas a seguir. Calcule também, em dB, as constantes de ganho de frequência zero ( $K_g$ ).

$$(a) G_a(s) = \frac{10.000s}{(s+10)(s+50)}$$

$$(b) G_b(s) = \frac{200(s+1)}{s(s+5)}$$

$$(c) G_c(s) = \frac{200(s+2)}{(s+0,2)(s+20)}$$

3. Desenhe os diagramas de resposta em frequência de ganho e de fase dos sistemas cujas funções de transferência estão indicadas a seguir.

$$(a) G_1(s) = \frac{31.250}{(s+2)(s+12,5)(s+50)}$$

$$(b) G_2(s) = \frac{4.000(s+2)}{s(s+5)(s+20)(s+40)}$$

$$(c) G_3(s) = \frac{1,5 \cdot 10^6 s (s+4)}{(s+10)^2 (s+30)(s+200)}$$

Calcule também  $K_g$  em dB.

4. Determine a resposta em frequência do circuito indicado na Figura 7.61. Construa os diagramas de ganho e de fase, em função da frequência  $\omega$ . Verifique:  $K_g$  (dB) = -14 dB. Zero: -25; polo: -125.

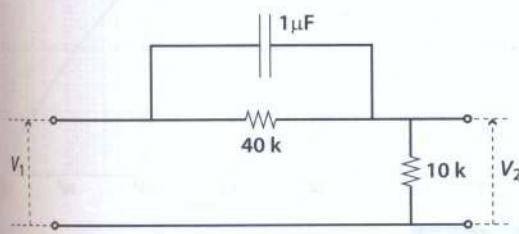


Figura 7.61 Circuito.

5. Quando um degrau unitário de tensão  $v(t) = h(t)$  é aplicado a um determinado sistema linear inicialmente em repouso, a resposta desse sistema é:

$$y(t) = 1,8e^{-4t} - 0,8e^{-9t}.$$

Quais os polos e zeros desse sistema? No caso da resposta em frequência, qual a frequência ( $\omega$ ) que corresponde a um ângulo de fase de  $45^\circ$ ?

6. Consideremos o sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{3,75 \cdot 10^7 (s+2)}{(s+10)(s+300)(s+1.250)}$$

- (a) Desenhe a poligonal de resposta em frequência de ganho e esboce a curva corrigida.  
 (b) Desenhe a poligonal de resposta em frequência de fase.  
 (c) Avalie o ganho de amplitude e o ângulo de fase para um sinal de  $\omega = 300$  rad/s.

7. Para cada uma das funções de transferência abaixo:

$$(a) G_1(s) = \frac{50(0,25s+1)}{s(0,5s+1)(0,05s+1)}$$

$$(b) G_2(s) = \frac{2.000(s+2)}{s(s+5)(s+40)}$$

$$(c) G_3(s) = \frac{12,5(s+4)}{s(0,5s+1)(0,05s+1)}$$

$$(d) G_4(s) = \frac{100(s+2)}{s^2(s+40)}$$

$$(e) G_5(s) = \frac{50(s+100)}{(s+1)(s+10)^2}$$

$$(f) G_6(s) = \frac{40.000(s+0,5)}{s(s+2,5)(s+10)(s+20)}$$

- (a) Determine a constante de ganho de baixa frequência  $K_g$ , bem como os polos e zeros do sistema.  
 (b) Construa as poligonais de resposta em frequência de ganho e de fase.  
 (c) Ajuste as curvas correspondentes de resposta em frequência das respectivas poligonais.

8. No sistema indicado na Figura 7.62, temos:

$$G(s) = \frac{1.800}{s(s+3)(s+12)}$$

e

$$H(s) = \frac{1}{90}$$

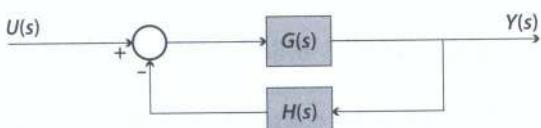


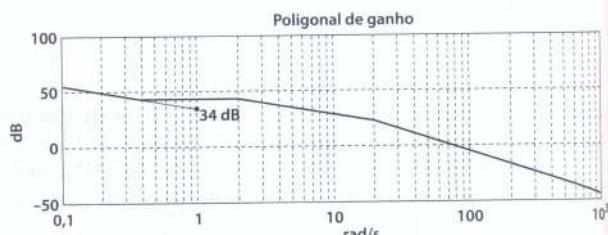
Figura 7.62 Diagrama de blocos.

- (a) Construa as poligonais de resposta em frequência de ganho e fase do sistema de malha fechada  $F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$  indicado na figura.
- (b) Calcule a resposta forçada de  $F(s)$  a uma entrada  $u(t) = 20 \operatorname{sen}(10t)$ .
- (c) Verifique a compatibilidade dos resultados obtidos em (b) com os gráficos de resposta em frequência do item (a).
9. Para cada uma das funções de transferência a seguir:
- $G_1(s) = \frac{10^6}{s^2 + 200s + 20.000}$
  - $G_2(s) = \frac{10.000}{s(s^2 + 50s + 500)}$
  - $G_3(s) = \frac{10.000(s+5)}{s^2 + 50s + 500}$
  - $G_4(s) = \frac{500s}{(s+0,1)(s^2 + 2s + 36)}$
- (a) Determine a constante de ganho de baixa frequência  $K_g$ , bem como os polos e zeros do sistema.
- (b) Construa as poligonais de resposta em frequência de ganho e de fase.
- (c) Ajuste as curvas correspondentes de resposta em frequência das respectivas poligonais.
10. Consideremos o sistema cuja função de transferência é:
- $$G(s) = \frac{2,5 \cdot 10^4(s+0,5)}{s(s+5)(s+50)}$$
- (a) Determine a função harmônica de transferência  $G(j\omega)$  e dê o valor da constante de ganho de baixa frequência  $K_g$ .
- (b) Determine, utilizando o  $G(j\omega)$  encontrado, a resposta harmônica correspondente à entrada  $u(t) = 12 \cos(20t + 30^\circ)$ .
- (c) Construa a poligonal e a curva da resposta em frequência de ganho.
- (d) Idem para a fase.

- (e) Verifique com auxílio dos gráficos a coerência da resposta do item (b).

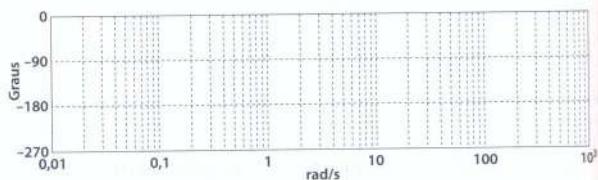
11. O gráfico da Figura 7.63 representa a poligonal de resposta em frequência de ganho de um sistema linear. Determine:

- A constante de ganho  $K_g$ .
- A função de transferência sob a segunda forma normal não fatorada supondo que o sistema seja de fase mínima.
- A poligonal da resposta em frequência de fase (utilize o diagrama monolog disponível a seguir — Figura 7.64).



Resposta em frequência: diagrama de ganho em dB.

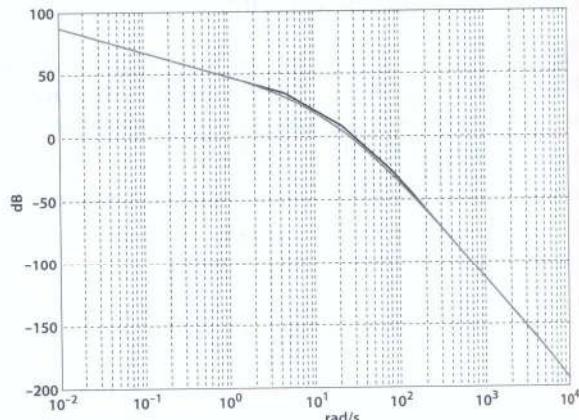
Figura 7.63



Resposta em frequência: diagrama de fase.

12. A poligonal assintótica superposta à curva de resposta em frequência de ganho, de um sistema cuja função de transferência é  $G(s)$ , está indicada na Figura 7.65.

- Determine o ganho  $K_g$  de  $G(s)$ , em dB.
- Determine  $G(s)$ .
- Desenhe a poligonal de resposta em frequência de fase desse sistema.



Poligonal de ganho.

Figura 7.65

13. Consideremos o sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{250s}{(s + 0,4)(s^2 + s + 25)}$$

Desenhe a curva de resposta em frequência de ganho, com auxílio da poligonal assintótica. Calcule, usando a função senoidal de transferência, o ganho para as frequências  $\omega = 2\text{rad/s}$  e  $\omega = 5\text{rad/s}$ .

14. Consideremos o sistema cuja função de transferência é:

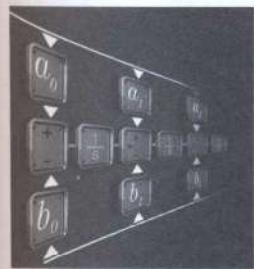
$$G(s) = \frac{1.600(s + 3)}{s(s^2 + 8s + 1.600)}$$

Desenhe a curva de resposta em frequência de ganho, com auxílio da poligonal assintótica. Para auxiliar a construção da curva, determine pelo cálculo, a partir da função senoidal de transferência, os pontos correspondentes às frequências 10, 20, 30 e 40 rad/s.

15. Calcule a resposta em regime permanente do sistema indicado a seguir, à entrada senoidal  $u(t) = 10 \text{ sen}(4t + 30^\circ)$ .

$$G_a(s) = \frac{2.000s}{(s + 0,5)(s^2 + 54s + 200)}$$

# capítulo 8



## Estabilidade

O capítulo se inicia apresentando considerações gerais sobre o conceito de estabilidade e em seguida estabelecendo o tipo de estabilidade que será considerada neste texto, bem como sua definição precisa. Introduz também as noções de estabilidade absoluta e estabilidade relativa. Em seguida relaciona a definição da estabilidade no domínio do tempo com a posição dos polos do sistema que é obtida pela solução da equação característica da função de transferência. Vários exemplos esclarecem as ideias e conceitos apresentados. No prosseguimento

mostra-se que para a determinação da estabilidade não é necessário resolver o polinômio característico: um processo alternativo mais simples, reduzido a uma tabela construída com os coeficientes do polinômio característico, permite obter o resultado desejado. Este é o denominado critério de Routh, detalhado e exemplificado neste capítulo. O estudo inclui, além do caso geral da tabela de Routh, os casos especiais, com os quais é possível obter informações mais detalhadas sobre o comportamento do sistema.

### 8.1 Estabilidade: definição e generalidades

O conceito de estabilidade de um sistema pode ser apresentado sob várias formas. Neste capítulo ficaremos limitados a dar a definição usual para os casos dos sistemas lineares invariantes no tempo. É a denominada estabilidade de *entrada e saída limitadas* ou estabilidade *BibO* (que provém da expressão, em inglês, *bounded input bounded output*). Conforme vimos anteriormente (Capítulo 6), a resposta de um sistema linear a uma excitação qualquer consta de duas partes: componente *natural* e componente *forçada*. Nos sistemas ditos *estáveis*, a resposta natural vai-se atenuando com o passar do tempo. Por isso, no caso dos sistemas estáveis, a resposta natural é habitualmente chamada de resposta transitória. A resposta forçada, ao contrário, tem caráter permanente e em geral se apresenta com o mesmo padrão do sinal de entrada. Entretanto, há casos em que a resposta natural do sistema não tende a desaparecer: ela pode aumentar sempre, tendendo ao infinito ou, em certos casos, pode permanecer oscilante, mas de amplitude

constante. Em qualquer desses casos, o sistema é considerado instável.

Uma observação importante é a seguinte: nos casos em que a resposta natural tende a zero ou a infinito, esse comportamento ocorre qualquer que seja o sinal de entrada. É uma propriedade do sistema e vale, qualquer que seja o sinal de entrada, exceto pelo caso trivial de entrada nula e condições iniciais nulas ( $C.I. = 0$ ). Nos casos em que o componente natural da resposta permanece oscilante com amplitude constante, essa amplitude depende da frequência do sinal aplicado e, para determinada frequência, denominada frequência de ressonância, a amplitude pode tornar-se infinita. Por isso esses sistemas também são considerados instáveis.

Essas considerações permitem que se adote a seguinte definição de estabilidade:

*Um sistema linear, invariante no tempo e inicialmente em repouso, é estável quando sua resposta a ‘qualquer’ entrada de amplitude finita for também de amplitude finita. Caso contrário, o sistema é instável.*

Nessa definição, a palavra ‘qualquer’ é essencial: basta que haja uma única entrada de amplitude finita,

cuja resposta não se enquadre nas condições especificadas, para que o sistema seja considerado instável. Além disso, a estabilidade, como foi definida, não admite graduação: ou o sistema é estável ou não é. Não podemos, por exemplo, classificar um sistema como mais ou menos estável que outro. Essa definição estabelece um critério de *estabilidade absoluta*. Contudo, veremos posteriormente que é possível encontrar graus de variação admissíveis para diversos parâmetros, que aproximam ou afastam um sistema estável das condições de instabilidade. Fala-se, então, em *estabilidade relativa*.

Pode-se provar matematicamente que uma condição necessária e suficiente para que um sistema seja estável segundo a definição apresentada é ‘que todos os polos’ de sua função de transferência estejam situados no semiplano esquerdo (*SPE*) do plano  $s$ , isto é, não deve haver polos nem no semiplano direito (*SPD*) nem no eixo imaginário do plano complexo  $s$ .

Outra forma de enunciar essa condição de estabilidade é dizer que todas as raízes do polinômio característico do sistema devem ter parte real negativa. Tal polinômio é denominado polinômio de Hurwitz.

Assim, sendo  $G(s) = P(s)/Q(s)$  a função de transferência do sistema considerado, o polinômio característico que é

$$Q(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

deve ser um polinômio de Hurwitz.

### Exemplo 8.1

Consideremos o sistema de 1ª ordem  $G(s) = K/(s+a)$ , sendo  $a > 0$ .

Esse sistema tem um único polo no *SPE*, em  $-a$ . Portanto, é um sistema estável e a resposta a qualquer entrada de amplitude finita terá uma resposta também de amplitude finita. Vejamos, por exemplo, o caso da resposta a um degrau unitário.

$$Y(s) = \frac{K}{(s+a)} \frac{1}{s} = \frac{K}{a} \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+a} \right)$$

Então, a resposta no tempo será

$$y(t) = \frac{K}{a} (1 - e^{-at}), \quad t \geq 0$$

Vemos que o degrau tem altura 1, e a resposta não ultrapassa o valor  $K/a$ .

Portanto, excitação e resposta têm, ambas, amplitude limitada. Isso é uma verificação da estabilidade do sistema, mas não chega a ser uma prova.

### Exemplo 8.2

Consideremos agora um sistema de 1ª ordem com o polo situado no *SPD* do plano  $s$ :  $G(s) = K/(s-a)$ , sendo  $a > 0$ . O polo está situado na posição  $+a$ . Vejamos a resposta ao degrau

$$Y(s) = \frac{K}{(s-a)} \frac{1}{s} = \frac{K}{a} \left( -\frac{1}{s} + \frac{1}{s-a} \right)$$

$$y(t) = \frac{K}{a} (-1 + e^{at}), \quad t \geq 0$$

O polo do *SPD* dá origem à exponencial crescente, que tende ao infinito com  $t$ . A resposta desse sistema a um degrau de altura ou amplitude 1 tende ao infinito, isto é, tem amplitude ilimitada. Ao contrário do caso da estabilidade, aqui basta um exemplo para demonstrar que o sistema é instável.

Os dois exemplos anteriores mostram por que, para haver estabilidade, os polos devem se situar no semiplano esquerdo (*SPE*) do plano  $s$ , como no caso do Exemplo 8.1, que possui um polo na posição  $-a$  (com  $a > 0$ ). A expansão da resposta

$Y(s)$  em frações parciais dá origem a frações do tipo  $\frac{C_a^-}{(s+a)}$ , onde a constante  $C_a^-$  é o resíduo do polo considerado. A transformada inversa dessa expressão é uma exponencial decrescente, da forma  $C_a^- e^{-at}$ , que tende a desaparecer segundo uma constante de tempo igual a  $1/a$ . No caso do Exemplo 8.2, por outro lado, o polo situa-se na posição  $+a$ , portanto, no semiplano direito (*SPD*) do plano  $s$ . A expansão em frações parciais da resposta desse componente dá origem a frações do tipo  $\frac{C_a^+}{(s-a)}$ , onde  $C_a^+$  é o resíduo do polo em  $+a$ . A transformada inversa desse componente é uma exponencial crescente, da forma  $C_a^+ e^{at}$ , que tende a infinito com o decorrer do tempo, o que garante a instabilidade do sistema. Esse raciocínio pode ser facilmente estendido ao caso de polos complexos.

### Exemplo 8.3

Consideremos agora um sistema com dois polos situados no eixo imaginário  $G(s) = \frac{K}{s^2 + \omega^2}$ . Os polos estão localizados em  $\pm j\omega_0$ . Usando a função harmônica de transferência  $G(s=j\omega)$  podemos concluir facilmente que a amplitude da resposta harmônica é sempre limitada, salvo o caso em que a frequência imposta

sistema seja  $\omega_0$  rad/s. Nesse caso, e somente nesse caso, a resposta tende a infinito. Exceção feita a essa frequência crítica ou de ressonância, a resposta do sistema a qualquer excitação de amplitude finita, também de amplitude finita. Por isso, alguns autores nomeiam esses sistemas de marginalmente estáveis, em vez de instáveis, como seria rigorosamente de acordo com a definição que adotamos.

#### Exemplo 8.4

Seja o sistema cuja função de transferência é:

$$G_1(s) = \frac{K}{s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260}$$

O polinômio característico, nesse caso, é:

$$Q_1(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260$$

cujas raízes são:

$$-4 \quad -1 \pm j2 \quad 2 \pm j3$$

Como as raízes  $2 \pm j3$  têm parte real positiva (e, portanto, estão situadas no SPD), o polinômio  $Q_1(s)$  não é um polinômio de Hurwitz. O sistema tem dois polos no SPD e, portanto, é instável.

#### Exemplo 8.5

Em outro exemplo no qual se tenha

$$G_2(s) = \frac{K}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$$

os polos do sistema, ou seja, as raízes do polinômio característico

$$Q_2 = s^3 + 6s^2 + 11s + 6$$

são  $-1, -2$  e  $-3$ . Estão todos no SPE, e o sistema é estável.

Do ponto de vista prático, há duas observações importantes:

- (1) Um sistema que não possui zeros e tem apenas um polo situado na origem, isto é, um sistema cuja função de transferência é da forma  $F(s) = K/s$ , é um integrador: o sinal de saída é proporcional à integral do sinal de entrada.

- (2) Os sistemas que possuem um ou mais pares de polos no eixo imaginário e, eventualmente, outros no SPE, embora instáveis, de acordo com a definição adotada, são às vezes denominados *marginalmente estáveis*.

## 8.2 Critério de estabilidade de Routh

O método direto para verificar se um dado polinômio  $Q(s)$  é um polinômio de Hurwitz (isto é, se todas as raízes desse polinômio estão situadas no SPE do plano  $s$ ) é, evidentemente, resolver esse polinômio determinando numericamente suas raízes. Se o grau do polinômio for elevado, entretanto, essa determinação feita manualmente é muito trabalhosa. O uso dos computadores com programas adequados facilita enormemente essa tarefa. Entretanto, no que se refere à simples determinação da estabilidade de um sistema, a localização exata das raízes do polinômio característico não é necessária. Basta saber se existem raízes no SPE e/ou no eixo imaginário. Então, pode-se usar um método de simples aplicação, que apenas indique a existência de raízes nessas posições. Tal é o critério de Routh-Hurwitz que passamos a estudar.

Seja o polinômio

$$\begin{aligned} Q(s) = & a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + a_{n-3} s^{n-3} \\ & \cdots + a_2 s^2 + a_1 s + a_0 \end{aligned}$$

Uma condição preliminar necessária, mas não suficiente, para que o polinômio  $Q(s)$  seja polinômio de Hurwitz é que os coeficientes  $a_j$ , com  $j = 0, 1, 2, \dots, n$  sejam todos positivos (ou todos negativos), sem faltar nenhum.

Se essa condição preliminar for satisfeita, adota-se o procedimento geral descrito a seguir, que é o critério de estabilidade de Routh.

Forma-se a tabela de Routh, começando pela primeira coluna, denominada coluna de referência, formada pelas potências positivas decrescentes de  $s$ , começando com  $s^n$  (sendo  $n$  o grau do polinômio). Depois, formam-se as duas primeiras linhas à direita da coluna de referência, que são constituídas pelos coeficientes do polinômio dispostos em ordem decrescente dos expoentes de  $s$  segundo a sequência indicada pelas setas. Daí resulta que os coeficientes de cada uma dessas linhas correspondem a expoentes de  $s$  de mesma paridade (isto é, todos ímpares ou todos pares).

As demais linhas são constituídas por elementos formados a partir dos termos das duas linhas anteriores e cuja lei de formação é descrita na Tabela 8.1.

**Tabela 8.1** Tabela de Routh

Tabela de Routh

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$	$a_{n-6}$	$\dots$
$s^{n-1}$	$a_{n-1}$	$a_{n-3}$	$a_{n-5}$	$a_{n-7}$	$\dots$
$s^{n-2}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$\dots$	
$s^{n-3}$	$c_1$	$c_2$	$c_3$	$\dots$	
$s^{n-4}$	$d_1$	$\dots$	$\dots$		
$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\dots$		
$s$	$\delta$				
1	$y$				

Cada um dos elementos das várias linhas, a partir da terceira, é formado com base nos coeficientes das duas linhas precedentes, da seguinte forma:

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} \quad b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$b_3 = \frac{a_{n-1}a_{n-6} - a_n a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1} b_2}{b_1} \quad c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1} b_3}{b_1}$$

$$c_3 = \frac{b_1 a_{n-7} - a_{n-1} b_4}{b_1}$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1} \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}$$

... e assim por diante.

O número de elementos das várias linhas vai diminuindo a cada duas linhas. Cada uma das duas últimas linhas é formada por apenas um elemento.

A primeira coluna dos coeficientes  $a_n$ ,  $a_{n-1}$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $d_1$ , ...,  $\delta$  e  $y$  é chamada coluna principal.

Durante o procedimento para a obtenção da tabela, os coeficientes de qualquer linha podem ser multiplicados ou divididos por um número positivo ou negativo, sem alterar o resultado final desejado.

Com a tabela terminada, o número de raízes de  $Q(s)$  com parte real positiva é igual ao número de mudanças de sinal encontradas nos coeficientes da coluna principal. Por exemplo, se  $c_1$  for negativo e todos os demais coeficientes da coluna principal forem positivos, haverá duas mudanças de sinal: de + para - ao passar de  $b_1$  para  $c_1$  e de - para + ao passar de  $c_1$  para  $d_1$ . Isso significa que a equação característica  $Q(s) = 0$  tem duas raízes situadas no SPD e, portanto,  $Q(s)$  não é um polinômio de Hurwitz. Um sistema em que o polinômio característico seja  $Q(s)$  dado nessas condições será instável.

Se, ao contrário, os coeficientes da coluna principal forem todos positivos (ou todos negativos), as raízes de  $Q(s)$  terão parte real negativa, isto é, estarão situados no SPE do plano  $s$  e o sistema será estável.

Por outro lado, se um ou mais coeficientes da coluna principal forem nulos, estaremos diante de um dos casos particulares que serão estudados mais adiante.

#### Exemplo 8.6

Dado o polinômio

$$Q(s) = s^4 + 20s^3 + 80s^2 + 400s + 600$$

Verifique pelo critério de Routh o número de raízes de  $Q(s)$  com parte real positiva (isto é, situadas no SPD do plano  $s$ ).

**Tabela 8.2** Preparação da tabela

$s^4$	1	80	600
$s^3$	20	400	
$s^2$	$b_1$	$b_2$	
$s^1$	$c_1$		
$s^0$	$d_1$		

Cálculo dos coeficientes

$$b_1 = \frac{(20)(80) - (1)(400)}{20} = 60$$

$$b_2 = \frac{(20)(600) - 0}{20} = 600$$

$$c_1 = \frac{(60)(400) - (20)(600)}{60} = 200$$

$$d_1 = \frac{(400)(600) - 0}{400} = 600$$

**Tabela 8.3** Tabela final de Routh

$s^4$	1	80	600	
$s^3$	20	400		
$s^2$	60	600		
$s^1$	200			
$s^0$	600			

Note que não há alternância de sinais nos valores da coluna principal, o que significa que não há nenhuma raiz de  $Q(s)$  com parte real positiva. Se  $Q(s)$  for polinômio característico da função de transferência de um sistema, esse sistema é estável.

Uma observação muito útil é que é sempre possível multiplicar ou dividir todos os coeficientes de qualquer linha por um número positivo sem que o número de trocas de sinais na coluna principal seja alterado. No caso do exemplo dado, podemos começar dividindo a segunda linha correspondente a  $s^3$  por 20, a terceira linha (de  $s^2$ ) pode ser dividida por 60 e assim por diante. A Tabela 8.4 mostra um primeiro exemplo de simplificação.

**Tabela 8.4**

$s^4$	1	80	600	
$s^3$	20	400		← valores originais
	1	20		← divisão por 20
$s^2$	60	600		← valores originais
	1	10		← divisão por 60
$s^1$	10			← cálculo anterior
	1			← divisão por 10
$s^0$	600			← cálculo anterior
	1			← divisão por 600

A tabela final simplificada é

**Tabela 8.5**

$s^4$	1	80	600
$s^3$	1	20	
$s^2$	1	10	
$s^1$	1		
$s^0$	1		

Como vemos, o número de trocas de sinal, que era nulo, permanece o mesmo depois da simplificação.

**Exemplo 8.7**

Verificar se  $Q(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 12s^2 + 21s + 10$  é um polinômio de Hurwitz.

Pelo critério de Routh, obtém-se a Tabela 8.6, a seguir.

**Tabela 8.6**

	$s^5$	1	2	21
	$s^4$	2	12	10
troca de sinal + para - →	$s^3$	-4	16	
troca de sinal - para + →	$s^2$	20	10	
	$s$	18		
	1	10		

Observe que há duas trocas de sinais na coluna principal na passagem de +2 para -4 e de -4 para +20. Assim,  $Q(s)$  possui duas raízes no SPD e, portanto, não é polinômio de Hurwitz.

De fato, pode-se verificar que as raízes desse polinômio são:

$$s_1 = s_2 = -1 \quad s_3 = -2 \quad \text{e} \quad s_{4,5} = 1 \pm 2j$$

Como vimos, sempre que houver conveniência para simplificação dos cálculos, podemos multiplicar ou dividir todos os termos de qualquer linha por um número positivo. No caso do Exemplo 8.7, podemos começar por dividir a segunda linha correspondente a  $s^4$  por 2, a terceira linha pode ser dividida por 4 e

assim por diante, conforme indicam as tabelas 8.7 a 8.9, a seguir.

**Tabela 8.7**

$s^5$	1	2	21	
$s^4$	1	6	5	→ dividir por 2
$s^3$	-4	16		→ dividir por 4
	-1	4		

**Tabela 8.8**

$s^5$	1	2	21	
$s^4$	1	6	5	
$s^3$	-1	4	→	→ dividir por 4
$s^2$	10	5		→ dividir por 5
	2	1		

**Tabela 8.9**

$s^5$	1	2	21	
$s^4$	1	6	5	
$s^3$	-1	4		
$s^2$	2	1		→ dividir por 5
$s$	4,5			
1	1			

Como se verifica, as duas trocas de sinais foram conservadas.

**Exemplo 8.8**

Quais os valores de  $K$  que garantem a estabilidade do sistema indicado na Figura 8.1?

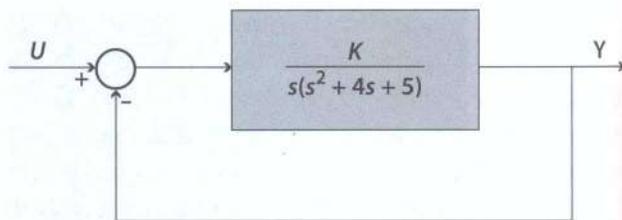
Solução:

A função de transferência do sistema é:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^3 + 4s^2 + 5s + K}$$

A equação característica do sistema é, pois

$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 5s + K = 0$$

**Figura 8.1**

Pelo critério de Routh, temos a Tabela 8.10:

**Tabela 8.10**

$s^3$	1	5	
$s^2$	4	$K$	
$s$	$20 - K$		→ multiplicada por 4
1	$K$		

Então, para garantir a estabilidade, devem ser satisfeitas as condições:

$$20 - K > 0 \text{ (linha } s\text{)} \quad \text{e} \quad K > 0 \quad (\text{última linha}) \\ \text{ou seja} \quad 0 < K < 20$$

**Exemplo 8.9**

Determine as condições a que deve satisfazer a constante  $K$  para que o sistema indicado na Figura 8.2 seja estável.

Solução:

O polinômio característico do sistema de malha fechada é:

$$Q(s) = s(s - 1)(s + 10)^2 + K(s + 1)$$

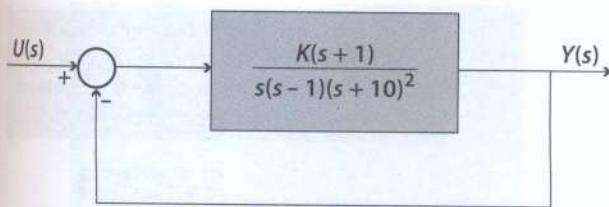
ou

$$Q(s) = s^4 + 19s^3 + 80s^2 + (K - 100)s + K$$

Pelo critério de Routh, temos (Tabela 8.11):

**Tabela 8.11**

$s^4$	1	80	$K$	
$s^3$	19	$K - 100$		
$s^2$	$1,620 - K$	$19K$	→ multiplicada por 19	
$s$	$y$			
1	$K$			

**Figura 8.2**

com

$$y = \frac{(1.620 - K)(K - 100) - 361K}{1.620 - K}$$

ou

$$y = \frac{-K^2 + 1.359K - 162.000}{1.620 - K}$$

Para que o sistema seja estável, devemos ter, simultaneamente:

$$\begin{aligned} 1.620 - K &> 0 & \text{ou} & \quad K < 1.620 \\ K &> 0 & \text{e} & \quad y > 0 \end{aligned}$$

ou seja

$$-K^2 + 1.359K - 162.000 > 0$$

A equação

$$y = -K^2 + 1.359K - 162.000 > 0$$

representa uma parábola no plano  $(K, y)$ , com a concavidade para baixo, devido ao sinal negativo em  $-K^2$ . Para que se tenha  $y > 0$ , os valores de  $K$  devem situar-se entre as raízes  $K_1$  e  $K_2$  da equação

$$K^2 - 1.359K + 162.000 = 0$$

Tais raízes são:

$$K_1 = 132 \quad \text{e} \quad K_2 = 1.227$$

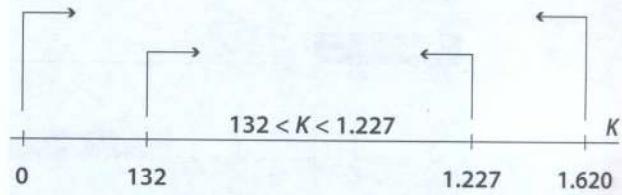
Logo, pela condição anterior, resulta que:

$$132 < K < 1.227$$

Na Figura 8.3, representamos as condições simultâneas a que o valor de  $K$  deve satisfazer.

Vemos então que a última condição engloba todas as demais.

Esta é, pois, a condição a que deve satisfazer a constante  $K$  para que o sistema seja estável.

**Figura 8.3**

### 8.3 Casos especiais

Passemos a estudar agora os casos especiais. Eles ocorrem quando aparecem um ou mais zeros na coluna principal da tabela de Routh.

#### Caso 1 – primeiro caso especial

É quando aparece um zero como primeiro elemento de uma linha que contém ainda pelo menos um elemento diferente de zero. Nesse caso, substitui-se o zero inicial por um número positivo  $\epsilon$  muito pequeno, desprezível em relação aos demais elementos da tabela, e prossegue-se normalmente a formação da tabela.

#### Exemplo 8.10

Estude pelo critério de Routh o polinômio:

$$Q(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$

Estude pelo critério de Routh o polinômio:

$$Q(s) = s^5 + 3s^4 + 2s^3 + 6s^2 + 6s + 9$$

Para a solução, vamos construir a tabela de Routh, na qual encontraremos um zero como elemento da terceira linha.

**Tabela 8.12**

$s^5$	1	2	6
$s^4$	3	6	9
$s^3$	0	3	

Substituindo o zero por um número  $\epsilon$  positivo muito pequeno (pense, por exemplo, em  $\epsilon = 10^{-10}$ ) e prosseguindo a formação da tabela, encontramos, como primeiro elemento da quarta linha, a relação  $(6\epsilon - 9)/\epsilon$ , que pode ser reduzido a  $-9/\epsilon$ , e como segundo elemento dessa linha, 9. Prosseguindo normalmente no cálculo da tabela, vem:

**Tabela 8.13**

$s^5$	1	2	6
$s^4$	3	6	9
$s^3$	$\epsilon$	3	
$s^2$	$-9/\epsilon$	9	
$s$	3		
1	9		

Como vemos, há duas inversões de sinais, o que significa a existência de duas raízes de  $Q(s)$  no SPD.

**Exemplo 8.11**

Estude pelo critério de Routh o polinômio:

$$Q(s) = s^4 + 2s^3 + 3s^2 + 6s + 10$$

Solução:

**Tabela 8.14a**

$s^4$	1	3	10
$s^3$	2	6	
$s^2$	0	10	
$s$			
1			

**Tabela 8.14b**

$s^4$	1	3	10
$s^3$	2	6	
$s^2$	$\epsilon$	10	
$s$	$-20/\epsilon$		
1	10		

Há um zero e um 10 na terceira linha, indicativos do Caso especial 1. Prosseguindo e completando a tabela, temos duas trocas de sinal. Portanto, duas raízes no SPD. Duas outras estarão no SPE.

**Caso 2 – segundo caso especial**

Consideremos uma linha toda com zero, como ilustrado na Tabela 8.15. Nesse caso, se a linha de zeros corresponde a  $s^m$ , constrói-se uma equação auxiliar com os coeficientes  $k_1, k_2, \dots$  da linha anterior,  $s^{m+1}$ . Essa equação é a seguinte:

$$k_1 s^{m+1} + k_2 s^{m-1} + k_3 s^{m-3} + \dots = 0$$

(Note que todos os expoentes de  $s$  são de mesma paridade.)

**Tabela 8.15**

$s^n$	$a_n$	$a_{n-2}$	$a_{n-4}$
:			
$s^{m+1}$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$s^m$	0	0	0
$s^{m-1}$			
:			
:			

Uma propriedade importante da equação auxiliar é que raízes dessa equação são também raízes do polinômio inicial  $Q(s)$ .

Para prosseguir na continuação da tabela, deriva-se em relação a  $s$  a equação auxiliar, ou seja:

$$(m+1)k_1 s^m + (m-1)k_2 s^{m-2} + (m-3)k_3 s^{m-4} + \dots = 0$$

Usam-se, então, os coeficientes do polinômio derivado para substituir os zeros da linha nula. Daí em diante, prossegue-se normalmente a formação dos coeficientes restantes.

**Tabela 8.16**

$s^{m+1}$	$k_1$	$k_2$	$k_3$
$s^m$	$(m+1)k_1$	$(m-1)k_2$	$(m-3)k_3$
$s^{m-1}$	$g_1$	$g_2$	$\dots$

**Exemplo 8.12**

Aplicar o critério de Routh ao polinômio.

$$Q(s) = s^5 + 2s^4 + 6s^3 + 48s^2 + 8s + 160$$

Construindo a tabela de Routh, vemos que a linha correspondente a  $s$  é constituída só de zeros. Dessa forma, caímos no segundo caso especial.

**Tabela 8.17**

$s^5$	1	6	8
$s^4$	2	48	160
$s^3$	-1	-4	
$s^2$	1	4	
$s$	0	0	
$s^0$			

Devemos voltar à linha anterior correspondente a  $s^2$  e formar a equação auxiliar:

$$s^2 + 4 = 0$$

cujas raízes,  $s = \pm j2$ , são também raízes de  $Q(s)$ .

Os coeficientes da derivada ( $d(s^2 + 4)/ds = 2s + 0$ ) são utilizados para recompor a linha nula, podendo-se então prosseguir a formação da tabela (Tabela 8.18):

**Tabela 8.18**

$s^5$	1	6	8
$s^4$	2	48	160
$s^3$	-1	-4	0
$s^2$	1	4	0
$s$	2	0	
$s^0$	4		

Neste caso, as trocas de sinal indicam que além das raízes imaginárias  $\pm j2$ ,  $Q(s)$  possui outras duas raízes no SPD.

Uma observação importante é que, como subproduto do critério de Routh, quando ocorre o segundo caso especial temos a determinação de algumas, no caso, duas raízes da equação  $Q(s) = 0$ . É comum nesses casos que as outras raízes possam ser facilmente determinadas. Neste caso, por exemplo, extraíndo as duas raízes conhecidas do polinômio dado que é de quinto grau, obtemos um polinômio do terceiro grau, cujas raízes podem ser determinadas com maior facilidade.

$$Q_1(s) = \frac{Q(s)}{s^2 + 4} = s^3 + 2s^2 + 2s + 40$$

As raízes de  $Q_1(s)$ , que são também raízes de  $Q(s)$ , são:

$$s_1 = -4 \quad \text{e} \quad s_{2,3} = +1 \pm j3$$

Aí estão as duas raízes ( $1 \pm j3$ ) de  $Q(s)$ , situadas no semiplano direito.

**Exemplo 8.13**

No sistema da Figura 8.4, temos:

$$G(s) = \frac{20s + K}{s^4 + 10s^3 + 12s^2 + Ks + 20}$$

- (a) Determine os valores de  $K$  para os quais  $G(s)$  é estável.
- (b) Idem para  $F(s) = Y(s)/U(s)$ .
- (c) Verifique qual a situação de  $F(s)$  para  $K = 0$ .

Solução:

(a) Em malha aberta, o polinômio característico é:

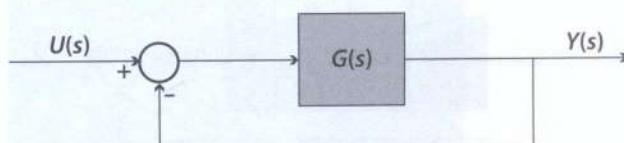
$$Q_a(s) = s^4 + 10s^3 + 12s^2 + Ks + 20$$

**Tabela 8.19**

$s^4$	1	12	20
$s^3$	10	$K$	
$s^2$	120 - $K$	200	
$s$	$X$	0	
$s^0$	200		

Para que haja estabilidade, devemos ter: na linha  $s^2$ ,  $K < 120$ ; na linha seguinte:

$$X = -K^2 + 120K - 2000 > 0$$

**Figura 8.4**

Os valores positivos de  $X$  situam-se entre as raízes  $K_1 = 20$  e  $K_2 = 100$ , do polinômio apresentado, isto é, devemos ter  $20 < K < 100$ . Essa condição satisfaz também a condição anterior,  $K < 120$ .

(b)

$$F(s) = \frac{20s + K}{s^4 + 10s^3 + 12s^2 + (20 + K)s + 20 + K}$$

O polinômio característico de malha fechada é, então:

$$Q(s) = s^4 + 10s^3 + 12s^2 + (20 + K)s + 20 + K$$

**Tabela 8.20**

$s^4$	1	12	20 + $K$
$s^3$	10	20 + $K$	
$s^2$	100 - $K$	200 + 10 $K$	
$s$	$y$		
$s^0$	200 + 10 $K$		

Pela linha  $s^2$ , temos  $K < 100$ ; pela linha seguinte,  $y > 0$ ; e pela última linha,  $K > -20$ .

O cálculo de  $y$  nos dá:

$$y = (100 - K)(20 + K) - 2000 - 100K$$

ou

$$y = -K(K + 20)$$

E, então,  $-20 < K < 0$

Esse é o resultado final, pois satisfaz todas as condições de estabilidade de  $F(s)$  impostas pela tabela de Routh.

(c) Para  $K = 0$ , temos

$$F(s)|_{K=0} = \frac{20s}{s^4 + 10s^3 + 12s^2 + 20s + 20}$$

**Tabela 8.21**

$s^4$	1	12	20
$s^3$	10	20	
$s^2$	100	200	
$s$	0	← Linha toda nula	
$s^0$	?		

A linha  $s$  é toda nula. Temos aí o Caso especial 2. Voltando à linha anterior (linha  $s^2$ ), construímos o polinômio auxiliar

$$100s^2 + 200 = 0 \quad \text{ou} \quad s^2 + 2 = 0$$

cujas raízes são

$$s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$$

O coeficiente que substitui o zero da linha nula é obtido derivando-se o polinômio auxiliar. Nesse caso, o coeficiente é 2.

**Tabela 8.22**

$s^4$	1	12	20
$s^3$	10	20	
$s^2$	100	200	
$s$	2		
$s^0$	200		

Não há troca de sinais na coluna principal; portanto, não há polos do sistema de malha fechada, com  $K = 0$ , no SPD. Mas há dois polos no eixo imaginário nas posições  $\pm j\sqrt{2}$ .

O sistema é instável (ou marginalmente instável).

Os outros dois polos podem ser, neste caso, facilmente determinados:

$$q(s) = \frac{s^4 + 10s^3 + 12s^2 + 20s + 20}{s^2 + 2} = \\ s^2 + 10s + 10$$

As raízes restantes são:

$$s_3 = -1,127 \quad s_4 = -8,873$$

## Considerações finais

Este capítulo foi dedicado ao estudo da estabilidade dos sistemas lineares e invariantes no tempo. Depois de explicar que há várias formas de se definir a estabilidade de um sistema, foi considerada aquela mais conveniente para o presente curso: a denominada estabilidade de entrada e saída limitadas. Partindo dessa definição, a estabilidade de um sistema fica determinada pelo posicionamento dos polos no plano  $s$ : o sistema é estável se e somente se todos os polos estiverem situados no semiplano esquerdo do plano  $s$ . Basta, portanto, resolver a equação característica do

sistema, determinando suas raízes, para saber se o sistema é ou não estável. Para sistemas de ordem elevada, a solução da equação característica em função de um parâmetro, por exemplo, do ganho  $K$  do controlador, é trabalhosa. Por isso, emprega-se um critério mais simples para a detecção de polos de instabilidade, sem a necessidade de se resolver a equação característica: é o denominado critério de Routh, para o qual foram apresentados vários exemplos de aplicação. O capítulo encerrou-se com o estudo dos casos especiais do critério de Routh.

## Problemas propostos

1. Determine, pelo critério de Routh, o número de raízes no SPD dos polinômios abaixo:

$$(a) Q_1 = s^4 + 2s^3 + 8s^2 + 4s + 3$$

$$(b) Q_2 = s^4 + 2s^3 + s^2 + 4s + 2$$

$$(c) Q_3 = s^4 + 20s^3 + 80s^2 + 400s + 500$$

$$(d) Q_4 = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 46s^2 + 89s + 260$$

2. A função de transferência de um sistema é:

$$G(s) = \frac{10(s^3 + 3s^2 + 3s + 1)}{s^5 + 2s^4 + 5s^3 + 9s^2 + 5s + 12}$$

Determine, com auxílio do critério de Routh, quantos polos esse sistema possui no SPD do plano  $s$ . Diga também se o sistema é ou não estável e por quê.

3. No sistema dotado de realimentação unitária da Figura 8.5, temos:

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)(s+4)}$$

Determine os valores de  $K$  que tornam o sistema estável.

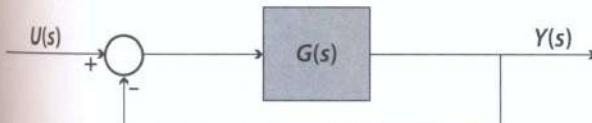


Figura 8.5

4. Verifique, pelo critério de Routh, a estabilidade dos sistemas indicados nas figuras 8.6 e 8.7.

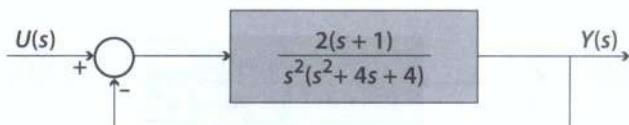


Figura 8.6

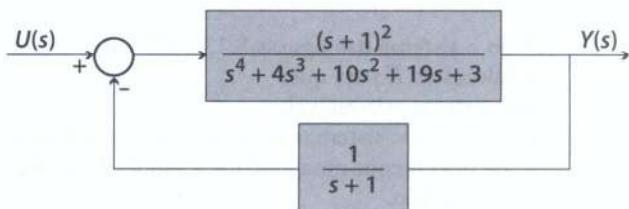


Figura 8.7

5. Para cada um dos sistemas representados pelos diagramas de blocos nas figuras 8.8 e 8.9, determine os valores de  $K$  para os quais há estabilidade.

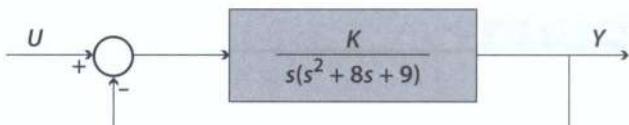


Figura 8.8

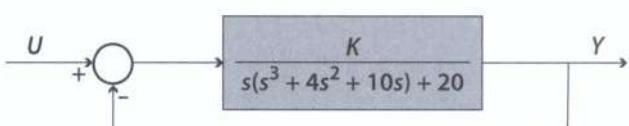


Figura 8.9

6. Determine os valores da  $K$  que tornam estáveis os sistemas indicados nas figuras 8.10 e 8.11.

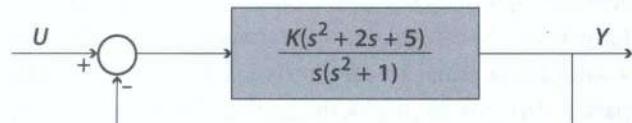


Figura 8.10

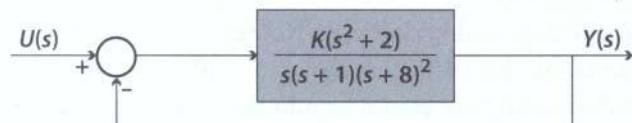


Figura 8.11

7. Determine os valores de  $K$  para os quais o sistema apresentado na Figura 8.12 é estável, tanto em malha aberta como em malha fechada. Determine também todos os polos do sistema de malha fechada para o caso particular em que  $K = 2$ .

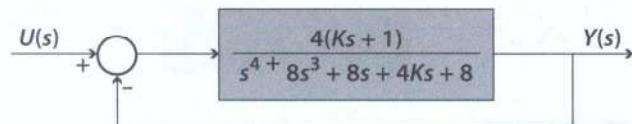
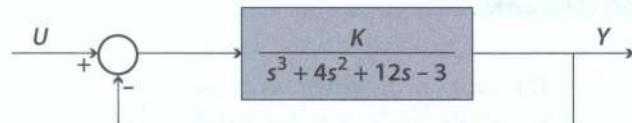


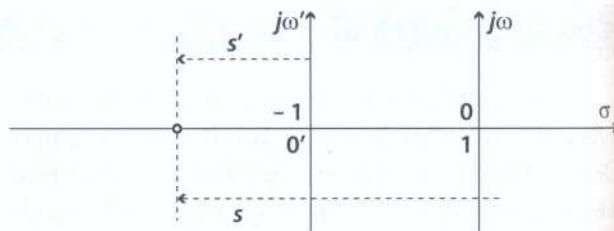
Figura 8.12

8. Dado o sistema das figuras 8.13 e 8.14, determine os valores de  $K$  para que:
- o sistema seja estável;
  - os polos do sistema estejam situados à distância de pelo menos uma unidade à esquerda do eixo imaginário.



$$Q(s) = s^3 + 4s^2 + 12s + K - 3$$

Figura 8.13



$$s = s' - 1$$

$$Q'(s') = s'^3 + s'^2 + 7s' + K - 12$$

Figura 8.14

**Observação:** para resolver o item (b), use a mudança de variável:  $s = s' - 1$  e aplique o critério de Routh no polinômio em  $s'$ . Os valores de  $K$  que fizerem  $s' = 0$ , farão  $s = -1$ .

9. Determine o valor da constante  $a$  do diagrama de blocos da Figura 8.15, de forma que o sistema por ele representado possua todos os polos situados à uma distância de pelo menos uma unidade à esquerda do eixo imaginário.

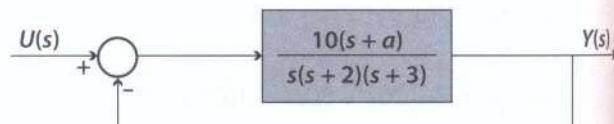


Figura 8.15

10. A função de transferência de um dado sistema é:

$$G(s) = \frac{5s + 3}{s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 8s + 5}$$

- Verifique, com auxílio do critério de Routh, se esse sistema é estável.
  - Verifique se o sistema pode ser estabilizado por meio de uma simples realimentação unitária positiva.
11. Determine, pelo critério de Routh, quantas raízes os polinômios a seguir possuem no SPD.

$$Q_1 = s^4 + 2s^3 + 4s^2 + 3s + 3$$

$$Q_2 = s^5 + 2s^4 + 4s^3 + 8s^2 + 3s + 2$$

12. Determine, pelo critério de Routh, quantas raízes os polinômios a seguir possuem no *SPD* e no eixo imaginário.

$$Q_3 = s^4 + 6s^3 + 6s^2 + 6s + 5$$

13. O polinômio característico de um sistema está indicado a seguir. Sabe-se que esse sistema tem um polo real em -2. Verifique. Com auxílio do critério de Routh, determine os demais polos do sistema.

$$Q_4 = s^5 + 4s^4 + 7s^3 + 8s^2 + 6s + 4$$

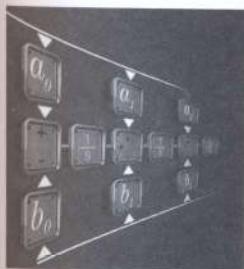
14. O polinômio característico de um sistema está indicado a seguir. Sabe-se que esse sistema tem um polo real em -4. Verifique. Com auxílio do critério de Routh, determine os demais polos do sistema.

$$Q_5 = s^5 + 2s^4 + 6s^3 + 48s^2 + 8s + 160$$

15. Usando o critério de Routh, verifique a presença do segundo caso especial no polinômio indicado abaixo. Escreva o polinômio auxiliar ( $q$ ) relativo a esse caso. Calcule as raízes no eixo imaginário e verifique que existe também um par de raízes no *SPD*.

$$Q_6 = s^6 + 2s^5 + 8s^4 + 12s^3 + 20s^2 + 16s + 16$$

# capítulo 9



## Realimentação

A realimentação nos sistemas de controle tem como finalidade principal permitir a detecção do erro atuante, que é essencial ao processo de controle da variável de saída. Mas a realimentação traz também outras consequências importantes, como alterações nas constantes de ganho e de tempo, no posicionamento dos polos e, consequentemente, nas condições de estabilidade do sistema. Modifica as curvas de resposta em frequência, melhora a sensibilidade e, em geral, atenua eventuais não linearidades, além de outros efeitos.

É interessante notar que enquanto nos sistemas de controle a realimentação é artificialmente introduzida para de alguma forma alterar o funcionamento desses sistemas (tornar o sistema mais estável, por exemplo), ela existe amplamente

na natureza, às vezes de forma insuspeitada, presente em um sem-número de fenômenos e sistemas, responsável pela forma harmônica e eficiente de seu funcionamento. Por exemplo, um simples circuito *RC*-série possui esse tipo natural de realimentação (Capítulo 5, Exemplo 5.1).

Neste capítulo estudaremos particularmente a realimentação própria dos sistemas de controle, bem como suas propriedades e efeitos no desempenho desses sistemas. As análises deste capítulo referem-se à inclusão de uma simples realimentação, cujo amplificador de erro tem ganho constante. Assim, a menos em casos de referência em contrário, é esse o significado do termo 'realimentação' utilizado neste capítulo.

### 9.1 Efeitos da realimentação em sistemas de 1<sup>a</sup> ordem

Para melhor entendermos o significado da presença da realimentação nos sistemas de controle em geral, vamos analisar inicialmente os efeitos que ela causa nos sistemas de 1<sup>a</sup> ordem.

#### ■ 9.1.1 Efeito sobre as constantes de ganho e de tempo

Consideremos um sistema de controle de 1<sup>a</sup> ordem, em malha aberta, como o da Figura 9.1, com  $a > 0$  e  $K > 0$ .

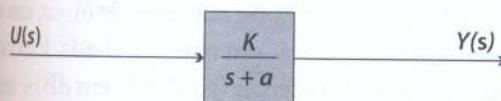


Figura 9.1 Sistema de 1<sup>a</sup> ordem em malha aberta.

A função de transferência desse sistema será:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s+a} = \frac{K_g}{\tau s + 1}$$

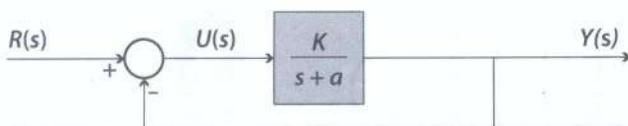
onde  $K \rightarrow$  é a constante de ganho imprópria  
 $a \rightarrow$  é a posição do polo com sinal trocado

$K_g = K/a \rightarrow$  é a constante de ganho de frequência zero

$\tau = 1/a \rightarrow$  é a constante de tempo do sistema

Adicionando-se uma referência e um ramo de realimentação unitária negativa ao sistema anterior, resulta um sistema de malha fechada como indicado na Figura 9.2, onde

$$F(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)}$$



Sistema de 1<sup>a</sup> ordem com realimentação unitária negativa.

Figura 9.2

ou

$$F(s) = \frac{K}{s + a + K} = \frac{K_g}{\tau' s + 1}$$

Sendo  $K_g' = \frac{K}{a + K}$  → a nova constante de ganho e  $\tau' = \frac{1}{a + K}$  → a nova constante de tempo.

Verifica-se, então, que

$$K_g' = \frac{K}{a + K} < K_g \quad \text{e} \quad \tau' = \frac{1}{a + K} < \tau$$

Isto é, a realimentação unitária negativa nos sistemas de 1<sup>a</sup> ordem reduz o ganho e a constante de tempo. Com a diminuição da constante de tempo, o sistema torna-se mais rápido.

### ■ 9.1.2 Efeito quanto à estabilidade do sistema

Em malha aberta, temos o polo de  $G(s)$  na posição  $s = -a$ . Em malha fechada, temos o polo de  $F(s)$  na posição  $-(a + K)$ . Como estamos supondo  $a$  e  $K$  positivos, torna-se evidente que a realimentação negativa desloca o polo do sistema para a esquerda, de uma distância  $K$ , conforme a Figura 9.3. Esse fato mostra que a realimentação unitária negativa aumenta a estabilidade relativa do sistema.

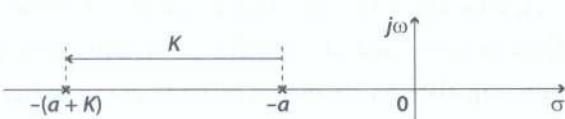


Figura 9.3

Se tivermos  $G(s) = \frac{K}{s - a}$ , (com  $a$  sempre positivo), o sistema é instável em malha aberta com o polo em  $+a$ . Mas o sistema com realimentação

$$F(s) = \frac{K}{s + K - a}$$

pode se tornar estável se  $K > a$ , conforme mostra a Figura 9.4.

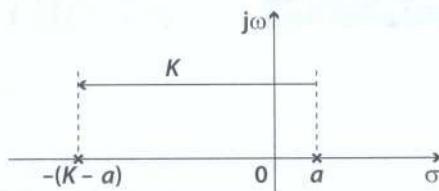


Figura 9.4

### ■ 9.1.3 Efeitos sobre a resposta em frequência

Vamos comparar agora as funções senoidais de transferência do sistema, em malha aberta e em malha fechada:

$$G(j\omega) = \frac{K}{j\omega + a} = \frac{K_g}{\left(1 + \frac{j\omega}{a}\right)} \quad \text{e}$$

$$F(j\omega) = \frac{K}{j\omega + a + K} = \frac{K_g'}{\left(1 + \frac{j\omega}{a + K}\right)}$$

Sendo, então,  $K_g' = \frac{K}{a + K} > K_g = \frac{K}{a}$  como vimos anteriormente.

Os diagramas de Bode correspondentes estão na Figura 9.5. Vê-se claramente que o patamar da banda passante é maior em malha fechada que em malha aberta, ou seja, a frequência de corte aumenta de  $\omega = a$ , em malha aberta, para  $\omega' = a + K$ , em malha fechada. Em compensação, o valor do patamar (ganho  $K_g$  em dB) é maior em malha aberta e menor em malha fechada (ganho  $K_g'$  em dB).

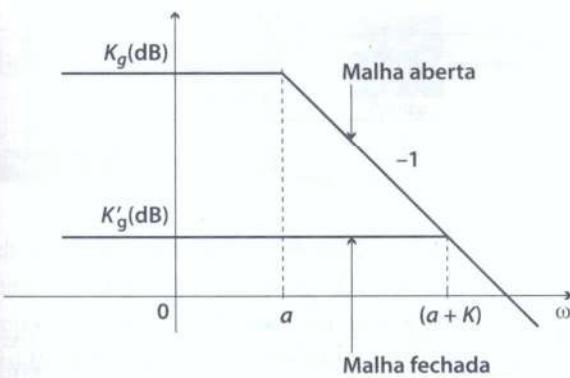


Figura 9.5

Todo sistema de 1<sup>a</sup> ordem, da forma  $G(s) = \frac{K}{s+a}$ , pode ser realizado por meio de um integrador (um sistema com um simples polo na origem) dotado de realimentação, geralmente não unitária.

De fato, de acordo com a Figura 9.6, sendo  $\frac{K}{s}$  um integrador com ganho  $K$ , temos com a realimentação

$$G(s) = \frac{\frac{K}{s}}{1 + H \frac{K}{s}} = \frac{K}{s + HK} = \frac{K}{s + a}$$

Logo,  $a = HK$ , ou seja,  $H = \frac{a}{K}$ .

Nesta introdução sobre os efeitos da realimentação estudamos apenas o caso da realimentação unitária nos sistemas de 1<sup>a</sup> ordem. Se a realimentação não for unitária, os efeitos serão, eventualmente, diferentes. Também nos sistemas de ordem superior à 1<sup>a</sup>, os efeitos considerados, especialmente os que se referem à estabilidade, são diversos. A título de ilustração, apresentamos adiante um exemplo do que ocorre com um sistema de 2<sup>a</sup> ordem. O estudo do caso geral, entretanto, será feito posteriormente, em outro capítulo, com auxílio de um poderoso método gráfico, denominado ‘método do lugar das raízes’.

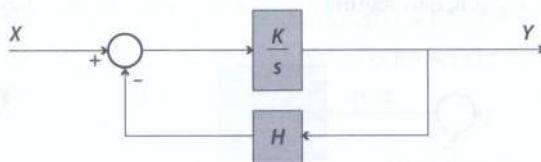


Figura 9.6

## 9.2 Efeitos da realimentação em sistemas de 2<sup>a</sup> ordem

Estudaremos aqui os efeitos da realimentação em um sistema de 2<sup>a</sup> ordem baseando-nos em um simples exemplo.

Consideremos o sistema (Figura 9.7) cuja função de transferência em malha aberta é:

$$G(s) = \frac{K}{(s+2)(s+10)}$$

(com  $K > 0$ ).

Em malha aberta, o sistema é estável, com polos em -2 e -10. A constante de ganho de frequência zero é  $K_g = \frac{K}{20}$ .

Em malha fechada, temos

$$F(s) = \frac{K}{s^2 + 12s + 20 + K}$$

Evidentemente, há uma diminuição do ganho, como nos sistemas de 1<sup>a</sup> ordem, vistos anteriormente

$$K'_g = \frac{K}{K+20} < K_g$$

À medida que  $K$  aumenta (a partir de  $K = 0$ ), os polos de malha fechada, que são raízes do polinômio característico  $Q(s) = s^2 + 12s + 20 + K$ , se aproximam um do outro (Tabela 9.1 e Figura 9.8), até se encontrarem no ponto médio entre eles (-6), quando  $K = 16$ . A partir daí, se  $K$  continuar aumentando, os polos se tornam complexos conjugados e se distanciam entre si, percorrendo, em sentidos opostos, a reta vertical (paralela ao eixo imaginário) que passa por -6.

Tabela 9.1

$K$	0	7	12	15	16	17	20	32
$p_1$	-2	-3	-4	-5	-6	-6+j1	-6+j2	-6+j4
$p_2$	-10	-9	-8	-7	-6	-6+j1	-6-j2	-6-j4

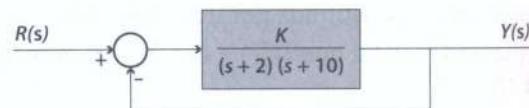


Figura 9.7

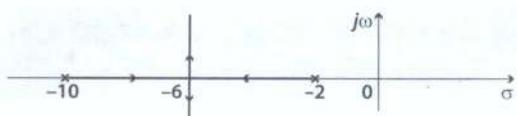


Figura 9.8

Em termos de estabilidade, podemos dizer que a estabilidade relativa melhora com o aumento da constante  $K$  até que se tenha  $K = 16$ . A partir desse valor, o aumento de  $K$  leva os polos complexos a se afastarem do eixo real. O valor de  $\omega_d$  aumenta com  $K$  e o grau de amortecimento ( $\zeta$ ) diminui, fazendo diminuir a estabilidade relativa.

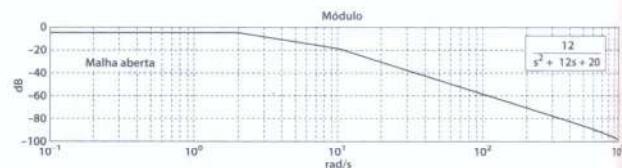
Sabemos também que os sistemas de 2<sup>a</sup> ordem com polos reais têm duas constantes de tempo. No presente caso, para valores de  $K$  entre zero e 16 o sistema de malha aberta tem duas constantes de tempo, que são os inversos dos valores absolutos dos polos. Para valores de  $K > 16$ , os polos passam a ser complexos conjugados e nesse caso só há uma constante de tempo dada pelo inverso do coeficiente de amortecimento  $\alpha$ . No caso,  $\tau = \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{6} = 0,167$  s.

As respostas em frequência de malha aberta e de malha fechada, com  $K = 12$ , estão indicadas nas figuras 9.9a e b. Nesse caso, o sistema é superamortecido, com polos em  $-4$  e  $-6$ . As figuras 9.9b, c e d representam a resposta em frequência do sistema de malha fechada quando  $K = 32$ . Nesse caso, o sistema é subamortecido, com polos  $-6 \pm j4$ .

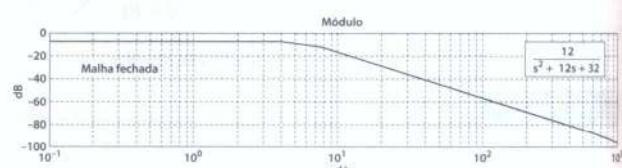
### 9.3 Realimentação em sistemas de controle

Examinaremos inicialmente os sistemas de controle com realimentação unitária. Eles se caracterizam pelo fato de a variável de saída ser comparada continuamente com a referência, que é a própria variável de entrada, a fim de detectar possíveis desvios da resposta do sistema, em relação à referência. Nos sistemas de controle, como já foi visto, a função  $G(s)$  normalmente é constituída por um controlador  $G_c(s)$  e pela planta  $G_p(s)$ , tal que  $G(s) = G_c(s)G_p(s)$ . Ver figuras 9.10 e 9.11.

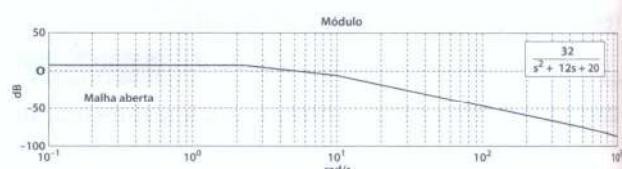
Essencialmente, nesses sistemas, o que se deseja é fazer com que a resposta tenha um comportamento igual ao da variável de entrada, que é por isso denominada



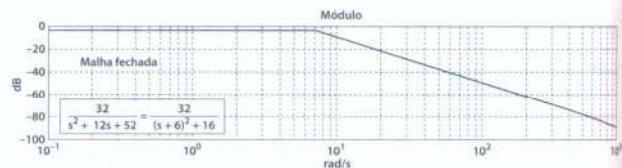
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 9.9

variável de referência. Nessas condições, os desvios detectados em cada instante entre a resposta e a referência são erros que devem ser corrigidos. Nos sistemas de controle, esses erros são utilizados para a correção da saída. Para isso, são amplificados e convenientemente tratados, por meio de um controlador, de forma a atuar no sistema e corrigir os desvios. Daí o nome de erro atuante.

Se a realimentação do sistema não for unitária, a saída, em geral, não seguirá a referência, mas sim uma função

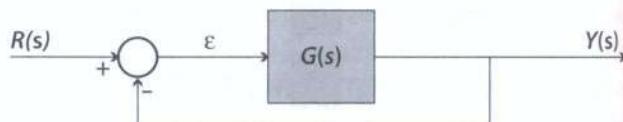


Figura 9.10

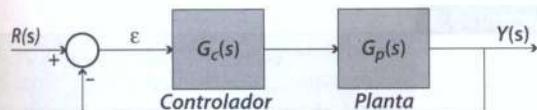


Figura 9.11

dela. Se a realimentação do sistema for uma constante não unitária, a resposta não será igual à referência, mas sim proporcional a ela. Se for uma integral ( $k/s$ ), por exemplo, a saída será proporcional à derivada da referência. E assim por diante (ver Figura 9.12).

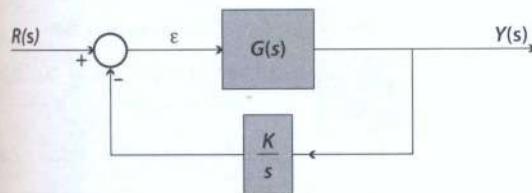


Figura 9.12

## 9.4 Tipos de sistemas

Os critérios de qualidade a que deve satisfazer um sistema de controle são habitualmente traduzidos em especificações que norteiam os projetos desses sistemas.

Alguns desses critérios de qualidade se referem ao componente transitório das respostas do sistema, e outros se referem ao comportamento da resposta forçada. As primeiras incluem, entre outras, as características de resposta ao degrau, já estudadas (tempo de subida, sobressinal, tempo de acomodação etc.), bem como estabilidade absoluta e relativa e sensibilidade à alteração de parâmetros. As segundas referem-se essencialmente aos erros estacionários a ao comportamento da resposta em frequência de malha aberta e de malha fechada.

Os erros estacionários, ou erros estáticos, serão estudados a seguir. Eles medem a precisão da resposta do sistema em regime estacionário. Mas antes de nos ocuparmos diretamente com os erros estacionários, é necessário tratarmos de uma classificação importante para o estudo dos sistemas dotados de realimentação.

Um sistema como o da Figura 9.13, cuja função de transferência de malha aberta  $A(s) = G(s)H(s)$  possui  $N$  polos na origem, é definido como sendo do tipo  $N$ . Por exemplo, um sistema em que:

$$G(s) = \frac{K}{s^N(s+2)(s+10)} \quad \text{e} \quad H(s) = s+5$$

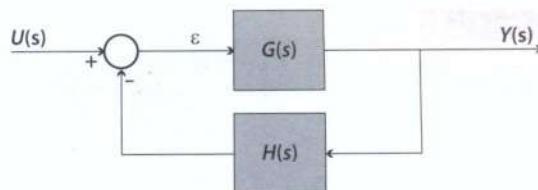


Figura 9.13

tem como função de transferência de malha aberta

$$A(s) = G(s)H(s) = \frac{K(s+5)}{s^N(s+2)(s+10)}$$

ou, na 2ª forma normal

$$A(s) = \frac{K_g(0,2s+1)}{s^N(0,1s+1)(0,5s+1)}$$

sendo a constante de ganho  $K_g = 0,25K$  e os coeficientes de  $s$  no denominador fatorado, as constantes de tempo do sistema.

No caso geral, para um sistema tipo  $N$  e de ordem qualquer ( $\geq N$ ), podemos escrever:

$$A(s) = \frac{K_g(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)\dots}{s^N(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)\dots}$$

em que  $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \dots$  são as constantes de tempo,  $\tau_a, \tau_b, \dots$  são apenas os coeficientes de  $s$  nos fatores do numerador e  $K_g$  é a constante de ganho de frequência zero do sistema.

Os casos mais comumente encontrados na prática são os seguintes: tipo zero, quando não possuem nenhum polo de malha aberta na origem; tipo 1, quando possuem um polo de malha aberta na origem; e tipo 2, com dois polos de malha aberta na origem. Vejamos alguns exemplos.

### 9.4.1 Sistemas do tipo zero

Sistemas do tipo zero: em malha aberta, não possuem polos na origem. Neste caso,  $N = 0$ , e temos no caso geral

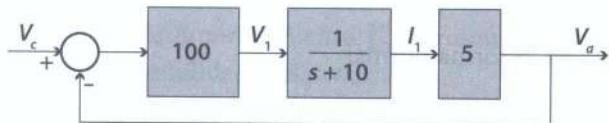
$$A(s) = \frac{K_g(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1)\dots}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1)\dots}$$

**Exemplo 9.1**

Um sistema regulador (Figura 9.14), como o visto anteriormente – sistema regulador de tensão, sendo:

$$A(s) = \frac{500}{s+10} \quad \text{ou} \quad A(s) = \frac{50}{0,1s+1}$$

é um sistema tipo zero, pois, em malha aberta, não possui nenhum polo na origem.

**Figura 9.14****■ 9.4.2 Sistemas do tipo 1**

Possuem um polo na origem, em malha aberta. Neste caso,  $N = 1$ . Fórmula geral:

$$A(s) = \frac{K_g (\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots}$$

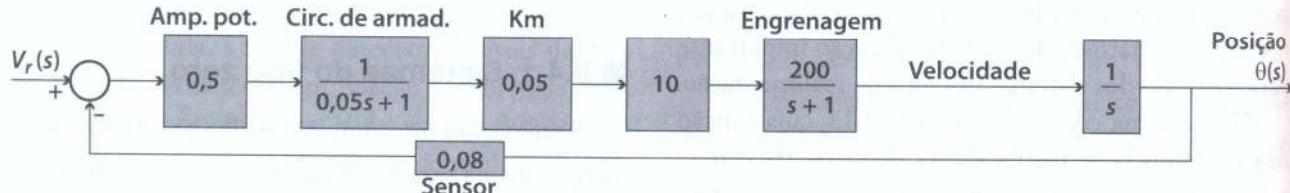
**Exemplo 9.2**

O sistema posicionador é indicado pelo diagrama de blocos da Figura 9.15.

O sistema é tipo 1, pois tem um polo na origem em malha aberta:

$$A(s) = G(s) H(s) = \frac{80}{s(s+1)(s+20)}$$

$N = 1$  (tipo 1) e  $K_g = 4$

**Figura 9.15****Exemplo 9.3**

Determine qual o tipo do modelo de um termômetro comum de mercúrio em vidro, considerando como entrada a temperatura ambiente e como saída a temperatura do termômetro.

Solução:

$\theta = \theta(t)$ : temperatura do termômetro

$\theta_a = \theta_a(t)$ : temperatura de referência (no caso, temperatura ambiente – ver Figura 9.16)

$m$ : massa do termômetro

$c$ : calor específico do termômetro

$Q = Q(t)$ : quantidade de calor recebida pelo termômetro

$K$ : coeficiente de transmissão do calor

Equação calorimétrica  $dQ = mcd\theta$  ou  $\dot{Q}(t) = mc\dot{\theta}(t)$

Equação de transmissão do calor  $\dot{Q}(t) = K(\theta_a - \theta)$

Dessas duas últimas equações, resulta

$$\dot{\theta}(t) = \frac{K}{mc}(\theta_a(t) - \theta(t))$$

ou, no domínio da frequência

$$\theta(s) = \frac{K}{mcs}(\theta_a(s) - \theta(s))$$

cujo diagrama de blocos é o da Figura 9.17,

sendo  $K_g = \frac{K}{mc}$ .

Logo, em malha aberta, temos

$$G(s) = \frac{K}{mcs} = \frac{K_g}{s}$$



Figura 9.16

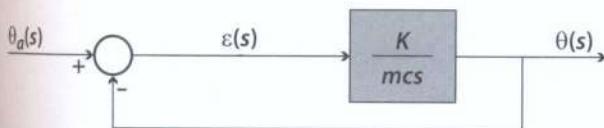


Figura 9.17

e, em malha fechada,

$$F(s) = \frac{1}{\frac{mc}{K}s + 1}$$

Trata-se de um sistema de 1<sup>a</sup> ordem, de ganho unitário e constante de tempo  $\tau = \frac{mc}{K}$ . Em malha aberta, possui um polo na origem e, portanto, é sistema do tipo 1.

### ■ 9.4.3 Sistemas do tipo 2

Possuem dois polos na origem em malha aberta. Neste caso,  $N = 2$ .

$$A(s) = \frac{K_g (\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s^2 (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1) \dots}$$

#### Exemplo 9.4

Determine o tipo de um sistema posicionador típico estabilizado por meio de um integrador que em malha aberta é descrito por

$$A(s) = \frac{K(s+1)}{s^2(s+10)}$$

#### Solução

Sistema com dois polos de malha aberta na origem, tipo 2.

$$N=2, K_g = \frac{K}{10}$$

## 9.5 Erro estacionário e erro atuante

Denomina-se ‘erro do sistema’  $\tilde{\epsilon}(t)$ , a diferença em cada instante entre o sinal de saída ideal (desejado)  $y_d(t)$  e o sinal de saída real  $y(t)$ , ou seja,  $\tilde{\epsilon}(t) = y_d(t) - y(t)$  e  $\tilde{\epsilon}(s) = Y_d(s) - Y(s)$ .

Por outro lado, como se vê na Figura 9.18, denomina-se ‘erro atuante’  $\epsilon(t)$  em cada instante, a diferença entre o sinal de referência  $u(t)$  e o sinal de realimentação  $m(t)$ , ou seja,  $\epsilon(t) = u(t) - m(t)$  e  $\epsilon(s) = U(s) - M(s)$ .

Há vários casos importantes em que, decorrida a fase transitória da resposta, o erro atuante se estabiliza e tende para um valor bem definido, à medida que o tempo tende a infinito. São os denominados erros estacionários. Os casos clássicos são aqueles em que o sinal de entrada é um degrau, uma rampa ou uma parábola. São os casos que estudaremos nos próximos parágrafos.

Nos sistemas com *realimentação unitária*, o que se deseja é que a saída do sistema seja igual à entrada que lhe serve de referência, ou seja, o erro atuante coincide com o erro do sistema. Nesses casos, ambos os sinais (o de entrada e o de saída) são, em geral, de mesma natureza física. Note que na maioria dos casos práticos de interesse, a função de realimentação  $H(s)$  se reduz a uma constante, fazendo com que o erro atuante e o erro do sistema tenham o mesmo comportamento, com uma simples diferença de escala.

Nos sistemas estáveis, o erro atuante pode ser grande inicialmente, durante a fase transitória, mas depois tende a valores limitados e pode mesmo se tornar nulo com o decorrer do tempo (ver Figura 9.19).

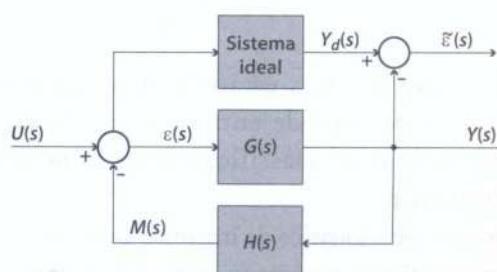


Figura 9.18

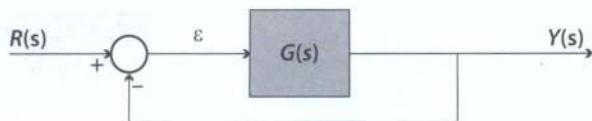


Figura 9.19

Se o sistema for instável, o erro tende a crescer indefinidamente (enquanto o sistema permanecer linear).

Define-se, ainda, o erro estacionário ou erro estático ( $\varepsilon_{st}$ ) como sendo o limite do erro atuante ( $\varepsilon(t)$ ), quando  $t \rightarrow \infty$ :

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t)$$

Essa definição só tem sentido se o sistema for estável e se o limite existir.

A determinação desse limite pode ser feita pelo teorema do valor final.

Assim, no caso geral, temos como definição de erro estático

$$\varepsilon_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} (\varepsilon(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s\varepsilon(s)) \quad \text{onde } \varepsilon(s) = \mathcal{L}\{\varepsilon(t)\}$$

e, de acordo com o diagrama de blocos anteriormente apresentado, ele pode ser facilmente calculado:

$$\begin{aligned} \varepsilon(s) &= U(s) - H(s)Y(s) = \left[ 1 - \frac{H(s)G(s)}{1 + G(s)H(s)} \right] U(s) \\ \varepsilon(s) &= \frac{U(s)}{1 + G(s)H(s)} \end{aligned}$$

Então, pelo teorema do valor final

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{sU(s)}{1 + A(s)H(s)} \right)$$

ou, com  $A(s) = H(s)G(s)$

$$\varepsilon_{st} = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{sU(s)}{1 + A(s)} \right)$$

Note que os erros estáticos dependem tanto da natureza do sinal de entrada como do *tipo* do sistema, conforme classificação em tipos, vista anteriormente.

Os erros estacionários de interesse são os seguintes:

Erro estático de posição ( $\varepsilon_{stp}$ ): quando o sinal de entrada é um degrau  $u(t) = x_0 h(t)$  e, portanto,  $U(s) = x_0/s$ .

Erro estático de velocidade ( $\varepsilon_{stv}$ ): quando o sinal de entrada é uma rampa  $u(t) = v_0 t h(t)$  e  $U(s) = v_0/s^2$ .

Erro estático de aceleração ( $\varepsilon_{sta}$ ): quando o sinal de entrada é uma parábola  $u(t) = a_0(t^2/2)h(t)$  e  $U(s) = a_0/s^3$ .

A seguir estudaremos detalhadamente cada um desses erros.

### ■ 9.5.1 Erro estático de posição ( $\varepsilon_{stp}$ )

Neste caso:  $U(s) = \frac{x_0}{s}$ . Logo, resulta

$$\varepsilon(s) = \frac{U(s)}{1 + A(s)} = \frac{x_0}{s(1 + A(s))}$$

e

$$\varepsilon_{stp} = \lim_{s \rightarrow 0} (s\varepsilon(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{1}{1 + A(s)} \frac{x_0}{s} \right) = \frac{x_0}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} A(s)}$$

Definição. Constante de erro estático de posição:

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} A(s).$$

Então, para os vários tipos de sistemas, temos:

$$\varepsilon_{stp} = \frac{x_0}{1 + K_p}$$

Conforme Figura 9.20,

$$A(s) = G(s) = \frac{K_g (\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s^N (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots}$$

Consideremos o erro estático de posição para os vários tipos de sistemas.

Tipo 0 ( $N = 0$ ):

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} A(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{K_g (\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots} \right\} = K_g$$

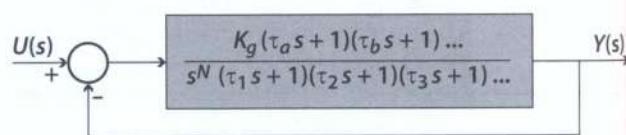


Figura 9.20

$$\text{Resulta } \varepsilon_{stp} = \frac{x_0}{1 + K_g}$$

Tipo 1 ( $N = 1$ )

$$K_p = \lim_{s \rightarrow 0} A(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left\{ \frac{K_g(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots} \right\} = \infty$$

$$\text{Resulta } \varepsilon_{stp} = 0$$

Analogamente, nos sistemas do tipo 2 ou superiores a 2, tem-se também  $\varepsilon_{stp} = 0$ .

### Exemplo 9.5

No estabilizador de tensão indicado na Figura 9.21, deseja-se que o erro estático seja de 1 V para um degrau de tensão de 100 V na entrada. Determine o valor do ganho  $K_a$  do amplificador.

Dados numéricos:

$$R_1 = 10 \Omega \quad L_1 = 5 \text{ H} \quad K_e = 50 \text{ V/A} \quad V_c = 100 \text{ V}, \text{ para } t \geq 0$$

#### Observação

Desconsidere a perturbação de carga, ( $i_a = 0$ ).

Solução:

Modelo matemático (no domínio da frequência):

$$V_e = V_c - V_a \quad V_i = K_a V_e$$

$$V_i = (L_1 s + R_1) I_1 \quad E = K_e I_1$$

$$V_a = E - R_a I_a = E - 0$$

Diagrama de blocos: ver Figura 9.22.

Função de transferência:

$$G(s) = \frac{K_a K_e}{L_1 s + R_1} = \frac{K_a K_e / R_1}{(L_1 / R_1) s + 1}$$

(sistema tipo 0)

$$\text{ou, numericamente } G(s) = \frac{5K_a}{0.5s + 1} \text{ e } K_a = 5K_g$$

No caso, deseja-se

$$\varepsilon_{stp} = \frac{x_0}{1 + K_g} = \frac{100}{1 + 5K_g} = 1 \text{ volt}$$

$$\text{Resulta } K_a = \frac{99}{5} \approx 20$$

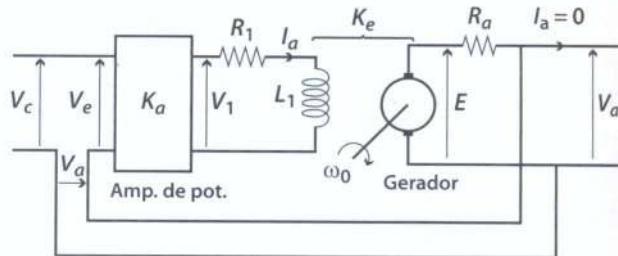


Figura 9.21

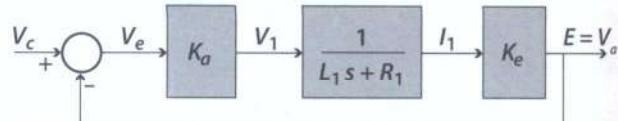


Figura 9.22 Diagrama de blocos.

### ■ 9.5.2 Erro estático de velocidade ( $\varepsilon_{stv}$ )

Neste caso, a entrada é uma rampa:  $U(s) = \frac{v_0}{s^2}$   
Resulta

$$\varepsilon(s) = \frac{U(s)}{1 + A(s)} = \frac{v_0}{s^2(1 + A(s))} \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_{stv} = \lim_{s \rightarrow 0} (s \varepsilon(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{v_0}{(s^2(1 + A(s)))} \right) = \frac{v_0}{\lim_{s \rightarrow 0} (s A(s))}$$

Definição: Constante de erro estático de velocidade  $K_v = \lim_{s \rightarrow 0} (s A(s))$  e  $\varepsilon_{stv} = \frac{v_0}{K_v}$ , para qualquer tipo de sistema.

Tipo 0

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} (s A(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \left\{ \frac{K_g(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots} \right\} \right) = 0$$

Resulta

$$\varepsilon_{stv} = \frac{v_0}{K_v} = \infty$$

**Tipo 1**

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} (sA(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \left\{ \frac{K_g(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots} \right\} \right) = K_g$$

$$\varepsilon_{stv} = \frac{v_0}{K_v} = \frac{v_0}{K_g}$$

**Tipo 2 (e superior a 2)**

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} (sA(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s \left\{ \frac{K_g(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{s^2(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots} \right\} \right) = \infty$$

$$\varepsilon_{stv} = \frac{v_0}{K_v} = 0$$

**Exemplo 9.6**

Um termômetro, quando mergulhado em um líquido mantido à temperatura constante de 100 °C, indica 95 °C depois de 1 minuto. Determine o erro estático da resposta desse termômetro no caso de ser utilizado para medir uma temperatura que se eleva à razão de 8 °C/minuto.

Solução:

Seja o sistema de 1<sup>a</sup> ordem do tipo 1 (ver diagrama de blocos do termômetro na Figura 9.23).

$$G(s) = \frac{K_g}{s} \quad \text{e}$$

$$\theta(s) = \frac{K_g}{s + K_g} \theta_o(s) = \frac{1}{\tau s + 1} \theta_o(s)$$

Sendo  $\tau$  a constante de tempo do termômetro e  $\theta_o$  a temperatura do meio ambiente (o líquido) onde está inserido o termômetro.

Para  $\theta_o(t) = \theta_o = \text{constante}$ ,

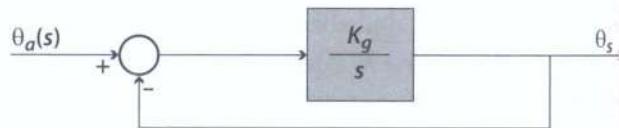
$$\theta_o(s) = \frac{\theta_o}{s} \quad \text{e} \quad \theta(s) = \frac{\theta_o}{s(\tau s + 1)}$$

Resposta a um degrau de temperatura de amplitude  $\theta_o$ :

$$\theta(t) = \theta_o(1 - e^{-t/\tau})$$

Para  $t = 1$  minuto, vem  $100(1 - e^{-1/\tau}) = 95$  ou  $e^{-1/\tau} = 0,05$

Resulta, então,  $\tau = 0,334$  minuto e

**Figura 9.23**

$$K_g = \frac{1}{0,334} = 2,996 = 3,0$$

Erro estático de velocidade: a temperatura do líquido sobe com uma taxa de variação constante:  $\theta_r = v_0 t$  para  $t > 0$ .

Neste caso,  $\varepsilon_{sv} = \frac{v_0}{K_g}$  sendo  $v_0 = 8^\circ\text{C}/\text{minuto}$  e  $K_g = 2,996 \text{ min}^{-1}$  e  $\varepsilon_{sv} = \frac{8}{2,996} = 2,667^\circ\text{C}$

**■ 9.5.3 Erro estático de aceleração ( $\varepsilon_{sta}$ )**

Neste caso, temos:  $U(s) = \frac{a_0}{s^3}$

A entrada é uma parábola unitária:  $U(s) = \frac{a_0}{s^3}$ .

Resulta

$$\varepsilon(s) = \frac{U(s)}{1 + A(s)} = \frac{a_0}{s^3(1 + A(s))} \quad \text{e}$$

$$\varepsilon_{sta} = \lim_{s \rightarrow 0} (s \varepsilon(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( \frac{a_0}{s^2(1 + A(s))} \right) = \frac{a_0}{\lim_{s \rightarrow 0} (s^2 A(s))}$$

Definição: Coeficiente de erro estático de aceleração  $K_a = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 A(s))$  e, portanto,

$$\varepsilon_{sta} = \frac{a_0}{K_a}$$

Para qualquer tipo de sistema.

**Tipo 0**

$$K_a = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 A(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s^2 \left\{ \frac{K_g(\tau_a s + 1)(\tau_b s + 1) \dots}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)(\tau_3 s + 1) \dots} \right\} \right) = 0$$

$$\varepsilon_{sta} = \frac{a_0}{K_a} = \infty$$

## Tipo 1

$$K_g = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 A(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s^2 \left\{ \frac{K_g (\tau_a s + 1) (\tau_b s + 1) \dots}{s (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1) (\tau_3 s + 1) \dots} \right\} \right) = 0$$

$$\epsilon_{sta} = \frac{a_0}{K_g} = \infty$$

## Tipo 2

$$K_g = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 A(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s^2 \left\{ \frac{K_g (\tau_a s + 1) (\tau_b s + 1) \dots}{s^2 (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1) (\tau_3 s + 1) \dots} \right\} \right) = K_g$$

$$\epsilon_{sta} = \frac{a_0}{K_g}$$

## Tipo 3 (e superior a 3)

$$K_g = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 A(s)) = \lim_{s \rightarrow 0} \left( s^2 \left\{ \frac{K_g (\tau_a s + 1) (\tau_b s + 1) \dots}{s^3 (\tau_1 s + 1) (\tau_2 s + 1) (\tau_3 s + 1) \dots} \right\} \right) = \infty$$

$$\epsilon_{sta} = \frac{a_0}{K_g} = 0$$

Para sistemas de tipos superiores a 2, tem-se sempre  $\epsilon_{sta} = 0$ .

## Exemplo 9.7

Determine os erros estáticos de velocidade e aceleração do sistema dotado de realimentação negativa unitária, cuja função de transferência de malha fechada é

$$F(s) = \frac{15(s+2)}{s^4 + 8s^3 + 16s^2 + 15s + 30}$$

Solução:

$$F(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)} \quad \therefore$$

$G(s) = \frac{F(s)}{1-F(s)}$

Resulta

$$G(s) = \frac{15(s+2)}{s^2(s^2+8s+16)}$$

O sistema é tipo 2, com  $K_g = \frac{30}{16} = 1,875$ . Então, o erro estático de velocidade é zero ( $\epsilon_{sta} = 0$ ) e o erro estático de aceleração para um sinal de aceleração de valor unitário ( $a_0 = 1$ ) é

$$\epsilon_{ita} = \frac{a_0}{K_g} = \frac{1}{1,875} = 0,533$$

Tabela 9.2 Erros estacionários

Sistema Tipo	Posição $x_0$	Velocidade $v_0$	Aceleração $a_0$
0	$\frac{x_0}{1+K_g}$	$\infty$	$\infty$
1	0	$\frac{v_0}{K_g}$	$\infty$
2	0	0	$\frac{a_0}{K_g}$
3	0	0	0

## Considerações finais

Uma primeira ideia sobre realimentação foi apresentada logo no Capítulo 1 – Sistemas de controle. Já o presente capítulo retoma a ideia para uma análise mais detalhada e examina algumas aplicações e con-

sequências. Examina, em particular, seus efeitos nos sistemas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens. Discute também alguns problemas que relacionam realimentação e estabilidade nos sistemas de controle. Tais são, por exemplo,

a classificação dos sistemas em tipos (tipo 0, tipo 1, tipo 2), conforme o número de polos de malha aberta na origem. Essa classificação nos permite fazer um estudo dos denominados erros estacionários dos sis-

temas dotados de realimentação: erro estacionário de posição, de velocidade e de aceleração. Esse estudo tem a ver com a precisão dos sistemas de controle em regime estacionário.

## Problemas propostos

1. Determine os efeitos da realimentação quanto ao ganho, à constante de tempo e à estabilidade nos dois sistemas de 1<sup>a</sup> ordem na Figura 9.24

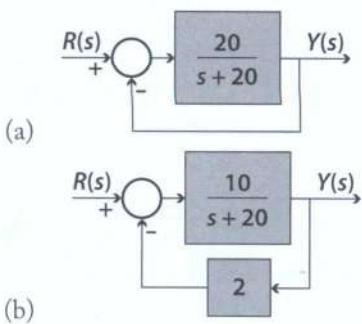


Figura 9.24

### Observação:

Quando a realimentação não é unitária, o que se considera como função de transferência de malha aberta é o produto  $G(s)H(s)$ .

2. Compare as respostas em frequência de um integrador  $G(s) = 10/s$  em malha aberta, com a resposta desse sistema em malha fechada com realimentação unitária.
3. Dado o sistema de 2<sup>a</sup> ordem em malha aberta  $G(s) = 25/((s-1)(s+5))$ , verifique as alterações que ocorrem quando em malha fechada com realimentação unitária, com relação à estabilidade, ao ganho e à posição e natureza dos polos.
4. Estude o efeito da realimentação (negativa unitária), no sistema de 2<sup>a</sup> ordem, abaixo indicado.

$$G(s) = \frac{K}{s^2 + 10s + 21}$$

Considere os efeitos quanto ao ganho ( $K_g$ ), ao posicionamento dos polos (estabilidade) e às constantes de tempo. Faça  $K = 3, 4, 29$  e  $68$ .

5. Estude o efeito da realimentação (negativa unitária), no sistema de 2<sup>a</sup> ordem, indicado a seguir.

$$G(s) = \frac{K(s+4)}{(s+6)(s-4)}$$

Considere os efeitos quanto ao ganho ( $K_g$ ), ao posicionamento dos polos (estabilidade) e às constantes de tempo. Faça  $K = 4, 6, 10$  e  $15$ .

6. Um sistema com realimentação unitária (negativa) tem como função de transferência no ramo direto

$$G(s) = \frac{12}{s^2(s^2 + 7s + 6)}$$

Determine o erro estacionário desse sistema para:  
(a)  $U(s) = 1/s^2$  (rampa unitária);  
(b)  $U(s) = 1/s^3$  (parábola unitária).

7. No sistema da Figura 9.25,

$$G(s) = 10/(s^2 + 7s + 10).$$

Verifique se o sistema é estável e, em caso afirmativo, determine o erro estacionário da resposta a um degrau unitário. Qual o tipo do sistema?

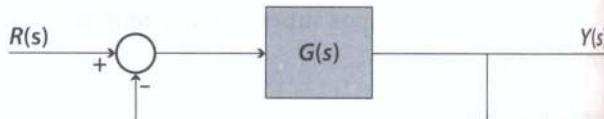


Figura 9.25

8. No sistema da Figura 9.26,

$$G_2(s) = \frac{20(s+0,5)}{s^2(s^2 + 7s + 12)}$$

Determine o tipo do sistema, verifique se o sistema é estável e, em caso afirmativo, determine o erro estacionário da resposta  
(a) a uma rampa unitária;  
(b) a uma parábola unitária.

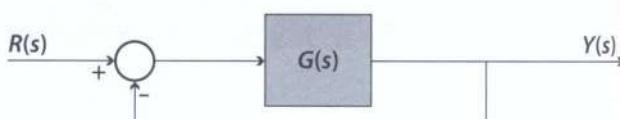


Figura 9.26

9. Considere o sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 9.27. A função de transferência de malha fechada é

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{7(s+2)}{s^3 + 3s^2 + 7s + 14}$$

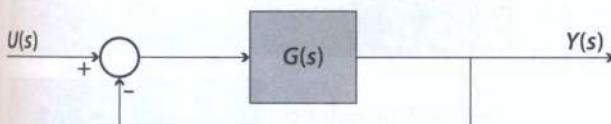


Figura 9.27

Determine o tipo desse sistema bem como o erro estacionário quando

- (a)  $u(t)$  for uma rampa unitária;
- (b)  $u(t)$  for uma parábola unitária.

10. A função de transferência de malha fechada de um sistema com realimentação unitária negativa é:

$$F(s) = \frac{K(s+2)}{s^3 + 8s^2 + (100+K)s + 2K}$$

Qual o tipo de sistema? Qual o coeficiente de erro de velocidade  $K_v$ , em função de  $K$ ? Qual o valor de  $K$  para que o erro estático ao sinal de entrada  $u(t) = 0,5t$  (para  $t \geq 0$ ), seja  $\epsilon_{st} \leq 0,25$ ?

11. A Figura 9.28 representa um sistema de medida de temperatura de um forno por um processo telemétrico, sendo

$$G(s) = \frac{K}{s(s+0,8)(s+10)}$$

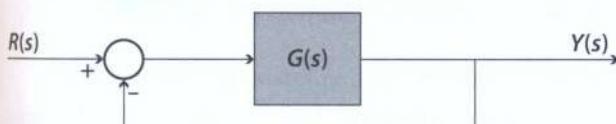


Figura 9.28

- (a) De que tipo é o sistema?
- (b) Para  $K = 50$ , qual o valor da constante de erro de velocidade  $K_v$ ?
- (c) Se a temperatura do forno permanecer constante, qual o erro estático de posição do sistema?
- (d) Para  $K = 50$ , qual o erro estacionário de velocidade no caso em que a temperatura do forno sobe à razão de  $0,2^\circ\text{C}/\text{minuto}$ ?
- (e) Qual o menor erro estático  $\epsilon_{st}$  que pode ser obtido, teoricamente, para a temperatura variando como no caso anterior?

12. Qual o valor final da resposta ao sinal indicado na Figura 9.29, do sistema de realimentação unitária em que o ganho de malha aberta é

$$G(s) = \frac{300}{(s+2)(s+4)(s+6)}$$

Faça o cálculo com auxílio do teorema do valor final. Calcule também o erro estático de posição e verifique se os resultados obtidos são coerentes.

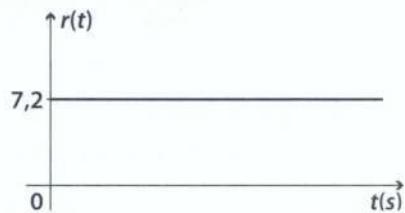
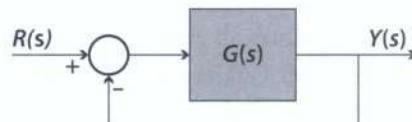


Figura 9.29

13. No sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 9.30, tem-se

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)(s+7)}$$

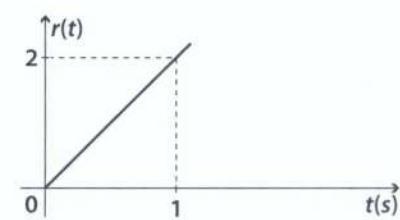
- (a) Determine os valores de  $K$  compatíveis com a estabilidade do sistema.
- (b) Qual o tipo do sistema quanto ao número de polos de malha aberta na origem?
- (c) Determine para esse sistema os erros estacionários para o sinal de entrada da Figura 9.30b, considerando dois casos:  $K = 420$  e  $K = 520$ .
- (d) Determine o mesmo para o caso em que o sinal de entrada é o representado na Figura 9.30c, também para  $K = 420$  e  $K = 520$ .



(a)



(b)



(c)

Figura 9.30

14. Um radar rastreador deve monitorar o tráfego aéreo de um aeroporto. Em um determinado instante, o raio vetor que localiza um avião tem velocidade angular de  $\Omega_o = 0,09 \text{ rad/s}$ , que se mantém constante durante algum tempo. A função de transferência de

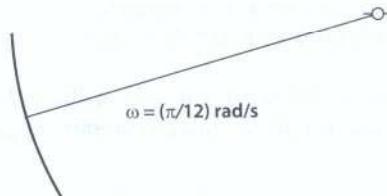
malha aberta do sistema rastreador é o indicado a seguir e o sistema tem realimentação unitária negativa.

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+9)}$$

- (a) De que tipo é o sistema (no que se refere à classificação quanto ao número de polos de malha aberta, na origem).  
 (b) Determine, pelo critério de Routh, o máximo valor de  $K$  compatível com a estabilidade do sistema. Para as demais questões, use  $K$  com a metade desse valor máximo.  
 (c) Calcule o erro estático de velocidade do sistema para um sinal  $\omega(t) = \Omega_o t$  (para  $\Omega_o$  dado anteriormente).
15. Um sistema seguidor de posição deve rastrear um objeto voador que se desloca perto do horizonte de tal forma que o raio vetor que o localiza tem uma velocidade angular  $\omega = (\pi/12)$  rad/s (ver Figura 9.31). A função de transferência de malha aberta do sistema é:

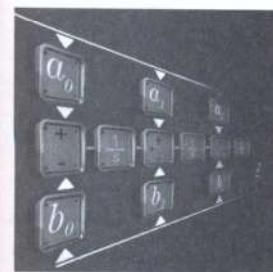
$$A(s) = \frac{K}{s(s+3)(s+5)}$$

O sistema tem realimentação unitária negativa. Pergunta-se qual o menor erro estático de velocidade (erro de pontaria!) compatível com a estabilidade do sistema com margem de segurança de 1 para 2, ou seja, de 100%?



**Figura 9.31**

# capítulo 10



## Perturbação e sensibilidade

No capítulo anterior foram analisados vários efeitos da realimentação causados pela consequente alteração na dinâmica do sistema. Dois desses efeitos, a rejeição de perturbações e a alteração na sensibilidade do sistema, são discutidos mais detalhadamente neste capítulo. Do ponto de vista dos sinais externos, os objetivos de um sistema de controle são acompanhar o sinal de referência e rejeitar perturbações com precisões estabelecidas. O capítulo caracteriza as perturbações típicas de um sistema de controle, mostra como fazer sua representação no diagrama de blocos de malha fechada e ilustra como calcular os efeitos das perturbações na resposta do sistema. Na se-

quência, mostram-se as condições de projeto sobre a resposta em frequência que permitem atingir tanto rejeição de perturbações como o acompanhamento do sinal de referência.

Do ponto de vista interno ao sistema, um dos objetivos da realimentação é tolerar que se alterem parâmetros da sua função de transferência. Ou seja, é interessante que a sensibilidade da resposta do sistema seja pequena em face de uma alteração de um parâmetro. Este capítulo apresenta e define matematicamente a sensibilidade do sistema em relação a um parâmetro e, na sequência, apresenta vários problemas ilustrativos.

### 10.1 Perturbação em sistemas de controle

Tipicamente, um sistema de controle contém, no ramo direto, a planta (também denominada processo), precedido de um controlador, ou compensador, que, como sabemos, é um subsistema cuja função é processar o erro atuante a fim de conseguir a precisão desejada do desempenho do sistema. A realimentação é geralmente feita por meio de um sensor ou transdutor que opera sobre o sinal de saída e o leva ao comparador para obtenção do erro atuante. O diagrama de blocos de tal sistema já nos é familiar e está indicado na Figura 10.1.

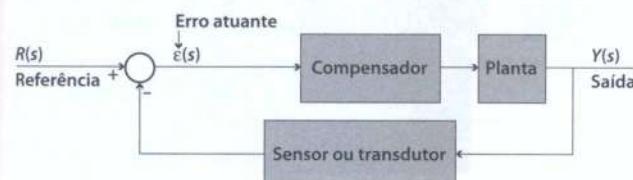


Figura 10.1

A finalidade do sistema de controle, como já sabemos, é tentar impor à variável de saída um comportamento próximo ao da referência por meio da variável de entrada denominada variável de controle. Entretanto, na prática, ocorrem sinais externos, não desejados, que entram no sistema e tendem a alterar o comportamento da variável controlada (variável de saída). Esses sinais, que tendem a alterar a dinâmica do sistema, são denominados perturbações ou distúrbios. O ponto de entrada de um sinal de perturbação depende da natureza física do sinal, de sua fonte e de outras circunstâncias. Podem ocorrer, simultaneamente, um ou mais sinais de perturbação. São exemplos de perturbação: um ruído da rede elétrica induzido em elementos do controlador; a ação da própria carga no eixo de um motor de velocidade controlada; a corrente de carga fornecida por um sistema de controle de tensão; a ação do vento sobre uma antena parabólica de posicionamento automático etc. A presença de certas não linearidades, como tensões de contato, certos casos de atrito etc., embora não sejam entradas exógenas, por vezes são tam-

bém tratadas como perturbações, para simplificar a análise. Seguindo o mesmo raciocínio, nos modelos baseados na função de transferência, eventuais condições iniciais não nulas também podem ser interpretadas como perturbações. No diagrama da Figura 10.2, a perturbação aparece entre os elementos  $G_1(s)$  e  $G_2(s)$  do ramo de avanço, mas, em princípio, ela pode ser introduzida em qualquer ponto do sistema, inclusive junto à saída do sistema ou no ramo de realimentação, como é o caso dos ruídos de medida.

Na figura,

$U$  é a variável de entrada ou de referência;

$Y$  a variável de saída ou controlada;

$D$  a variável de perturbação ou distúrbio;

e

$\varepsilon$  é o sinal atuante ou erro atuante.

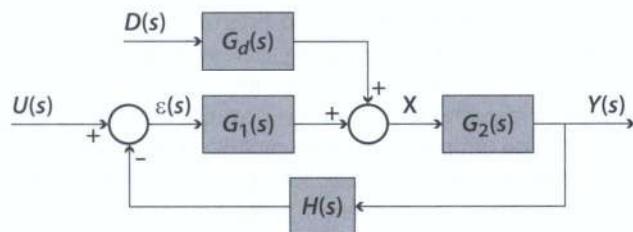


Figura 10.2

## 10.2 Resposta a sinais de referência e de perturbação

No diagrama de blocos da Figura 10.2, com  $D = 0$ , a função de transferência do sistema, será:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} \Big|_{D=0} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

A resposta do sistema ao sinal de entrada apenas, será:

$$Y(s) \Big|_{D=0} = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} U(s)$$

Por outro lado, para  $D \neq 0$  e  $U = 0$ , temos a função de transferência da perturbação para a saída:

$$F_d(s) = \left. \frac{Y(s)}{D(s)} \right|_{U=0} = \frac{G_d G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

A resposta do sistema ao sinal de perturbação apenas, será:

$$Y(s) \Big|_{U=0} = \frac{G_d G_2}{1 + G_1 G_2 H} D(s)$$

Finalmente, a resposta do sistema no caso geral, estando presentes, simultaneamente, os sinais de entrada e de perturbação, resulta, pelo princípio da superposição dos efeitos:

$$Y(s) = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H} U(s) + \frac{G_d G_2}{1 + G_1 G_2 H} D(s)$$

### Exemplo 10.1

Em um regulador de tensão, o atuador é um gerador de corrente contínua controlado pela corrente de campo. O comparador é um amplificador operacional cuja saída vai para um amplificador de potência que alimenta o circuito de campo do gerador e a realimentação negativa é unitária, conforme a Figura 10.3. O sinal de referência é  $V_c$ , a tensão controlada é  $V_o$  e a corrente de carga do gerador,  $I_o$ , é a perturbação. Determine a função de transferência do sistema  $F(s)$ , bem como a função de transferência da perturbação para a saída e a resposta  $V_a(s)$  do sistema na presença de  $V_c$  e  $I_o$ .

Solução:

(a) Modelo matemático

$$V_1 = \frac{R_f}{R_c} K_a (V_c - V_a)$$

$$V_1 = (R_1 + L_1 s) I_1$$

$$V_e = K_e I_1$$

$$V_a = V_e - R_o I_o$$

(b) Diagrama de blocos (Figura 10.4)

(c) Resposta do sistema

Com  $I_o = 0$ , a função de transferência será:

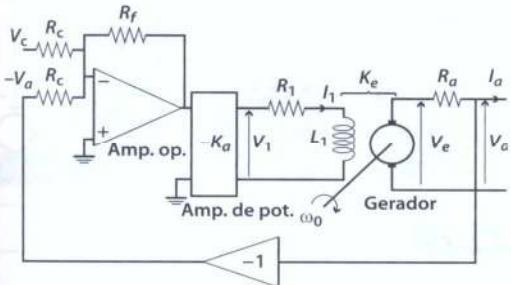


Figura 10.3

## Exemplo 10.2

Na Figura 10.5, temos o diagrama de blocos de um sistema posicionador.

(a) Determine a função de transferência de malha fechada  $F_1(s) = \frac{\theta(s)}{V_r(s)} \Big|_{C_d=0}$

(b) Qual a resposta final do sistema a um degrau de entrada de 20 volts (com  $C_d=0$ )?

(c) Determine a função de transferência de malha fechada correspondente ao distúrbio

$$F_2(s) = \frac{\theta(s)}{C_d(s)} \Big|_{V_r=0}$$

(d) Qual a resposta final do sistema a um degrau de perturbação de 1Nm (com  $V_c=0$ )?

Solução:

(a)

$$G(s) = \frac{1000}{s(s+1)(s+20)}$$

$$G(s)H(s) = \frac{80}{s(s+1)(s+20)}$$

e

$$F_1(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} =$$

$$\frac{1.000}{s^3 + 21s^2 + 20s + 80}$$

(b)

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (s\theta(s)) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( s F_1(s) \frac{20}{s} \right)$$

$$F(s) = \frac{V_a(s)}{V_c(s)} \Big|_{I_a=0} = \frac{(R_f K_a K_e)/(R_c L_1)}{s + (R_1 R_c + R_f K_a K_e)/R_c L_1}$$
  

$$F_d(s) = \frac{V_a(s)}{I_a(s)} \Big|_{V_c=0} = \frac{-R_a(s + R_1/L_1)}{s + (R_1 R_c + R_f K_a K_e)/R_c L_1}$$

$$V_a(s) = F(s)V_c(s) + F_d(s)I_d(s)$$

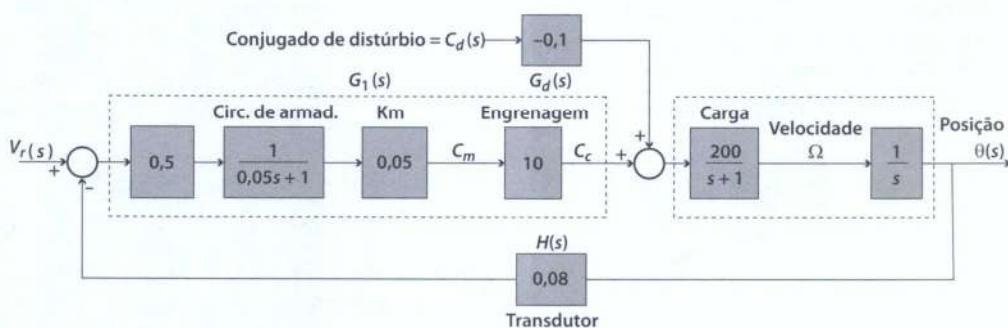


Figura 10.5

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \left( s \frac{1000}{s^3 + 21s^2 + 20s + 80} \frac{20}{s} \right) = 250 \text{ rad}$$

(c)

$$F_2(s) = \frac{G_d(s)}{1 + G(s)H(s)} =$$

$$\frac{-20}{s(s+1)} =$$

$$1 + \frac{80}{s(s+1)(s+20)} =$$

$$\frac{-20(s+20)}{s^3 + 21s^2 + 20s + 80}$$

(d)

**Observação**

Resposta final na presença do sinal de entrada e do distúrbio:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \theta(t) = 250 - 5 = 245 \text{ rad}$$

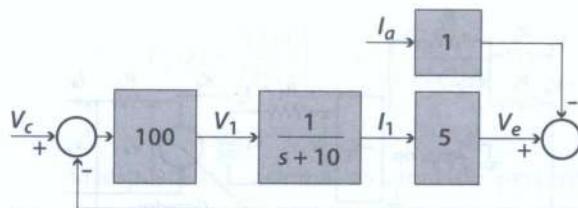


Figura 10.6

$$F_d(s) = \frac{V_a(s)}{I_a(s)} \Big|_{V_c=0}$$

(b) Aplicando-se uma tensão de entrada  $V_c$ , qual será a tensão de saída  $V_a$  depois de muito tempo (com  $I_a = 0$ )?

(c) Se depois de muito tempo ocorrer uma perturbação representada por um degrau  $I_a = 10 \text{ A}$ , que alteração ocorrerá na tensão  $V_a$ ? Solução:

(a)

Com  $I_a = 0$ , resulta (ver Figura 10.7)

$$F(s) = \frac{500}{s + 510}$$

Com  $V_c = 0$ , resulta (ver Figura 10.8)

$$F_d(s) = \frac{-(s+10)}{s+510}$$

(b)

$$V_a(s) = F(s) \frac{20}{s} = \frac{10000}{s(s+510)} =$$

$$19,6 \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{s+510} \right)$$

$$V_a(t) = 19,6 (1 - e^{-510t}) \quad \therefore \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (v_a) = 19,6 \text{ v}$$

Esse resultado pode ser obtido mais facilmente com auxílio do teorema do valor final:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (v_a) = \lim_{s \rightarrow 0} (s V_a(s)) =$$

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{10000}{(s+510)} = 19,6 \text{ volts}$$

**Exemplo 10.3**

O diagrama de blocos da Figura 10.6 representa um sistema regulador de tensão cuja entrada é  $V_c$  e a perturbação é  $I_a$ .

(a) Determine as funções de transferência

$$F(s) = \frac{V_a(s)}{V_c(s)} \Big|_{I_a=0}$$

e

e determine a tensão de saída  $V_a$  quando a tensão de entrada é  $V_c = 10 \text{ V}$  e a perturbação é  $I_a = 10 \text{ A}$ .

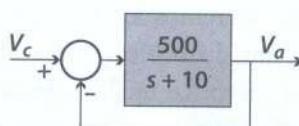


Figura 10.7

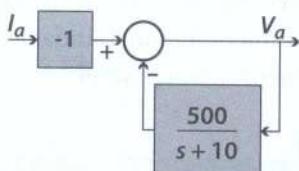


Figura 10.8

(c) Variação de  $V_a$  devido à presença da perturbação.

$$\Delta V_a = F_d(s) \frac{10}{s} = \frac{-10(s+10)}{s(s+510)} = -\frac{150}{510} \left( \frac{1}{s} + \frac{50}{s+510} \right)$$

Considera-se aqui uma nova origem para contagem do tempo ( $\tau$ ), coincidente com o instante em que ocorre o degrau da perturbação. Resulta:

$$\Delta v_a(\tau) = -(0,196 + 9,80e^{-510\tau})$$

$$v_a(\tau) = 19,6 - 0,196 - 9,80e^{-510\tau} = 19,4 - 9,8e^{-510\tau}$$

no instante em que ocorre a perturbação:  $v_a(\tau=0) = 19,4 - 9,8 = 9,6$  V. Depois de decorrido algum tempo, a tensão volta a se estabilizar no valor  $V_a = 19,4$  V, com uma queda de apenas 0,2 V em relação ao valor estabilizado anteriormente.

#### Observação

Note que a tensão de saída do regulador, depois de estabilizada sem a presença da perturbação ( $V_a = 19,6$  V), não é exatamente igual à tensão de referência ( $V_c = 20$  V). Essa diferença (0,4 V no caso) é erro estático ou erro estacionário do sistema. Esse erro não deve ser confundido com o desvio causado pela presença de perturbações. No caso estudado, por exemplo, a simples presença da perturbação faz com que o erro de regime do sistema passe de 0,4 V para 0,6 V.

### 10.3 Rejeição aos distúrbios

Sendo os distúrbios entradas não desejadas, há sempre necessidade de se minimizarem seus efeitos.

A função de transferência do distúrbio  $G_d(s)$  geralmente é devida a elementos fixos da estrutura que envolve o sistema, o que torna difícil ou mesmo impossível sua alteração. Por exemplo, em um sistema de estabilização do voo de um avião, a perturbação pode ser causada por rajadas de vento. Diminuir o efeito delas sobre a estabilização do voo talvez seja possível somente alterando-se a aerodinâmica do avião, o que, por ocasião do projeto do sistema de controle, está fora de questão. Por outro lado, o ganho  $G_1(s)$  constitui a parte inicial do ramo direto do sistema de controle, onde normalmente se situa o controlador cujo ganho, por exemplo, pode ser facilmente ajustado. O aumento adequado desse ganho propiciará uma conveniente redução dos efeitos do distúrbio.

Nos sistemas rastreadores, por exemplo, o objetivo do controle é que se tenha, na faixa de frequências de interesse (Figura 10.9),

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} = \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)} \approx 1 \quad \text{e}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{D(j\omega)} = \frac{G_d(j\omega)G_2(j\omega)}{1 + G_1(j\omega)G_2(j\omega)} \approx 0$$

Isso pode ser conseguido fazendo-se, nessa faixa de frequência,  $|G_1(j\omega)G_2(j\omega)| \gg 1$  e  $|G_1(j\omega)| \gg |G_d(j\omega)|$ . De fato, teremos, então,

$$\frac{Y(j\omega)}{R(j\omega)} \approx \frac{G_1(j\omega)G_2(j\omega)}{G_1(j\omega)G_2(j\omega)} = 1 \quad \text{e}$$

$$\frac{Y(j\omega)}{D(j\omega)} \approx \frac{G_d(j\omega)}{G_1(j\omega)} \approx 0$$

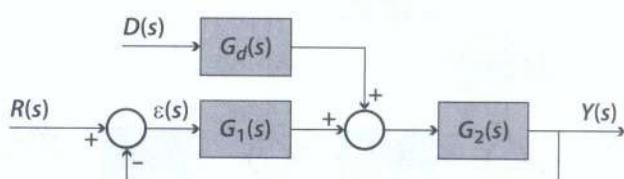


Figura 10.9 Diagrama de blocos.

Outro método de rejeição dos distúrbios é o denominado método da alimentação direta (controle por avanço). Neste método, o distúrbio é medido e transmitido através de uma função de transferência apropriada ao ponto de comparação com o sinal de entrada, conforme a Figura 10.10.

Neste caso, a função de transferência do distúrbio para a saída é:

$$F_d(s) = \frac{G_d G_2 - G_{cd} G_1 G_2}{1 + G_1 G_2 H}$$

Em geral,  $H$ ,  $G_2$  e  $G_d$  contêm os componentes fixos do sistema, que não podem ser alterados. Ao contrário destes,  $G_1$  inclui elementos do controlador e  $G_{cd}$  é um elemento a ser projetado. Para eliminarmos os efeitos do distúrbio na saída, basta fazermos

$$G_d G_2 - G_{cd} G_1 G_2 = 0$$

ou seja,

$$G_{cd} G_1 = G_d$$

O efeito dessa relação é neutralizar no segundo somador o componente do distúrbio que vem diretamente através de  $G_d$  com auxílio do componente em oposição, alimentado através de  $G_{cd}$  e de  $G_1$ . Note, entretanto, que as funções de transferência são apenas modelos aproximados dos sistemas físicos reais. Assim, mesmo que a relação apresentada fique satisfeita, a eficiência da rejeição do distúrbio dependerá da precisão dos modelos utilizados. Por outro lado, ainda que a igualdade mencionada não seja plenamente satisfatória em todas as frequências, uma boa rejeição do distúrbio deverá ocorrer na faixa de frequências de interesse.

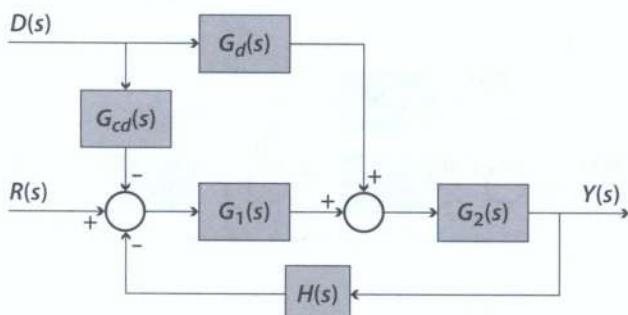


Figura 10.10

Finalmente, queremos lembrar um último método de rejeição dos distúrbios, que é óbvio em princípio, mas nem sempre é fácil ou possível de realizar e nada tem a ver com o problema da realimentação. Trata-se de tentar atenuar a própria amplitude do sinal de distúrbio incidente. Seria o caso, por exemplo, de atenuar o ruído produzido por uma fonte emissora que possa ser convenientemente filtrado na origem ou a fonte convenientemente blindada. É um método eficiente, mas nem sempre viável.

#### Exemplo 10.4

A Figura 10.11 representa o sistema de pilotagem de um barco. A entrada é a posição angular desejada  $R(s)$  do leme;  $Y(s)$  é a direção resultante do barco;  $D(s)$  é o distúrbio produzido pelo vento.

- Supondo inicialmente a posição do leme em  $R(s) = 0$  grau (digamos rumo norte) e um vento transversal (direção oeste) de intensidade constante, (para  $t > 0$ ), de 25 km/h (representado por  $D(s) = 25/s$ ), como fica a direção final de avanço do barco?
- Qual deve ser, então, a entrada  $R(s)$  para que o rumo finalmente volte a ser  $Y(s) = 0$ ?
- Utilize o método da realimentação direta para (teoricamente) anular os efeitos da perturbação do vento. Considere  $K = 4$ .

#### Observação

Entrada e saída em graus angulares; distúrbio (vento) em km/h.

Solução:

De acordo com a notação que estamos usando, temos

$$G_1(s) = K \quad G_2(s) = \frac{225}{s^2 + 18s + 225}$$

$$G_d(s) = 1 \quad H(s) = 1$$

- Resposta à ação do vento:

$$Y_d(s) = \frac{225}{s^2 + 18s + 225(K+1)} \frac{25}{s}$$

Rumo final sob a ação do vento:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (y_d(t)) = \lim_{s \rightarrow 0} (s Y_d(s)) = \frac{25}{K+1}$$

Com  $K = 4$ , o desvio será de 5 graus.

- A resposta do barco à ação do leme na posição  $r_0$  será:

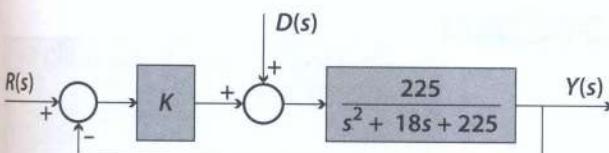


Figura 10.11

## 10.4 Sensibilidade

Outro aspecto importante relativo à utilização da realimentação em sistemas de controle é o que se refere à possibilidade de alteração dos parâmetros do sistema ao longo do tempo. Embora em princípio os sistemas aqui considerados sejam supostos invariantes no tempo, na prática, os parâmetros do sistema podem sofrer alterações por variações excessivas de temperatura, por envelhecimento, por fadiga, ou mesmo por defeito ou acidente. Nessas condições, quanto menor for o efeito dessas alterações sobre o funcionamento do sistema, isto é, quanto menos sensível for a operação do sistema em relação à variação de seus parâmetros, tanto mais confiável será o sistema. O tópico que trata das alterações da dinâmica do sistema devido à variação de seus parâmetros denomina-se *sensibilidade*. Como a dinâmica do sistema é dada pela função de transferência, costuma-se definir a sensibilidade com base nessa função.

Matematicamente, define-se sensibilidade do sistema em relação a um parâmetro  $K$ , como sendo relação entre a variação relativa da função de transferência em relação à variação relativa desse parâmetro:

$$S_K^F = \frac{\partial F(s) / F(s)}{\partial K / K} = \frac{\partial F(s)}{\partial K} \frac{K}{F(s)}$$

Então, nos sistemas de controle sempre há interesse em que a sensibilidade em relação a qualquer parâmetro seja a menor possível para que se evite ao máximo a alteração do funcionamento esperado. Se a sensibilidade em relação a um parâmetro for unitária, por exemplo, isso significa que uma alteração, digamos, de 0,5% no valor desse parâmetro ocasiona um erro de 0,5% na função de transferência e, em consequência, na resposta do sistema.

Essa definição geral de sensibilidade costuma ser desdobrada em sensibilidade de módulo ou de ganho e sensibilidade de fase:

$$S_K^{|F|} = \frac{\partial |F(s)| / |F(s)|}{\partial K / K} = \frac{\partial |F(s)|}{\partial K} \frac{K}{|F(s)|}$$

$$S_K^\phi = \frac{\partial \phi(s) / \phi(s)}{\partial K / K} = \frac{\partial \phi(s)}{\partial K} \frac{K}{\phi(s)}$$

Normalmente, a sensibilidade de ganho é mais importante que a sensibilidade de fase. Por isso, neste texto, examinaremos apenas o primeiro caso.

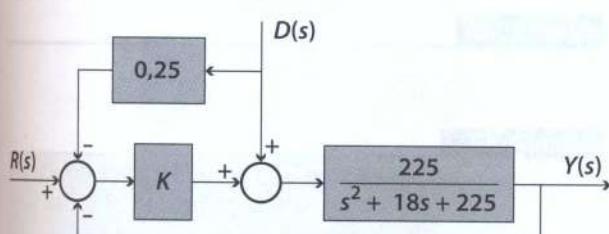


Figura 10.12

Em geral, a sensibilidade é função da frequência complexa  $s$  da transformada de Laplace, o que dificulta sua interpretação. Entretanto, se restringirmos o conceito ao caso das funções senoidais, fazendo  $s = j\omega$ , teremos maior facilidade de interpretação e fica evidente o fato de que a sensibilidade é, nesses casos, função da frequência.

### Exemplo 10.5

A função de transferência do sistema da Figura 10.13, formado pelo amplificador operacional, é

$$G = -\frac{R_2}{R_1}$$

- (a) Qual a sensibilidade de  $G$  em relação ao parâmetro  $R_1$ ?  
 (b) E em relação ao parâmetro  $R_2$ ?

Solução:

(a)

$$S_{R_1}^G = \frac{\partial G}{\partial R_1} \frac{R_1}{G} = \frac{R_2}{R_1^2} \frac{R_1}{(-R_2)} = -1$$

(b)

$$S_{R_2}^G = \frac{\partial G}{\partial R_2} \frac{R_2}{G} = \frac{1}{R_1} \frac{R_2 R_1}{(-R_2)} = 1$$

Neste sistema, uma alteração de 1% em  $R_1$ , por exemplo, produz uma alteração de 1% em  $G$ , mas no sentido oposto, por causa do sinal negativo: se  $R_1$  aumenta, a função de transferência  $G$  diminui do mesmo valor relativo.

O mesmo ocorre com as alterações de  $R_2$  e  $G$ , com a diferença que neste caso as variações relativas de ambos são de mesmo sentido.

Neste sistema, qualquer alteração percentual em um dos resistores é transmitida integralmente para a função de transferência e, portanto, para a resposta do sistema.

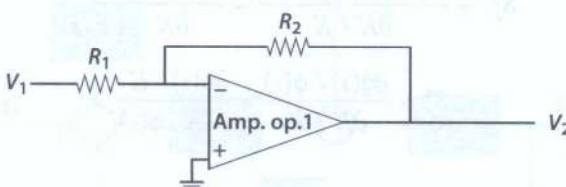


Figura 10.13

### Exemplo 10.6

Considere um sistema de 1ª ordem cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{K}{s+a}$$

Ver Figura 10.14.

(a) Calcule a sensibilidade em relação a  $K$ .

(b) Calcule a sensibilidade em relação a  $a$ .

Solução:

$$(a) S_K^G = \frac{\partial G}{\partial K} \frac{K}{G} = \frac{1}{s+a} \frac{K(s+a)}{K} = 1$$

$$(b) S_a^G = \frac{\partial G}{\partial a} \frac{a}{G} = -\frac{-K}{(s+a)^2} \frac{a(s+a)}{K} = -\frac{a}{s+a}$$

Observe que, no primeiro caso (item a), a sensibilidade não depende dos parâmetros do sistema, nem da variável  $s$ . No segundo caso (item b), a sensibilidade depende tanto do valor de  $a$  (portanto, da posição do polo), quanto da variável  $s$ . A dependência de  $s$  torna-se especialmente importante no caso de oscilações senoidais, quando  $s = j\omega$ . Nesse caso, é especialmente importante a sensibilidade de ganho:

$$S_a^{(g)} = \frac{a}{|a + j\omega|} = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

Veja que a sensibilidade de ganho diminui com o aumento da frequência.

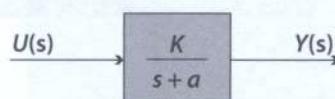


Figura 10.14

### Exemplo 10.7

Considere um sistema de 1ª ordem dotado de realimentação unitária (Figura 10.15), cuja função de transferência é

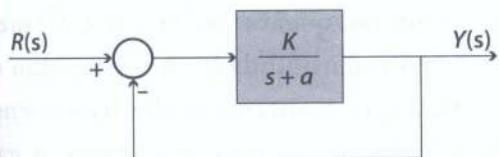


Figura 10.15

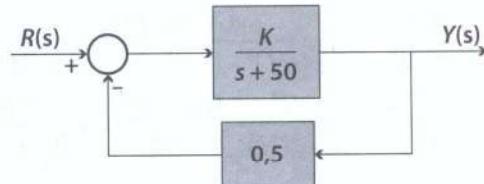


Figura 10.16

$$F(s) = \frac{K}{s+a+K}$$

- (a) Calcule a sensibilidade em relação a  $K$ .  
 (b) Calcule a sensibilidade em relação a  $a$ .

Solução:

(a)

$$S_K^F = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{K}{F} = \frac{s+a}{(s+a+K)^2} \frac{K(s+a+K)}{K} = \frac{s+a}{s+a+k}$$

(b)

$$S_a^F = \frac{\partial F}{\partial a} \frac{a}{F} = \frac{-K}{(s+a+K)^2} \frac{a(s+a+K)}{K} = \frac{a}{s+a+k}$$

Comparando a sensibilidade dos itens (a) e (b) com os do problema anterior, verificamos que de maneira geral, para os sistemas de 1ª ordem, a sensibilidade de ganho é menor em malha fechada.

#### Exemplo 10.8

Determine a sensibilidade do sistema da Figura 10.16 em relação ao parâmetro  $K$  e calcule o valor numérico da sensibilidade de módulo para  $K = 100$  e um sinal senoidal de frequência  $\omega = 50$  rad/s.

Solução:

A função de transferência do sistema é

$$F(s) = \frac{K}{s+50+0,5K}$$

Calcula-se facilmente a sensibilidade de  $F(s)$  em relação a  $K$ :

$$S_K^F = \frac{\partial F}{\partial K} \frac{K}{F} = \frac{s+50}{s+50+0,5K}$$

Para  $K = 100$  e  $s = j50$ , resulta

$$S_K^F = \frac{50 + j50}{100 + j50} = \frac{1+j}{2+j}$$

A sensibilidade de módulo será, então:

$$S_K^{F|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} = 0,632$$

Uma questão importante de ser examinada é a seguinte: em um sistema de controle típico, temos, no ramo direto, o controlador ( $G_c$ ), que é o elemento ajustável nos projetos, e a planta ( $G_p$ ), que é um elemento fixo. O ganho do ramo direto é, então,  $G = G_c G_p$ , ajustável graças ao fator  $G_c$ . Por outro lado, tipicamente, no ramo de realimentação, situa-se o sensor que normalmente é um componente físico não ajustável. É interessante calcularmos a sensibilidade da função de transferência de malha fechada  $F(s)$  em relação a  $G$ , ganho do ramo direto ( $S_G^F$ ), e em relação a  $H$  (sensor), ganho do ramo de realimentação ( $S_H^F$ ) (ver Figura 10.17).

$$F = \frac{G}{1 + GH}$$

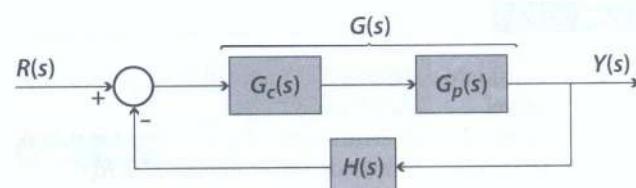


Figura 10.17

$$S_G^F = \frac{\partial F}{\partial G} \frac{G}{F} = \frac{1}{(1+GH)^2} \frac{G(1+GH)}{G} = \frac{1}{1+GH}$$

$$S_H^F = \frac{\partial F}{\partial H} \frac{H}{F} = \frac{-G^2}{(1+GH)^2} \frac{H(1+GH)}{G} = \frac{-GH}{1+GH}$$

Se o ganho de malha aberta for grande ( $|GH| \gg 1$ ), a sensibilidade em relação ao sensor ( $S_H^F$ ) será próxima de 1; portanto, será grande também. Então, para melhorar (diminuir) a sensibilidade,  $GH$  deve ser o menor possível. No caso da sensibilidade em relação ao ramo dire-

to ( $S_G^F$ ), contudo, quanto maior for  $GH$ , melhor (menor) será a sensibilidade. Aí ocorre um confronto. Para que o sistema tenha baixa sensibilidade em relação aos erros do sensor, o ganho de malha aberta deve ser baixo, mas para que o sistema tenha baixa sensibilidade em relação à alteração dos elementos do ramo direto (planta e controlador), esse mesmo ganho deve ser elevado. Uma solução é usar um ganho de malha elevado e um sensor de alta qualidade que seja estável e preciso.

## Considerações finais

De início, neste capítulo, procurou-se caracterizar o que são os sinais de perturbação (ou distúrbios) e como eles afetam o comportamento das variáveis controladas. Foram feitas observações sobre a origem das perturbações e de como atenuar seus efeitos indesejáveis. Os efeitos da perturbação podem ser obtidos utilizando-se a função de transferência do ponto de entrada da perturbação para a saída do sistema. Vá-

rios exemplos foram, então, considerados. Finalmente, foram estudados métodos de atenuação dos efeitos das perturbações, o que se denomina habitualmente de rejeição aos distúrbios. Na parte final do capítulo foi estudado, sob o título de sensibilidade, como o comportamento do sistema é afetado, não por sinais externos, mas por alteração de parâmetros. Vários exemplos completam esse estudo.

## Problemas propostos

1. Considere o sistema da Figura 10.18 supostamente estável.
  - Sendo  $U(s) = 0$ , determine a função de transferência  $Y(s)/D(s)$ .
  - Supondo  $D(s) = 0$ , determine a função de transferência  $E(s)/U(s)$ .
  - Considerando  $U(s) = 0$ , determine a função de transferência  $E(s)/D(s)$ .

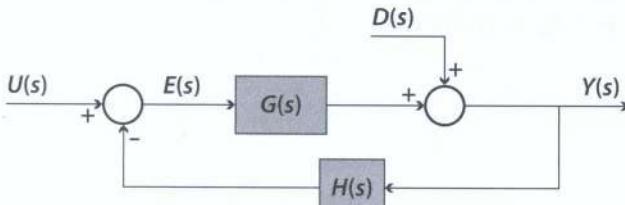


Figura 10.18

2. Considere o sistema da Figura 10.19 supostamente estável.
  - Sendo as perturbações  $D_1(s) = 0$  e  $D_2(s) = 0$ , determine a função de transferência  $Y(s)/R(s)$ .
  - Supondo  $R(s) = 0$  e  $D_2(s) = 0$ , determine a função de transferência  $Y(s)/D_1(s)$ .
  - Supondo  $R(s) = 0$  e  $D_1(s) = 0$ , determine a função de transferência  $Y(s)/D_2(s)$ .

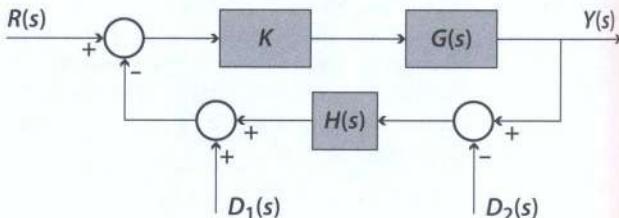


Figura 10.19

3. Considere o sistema representado pelo diagrama de blocos da Figura 10.20.
  - Determine a função de transferência de malha fechada  $F(s) = Y(s)/U(s)$ , com o  $D(s) = 0$ .
  - Verifique, usando o critério de Routh, se o sistema é estável.
  - Determine a função de transferência de malha fechada  $F_d(s) = Y(s)/D(s)$ , com a entrada  $U(s) = 0$ .

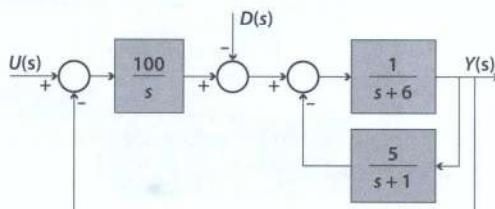


Figura 10.20

4. O diagrama da Figura 10.21 representa um sistema regulador de tensão que utiliza como atuador um gerador de corrente contínua.

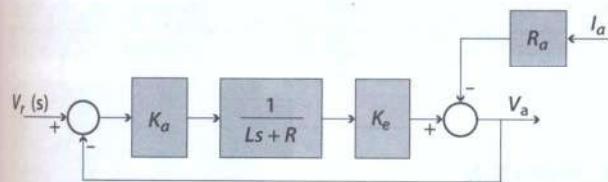


Figura 10.21

São dados:  $K_a = 10$ ,  $L = 8 \text{ H}$ ,  $R = 10$ ,  $K_e = 5 \text{ V/A}$ ,  $R_a = 1 \Omega$ .

A tensão de entrada é  $V_r$ , a tensão de saída é  $V_a$ , e a perturbação, a corrente  $I_a$ .

(a) Determine a função de transferência do sistema ( $F(s) = V_a(s)/V_r(s)$ ) quando  $I_a = 0$ .

(b) Determine a função de transferência relativa ao distúrbio  $F_d(s) = V_a(s)/I_a(s)$  quando  $V_r = 0$ .

(c) Determine a resposta do sistema em regime estacionário quando estiverem ativas as duas entradas:  $v_r(t) = 75h(t) \text{ V}$  – degrau de 75 volts – e  $i_a = 10 \text{ A}$  – corrente constante de 10 ampères.

5. Na Figura 10.22, temos o diagrama de blocos de um sistema posicionador.



Figura 10.22

(a) Determine a função de transferência de malha fechada  $F_1(s) = \frac{\Omega(s)}{V_r(s)}$   $\Big|_{C_d=0}$

(b) Determine a função de transferência de malha fechada  $F_2(s) = \frac{\Omega(s)}{C_d(s)}$   $\Big|_{V_r=0}$

(c) Calcule o valor final da resposta ao degrau unitário, para cada um dos casos.

6. No sistema indicado pelo diagrama de blocos da Figura 10.23, determine as funções de transferência de  $U$  para  $Y$  com  $D = 0$  e de  $D$  para  $Y$  com  $U = 0$ . Calcule, para o primeiro caso, o valor da resposta de regime permanente do sistema a um degrau unitário, em função de  $K$ . Em seguida, calcule, no segundo caso, o valor da resposta de regime permanente a um distúrbio em degrau de altura 0,1. Finalmente, determine o valor de  $K$  para que o efeito final do distúrbio seja no máximo 1% da resposta do sistema ao degrau unitário.

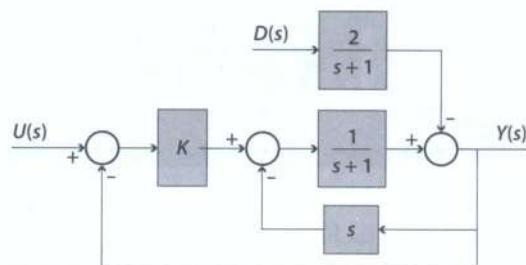


Figura 10.23

7. Determine a sensibilidade da função de transferência do sistema de malha fechada em relação à constante  $K$  do ramo de malha direta na Figura 10.24.

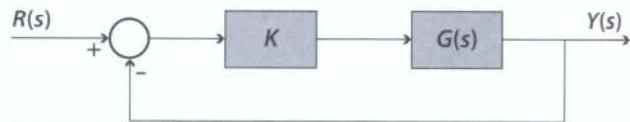


Figura 10.24

8. Determine a sensibilidade da função de transferência do sistema de malha fechada em relação à constante  $K$  do ramo de realimentação na Figura 10.25.

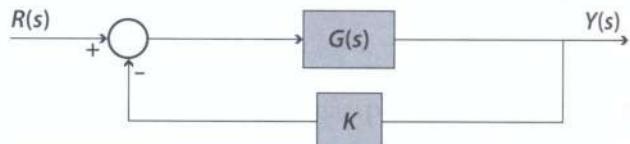


Figura 10.25

9. No diagrama da Figura 10.26, temos

$$G(s) = \frac{K}{s(s+p)}$$

Calcule a sensibilidade  $S_p^F$  do sistema (função de transferência de malha fechada) em relação à posição do polo fora da origem.

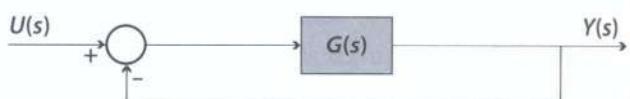


Figura 10.26

10. Determine a sensibilidade do sistema da Figura 10.27, em relação ao parâmetro  $q$ , para a frequência  $\omega = 4 \text{ rad/s}$ .

Dados numéricos:  $p = 2$ ;  $q = 3$ .

$$U(s) \rightarrow G(s) = \frac{K}{(s+p)(s+q)} \rightarrow Y(s)$$

Figura 10.27

11. No sistema da Figura 10.28, sendo  $p = 5$ ,  $q = 3$  e  $K = 10$ , qual será a sensibilidade  $S_p^F$  do sistema de malha fechada, para a frequência  $\omega = 5 \text{ rad/s}$ ?

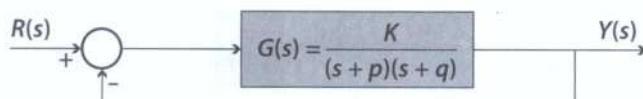


Figura 10.28

12. No sistema da Figura 10.29, sendo  $F(s) = Y(s)/U(s)$  e com  $K = 5$  e  $H = 0,2$ , determine as sensibilidades  $S_K^F$  e  $S_H^F$ . Represente em cada caso

um gráfico da sensibilidade em função da frequência  $\omega$  rad/s (em escala logarítmica).

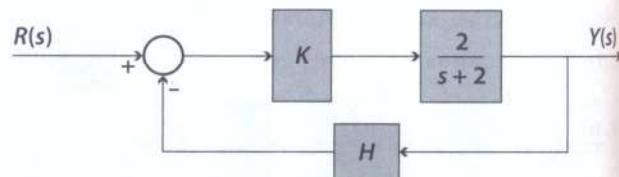
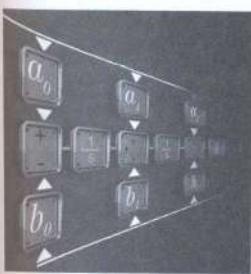


Figura 10.29

# capítulo 11



## Diagrama de Nyquist

Neste capítulo veremos como é possível analisar a estabilidade de um sistema dotado de realimentação, com base nos diagramas de resposta em frequência. Começaremos por apresentar os diagramas de resposta em frequência sob forma polar. Esses diagramas nos permitirão desenvolver um poderoso método de análise gráfica da estabilidade dos sistemas

com realimentação, denominado critério de estabilidade de Nyquist. Esse critério nos mostra, ainda, como é possível analisar a estabilidade da maioria desses sistemas pela simples análise conjunta dos diagramas de Bode de ganho e fase. Este capítulo apresenta também uma introdução ao conceito de robustez de um sistema de controle.

### 11.1 Diagramas polares e transformação $s \rightarrow A(s)$

Como sabemos, uma função real de variável real pode ser facilmente representada em relação a um par de eixos coordenados. Por exemplo, a função real  $f(x)$ , sendo  $x$  real, permite calcular para cada valor de  $x$ , digamos  $x_0$ , o valor  $f_0$  de  $f(x_0)$ . Nessa transformação, um ponto  $x_0$  do eixo horizontal (das abscissas) é mapeado em  $f_0$  no eixo vertical (das ordenadas). O lugar geométrico desses pontos, para os diversos valores de  $x$ , é chamado de gráfico (ou mapa) da função  $f(x)$  (ver Figura 11.1).

Já uma função complexa de variável complexa, tal como a função de transferência  $A(s)$  com  $s = \sigma + j\omega$ , não

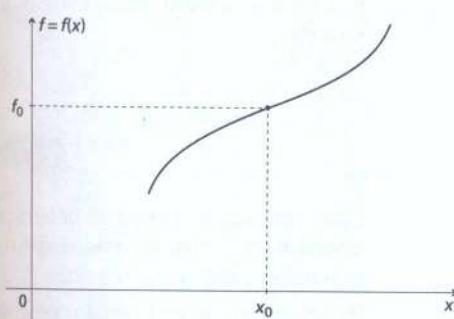


Figura 11.1

pode ser mapeada em um único plano definido por um par de eixos coordenados. Cada um dos números complexos

$$s = \sigma + j\omega$$

e

$$A(s) = \operatorname{Re}(A(s)) + j\operatorname{Im}(A(s))$$

são mapeados sobre planos definidos por um eixo real e um eixo imaginário. Tais planos são denominados, genericamente, planos complexos (ou planos de Argan). Assim, devemos ter um plano (complexo)  $s$ , para representação da variável  $s$  e um plano complexo  $A(s)$  para representação da função  $A(s)$ . Há uma correspondência entre pontos dos dois planos: um ponto  $s_0$  do plano  $s$  corresponde ao ponto  $A_0$  no plano  $A(s)$ . Essa correspondência ponto a ponto entre os dois planos é denominada mapeamento ou transformação de  $s$  em  $A(s)$ . Representaremos essa transformação pela notação  $s \rightarrow A(s)$ .

#### Plano $s$

Como já sabemos, no plano  $s$ , um ponto genérico é representado, em componentes retangulares, por

$$s = \sigma + j\omega$$

onde  $\sigma$  é a parte real e  $\omega$  é a parte imaginária (ver Figura 11.2).

Ou, em componentes polares

$$s = \rho e^{j\theta} = \rho \angle \theta$$

onde  $\rho = |s|$  é o módulo do número complexo  $s$  e  $\theta$ , o argumento ou ângulo de fase.

Evidentemente, temos

$$\rho = \sqrt{\sigma^2 + \omega^2}$$

e

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega}{\sigma}\right)$$

### Plano $A(s)$

Analogamente, podemos representar a função complexa de variável complexa  $A(s)$  por um ponto (ou por um vetor) no plano  $A(s)$  (Figura 11.3), onde o eixo horizontal representa a parte real de  $A(s)$ , e o eixo vertical, a parte imaginária de  $A(s)$ :

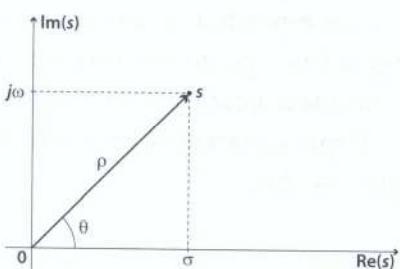
$$A(s) = \operatorname{Re}(A(s)) + j\operatorname{Im}(A(s))$$

A cada ponto  $S$  no plano  $s$  corresponderá um ponto  $A$  no plano  $A(s)$ . Essa correspondência é designada transformação  $s \rightarrow A(s)$ .

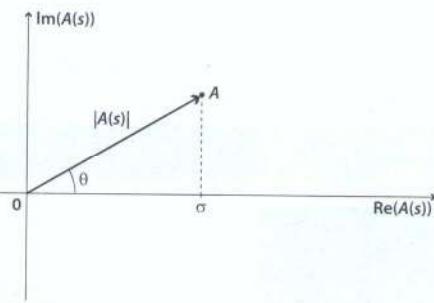
As funções  $A(s)$  que nos interessam são funções racionais do tipo:

$$A(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

onde  $N(s)$  e  $D(s)$  são polinômios em  $s$ .



**Figura 11.2** Plano  $s$ .



**Figura 11.3** Plano  $A(s)$ .

### Exemplo 11.1

Consideremos como exemplo inicial a função:

$$A(s) = \frac{K}{s+a}$$

onde  $s = -a$  é o polo de  $A(s)$ .

Na Figura 11.4, representamos no plano  $s$  um ponto genérico por  $S$ , o polo de  $A(s)$  em  $-a$  por  $P$ , e a origem do sistema de referência por  $0$ . Evidentemente, temos:

$$OP = P - O = -a,$$

portanto:

$$PO = O - P = a \quad \text{e} \quad OS = S - O = s$$

Então

$$S - P = (O - P) + (S - O) = a + s$$

Assim, o denominador da função de transferência é representado no plano  $s$  pelo vetor que vai do polo  $P$  ao ponto considerado  $S$ .

Sendo

$$|S - P| = |a + s| = \sqrt{(a + \sigma)^2 + \omega^2}$$

pois  $s = \sigma + j\omega$  e o ângulo de fase de  $S - P$  ou de  $a + s$

$$\theta = \arctan\left(\frac{\omega}{a + \sigma}\right)$$

Essas observações permitem determinar com facilidade os pontos  $A(s)$  no plano  $A(s)$  correspondentes a cada ponto do plano  $s$ .

Para elaborarmos um exemplo numérico, façamos em  $A(s)$ :  $a = 2$  e  $K = 14$ . Teremos:

$$A(s) = \frac{14}{(s+2)}$$

Determinemos  $A(s)$  para  $s = j2$ . Nesse caso,

$$s+a = 2 + j2 = (2\sqrt{2})[45^\circ]. \text{ Logo:}$$

$$A(s) \Big|_{s=j2} = \frac{14}{(2+j2)} =$$

$$\frac{14}{2\sqrt{2}[45^\circ]} \approx 5[-45^\circ]$$

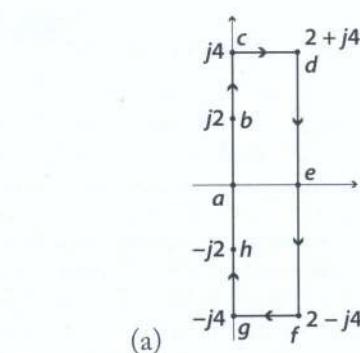
Podemos construir uma tabela para verificarmos outros pontos (Tabela 11.1).

Assim, quando o ponto  $S$  se desloca no plano  $s$ , o ponto  $A(s)$  se desloca em correspondência no plano  $A(s)$ . Então, a uma trajetória de  $S$  no plano  $s$ , corresponde uma trajetória de  $A(s)$  no plano  $A(s)$ . Essas trajetórias se correspondem pela transformação  $s \rightarrow A(s)$ . As figuras 11.5a e b mostram um par de trajetórias resultantes dessa transformação.

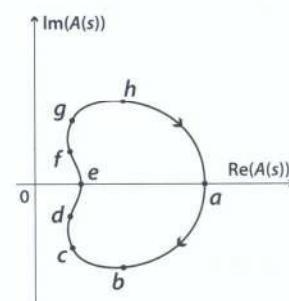
Os resultados obtidos e as interpretações geométricas estudadas podem ser facilmente generalizados para o caso de funções  $A(s)$  com vários polos e zeros.

Tabela 11.1

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$s$	0	$0+j2$	$0+j4$	$2+j4$	$2+j0$	$2-j4$	$0-j4$	$0-j2$
$A(s)$	$7[0^\circ]$	$5[-45^\circ]$	$3,1[-63,5^\circ]$	$2,5[-45^\circ]$	$3,5[0^\circ]$	$2,5[45^\circ]$	$3,1[63,5^\circ]$	$5[45^\circ]$



(a)



(b)

Figura 11.5

Exemplo 11.2

Dado  $A(s) = \frac{1}{1+Ts}$ , onde  $T$  é uma constante positiva, determine, quando  $S$  percorrer o semieixo positivo do eixo imaginário ( $s = j\omega$  para  $0 \rightarrow \omega \rightarrow \infty$ ), a correspondente trajetória de  $A(s)$ .

Solução:

$$A(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega T)^2}}[\theta]$$

sendo

$$\theta = \arctan(\omega T)$$

Evidentemente,

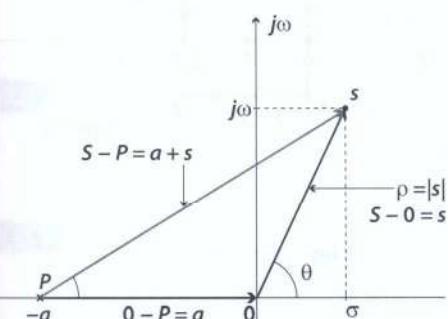


Figura 11.4

$$A(j\omega)(1 + j\omega T) = 1$$

Conclui-se que o vetor  $A(j\omega)$  no plano complexo somado ao vetor em quadratura  $j\omega T A(j\omega)$  resulta em um vetor constante, unitário, sobre o eixo real (Figura 11.6a). Isso significa que, para  $\omega$  variando de zero a infinito, a extremidade do vetor  $A(j\omega)$  descreve uma semicircunferência de diâmetro unitário e centro  $C$  sobre o eixo real em 0,5 no plano  $A(s)$ . Essa trajetória se inicia, para  $\omega = 0$ , no ponto  $A(0) = 1$  e termina, para  $\omega = \infty$ , no ponto  $A(\infty) = 0$  (Figura 11.6b).

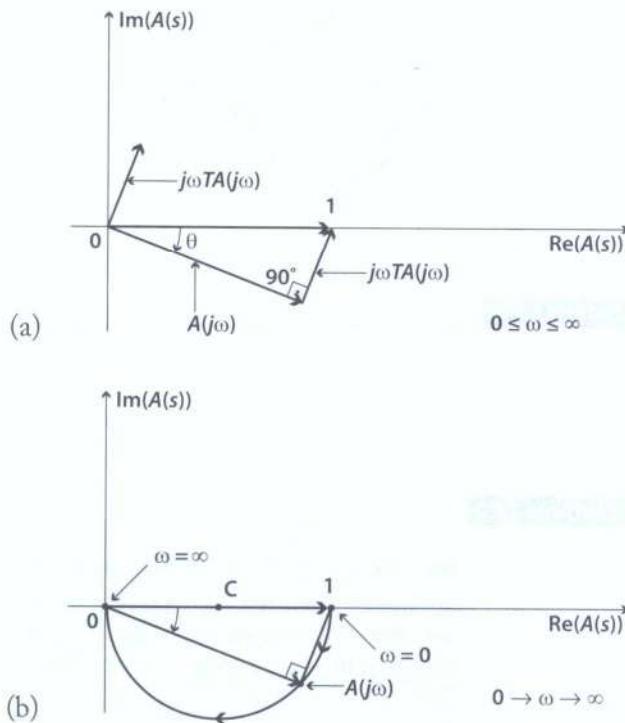


Figura 11.6

se no plano  $s$  a trajetória envolver um, dois, três...  $N$  zeros, mas nenhum polo de  $A(s)$ , a trajetória correspondente no plano  $A(s)$  envolverá, respectivamente, uma, duas, três...  $N$  vezes a origem, no sentido horário. Por outro lado, se no plano  $s$  a trajetória envolver um, dois...  $N$  polos, mas nenhum zero de  $A(s)$ , a trajetória correspondente envolverá, respectivamente, uma, duas...  $N$  vezes a origem desse plano, mas no sentido anti-horário.

### Exemplo 11.3

$$A(s) = K(s + 1)$$

Esta função possui um zero no ponto  $-1$  e nenhum polo.

Na Figura 11.7a temos fechada no plano  $s$ , não envolvendo o zero de  $A(s)$ . Em consequência o mapeamento correspondente no plano  $A(s)$  revela uma trajetória fechada que não envolve a origem desse plano (ver Tabela 11.2 e Figura 11.7b).

Tabela 11.2

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$s$	0	$0+j$	$1+j$	$2+j$	$2+j0$	$2-j$	$1-j$	$0-j$
$A(s)$	$K(1+j0)$	$K(1+j)$	$K(2+j)$	$K(3+j)$	$K(3+j0)$	$K(3-j)$	$K(2-j)$	$K(1-j)$

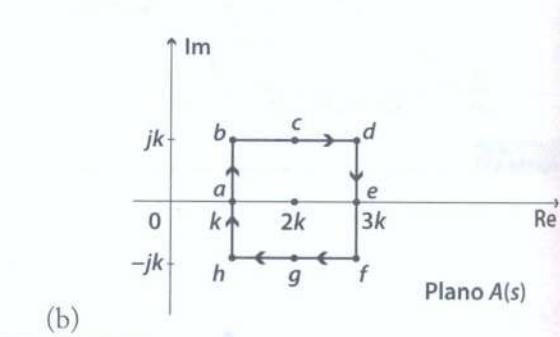
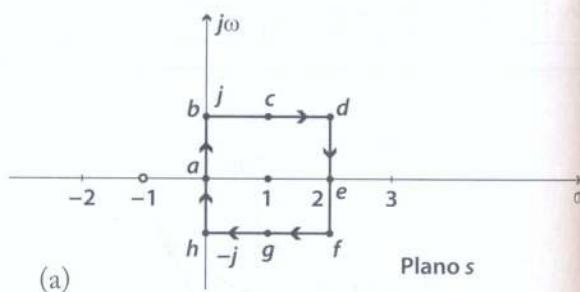


Figura 11.7

## 11.2 Trajetórias fechadas no plano $s$

A seguir, consideremos trajetórias fechadas no plano  $s$ , descritas sempre (por conveniência) no sentido horário e nunca passando por sobre os polos de  $A(s)$ .

As trajetórias correspondentes no plano  $A(s)$  serão também linhas fechadas. Verificaremos que se a trajetória no plano  $s$  não envolver nenhum polo e nenhum zero de  $A(s)$ , a trajetória correspondente no plano  $A(s)$  não envolverá a origem do sistema de referência. Mas,

**Exemplo 11.4**

$$A(s) = K(s + 1)$$

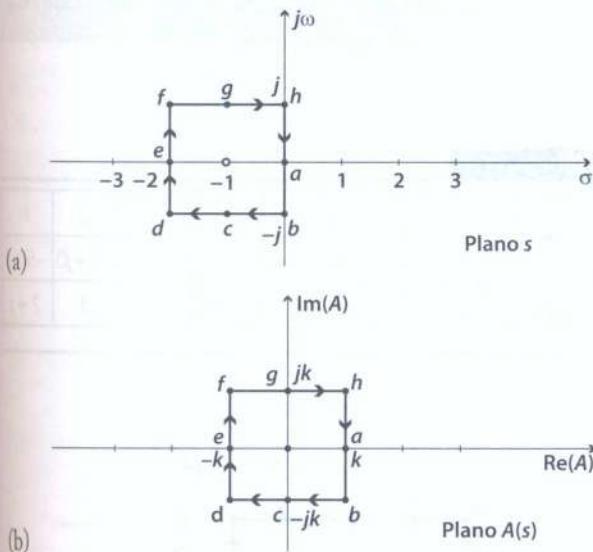
Esta é a mesma função do caso anterior, mas agora a trajetória no plano  $s$  envolve o zero da função. Veremos que no plano  $A(s)$  o mapeamento correspondente envolve a origem desse plano uma vez e no sentido horário (ver Tabela 11.3 e figuras 11.8a e b).

**Tabela 11.3**

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$s$	0	$0 - j$	$-1 - j$	$-2 - j$	$-2 + j0$	$-2 + j$	$-1 + j$	$0 + j$
$A(s)$	$K(1 + j0)$	$K(1 - j)$	$K(0 - j)$	$K(-1 - j)$	$K(1 + j0)$	$K(-1 + j)$	$K(0 + j)$	$K(1 + j)$

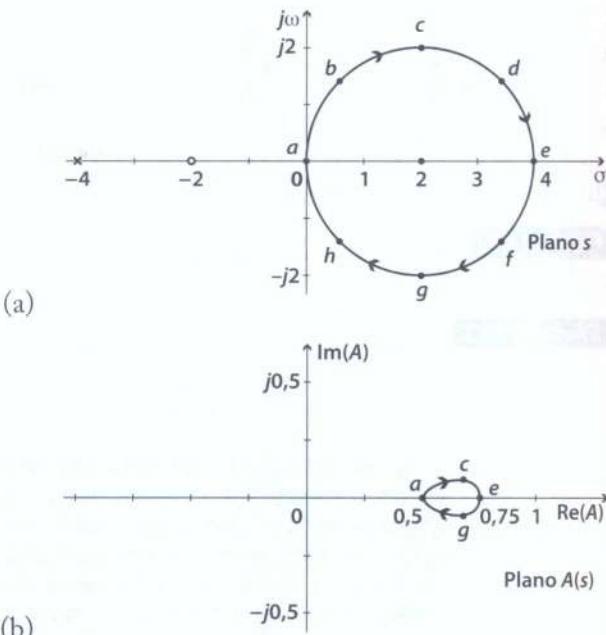
**Tabela 11.4**

	$a$	$b$	$c$	$d$
$s$	0	$0,59 + j1,41$	$2 + j2$	$3,41 + j1,41$
$A(s)$	$0,5 + j0$	$0,60 + j0,122$	$0,7 + j0,10$	$0,74 + j0,049$
	$e$	$f$	$g$	$h$
$s$	$4 + j0$	$3,41 - j1,41$	$2 - j2$	$0,59 - j1,41$
$A(s)$	$0,75 + j0$	$0,74 - j0,049$	$0,7 - j0,1$	$0,60 - j0,122$

**Figura 11.8****Exemplo 11.5**

$$A(s) = \frac{s + 2}{s + 4}$$

Neste caso, a função  $A(s)$  apresenta um polo e um zero. Se traçarmos um contorno no plano  $s$ , que não envolva nem o polo nem o zero da função dada, a linha correspondente descrita no plano  $s$  também será um contorno (uma linha fechada), mas que não envolve a origem, conforme mostram a Tabela 11.4 e as figuras 11.9a e b.

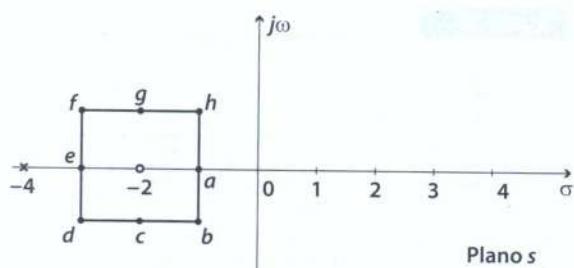
**Figura 11.9****Exemplo 11.6**

$$A(s) = \frac{s + 2}{s + 4}$$

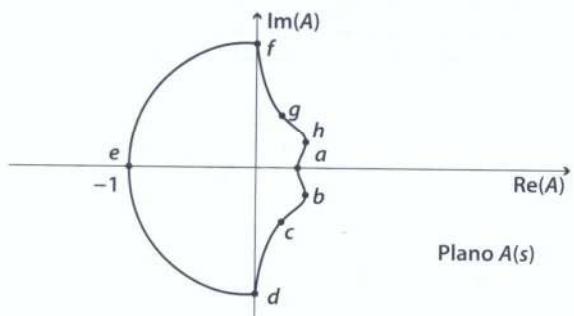
Neste caso, a função  $A(s)$  apresenta um polo e um zero. Se traçarmos um contorno no plano  $s$ , que não envolva nem o polo nem o zero da função dada, a linha correspondente descrita no plano  $s$  também será um contorno (uma linha fechada), mas que não envolve a origem, conforme mostram a Tabela 11.4 e as figuras 11.9a e b.

**Tabela 11.5**

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$s$	$-1 + j0$	$-1 - j$	$-2 - j$	$-3 - j$	$-3 + j0$	$-3 + j$	$-2 + j$	$-1 + j$
$A(s)$	$0,33 + j0$	$0,4 - j0,2$	$0,2 - j0,4$	$0 - j$	$-1 + j0$	$0 + j$	$0,2 + j0,4$	$0,4 + j0,2$



(a)



(b)

**Figura 11.10****Tabela 11.6**

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$s$	$-3+j0$	$-3-j$	$-4-j$	$-5-j$	$-5-j0$	$-5+j$	$-4+j$	$-3+j$
$A(s)$	-1	$0-j$	$1-j2$	$2-j$	$3+j0$	$2+j$	$1+2j$	$0+j$

**Exemplo 11.8**

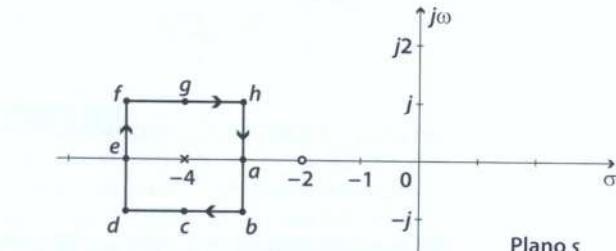
$$A(s) = \frac{s+2}{s+4}$$

A função  $A(s)$  é a mesma dos exemplos anteriores: apresenta um polo em  $-4$  e um zero em  $-2$ . Mas em vez de envolvemos apenas um desses elementos como nos casos já vistos, vamos envolver o polo e o zero por uma única trajetória fechada no sentido horário. O mapeamento correspondente no plano  $A(s)$  deve ser também uma curva fechada descrita no sentido anti-horário e envolvendo a origem desse plano. Novamente, a Tabela 11.6 e os diagramas (Figuras 11.11a e b) a seguir comprovam esse fato.

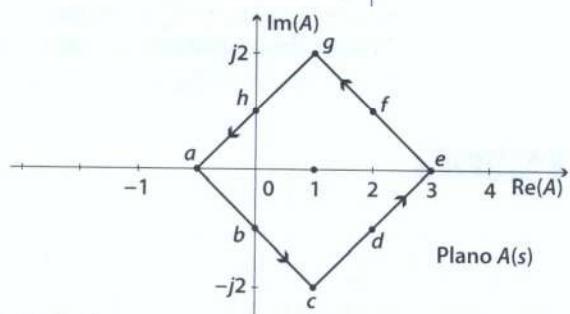
**Exemplo 11.7**

$$A(s) = \frac{s+2}{s+4}$$

Neste caso, a função  $A(s)$  apresenta um polo e um zero e é a mesma do exemplo anterior. Mas em vez de envolver o zero como no caso já visto, vamos envolver o polo em  $-4$ , com uma trajetória fechada no sentido horário. O mapeamento correspondente no plano  $A(s)$  deve ser também uma curva fechada descrita no sentido anti-horário e envolvendo a origem desse plano. Novamente, a Tabela 11.6 e os diagramas (Figuras 11.11a e b) a seguir comprovam esse fato.



(a)

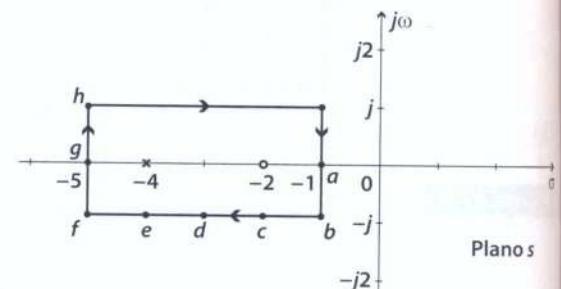


(b)

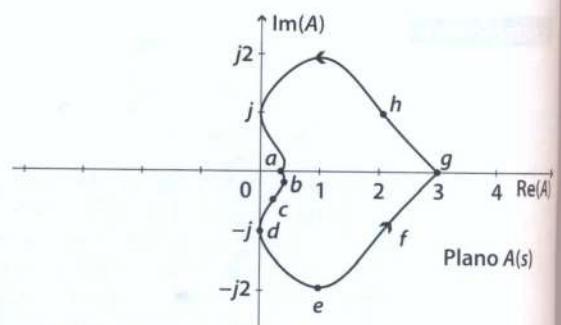
**Figura 11.11****Tabela 11.7**

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$
$s$	$-1+j0$	$-1-j$	$-2-j$	$-3-j$	$-4-j$	$-5-j$	$-5+j0$	$-5+j$
$A(s)$	$0.33+j0$	$0.4-j0.2$	$0.2-j0.4$	$0-j$	$1-j2$	$2-j$	$3$	$2+j$

(a)



(a)

**Figura 11.12**

Uma generalização do raciocínio anterior permite mostrar que se a trajetória fechada no plano  $s$  (sempre descrita no sentido horário) envolver  $P$  polos e  $Z$  zeros de  $A(s)$ , a trajetória correspondente no plano  $A(s)$  envolverá a origem desse plano,  $N$  vezes, sendo:

$$N = Z - P$$

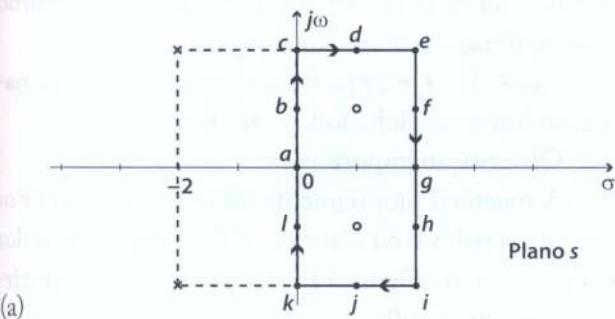
Neste caso,  $N$  será considerado positivo quando o envolvimento da origem for descrito no sentido horário e negativo em caso contrário.

Vejamos mais um exemplo.

**Exemplo 11.9**

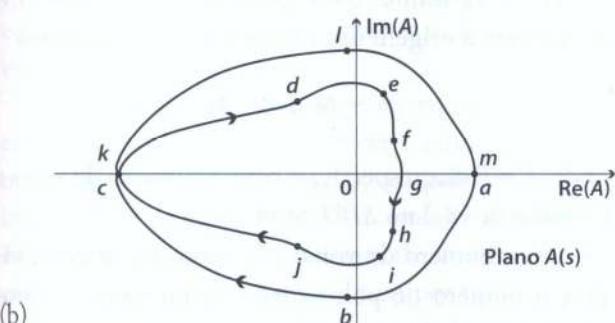
$$A(s) = \frac{s^2 - 2s + 2}{s^2 + 4s + 8}$$

Polos da função:  $s_{1,2} = -2 \pm j2$  e zeros  $s'_{1,2} = 1 \pm j$ . Um contorno que no plano  $s$  envolva os dois zeros (Figura 11.13a) é mapeado no plano  $A(s)$  por uma linha fechada com  $N = 2$  voltas em torno da origem (Figura 11.13b). Na Tabela 11.8 está calculada uma das voltas; a outra se obtém por simetria.



(a)

Plano  $s$



(b)

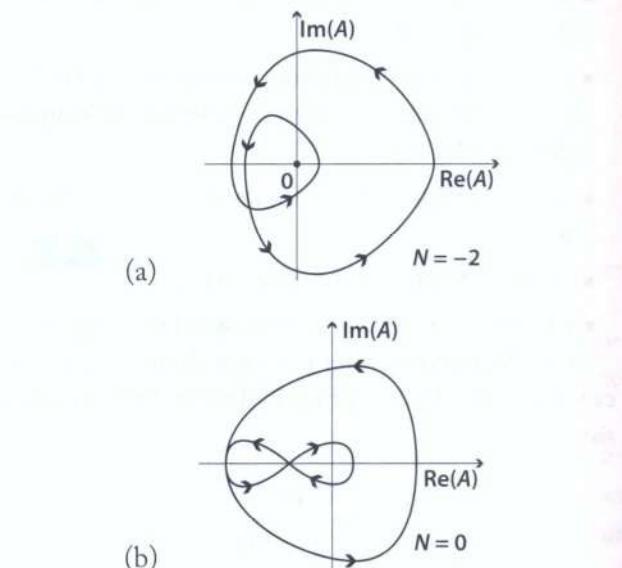
Figura 11.13

**Tabela 11.8**

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$
$s$	0	$0 + j$	$0 + 2j$	$1 + 2j$	$2 + 2j$	$2 + j$	$2 + j0$
$A(s)$	$0,25 + j0$	$-0,015 - j0,277$	$-0,5 + j0$	$-0,12 + j0,16$	$0,063 + j0,188$	$0,082 + j0,071$	$0,1 + j0$
$s$	0	$0 - j$	$0 - 2j$	$1 - 2j$	$2 - 2j$	$2 - j$	$2 - j0$
	$m = a$	$l$	$k$	$j$	$i$	$h$	$g$

Estes são exemplos de contagem do número  $N$  de volta em torno da origem. As voltas no sentido horário são positivas; no sentido anti-horário, são negativas. As figuras 11.14a e b ilustram como devem ser contados o número  $N$  de voltas em torno da origem.

As propriedades da transformação  $s \rightarrow A(s)$  vistas aqui podem ser demonstradas rigorosamente com base no estudo das funções analíticas (funções complexas de variáveis complexas).



Convenção para contagem de voltas em torno da origem.

### 11.3 Critério de Nyquist

Até aqui, estudamos dois métodos para determinação da estabilidade de um sistema linear invariante no tempo:

(1) Método direto, em que o posicionamento dos polos em relação ao eixo imaginário do plano  $s$  fica determinado pelas raízes do polinômio característico. Esse método fica muito facilitado, especialmente

te para sistemas de ordem elevada, pelo uso de um computador.

(2) Critério de Routh, em que a estabilidade ou não do sistema fica determinada por um algoritmo baseado na denominada tabela de Routh. Este método facilita a determinação numérica de parâmetros (ganho  $K$ , por exemplo), os quais delimitam as condições de estabilidade desejadas.

Ambos os métodos se aplicam a quaisquer sistemas do tipo LIT, quer sejam ou não dotados de realimentação, e são usados especialmente para a determinação da estabilidade do sistema. O denominado critério de Nyquist, por sua vez, que estudaremos a seguir, é um método gráfico, aplicável especificamente aos sistemas com realimentação e permite que se avalie o quanto estável é o sistema de malha fechada (isto é, permite que se determine o grau de estabilidade relativa) a partir do sistema de malha aberta.

O critério de Nyquist nos permite:

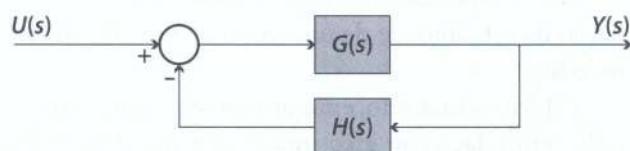
- obter a mesma informação de estabilidade absoluta que o critério de Routh;
- indicar o grau de estabilidade de um sistema estável ou quanto falta para um sistema se tornar estável (margens de ganho e de fase);
- obter informações sobre resposta em frequência do sistema;
- estudar sistemas com tempo de atraso;
- adaptá-lo para o estudo de sistemas não lineares.

Consideremos o sistema com realimentação indicado na Figura 11.15. A função de transferência desse sistema será

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + A(s)}$$

onde

$$A(s) = G(s) H(s) = \frac{N_G(s) N_H(s)}{D_G(s) D_H(s)}$$



**Figura 11.15** Sistema dotado de realimentação negativa.

Para que o sistema seja estável é necessário que  $F(s)$  não tenha polos no SPD do plano  $s$ .

Essa condição é equivalente a que a função

$$1 + A = \frac{D_G D_H + N_G N_H}{D_G D_H}$$

não possua zeros no SPD. De fato, é fácil verificar que raízes de  $D_G D_H + N_G N_H$  são os polos de  $F(s)$ :

$$F = \frac{\frac{N_G}{D_G}}{1 + \frac{N_G N_H}{D_G D_H}} = \frac{N_G D_H}{D_G D_H + N_G N_H}$$

Na prática, geralmente se conhecem os polos e zeros de malha aberta, isto é, de  $G(s)$  e de  $H(s)$ , ou seja, conhecem-se as raízes dos polinômios  $N_G$ ,  $D_G$ ,  $N_H$  e  $D_H$ . O chamado diagrama de Nyquist nos auxilia a detectar a presença de zeros de  $1 + A(s)$  no SPD, a partir de  $A(s)$ .

Para tanto, começamos por determinar a presença de zeros de  $A(s)$  no SPD, procedendo da seguinte forma (Figura 11.16a):

Descrevemos no plano  $s$  uma trajetória fechada (no sentido horário) constituída por um segmento do eixo imaginário (desde  $-jR$  a  $+jR$ ) e uma semicircunferência no SPD, de centro 0 e raio  $R$ . Este contorno é denominado caminho de Nyquist.

Faz-se  $R \rightarrow \infty$  de tal forma que a trajetória fechada, no limite, englobe todo o SPD.

#### Observação importante:

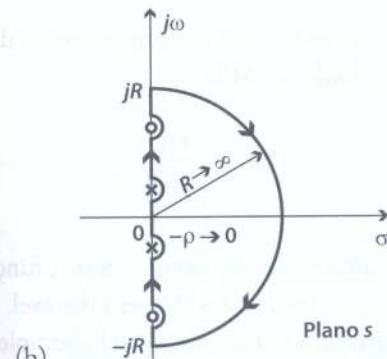
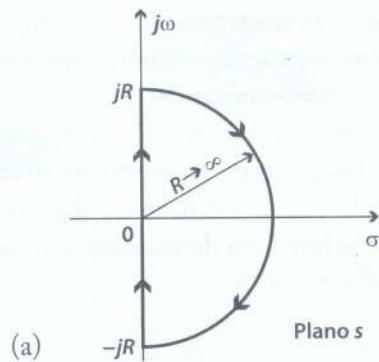
A trajetória propriamente dita não deve conter os eventuais polos e/ou zeros de  $A(s)$ ; deve contorná-los (como se vê na Figura 11.16b) por meio de semicírculos de raio  $r \rightarrow 0$

A curva-limite correspondente no plano  $A(s)$  contornará a origem um número de vezes dado por

$$N' = Z' - P$$

onde  $Z'$  e  $P$  são, respectivamente, o número de zeros e de polos de  $A(s)$  no SPD do plano  $s$ .

$N'$ , o número de voltas em torno da origem, indica o número de polos menos o número de zeros existentes no SPD.



**Figura 11.16** Contornos de Nyquist no plano  $s$ .

#### Exemplo 11.10

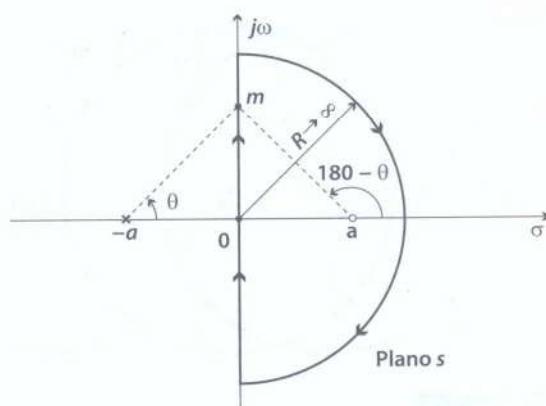
Consideremos o sistema cuja função de transferência de malha aberta é

$$A(s) = \frac{K(s-a)}{(s+a)}$$

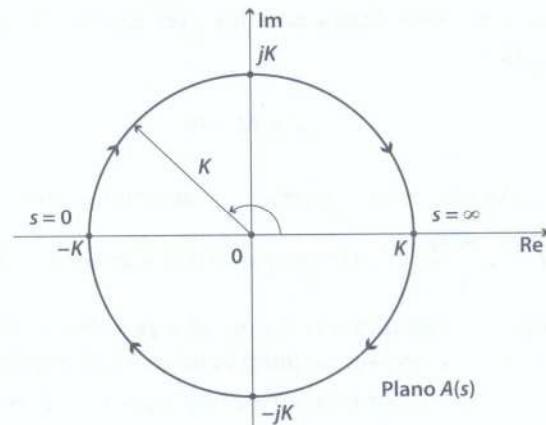
Neste caso,  $A(s)$  possui apenas um zero e nenhum polo no SPD. Assim,  $Z' = 1$  e  $P = 0$ . Por outro lado, a trajetória no plano  $A(s)$  envolve a origem uma vez no sentido horário,  $N' = 1$ . Logo, fica satisfeita a equação  $N' = Z' - P$  (figuras 11.17a e b).

Como neste caso são conhecidos  $Z' (= 1)$ ,  $P (= 0)$  e o número de voltas em torno da origem  $N' (= 1)$ , a equação  $N' = Z' - P$  aqui tem apenas o caráter de uma verificação.

Mas o que realmente deve ser considerado para estudo da estabilidade é conhecer o número de zeros no SPD, da expressão  $1 + A(s)$ , da qual conhecemos inicialmente apenas o número de polos  $P$  situados no SPD, uma vez que são os mesmos de  $A(s)$ . Note agora que o gráfico de  $1 + A(s)$  se obtém por translação do gráfico de  $A(s)$ , de uma unidade para a direita (paralelamente ao eixo real). Assim, o número de vezes que



(a)



(b)

**Figura 11.17**

o gráfico de  $1 + A(s)$  envolve a origem é igual ao número de vezes que o gráfico de  $A(s)$  envolve o ponto (crítico)  $-1 + 0j$ .

Sendo  $N$  o número de voltas em torno do ponto ‘crítico’  $-1$ , e  $N'$  o número de voltas em torno da origem, temos, para o caso do exercício anterior (Figura 11.18):

$$\text{com } K > 1 \quad N = N' = 1$$

$$\text{e com } 0 < K < 1 \quad N' = 1 \text{ mas } N = 0$$

O que se procura nessa análise é determinar quantos zeros de  $1 + A(s)$  existem no SPD. Como já dissemos, o número de polos dessa função no SPD é previamente conhecido, pois são os mesmos de  $A(s)$ . O número  $N$  de voltas em torno do ponto crítico  $-1$  resulta do diagrama de Nyquist. Logo, podemos determinar a existência do número ( $Z$ ) de zeros de  $1 + A(s)$  no SPD a partir da expressão

$$N = Z - P$$

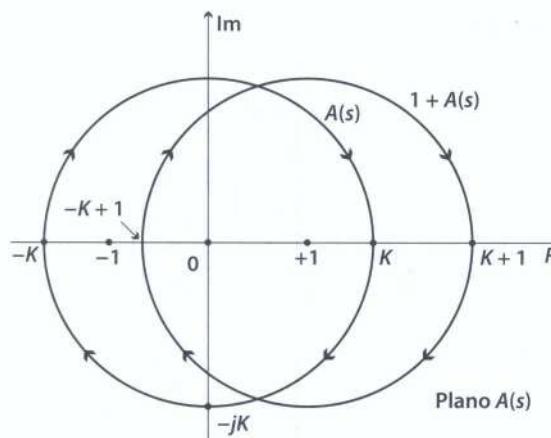


Figura 11.18

que para essa finalidade deve ser escrita de forma explícita

$$Z = N + P$$

Assim, no exemplo anterior, em que  $A(s) = \frac{K(s-a)}{(s+a)}$ , vimos que  $P = 0$  e se for  $0 < K < 1$

temos também  $N = 0$ . Logo,  $Z = N + P = 0$ . Então,  $1 + A(s)$  não possui nenhum zero no *SPD*, e o sistema é estável. Se, ao contrário, tivermos  $K > 1$ , resulta  $N = 1$  e, então,  $Z = N + P = 1$ , e o sistema será instável, pois há um zero de  $1 + A(s)$  no *SPD*.

## 11.4 Análise da estabilidade

O critério de Nyquist para a determinação da estabilidade de sistemas com realimentação consta do seguinte:

(1) No plano  $s$  que contém os polos e zeros do sistema cuja função de transferência de malha aberta é

$$A(s) = G(s)H(s)$$

traça-se o caminho ou contorno de Nyquist que envolve (no sentido horário) todo o semiplano direito (*SPD*) desse plano  $s$ . Esse contorno deve excluir todos os polos e zeros de  $A(s)$  situados no eixo imaginário  $j\omega$ .

(2) O número de vezes ( $N$ ) que o contorno no plano  $A(s)$ , correspondente ao caminho de Nyquist no plano  $s$ , envolver no sentido horário o ponto crítico  $-1$  é igual ao número de zeros menos o número de polos de  $1 + A(s)$  no *SPD*:

$$N = Z - P$$

**Observação:** Na contagem de  $N$  os envolvimentos do ponto crítico no sentido horário são positivos e no sentido anti-horário, negativos.

(3) Os polos de  $1 + A(s)$  são os mesmos de  $A(s)$  e, portanto, são fáceis de serem determinados. Então, sendo  $N$  dado pela construção do diagrama de Nyquist, torna-se imediato determinar o número de zeros de  $1 + A(s)$  no *SPD*.

$$Z = N + P$$

(4) Esses zeros são também os polos do sistema de malha fechada no *SPD*.

$$F(s) = \frac{G(s)}{1 + A(s)}$$

Como consequência, se for  $Z \leq 0$ , a função  $F(s)$  é estável; caso contrário ( $Z > 0$ ), será instável.

Apresentaremos a seguir alguns exemplos ilustrativos da análise de estabilidade de sistemas de controle utilizando o critério de Nyquist.

### Exemplo 11.11

Verifique pelo critério de Nyquist a estabilidade do sistema da Figura 11.19.

Solução:

A função de transferência de malha aberta, no caso, é

$$A(s) = G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+0,5)}$$

Façamos, inicialmente,  $K = 1$ . A parte do diagrama que corresponde ao percurso ao longo do eixo imaginário (ver Figura 11.20a) pode ser obtida fazendo-se, inicialmente,  $s = j\omega$  e  $\omega$  variando de zero até  $R = \infty$ . Depois, completando (no sentido horário) a meia-volta no infinito ( $R = \infty$  com  $\phi: 90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -90^\circ$ ), retorna-se pelo eixo imaginário até alcançar a origem novamente. O ramo do mapeamento no plano  $A(s)$  que requer mais atenção é o que corresponde ao percurso ao longo do semieixo imaginário (de 0 a  $j\infty$ ) no plano  $s$ . Uma facilidade que se encontra aí é o fato de que os segmentos no plano  $A(s)$  correspondentes aos semieixos  $j\omega$  para  $\omega$  positivo e negativo são simétricos em relação ao eixo real. Desses segmentos, o que corresponde a  $\omega$  variando de zero a infinito, é, evidentemente, o diagrama polar da resposta em frequência do sistema considerado. O formato desse ramo pode ser

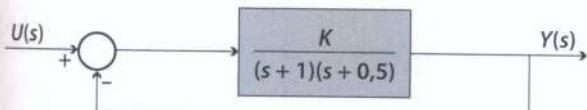


Figura 11.19

desenhado a partir de pontos calculados na Tabela 11.9. Os demais segmentos que completam o contorno no plano  $A(s)$  são de fácil entendimento.

Para efeito de cálculo, suporemos, inicialmente,  $K = 1$ .

$$A(s) = \frac{1}{(s+1)(s+0,5)}$$

Vemos que o diagrama final não envolve o ponto crítico  $-1$ . Logo,  $N = 0$ . Também não existem polos de  $A(s)$  no SPD:  $P = 0$ . Então, também não existem zeros de  $A(s)$  no SPD é  $Z = N + P = 0$ . Logo, o sistema é estável. Observando-se a Figura 11.20b, do diagrama de Nyquist no plano  $A(s)$ , conclui-se facilmente que, neste caso, a estabilidade do sistema independe do valor de  $K$ . De fato, se mudarmos o valor dessa constante de ganho, mudaremos proporcionalmente apenas o tamanho da figura, sem alterar seu formato: qualquer que seja o valor de  $K$ , o ponto crítico  $-1$  nunca será envolvido.

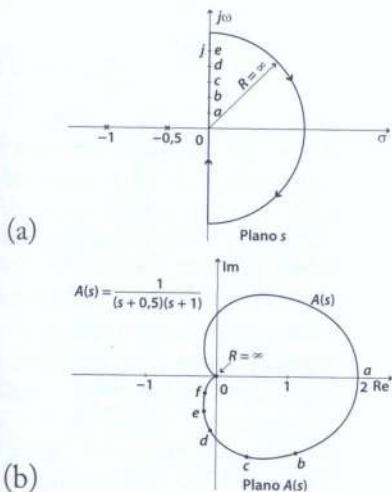


Figura 11.20

### Exemplo 11.12

Verifique, pelo critério de Nyquist, a estabilidade do sistema da Figura 11.21.

Solução:

A função de transferência de malha aberta, no caso, é

$$A(s) = G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+0,5)}$$

Neste caso, o percurso no plano  $s$  é um pouco diferente do caso anterior, devido ao polo na origem. A linha de Nyquist no plano  $s$  deve isolar o polo situado na origem. O percurso total, então, fica assim: a parte do diagrama que corresponde ao percurso ao longo do eixo imaginário pode ser obtida fazendo-se  $s = j\omega$  e  $\omega$  variando de  $\epsilon$  (infinitésimo) até  $\infty$ . Depois, completando a volta no infinito ( $R = \infty$ ) com  $\phi: 90^\circ \rightarrow 0^\circ \rightarrow -90^\circ$ , voltando pelo eixo imaginário e até próximo da origem  $s = j\omega$  com  $\omega$  variando de  $-\infty$  a  $-\epsilon$  e finalmente completando o contorno com um pequeno semicírculo no semiplano direito, de raio  $r = \epsilon$ , para isolar o polo na origem. O ramo do mapeamento no plano  $A(s)$ , que requer mais atenção, é o que corresponde ao percurso ao longo do semieixo imaginário no plano  $s$ . A facilidade que se encontra aí é o fato de que os segmentos no plano  $A(s)$  correspondentes aos semieixos  $j\omega$  para  $\omega$  positivo e negativo são simétricos em relação ao eixo real. Desses segmentos, o que corresponde a  $\omega$  variando  $\epsilon \rightarrow \infty$  é, evidentemente, o diagrama polar da resposta em frequência do sistema considerado. O formato desse ramo pode ser desenhado a partir de pontos calculados na Tabela 11.10. Os demais segmentos que completam o contorno no plano  $A(s)$  são de fácil entendimento. O semicírculo de raio infinitesimal, de sentido anti-horário, junto ao polo na origem do plano  $s$ , mapeia-se no plano  $A(s)$  como um semicírculo de raio  $\infty$ , descrito no sentido horário. Por outro lado, o semicírculo de  $R \rightarrow \infty$  e de sentido horário no plano  $s$  concentra-se na origem do plano  $A(s)$ . Para efeito de cálculo, suporemos, inicialmente,  $K = 1$ .

Tabela 11.9

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$
$\omega$	0	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	5	10	1.000
$\rho$	2	1,73	1,26	0,89	0,63	0,35	0,22	0,04	0,01	0
$\phi^\circ$	0	-40,6	-71,6	-93,1	-108,4	-127	-139	-163	-171	-180

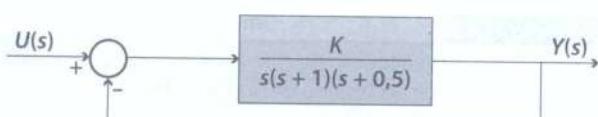


Figura 11.21

$$A(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+0.5)}$$

Os gráficos correspondentes estão nas figuras 11.22a e b.

Note que o semicírculo de raio infinitesimal, de sentido anti-horário junto ao polo na origem do plano  $s$ , é mapeado no plano  $A(s)$  como um semicírculo de raio infinito, descrito no sentido horário. Por outro lado, o semicírculo de  $R \rightarrow \infty$  e de sentido horário no plano  $s$  concentra-se na origem do plano  $A(s)$ . Veja que a linha do diagrama de Nyquist corta o eixo real no ponto  $-1,33$ , portanto, depois do ponto crítico  $-1$ . Em consequência, esse ponto crítico fica envolvido duas vezes pela linha do diagrama de Nyquist. Temos, pois,  $N = 2$ . Como não há polos de  $A(s)$  no SPD, temos também  $P = 0$ . Logo, o número de zeros de  $A(s)$  no SPD será

$$Z = N + P = 2 + 0 = 2$$

Esse resultado indica que o sistema possui dois polos no semiplano direito do plano  $s$ . Logo, é instável.

Entretanto, diminuindo-se o valor do ganho  $K$ , esse ponto crítico pode deixar de ser enlaçado. Isso ocorre para  $K < 0,75$ . Por exemplo, para  $K = 0,5$  o eixo real é cortado pela linha de Nyquist no ponto  $-0,67$ . Teremos, nesse caso,  $N = 0$ , e em consequência,  $Z = N + P = 0 + 0 = 0$  e o sistema fica estável. Depois de alguma prática, é possível desenhar, na maioria dos casos, um bom esboço dos diagramas de Nyquist, diretamente sem auxílio de cálculos, a não ser, eventualmente, para a determinação do cruzamento do eixo real no plano  $A(s)$ .

Tabela 11.10

	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$	$f$	$g$	$h$	$i$
$\omega$	$\epsilon$	0,1	0,2	0,5	0,707	1	2	5	$\infty$
$p$	$\infty$	195	9,1	2,5	1,33	0,63	0,11	0,008	0
$\phi^\circ$	-90	-107	-123	-162	-180	162	131	107	90

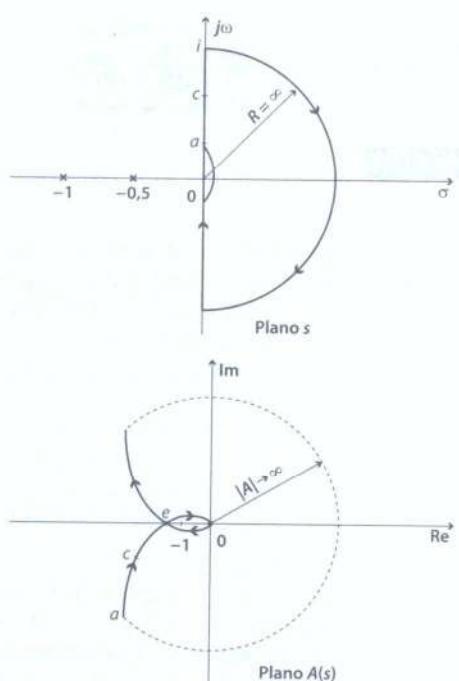


Figura 11.22

### Exemplo 11.13

Verifique, pelo critério de Nyquist, a estabilidade do sistema da Figura 11.23.

Solução:

A função de transferência de malha aberta, nesse caso, é

$$A(s) = G(s) = \frac{K}{s^2(s+1)(s+0,5)}$$

Neste caso, o percurso no plano  $s$  é idêntico ao do caso anterior. A linha de Nyquist no plano  $s$  deve isolar o duplo polo situado na origem (Figura 11.24a). Façamos aqui  $K = 0,5$ . A Tabela 11.11 indica o formato do mapeamento correspondente ao semieixo  $j\omega$  positivo. Neste caso (ver figuras 11.24a e b), o ponto crítico é envolvido duas vezes ( $N = 2$ ): uma volta finita e outra no infinito. O número de polos de  $A(s)$  no SPD é nulo ( $P = 0$ ). Logo,  $Z = N + P = 2$ , o que significa que o sistema possui dois polos de malha aberta no SPD. O sistema é, pois, instável. Confirme o resultado usando o critério de Routh. Note que o sistema é instável para qualquer valor de  $K$ .

Nos exemplos seguintes, os esboços relativos ao diagrama de Nyquist serão feitos diretamente sem auxílio das tabelas de cálculo.

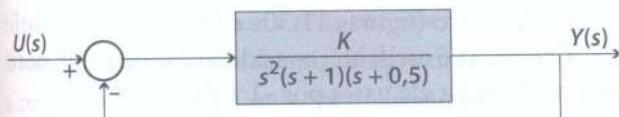


Figura 11.23

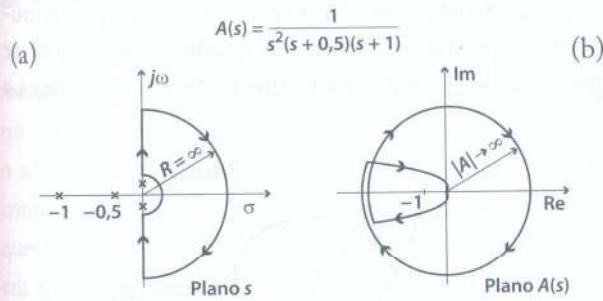


Figura 11.24

Tabela 11.11

$\omega$	0	0,01	0,1	0,2	0,5	0,7	1	$\rightarrow \infty$
$\rho$	$\infty$	$10^4$	97,6	23	2,53	0,97	0,32	0
$\theta^\circ$	180	178	163	147	108	90,5	71,6	0

**Exemplo 11.14**

Determine pelo critério de Nyquist a estabilidade do sistema em que a função de transferência de malha aberta é

$$A(s) = G(s)H(s) = \frac{K(s+a)}{s^2(s+b)}$$

Considere os casos em que  $a > b > 0$ ,  $b > a > 0$  e  $a = b > 0$ .

Solução:

(a)  $a > b > 0$  (ver Figura 11.25a e b)

Neste caso,  $P = 0$  e  $N = 2$ . Portanto,  $Z = N + P = 2$ . O sistema é instável com dois polos no SPD.

(b)  $b > a > 0$  (ver Figura 11.26a e b)

Neste caso,  $P = 0$  e  $N = 0$ . Portanto,  $Z = N + P = 0$ . O sistema é estável, sem polos no SPD.

(c)  $a = b > 0$  (ver Figura 11.27a e b)

Neste caso, o contorno de Nyquist passa pelo ponto crítico  $-1 + j0$ , no plano  $A(s)$ . Isso significa que os polos de malha fechada desse sistema estão sobre o eixo  $j\omega$ .

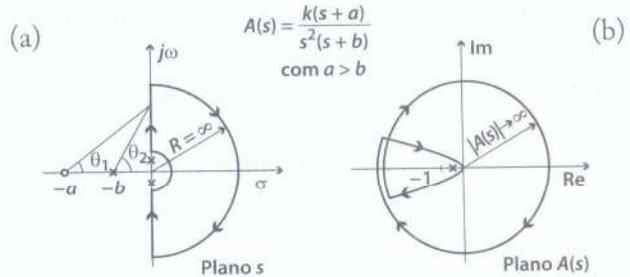


Figura 11.25

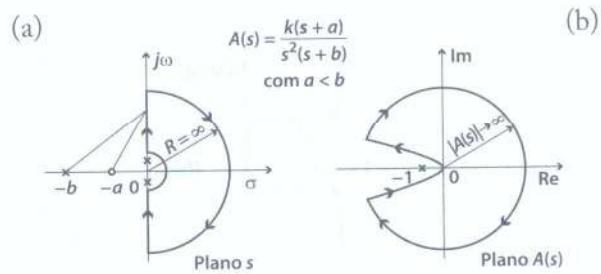


Figura 11.26

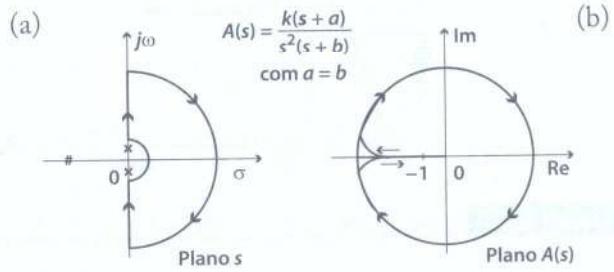


Figura 11.27

## 11.5 Estabilidade relativa

No projeto de sistemas de controle, exige-se que o sistema seja estável. Além disso, é necessário que o sistema possua uma adequada estabilidade relativa.

Vimos como o gráfico de Nyquist indica se o sistema é ou não é estável. Agora, veremos como esse gráfico indica a estabilidade relativa, isto é, o grau de estabilidade de um sistema estável. O gráfico de Nyquist também fornece informações úteis para que a estabilidade possa ser melhorada, quando for o caso.

Para percebermos melhor como o gráfico de Nyquist pode nos dar informações sobre a estabilidade relativa, mostramos adiante os gráficos de Nyquist e

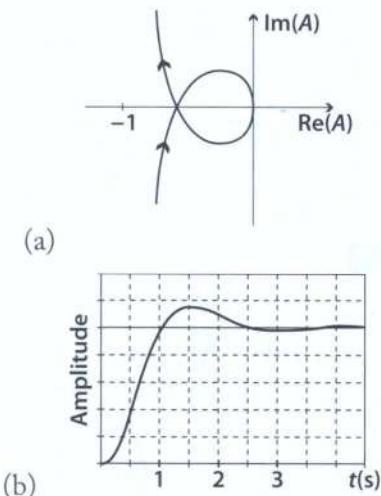
a correspondente resposta temporal a um degrau, de um sistema típico de 3<sup>a</sup> ordem e estável em malha aberta, para diversos valores do ganho  $K$ .

(a)  $K$  pequeno (figuras 11.28a e b).

O sistema é estável e com uma boa resposta temporal, isto é, baixo sobressinal, pouca oscilação e razoavelmente rápido.

(b)  $K$  médio (figuras 11.29a e b).

Estável, mas a resposta temporal é muito oscilatória.



**Figura 11.28** (a) Diagrama de Nyquist e (b) Resposta ao degrau.

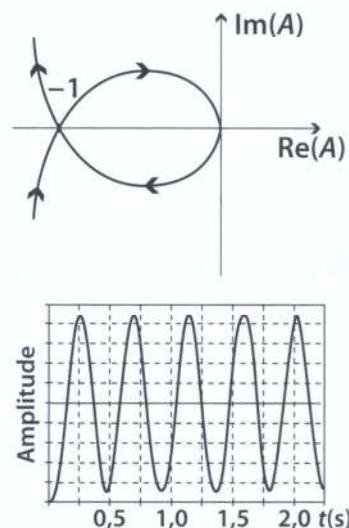
(c)  $K$  crítico (figuras 11.30a e b)

O sistema é oscilante; consideramos instável; note que no Nyquist ele passa por  $-1 + j0$ .

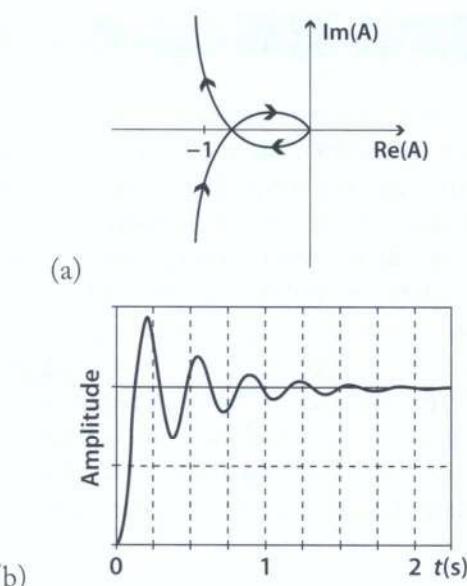
(d)  $K$  superior ao valor crítico (figuras 11.31a e b).

O sistema é instável. As oscilações têm amplitude crescente indefinidamente.

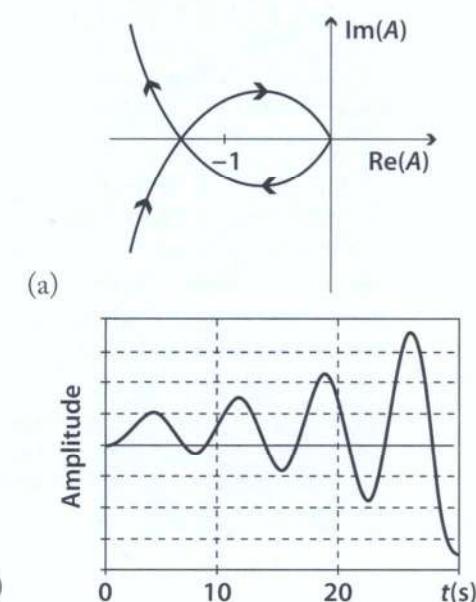
Essas figuras mostram que à medida que  $K$  aumenta o ponto de cruzamento com o eixo real se aproxima de  $(-1 + j0)$  até o momento em que chega a



**Figura 11.30** (a) Diagrama de Nyquist e (b) Resposta ao degrau.



**Figura 11.29** (a) Diagrama de Nyquist e (b) Resposta ao degrau.



**Figura 11.31** (a) Diagrama de Nyquist e (b) Resposta ao degrau.

ultrapassá-lo e o sistema se torna instável. Note que, à medida que o cruzamento se aproxima de  $-1 + j0$ , a resposta temporal apresenta um maior sobressinal e uma maior frequência de oscilações.

### ■ 11.5.1 Margem de ganho

A curva no plano  $A(s)$  que representa o diagrama de Nyquist quando  $s$  percorre o eixo imaginário ( $A(j\omega) = G(j\omega)H(j\omega)$ ), eventualmente cruza o semieixo real negativo em um determinado ponto, como indicam as figuras vistas anteriormente. Esse é o que denominamos ponto de cruzamento. A frequência em que isso ocorre é a frequência de cruzamento  $\omega_c$ . Note que no ponto de cruzamento o ângulo de fase da função de transferência de malha aberta é igual a  $-180^\circ$ . A distância desse ponto à origem é dada por  $|A(j\omega_c)|$ . O coeficiente  $b$  que indica a relação entre as distâncias do ponto de cruzamento e do ponto crítico  $(-1 + j0)$  à origem denomina-se margem de ganho ( $MG$ ):

$$MG = b = \frac{1}{|G(\omega_c)H(\omega_c)|}$$

Logo,

$$b |G(\omega_c)H(\omega_c)| = 1$$

Evidentemente, podemos definir também, como margem de ganho, simplesmente o inverso do módulo de  $A(j\omega_c) = G(j\omega_c)H(j\omega_c)$ .

Na representação da resposta em frequência pelos diagramas de Bode, costuma-se medir a margem de ganho em dB:

$$MG_{dB} = b_{dB} = 20 \log \frac{1}{|G(j\omega_c)H(j\omega_c)|} = -20 \log |G(j\omega_c)H(j\omega_c)|$$

Veja na Figura 11.32 que se o cruzamento se der entre a origem e o ponto crítico  $(-1 + j0)$  e supondo que a planta é estável em malha aberta, o módulo  $|G(j\omega)H(j\omega)|$  será menor que a unidade, teremos  $b > 1$ , a margem de ganho em dB será maior a 0 ( $MG_{dB} > 0$ ) e o sistema será estável.

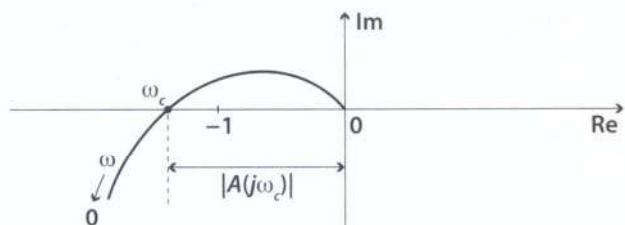


Figura 11.32

Se a curva ultrapassar o ponto crítico  $(-1 + j0)$ , isto é, se o  $|G(j\omega)H(j\omega)|$  for maior que a unidade, teremos  $b < 1$ , a margem de ganho será negativa em dB e o sistema instável.

Se a curva não cruzar o semieixo real negativo, o módulo  $|G(j\omega)H(j\omega)|$  não existirá ou, eventualmente, se reduzirá à origem. Será, pois, igual a zero, e a margem de ganho será infinita em dB. Isto indica que teoricamente o sistema nunca será instável.

Resumindo:

Uma margem de ganho positiva em dB significa que o sistema é estável, e uma margem de ganho negativo significa que o sistema é instável.

### ■ 11.5.2 Margem de fase

A margem de ganho é um dos vários coeficientes que permitem avaliar a estabilidade relativa de sistemas de controle com realimentação. Entretanto, a margem de ganho sozinha não é suficiente para indicar a estabilidade relativa de qualquer sistema, especialmente os que possuem um contorno de Nyquist de formato mais irregular nas proximidades do ponto crítico. Por exemplo, para os dois sistemas a seguir (Figura 11.33), apresentados pelas curvas de  $A(j\omega)$ , temos que ambos possuem a mesma margem de ganho, porém o sistema *A* é mais estável que o *B*, porque este se aproxima mais do ponto crítico.

Assim, para uma representação mais completa da estabilidade relativa, definimos a margem de fase como uma complementação à margem de ganho. A

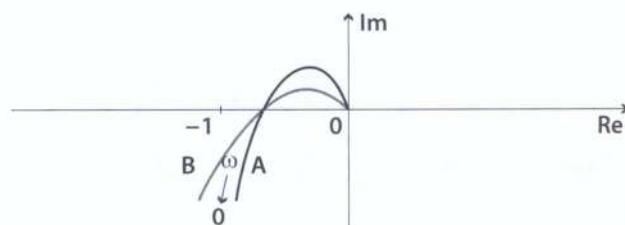


Figura 11.33

margem de fase é definida como sendo o ângulo de fase  $\beta$  que falta para  $180^\circ$  na frequência de cruzamento de ganho. A frequência de cruzamento de ganho é aquela na qual  $|A(j\omega)|$  é unitário. Vamos designá-la por  $\omega'_c$ . A Figura 11.34 esclarece essa definição.

Sabemos que

$$A(j\omega) = |A(j\omega)| \angle \phi(j\omega)$$

E, na frequência de cruzamento de ganho,  $|A(j\omega'_c)| = 1$  e  $\phi(j\omega'_c)$  é, em geral, um ângulo negativo. A margem de fase é, então, definida por

$$MF = \beta = 180 + \phi(j\omega'_c)$$

Para um sistema de fase mínima ser estável,  $\beta$  deve ser positivo.

Nas figuras 11.35a e b mostramos as margens de fase e ganho de um sistema estável e de um sistema instável por meio de gráficos polares e dos diagramas logarítmicos (Bode). Nos gráficos logarítmicos, o ponto crítico no plano complexo corresponde às retas  $0 \text{ dB}$  e  $180^\circ$ .

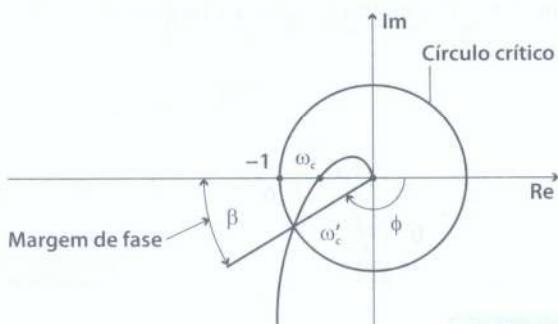
Conclusão:

Quanto à estabilidade absoluta:

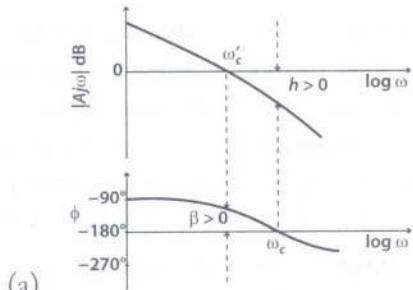
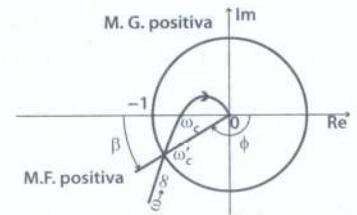
$$\begin{cases} MG(\text{dB}) > 0, \quad MF > 0^\circ \text{ e } \omega_c > \omega'_c \rightarrow \text{estável} \\ MG(\text{dB}) < 0, \quad MF < 0^\circ \text{ e } \omega_c < \omega'_c \rightarrow \text{instável} \end{cases}$$

Quanto à estabilidade relativa:

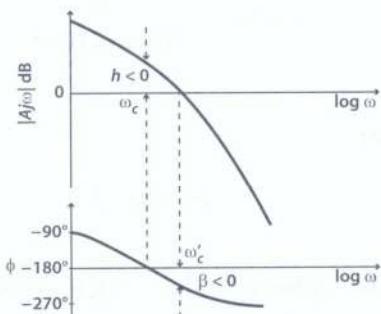
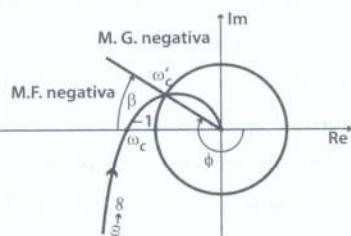
Para um bom desempenho do sistema, em geral se requer:  
 $\left\{ \begin{array}{l} 6\text{dB} < MG < 20\text{dB} \text{ e } 30^\circ < MF < 60^\circ \end{array} \right.$



**Figura 11.34** Frequência de cruzamento e círculo crítico.



(a)



(b)

**Figura 11.35** Margem de fase e margem de ganho.

### Exemplo 11.15

Obtenha as margens de ganho e de fase para o sistema indicado na Figura 11.36 para os seguintes casos:  
onde  $K = 10$ ,  $K = 31,25$  e  $K = 100$ .

Solução:

A malha aberta é

$$A(s) = G(s)H(s) = \frac{K}{(s+5)(s^2+s+1,25)}$$

$$A(s) = \frac{K}{(s^3+6s^2+6,25s+6,25)}$$

e com  $s = j\omega$

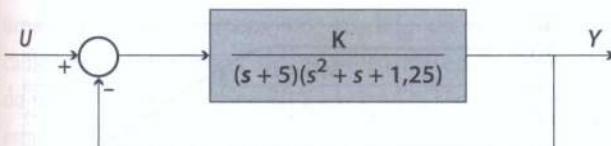
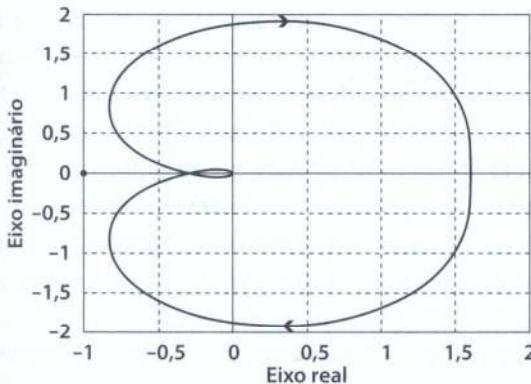
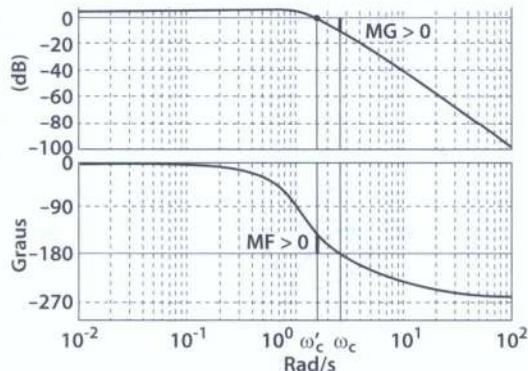


Figura 11.36

$$A(j\omega) = \frac{K}{(j\omega)^3 - 6\omega^2 + j6,25\omega + 6,25}$$

Dado o valor de  $K$ , essa fórmula permite calcular a resposta em frequência, e com os dados obtidos, desenhar os diagramas de Bode e de Nyquist de cada caso, representados nas figuras 11.37 e 11.38. Pode-se determinar também as margens de ganho e de fase por tentativa, a partir da expressão de  $A(j\omega)$ .

Figura 11.37 Diagrama de Nyquist para  $K = 10$ .Figura 11.38 Diagramas de Bode para  $K = 10$ .

Consideremos inicialmente  $K = 10$ .

Com algumas tentativas, obtém-se a frequência  $\omega_c$  de cruzamento de 0 dB e a correspondente margem de fase:

$$\omega_c' = 2,5 \text{ rad/s} \longrightarrow \phi = 180^\circ \longrightarrow MG = 9,89 \text{ dB}$$

Analogamente, obtém-se a frequência  $\omega_c'$  de cruzamento de  $-180^\circ$  e a correspondente margem de ganho:

$$\omega_c = 1,54 \text{ rad/s} \longrightarrow \phi = -142^\circ \longrightarrow Y(\text{dB}) = 0 \longrightarrow MF = 38^\circ$$

Esses resultados mostram que, com  $K = 10$ , o sistema é estável e está dentro de limites de bom desempenho quanto à estabilidade ( $30^\circ < MF < 60^\circ$  e  $6 \text{ dB} < MG < 20 \text{ dB}$ ), conforme figuras 11.37 e 11.38.

Consideremos agora  $K = 31,25$ .

Procedendo como no caso anterior, obtivemos

$$\omega_c = \omega_c' = 2,5 \longrightarrow \phi = 180^\circ \longrightarrow Y(\text{dB}) = 1 \longrightarrow MG = 0 \text{ dB} \longrightarrow MF = 0$$

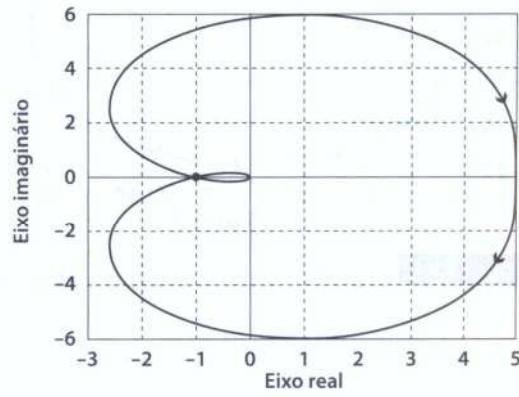
Para  $K = 31,25$ , temos um sistema crítico em que as frequências  $\omega_c$  e  $\omega_c'$  coincidem. As margens de fase e de ganho são nulas para a frequência crítica.

Função de transferência de malha fechada:

$$F(s) = \frac{31,25}{s^3 + 6s^2 + 6,25s + 37,5}$$

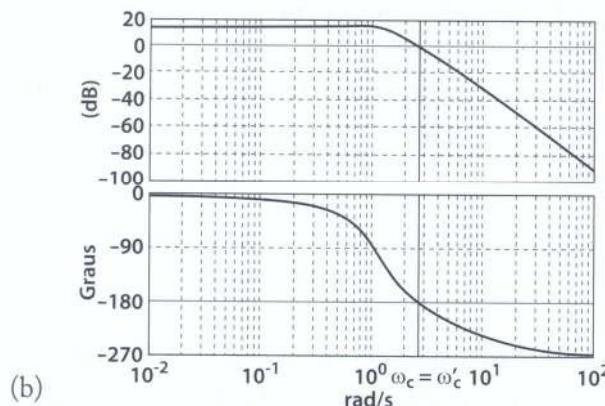
Polos:  $-6, j6,5$  e  $-j6,5$ .

Note que há dois polos no eixo imaginário, o que caracteriza um par de polos dominantes marginalmente estáveis, conforme figuras 11.39 e 11.40.



(a)

Figura 11.39 Diagrama de Nyquist para  $K = 31,25$ .



**Figura 11.40** Diagramas de Bode para  $K = 31,25$ .

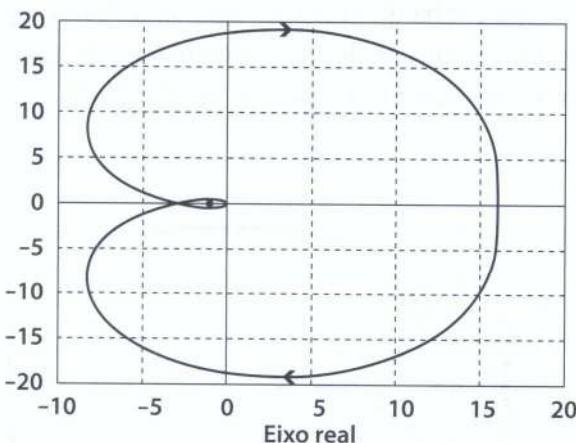
Considerando  $K = 100$ ,

$$F(s) = \frac{100}{s^3 + 6s^2 + 6,25s + 106,25}$$

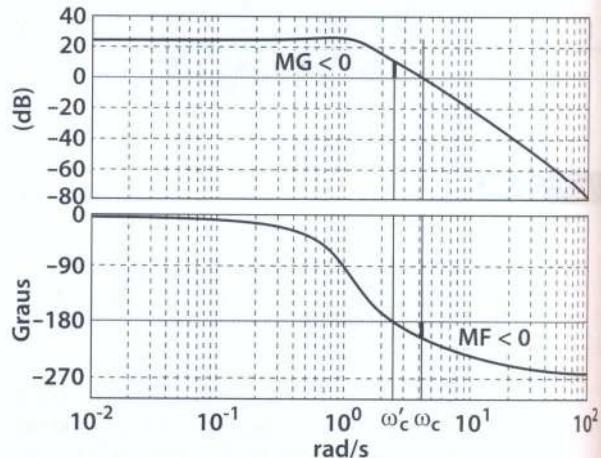
$$\omega_c = 2,5 \text{ rad/s} \longrightarrow \phi = 180^\circ \longrightarrow MG = -10,1 \text{ dB}$$

$$\omega'_c = 4,05 \text{ rad/s} \longrightarrow \phi = -205^\circ \longrightarrow y(\text{dB}) 1,00 \longrightarrow MF = -25^\circ$$

Não satisfaz sequer as condições de estabilidade absoluta (ver figuras 11.41 e 11.42).



**Figura 11.41** Diagrama de Nyquist para  $K = 100$ .

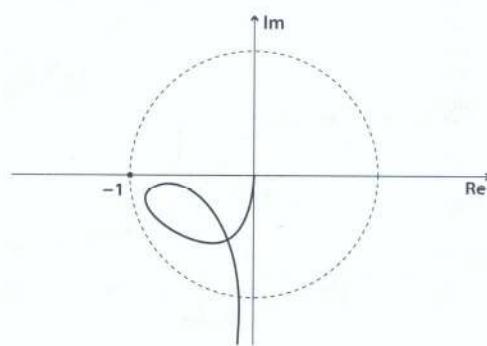


**Figura 11.42** Diagramas de Bode para  $K = 100$ .

## 11.6 Robustez

Os inevitáveis erros de modelagem da planta se traduzem em uma incerteza da função de transferência de malha aberta  $G(s)H(s)$  e, portanto, em uma incerteza no diagrama de Nyquist associado. O exemplo da Figura 11.43 ilustra como as margens de ganho e de fase são incapazes de representar a robustez do sistema.

Para a função de transferência nominal da planta, os valores das margens de estabilidade são, aproximadamente,  $90^\circ$  para a margem de fase e infinito para a margem de ganho. Esses valores sugerem erroneamente que o sistema tolera grandes erros de modelagem, e por isso tem elevada robustez. Note que, devido à proximidade da curva  $G(j\omega)H(j\omega)$  ao ponto  $-1 + 0j$ ,



**Figura 11.43** Caso em que as margens de ganho e de fase não representam a robustez do sistema.

uma pequena incerteza no modelo da planta pode causar uma mudança no número de envolvimentos do ponto  $-1 + 0j$ , fazendo com que o sistema perca a estabilidade.

Para estabelecer uma métrica de robustez, é necessário que o erro de modelagem seja caracterizado para permitir delimitar a incerteza. A Figura 11.44 ilustra o diagrama de Nyquist de um sistema incluindo o modelo nominal da planta e a ‘nuvem’ de incerteza, devido às incertezas desse modelo.

As incertezas de um modelo são classificadas em estruturadas e não estruturadas. As incertezas não estruturadas normalmente estão associadas a elementos cuja característica é função da frequência, tal como dinâmicas não modeladas e distúrbios. As incertezas estruturadas representam variações paramétricas no modelo da planta, por exemplo, no valor de certos polos e zeros da função de transferência.

A maneira mais conveniente de representar o erro de modelagem é na forma multiplicativa, dada por

$$\epsilon(s) = \frac{\tilde{G}(s) - G(s)}{G(s)},$$

em que  $\tilde{G}(s)$  representa a planta real e  $G(s)$ , o seu modelo nominal. Note que o valor do erro de modelagem  $\epsilon(s)$  é uma medida relativa do erro de modelagem. O erro de modelagem  $\epsilon(s)$  não é conhecido, mas é normalmente razoável conseguir estimar uma função  $e(j\omega)$ , que é um limite superior para  $|\epsilon(j\omega)|$ , nas frequências de interesse.

Para obter, em uma forma conveniente, uma condição de garantia de estabilidade do sistema na presença de erros de modelagem, é preciso fazer a hipótese de que o sistema em malha fechada é estável quando se utiliza o modelo nominal da planta. Adicionalmente, é preciso que o número de polos

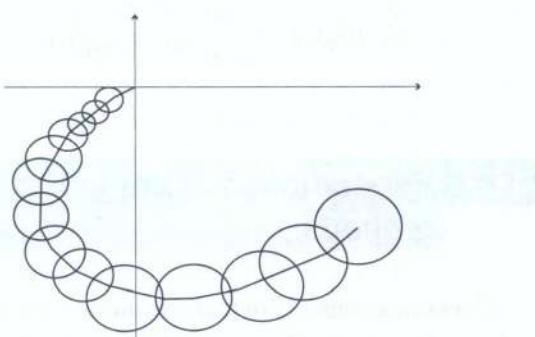


Figura 11.44 Nuvem de incerteza.

instáveis de  $\tilde{G}(s)$  seja o mesmo de  $G(s)$ . No caso de incertezas não estruturadas, significa dizer que a parte não modelada é estável – o que é razoável na prática.

Essa condição é facilmente obtida a partir da representação geométrica da incerteza, como ilustrado na Figura 11.45. Nesta ilustração,  $G_c(s)$  é o controlador, e  $H(s) = 1$ , sem perda de generalidade.

O círculo representa a região (‘nuvem’) de incerteza da função  $G(j\omega)G_c(j\omega)$  para uma dada frequência  $\omega$ . Se a ‘nuvem’ de incerteza está sempre do mesmo lado do ponto  $-1 + 0j$ , para todas as frequências  $\omega$ , então não há mudança no número de envolvimentos desse ponto. Assim, se o sistema nominal é estável, então o sistema é também estável para a planta real, ou seja, robustamente estável.

O raio da ‘nuvem’ de incerteza é dado por

$$\text{raio} = \max \left| \tilde{G}(j\omega) G_c(j\omega) - G(j\omega) G_c(j\omega) \right|.$$

Colocando-se  $G(j\omega)$   $G_c(j\omega)$  em evidência, obtemos

$$\text{raio} = \max \left| \left( \frac{\tilde{G}(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right) G(j\omega) G_c(j\omega) \right|$$

$$\text{raio} = \max \left| \frac{\tilde{G}(j\omega) - G(j\omega)}{G(j\omega)} \right| |G(j\omega) G_c(j\omega)|$$

$$\text{raio} = e(j\omega) |G(j\omega) G_c(j\omega)|$$

Para que a ‘nuvem’ esteja sempre do mesmo lado do ponto  $-1 + 0j$ , é preciso que o vetor que vai desse ponto até o centro do círculo seja estritamente maior

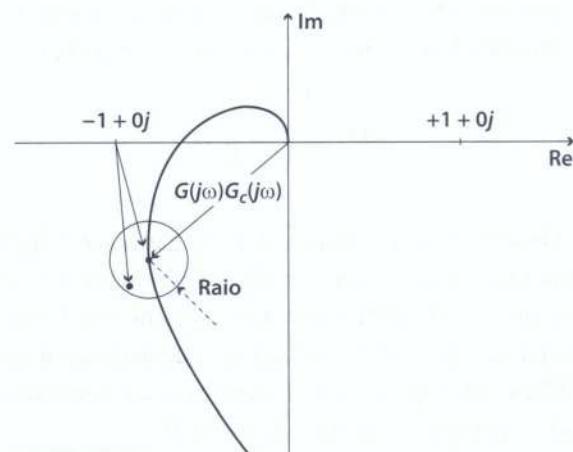


Figura 11.45 Representação geométrica da incerteza.

que o raio, ou seja,

$$|1 + G(j\omega)G_C(j\omega)| > \text{raio}$$

Dessa forma

$$|1 + G(j\omega)G_C(j\omega)| > e(j\omega) |G(j\omega)G_C(j\omega)|$$

ou

$$\frac{1}{e(j\omega)} > \left| \frac{G(j\omega)G_C(j\omega)}{1 + G(j\omega)G_C(j\omega)} \right| = |F(j\omega)|$$

Ou seja, o inverso de  $e(j\omega)$  determina uma barreira no diagrama de Bode de malha fechada. Se essa barreira não for violada, o sistema será robustamente estável.

Tipicamente, para o caso de incertezas não estruturadas, o erro é pequeno nas baixas frequências e elevado nas altas. Nestas condições, a barreira é limitante apenas nas altas frequências. Nas altas frequências, o ganho de malha  $G(j\omega)G_C(j\omega)$  é normalmente pequeno, pelos efeitos de filtragem típicos de plantas reais, e a condição de robustez pode ser aproximada por:

$$\frac{1}{e(j\omega)} > |G(j\omega)G_C(j\omega)|$$

que é uma condição mais apropriada para fins de projeto, visto que é uma restrição no diagrama de Bode de malha aberta. Entretanto, ela é apenas orientadora, e a condição sobre a malha fechada deve sempre ser verificada posteriormente.

Considere o seguinte exemplo. Deseja-se projetar o controlador  $G_C(s) = K$  de um sistema posicionador, cuja função de transferência nominal da planta é:

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

Determine o máximo valor do ganho  $K > 0$ , de forma que o sistema não perca a estabilidade, sabendo-se que o polo elétrico do acionamento foi desprezado na função  $G(s)$ . Entretanto, é razoável supor que a dinâmica desprezada é pelo menos cinco vezes mais rápida que o polo mecânico em  $-4 + 0j$ .

O diagrama de Bode de módulo das funções envolvidas é mostrado na Figura 11.46. O gráfico as-

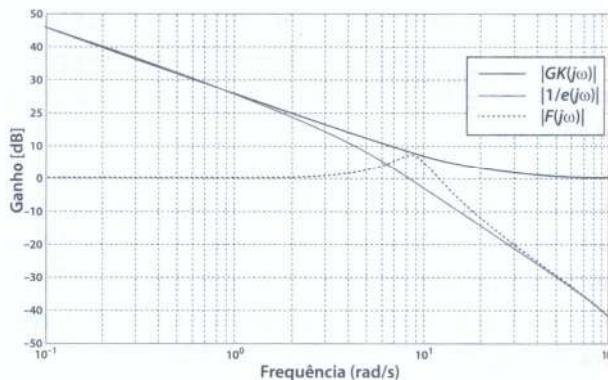


Figura 11.46 Diagramas de Bode de módulo das funções envolvidas.

sociado a  $|1/e(j\omega)|$  foi obtido para o pior caso, ou seja, para um polo em  $-20 + 0j$ , já que para valores menores que  $-20$  a barreira é menos restritiva. Ajustando-se o valor  $K = 2$ , o gráfico associado a  $|F(j\omega)|$  ainda fica abaixo, porém bem perto da barreira de robustez e, portanto, é o valor-limite da condição de estabilidade robusta.

Em resumo, é garantido que o sistema não perde a estabilidade para ganhos  $0 < K \leq 2$ . Uma vez que as condições de robustez são escritas a partir de desigualdades estritamente próprias, não se pode afirmar que o sistema perderá a estabilidade para  $K > 2$ . De fato, aplicando-se o critério de Routh para o sistema de malha fechada quando consideramos na planta o polo real em  $-20$ , obtemos um ganho crítico  $K = 2,4$ . Ou seja, o valor limite  $K = 2$  é conservador.

Note que, para não alterar o ganho da função de transferência de malha aberta, a inclusão do polo em  $-20$  na planta requer que o seu ganho deve ser corrigido, ou seja, multiplicado por 20.

$$\tilde{G}(s)G_C(s) = \frac{40}{s(s+4)} \left( \frac{20}{s+20} \right) K$$

## 11.7 Especificações em malha fechada

Para um sistema com realimentação como o indicado na Figura 11.47, podemos escrever a função de transferência de malha fechada como:

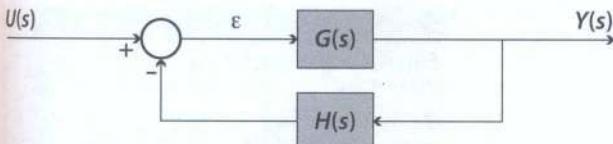


Figura 11.47

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

Para resposta em frequência senoidal, fazemos  $s = j\omega$ .

O cálculo da resposta senoidal do sistema pode ser facilmente obtido

$$F(j\omega) = \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)}$$

$F(j\omega)$  pode ser expresso em termos de módulo (ou amplitude) e fase, ou seja

$$F(j\omega) = M|\alpha|$$

sendo

$$M = M(j\omega) = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right| \quad \text{e}$$

$$|\alpha| = |\alpha(j\omega)| = \left| \frac{G(j\omega)}{1 + G(j\omega)H(j\omega)} \right|$$

ou

$$|\alpha| = \left| \frac{G(j\omega)}{(1 + G(j\omega)H(j\omega))} \right|$$

Uma curva típica de resposta em frequência em sistema de malha fechada é mostrada na Figura 11.48.

Estes gráficos mostram as seguintes grandezas características relativas a um sistema de malha fechada:

**M<sub>p</sub> – Pico de ressonância:** é definido como o máximo valor de  $M$ . Em geral, o valor de  $M_p$  dá uma indicação da estabilidade relativa. Normalmente, um valor grande de  $M_p$  corresponde a um grande sobre-sinal na resposta temporal a um degrau. Para a maioria dos projetos, o valor ótimo de  $M_p$  está entre 1,1 e 1,5 (0,83 dB a 3,5 dB).

$\omega_p$  – **Frequência de ressonância (frequência de pico):** frequência na qual ocorre o pico de ressonância.

$\omega_b$  – **Frequência de corte e largura de banda:** é definida como a frequência na qual  $M$  cai para 70,7% do nível na frequência zero, ou seja, cai de 3 dB do ganho de frequência zero. Para sistemas de 2<sup>a</sup> ordem, podemos relacionar  $M_p$ ,  $\omega_p$  e  $\omega_b$  com o grau de amortecimento  $\zeta$  e com a frequência natural do sistema não amortecido,  $\omega_n$ . Essas relações podem ser facilmente obtidas a partir das expressões da função harmônica de transferência dos sistemas de 2<sup>a</sup> ordem:

$$F(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{(j\omega)^2 + 2\zeta\omega_n(j\omega) + \omega_n^2} =$$

$$\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\frac{\omega}{\omega_n}}$$

Os resultados que se obtêm são os seguintes:

(1) Pico de ressonância.

$$M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}}$$

(2) Frequência de ressonância.

$$\omega_p = \omega_n\sqrt{1 - 2\zeta^2}$$

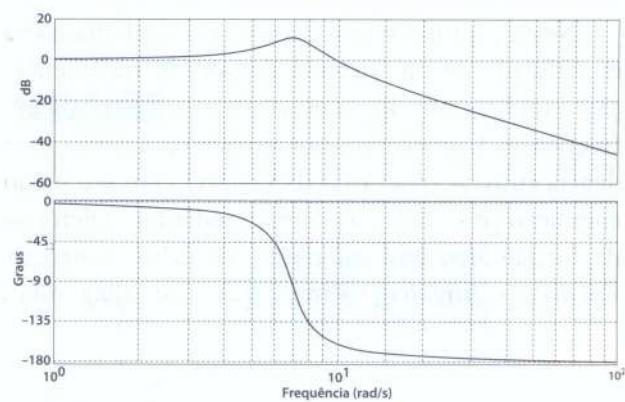


Figura 11.48 Diagramas de Bode de malha fechada.

Sendo  $\omega_p$  um valor real, então,  $2\zeta^2 \leq 1$ , ou seja,  $\phi \leq 0,707$ . Isto significa, simplesmente, que a existência do pico de ressonância e a respectiva frequência de ressonância só ocorrem em sistemas de 2ª ordem subamortecidos e com grau de amortecimento inferior a 0,707. Para os demais sistemas de 2ª ordem, o valor máximo da amplitude ocorre para  $\omega = 0$  (teríamos, então, neste caso,  $\omega_p = 0$  e  $M_p = 1$ ).

3) Largura de banda.

$$\omega_b = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

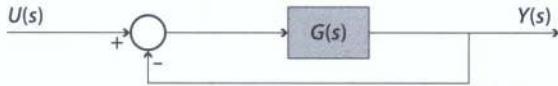
É interessante notar que  $M_p$  é função apenas de  $\zeta$ , enquanto  $\omega_p$  e  $\omega_b$  são funções de  $\omega_n$  e  $\zeta$ .

#### Exemplo 11.16

No o sistema de 2ª ordem indicado na Figura 11.49, tem-se:

$$G(s) = \frac{64}{s(s+8)}$$

- (a) Determine o pico de ressonância  $M_p$ .
- (b) Determine a frequência de ressonância  $\omega_p$ .
- (c) Determine a banda passante  $\omega_b$ .



**Figura 11.49** Diagrama de blocos.

#### Considerações finais

Neste capítulo vimos como é possível analisar a estabilidade de um sistema dotado de realimentação, com base nos diagramas polares de resposta em frequência. Começamos por apresentar a correspondência entre as trajetórias da variável  $s$  em seu plano complexo ( $\sigma + j\omega$ ) e as correspondentes trajetórias da função  $A(s)$  em seu plano, também complexo,  $\text{Re}(A(s)) + j\text{Im}(A(s))$ . Vimos que esses diagramas,

sob forma polar, permitem desenvolver um poderoso método de análise gráfica da estabilidade dos sistemas com realimentação, denominado critério de estabilidade de Nyquist. Entretanto, uma análise similar também pode ser feita com o auxílio dos diagramas de Bode de ganho e fase. Há, ainda, uma pequena introdução ao conceito de robustez de um sistema de controle.

Solução:

Em malha fechada, temos

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{64}{s^2 + 8s + 64},$$

o que nos permite escrever  $\alpha = 4$ ,  $\omega_n = 8$  e  $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = 0,5$

Logo,

$$(a) M_p = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{1}{0,866} = 1,155$$

$$M_p (\text{dB}) = 1,252 \text{ dB};$$

$$(b) \omega_p = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} = 8 \cdot 0,707 =$$

$$5,66 \text{ rad/s};$$

$$(c) \omega_b = \omega_n \sqrt{(1 - 2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}} =$$

$$8 \cdot 1,272 = 10,176 \text{ rad/s}.$$

Temos um sistema estável, bem comportado.

## Problemas propostos

1. Construa no plano  $A(s)$  a trajetória correspondente ao contorno da Figura 11.50, pela transformação  $s \rightarrow A(s)$ , para os seguintes casos:

$$(a) A(s) = \frac{1}{s}$$

$$(b) A(s) = \frac{1}{(s - 2)}$$

$$(c) A(s) = \frac{10}{s(s + 5)}$$

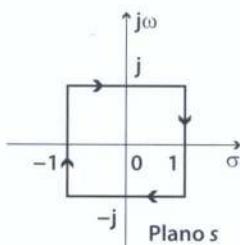


Figura 11.50

2. Verifique pelo critério de Nyquist a estabilidade dos sistemas cujas funções de transferência de malha aberta

$$A(s) = G(s)H(s)$$

são indicadas na Figura 11.51.

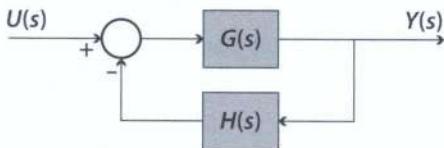


Figura 11.51

$$(a) A(s) = \frac{10.000}{(s + 20)(s + 50)}$$

$$(b) A(s) = \frac{50}{s(s + 3)(s + 5)}$$

$$(c) A(s) = \frac{100(s + 5)}{s^2(s + 2)(s + 4)}$$

$$(d) A(s) = \frac{1}{s - 0,8}$$

$$(e) A(s) = \frac{1}{s - 1,2}$$

$$(f) A(s) = \frac{(s - 3)(s + 0,5)}{(s + 1,5)(s + 1,2)(s + 0,3)(s + 0,2)}$$

$$(g) A(s) = \frac{0,5(s + 2)(s + 3)}{(s^2 - 3s + 11,25)}$$

3. Obtenha as margens de ganho e de fase do sistema indicadas na Figura 11.52 para os seguintes casos:  $K = 81$  e  $K = 200$ .

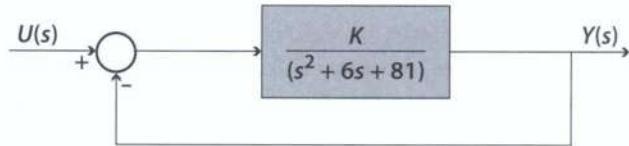


Figura 11.52

4. Obtenha as margens de ganho e de fase do sistema indicadas na Figura 11.53 para os seguintes casos:

$$(a) K = 200.$$

$$(b) K = 400.$$

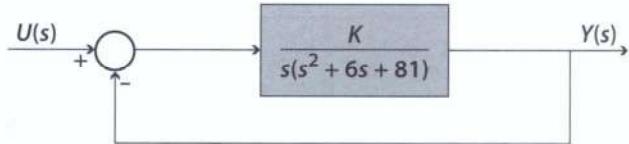


Figura 11.53

5. Obtenha as margens de ganho e de fase do sistema indicadas na Figura 11.54.

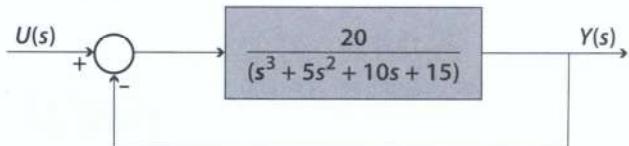


Figura 11.54

6. Obtenha as margens de ganho e de fase do sistema indicadas na Figura 11.55.

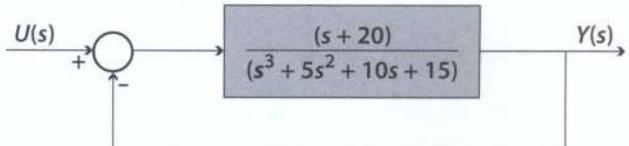


Figura 11.55

7. No sistema de 2<sup>a</sup> ordem indicado na Figura 11.56, tem-se:

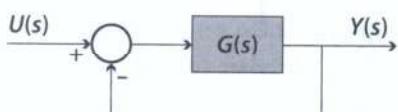
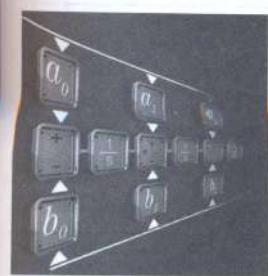


Figura 11.56

$$G(s) = \frac{81}{s(s+6)}$$

- (a) Determine o pico de ressonância  $M_p$ .  
(b) Determine a frequência de ressonância  $\omega_r$ .  
(c) Determine a banda passante  $\omega_b$ .

# capítulo 12



## Diagrama do Lugar das Raízes

Vários métodos gráficos e analíticos foram desenvolvidos com a finalidade de facilitar o estudo dos sistemas dinâmicos em geral, e dos de controle, em particular. Por exemplo, o método de análise por funções de transferência, os diagramas de blocos e os diagramas de resposta em frequência, já estudados. Outro método gráfico importante, que vamos estudar agora, é

o denominado método do lugar das raízes (*LR*). Trata-se de um método que permite localizar no plano  $s$  as raízes da equação característica de um sistema de malha fechada, em função da variação de um parâmetro (que, geralmente, é o ganho  $K$  do controlador). Como sabemos, as raízes da equação característica de um sistema são os polos desse sistema.

### 12.1 O método do Lugar das Raízes

Inicialmente, para esclarecer o que se deve entender por lugar das raízes (*LR*), vamos examinar dois exemplos simples. Veremos que, quando o parâmetro escolhido (ganho  $K$ , neste caso) varia de 0 a infinito, os polos de malha fechada descrevem no plano  $s$  trajetórias que se iniciam nos polos de malha aberta e se dirigem para os zeros de malha aberta, ou, na falta destes, vão para o infinito.

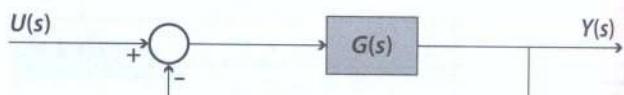
Nos exemplos simples que se seguem, o *LR* pode ser traçado diretamente pelo cálculo dos valores dos polos de malha fechada em função dos valores atribuídos ao parâmetro variável ( $K$ ).

#### Exemplo 12.1

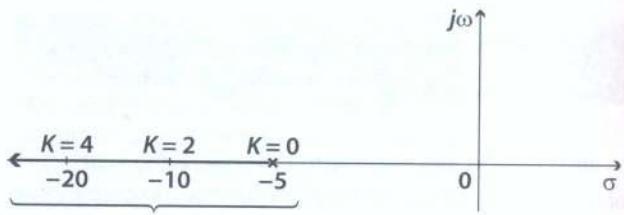
Seja um sistema como o da Figura 12.1a, com re-alimentação negativa unitária e  $G(s) = \frac{K}{s+5}$ . Neste caso, a função de transferência de malha fechada é

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s+5+K}$$

O polinômio característico é  $Q(s) = s + 5 + K$ . Os polos do sistema são as raízes de  $Q(s)$ :



(a)



(b)

Trajetória dos polos de malha fechada do sistema.

$$s = -(5 + K)$$

A posição desse polo no plano  $s$  depende do valor do parâmetro  $K$ . Fazendo-se variar  $K$  de 0 a infinito, o polo descreve no plano  $s$  uma trajetória que se inicia no ponto  $-5$  do eixo real e se dirige para  $-\infty$ , à medida que o valor de  $K$  aumenta (Figura 12.1b). Essa trajetória é o lugar (geométrico) das raízes (no caso uma só) do polinômio característico  $Q(s)$ . Para cada posição do polo, tem-se um valor bem definido para  $K$ . No diagrama do *LR*, a posição dos polos de malha aberta da função  $A(s) = G(s)H(s)$  é identificada

por um 'x', a posição dos zeros de malha aberta é identificada por um 'o', e as linhas propriamente ditas do lugar das raízes são identificadas por linhas grossas com setas que indicam o aumento do valor de  $K$ .

### Exemplo 12.2

Consideremos um sistema como o do problema anterior, mas sendo  $G(s) = \frac{K}{(s-2)(s+8)}$ . Em malha fechada, teremos

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^2 + 6s - 16 + K}$$

Então, os polos do sistema são as raízes do polinômio  $Q(s) = s^2 + 6s - 16 + K$ :

$$s_{1,2} = -3 \pm \sqrt{25 - K}$$

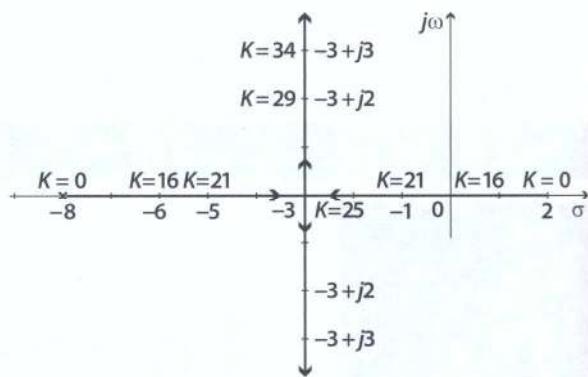
A Tabela 12.1 indica as raízes para diversos valores de  $K$ :

**Tabela 12.1** Raízes de  $Q(s)$

$K$	0	16	21	25	29	34
$s_1$	2	0	-1	-3	$-3+j2$	$-3+j3$
$s_2$	-8	-6	-5	-3	$-3-j2$	$-3-j3$

A Figura 12.2 mostra a trajetória descrita pelos polos  $s_1$  e  $s_2$  quando  $K$  varia de 0 a infinito. As trajetórias nascem nos polos de malha aberta e se dirigem para os zeros de malha aberta ou, na falta desses, vão para o infinito. Essas trajetórias são chamadas de ramos do lugar das raízes.

Nesse exemplo, enquanto  $K$  varia de 0 a 25, os polos de malha fechada que nascem nos polos de malha aberta em 2 e -8 percorrem segmentos do eixo real em sentidos contrários até se encontrarem no ponto -3. Nesse ponto,  $K = 25$ . Aumentando-se ainda mais os valores de  $K$ , as trajetórias destacam-se perpendicularmente ao eixo real avançando em sentidos opostos. Prosseguindo, à medida que  $K$  tende para o infinito, os ramos verticais (paralelos ao eixo imaginário) tendem para  $+\infty$  e  $-\infty$ , respectivamente. Os pontos, onde os segmentos em oposição se encontram e se separam ( $-3 + 0j$ , no exemplo), são denominados pontos de separação ou pontos de partida do eixo real.



**Figura 12.2** Trajetória dos polos (lugar das raízes).

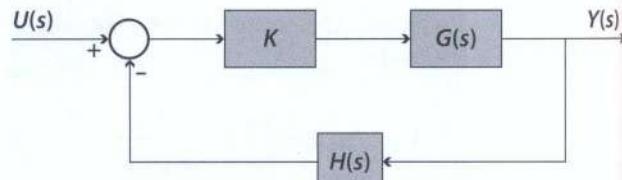
## 12.2 Princípios do método do LR

Trata-se de um método gráfico que permite localizar no plano  $s$  as raízes da equação característica de um sistema de malha fechada, em função de um parâmetro, a partir da função de transferência de malha aberta. O parâmetro utilizado geralmente é a constante  $K$ , que aparece frequentemente como um ganho ajustável fazendo parte dos compensadores dos sistemas de controle para permitir uma sintonia fina do controlador. Por essa razão, vamos adotar, para efeito da obtenção do *LR*, o diagrama de blocos indicado na Figura 12.3, em que a constante  $K$  fica externa a  $G(s)$ . Note, portanto, que  $G(s)$  pode estar representando vários subsistemas do sistema de controle, a saber: o compensador, o atuador e a planta. Às vezes, porém, o compensador se reduz a um ganho ( $K$ ).

$$F(s) = \frac{KG(s)}{1 + KG(s)H(s)}$$

ou, adotando-se a notação  $A(s) = K G(s) H(s)$ ,

$$F(s) = \frac{KG(s)}{1 + A(s)}$$



**Figura 12.3**

A equação característica pode, então, ser escrita genericamente:  $Q(s) = 1 + A(s) = 0$ , ou  $A(s) = -1$ , que é a equação básica do método do LR. Sendo  $A(s)$  uma expressão complexa, pode ser escrita sob a forma retangular ou polar:

$$A(s) = -1 + 0j \quad A(s) = 1 \left| -180^\circ \pm N360^\circ \right.$$

Logo, os polos de malha fechada (ou seja, de  $F(s)$ ) são pontos do plano  $s$  onde  $A(s)$  tem módulo unitário (condição de módulo ou de ganho) e ângulo de fase  $\phi = -180^\circ \pm N360^\circ$ , sendo  $N = 0, 1, 2, 3, \dots$  (condição angular):

condição de módulo:

$$A(s) = |A(s)| \angle \phi = -1 \begin{cases} |A(s)| = 1 \\ \text{condição angular:} \\ \phi = -180^\circ \pm N360^\circ \\ (\text{com } N = 0, 1, 2, 3, \dots). \end{cases}$$

Baseado na condição angular, faz-se a interpretação vetorial da função transferência em que cada fator  $(s + a)$  é considerado com um vetor  $[s - (-a)]$  de origem na posição  $-a$  e extremidade em  $s$ . Por causa dessa interpretação, para a aplicação do método do LR, é necessário primeiro transformar a função  $A(s) = G(s)H(s)$  dada, em uma representação com o seguinte formato (primeira forma normal, fatorada):

$$A(s) = K \frac{(s + z_m)(s + z_{m-1}) \dots (s + z_1)}{(s + p_n)(s + p_{n-1}) \dots (s + p_1)}$$

### Exemplo 12.3

Seja um sistema cuja função de transferência de malha aberta é:

$$A(s) = \frac{K}{(s + a)(s + b)} = \frac{K}{(\rho_a |\theta_a|)(\rho_b |\theta_b|)} = \frac{K}{\rho_a \rho_b \left| (\theta_a + \theta_b) \right|}$$

ou

$$A(s) = \frac{K}{\rho_a \rho_b} \left| -(\theta_a + \theta_b) \right|$$

Mas  $A(s) = -1$ , resultando (Figura 12.4):

$$\left| \frac{K}{\rho_a \rho_b} \right| = 1 \quad (1)$$

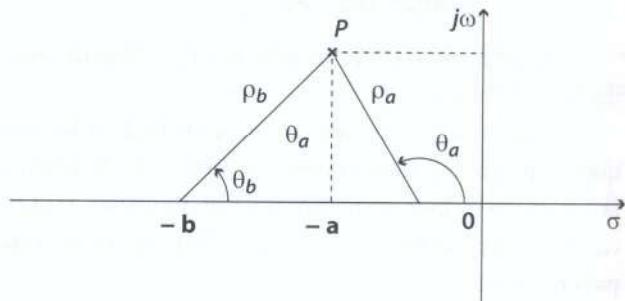
$$\phi = -(\theta_a + \theta_b) = -180^\circ \quad (2)$$

sendo

$$P - (-a) = P + a = \rho_a \left| \theta_a \right| \quad \text{e}$$

$$P - (-b) = P + b = \rho_b \left| \theta_b \right|$$

A equação (2) permite localizar geometricamente, por tentativas, a posição do ponto  $P$  (raiz de  $A(s) = -1$ ), e a equação (1) permite que se determine o valor de  $K$  nesse ponto.



**Figura 12.4** Interpretação vetorial.

## 12.3 Regras básicas de construção



Um engenhoso conjunto de regras permite que se construa e se aprimore com facilidade um esboço do diagrama do LR de  $A(s) + 1 = 0$ , mesmo no caso de sistemas complexos. A localização de pontos exatos por tentativa fica reduzida a poucos casos na fase final da construção.

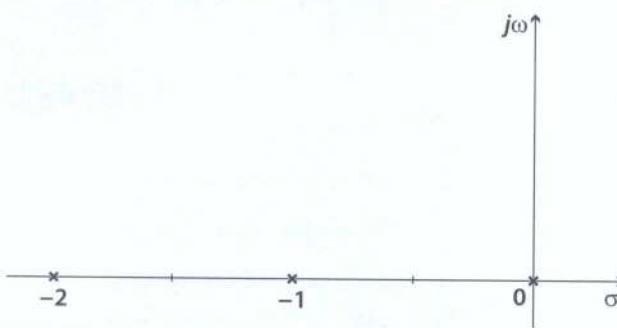
### Exemplo 12.4

Para ilustrar a aplicação das regras de construção do LR, adotaremos o seguinte exemplo de um sistema dotado de realimentação unitária:

$$A(s) = G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)}$$

As regras de construção do LR são as seguintes:

### ■ 12.3.1 Localizar os polos e zeros de malha aberta no plano s



**Figura 12.5** Polos do sistema do Exemplo 12.4. Não há zeros.

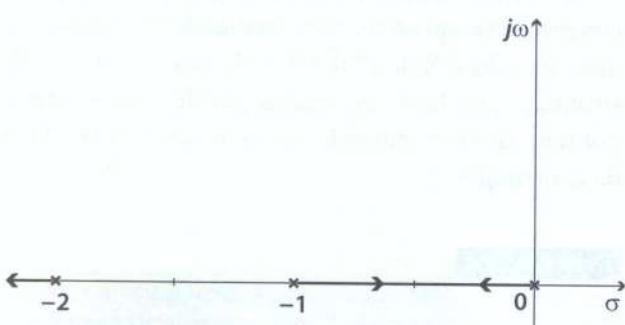
### ■ 12.3.2 Determinar o número total de ramos do LR.

Esse número é igual ao número de polos de malha aberta (*m.a.*).

Sobre os ramos, indica-se um sentido de percurso que corresponde aos valores crescentes de  $K$ . Como já vimos, os ramos têm origem nos polos de *m.a.* e terminam nos zeros de *m.a.* ou, na falta de zeros, vão para o infinito.

### ■ 12.3.3 Determinar os segmentos do LR pertencentes ao eixo real

Tais segmentos situam-se à esquerda de um número ímpar de polos + zeros (ver Figura 12.6). É fácil verificar que só os pontos desses segmentos satisfazem a condição angular.



**Figura 12.6** Segmento do eixo real.

### ■ 12.3.4 Determinar o número de ramos que vão para o infinito

Esse número é igual a  $p - z$  (número de polos de *m.a.* menos o número de zeros de *m.a.* de  $A(s)$ ). No Exemplo 12.4, tem-se  $p = 3$  e  $z = 0$ . Logo, há três ramos que se dirigem para o infinito. Um desses ra-

mos é o que se dirige para  $-\infty$ , sobre o semieixo real negativo. Os outros dois ramos que se dirigem para o infinito têm origem no ponto de separação (de partida) que ocorre no segmento do eixo real existente entre a origem e -1. Veremos ainda que os ramos que vão para o infinito apresentam simetria em relação ao eixo real. De fato, todo o diagrama do *LR* simétrico em relação a esse eixo.

### ■ 12.3.5 Determinar os pontos de separação sobre o eixo real

Os pontos de separação ocorrem nos ramos dos segmentos em que há conflito de sentidos de percurso (por exemplo, segmento entre 0 e -1, no caso que estamos estudando). Saindo de dois polos, extremidades de um mesmo segmento do eixo real, à medida que o valor de  $K$  aumenta, os polos de malha fechada percorrem sentidos opostos nesse segmento e acabam por se encontrar em uma certa posição. A partir daí (ponto de separação), os ramos descritos por esses polos se separam, deixam o eixo real, e passam a ser segmentos de polos complexos no plano *s*. Podem dirigir-se para zeros de *m.a.*, para o infinito ou para pontos de separação de chegada, de volta ao eixo real.

Conforme visto anteriormente, os pontos de separação no eixo real ocorrem no caso em que há dois ramos contíguos no eixo real, que avançam em sentidos opostos à medida que o valor de  $K$  aumenta. No ponto de encontro desses dois ramos em oposição, para um aumento posterior de  $K$ , eles se separam do eixo real. Isso significa que o valor de  $K$  é máximo no ponto de separação. Por outro lado, ao longo do eixo real,  $K$  é função de  $\sigma$  ( $\sigma$  é a parte real de  $s = \sigma + j\omega$ ). O ponto em que o valor de  $K$  é máximo (ou mínimo) pode ser obtido pela equação

$$\frac{dK}{d\sigma} = 0$$

Da mesma forma que nos segmentos limitados por polos que dão origem a pontos de separação de saída, os segmentos limitados por zeros de *m.a.* têm sentidos divergentes e dão origem a pontos de separação de chegada.

Os pontos de separação (de partida ou de chegada) ocorrem muitas vezes aproximadamente no meio dos segmentos limitados pelos polos (ou zeros) confli-

tantes. Mas a posição exata desses pontos de separação deve ser obtida com auxílio da fórmula apresentada.

Voltando ao exemplo com que estamos ilustrando a aplicação dessas regras de construção, vamos determinar com precisão o ponto de separação existente entre os polos em 0 e -1. A condição básica do método do LR ( $A(s) = -1$ ),

$$A(s) = \frac{K}{s(s^2 + 3s + 2)} = -1$$

permite-nos escrever, com  $s = \sigma$ :

$$K = -\sigma(\sigma^2 + 3\sigma + 2)$$

Derivando

$$\frac{dK}{d\sigma} = -(3\sigma^2 + 6\sigma + 2)$$

Logo, temos  $\sigma^2 + 2\sigma + \frac{2}{3} = 0$ , cujas raízes são:  $\sigma_1 = -0,42$  e  $\sigma_2 = -1,58$ .

O primeiro valor corresponde ao ponto de separação procurado. O segundo valor incide fora do LR para  $K > 0$  e, portanto, deve ser ignorado.

### ■ 12.3.6 Comportamento no infinito

Os ramos que se dirigem para o infinito ficam balizados por assíntotas que podem ser facilmente localizadas no plano  $s$ . As assíntotas de uma curva, como se sabe, são tangentes a essa curva, cujo ponto de tangência está no infinito. As assíntotas dos ramos que vão para o infinito nos diagramas do LR gozam de uma importante propriedade: todas elas saem de um mesmo ponto no eixo real. É o denominado ponto de irradiação das assíntotas. Prova-se facilmente (Ogata K. op. cit., p. 289-90) que esse ponto de irradiação das assíntotas é dado pela expressão:

$$\sigma_i = \frac{\sum \text{polos m.a.} - \sum \text{zeros m.a.}}{p - z}$$

sendo  $p$  o número de polos de m.a. e  $z$  o número de zeros de m.a.

Já a direção das assíntotas pode ser facilmente calculada em função dos ângulos que formam entre si  $\Delta\theta_a$  (são todos iguais) e com o eixo real. A primeira assíntota forma com o eixo real um ângulo

$$\theta_{a1} = \frac{180^\circ}{p - z}$$

e o ângulo entre assíntotas é o dobro desse

$$\Delta\theta_a = \frac{360^\circ}{p - z}$$

Ângulo da enésima ( $n$ ) assíntota com o eixo real pode, então, ser calculado diretamente pela fórmula

$$\theta_{an} = \theta_{a1} + (n - 1)\Delta\theta_a = \frac{360^\circ n - 180^\circ}{p - z}$$

Note que as assíntotas se dispõem simetricamente em relação ao eixo real.

Voltando ao exemplo que estamos seguindo, calculemos o ponto de irradiação e a direção das assíntotas (ver Figura 12.7).

Com um polo na origem e os outros dois em -1 e -2 e nenhum zero, o ponto de irradiação é obtido por

$$\sigma_a = \frac{0 - 1 - 2}{3 - 0} = -1$$

e os ângulos calculados:

- primeira assíntota:  $\theta_{a1} = \frac{180^\circ}{3 - 0} = 60^\circ$ ;
- entre assíntotas:  $\Delta\theta_a = \frac{360^\circ}{3 - 0} = 120^\circ$ ;
- segunda assíntota  $\theta_{a2} = 60^\circ + 120^\circ = 180^\circ$ ;
- terceira:  $\theta_{a3} = 180^\circ + 120^\circ = 300^\circ$  ou  $\theta_{a3} = -60^\circ$ .

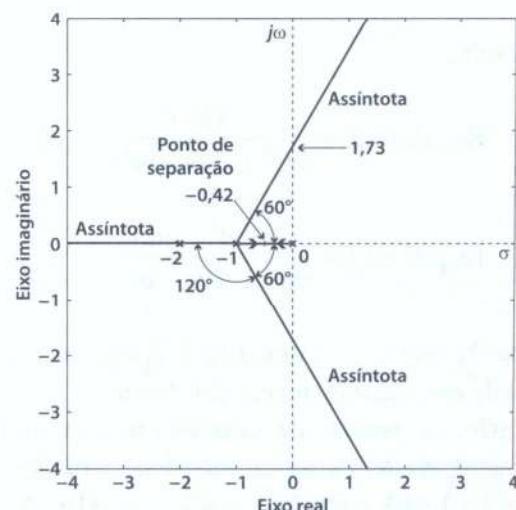


Figura 12.7 Assíntotas.

### ■ 12.3.7 Pontos de cruzamento do LR com o eixo imaginário

Note que, nos pontos sobre o eixo imaginário, temos  $\sigma = 0$ , isto é,  $s = j\omega$ . Por outro lado, a equação característica de malha fechada torna-se  $A(j\omega) = -1$ . Então, para determinar os pontos de cruzamento temos duas equações

$$\operatorname{Re}\{A(j\omega)\} = -1$$

$$\operatorname{Im}\{A(j\omega)\} = 0$$

A segunda equação permite determinar os valores de  $\omega$  correspondentes aos pontos de cruzamento com o eixo  $j\omega$ . Levando-se esses valores de  $\omega$  na equação anterior, determinam-se os valores de  $K$  nesses pontos. Na solução dessa equação é normalmente conveniente eliminar a parte imaginária do denominador. Isso é facilmente obtido multiplicando-se numerador e denominador pelo conjugado complexo do denominador:

$$\begin{aligned} \frac{1}{a+jb} &= \left[ \frac{1}{a+jb} \left( \frac{a-jb}{a-jb} \right) \right] = \frac{a-jb}{a^2+b^2} = \\ &\left( \frac{a}{a^2+b^2} \right) + \left( \frac{-b}{a^2+b^2} \right) j \end{aligned}$$

No exemplo que estamos seguindo:

$$A(j\omega) = \frac{K}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)} = \frac{K}{(-3\omega^2) + (2\omega - \omega^3)j}$$

ou

$$A(j\omega) = \frac{K[(-3\omega^2) - (2\omega - \omega^3)j]}{(-3\omega^2)^2 + (2\omega - \omega^3)^2} = -1 + 0j$$

Resulta:

$$\operatorname{Re}\{A(j\omega)\} = \frac{-3K\omega^2}{9\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2} = -1 \quad (1)$$

$$\operatorname{Im}\{A(j\omega)\} = \frac{K(\omega^3 - 2\omega)}{9\omega^4 + (2\omega - \omega^3)^2} = 0 \quad (2)$$

De (2), resulta para  $\omega \neq 0$ ,  $\omega^2 = 2$ , logo,  $\omega = \pm\sqrt{2}$ , e levando esse valor de  $\omega^2$  em (1):  $K = 6$ .

Então, os pontos de cruzamento com o eixo imaginário, neste exemplo, são dois, situados em  $\omega_1 = \sqrt{2} = 1,414$  e em  $\omega_2 = -\sqrt{2} = -1,414$ . Nesses pontos,  $K = 6$ .

Outro meio de fazermos a determinação desses pontos de interseção do  $LR$  com o eixo imaginário é com auxílio do critério de Routh para a determinação da estabilidade. A ideia é a seguinte: aplica-se o critério de Routh para o sistema em malha fechada; se não houver troca de sinais na coluna principal da tabela de Routh, o sistema é estável, e os polos estarão todos no  $SPE$ ; se houver uma ou mais trocas de sinais, haverá polos no  $SPD$ , e o sistema poderá ser instável. Para detectar polos no eixo imaginário, devemos ter zero na coluna principal com a linha toda nula, o que indica a possibilidade de polos que não estejam nem no  $SPE$  nem no  $SPD$ . Onde estarão esses polos? Só podem estar no eixo imaginário. Então, adota-se um valor de  $K$  que anule toda uma linha da tabela (ver Cap. 8, Caso 2, p. 130 sobre o critério de Routh). Com auxílio dos coeficientes da linha anterior à linha toda nula, constrói-se o polinômio auxiliar (ver critério de Routh, Cap. 8). As raízes desse polinômio contêm os polos no eixo imaginário, ou seja, os pontos de cruzamento com o eixo  $j\omega$ . O valor de  $K$  adotado para obter a linha toda nula é o que corresponde a esses polos imaginários.

No exemplo em pauta, temos em malha fechada

$$F(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+2)+K} = \frac{K}{s^3 + 3s^2 + 2s + K}$$

O polinômio característico é, então,

$$Q(s) = s^3 + 3s^2 + 2s + K$$

Pela tabela Routh (Tabela 12.2), vê-se que o sistema é estável para  $0 < K < 6$ . Para  $K = 6$ , a linha de referência  $s$  torna-se toda nula, e a linha anterior fornece o polinômio auxiliar

$$q(s) = 3s^2 + 6$$

cujas raízes  $s_{1,2} = \pm j\sqrt{2}$  são os polos do sistema de malha fechada sobre o eixo imaginário, quando  $K = 6$ . Substituindo-se esse valor de  $K$  em  $Q(s)$ , o terceiro polo do sistema pode ser obtido dividindo-se  $Q(s)/q(s) = \frac{1}{3}s + 1$ . Seu valor resulta:  $s_3 = -3$ .

**Tabela 12.2** Tabela de Routh

$s^3$	1	2
$s^2$	3	$K$
$s$	$6 - K$	
1	$K$	

Finalmente, o diagrama completo está indicado na Figura 12.8.

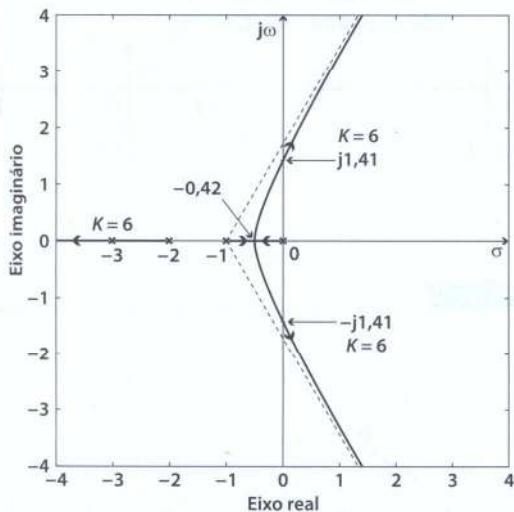


Figura 12.8 LR do Exemplo 12.4.

#### Observação final:

Note que todo o diagrama do *LR* é simétrico em relação ao eixo real.

## 12.4 Refinamento e calibração do esboço do *LR*

O método do *LR* foi inicialmente desenvolvido como um método gráfico que permite visualizar de forma muito cômoda e muito útil o panorama global das possibilidades e limitações do comportamento em malha fechada de um sistema, a partir do conhecimento dos polos e zeros de malha aberta.

Os esboços que se podem conseguir rapidamente pela simples aplicação das regras básicas do *LR* são extremamente úteis para uma primeira análise e uma indicação sobre as modificações a serem introduzidas no sistema para melhoria da estabilidade e adequação do comportamento dinâmico às especificações desejadas. Entretanto, pode-se completar e melhorar o diagrama para os casos em que sejam necessárias informações mais completas e precisas. Por um lado, pode-se aprimorar o formato das linhas situadas fora do eixo real. Pode-se ainda introduzir a calibração dos ramos em geral, isto é, determinar para os pontos de interesse, os valores de  $K$ . A precisão e o ajuste da forma e da localização dos ramos fora do eixo real são feitos utilizando-se a condição angular do *LR*, às vezes diretamente, às vezes por meio de aproximações sucessivas. Para a calibração dos ramos, utiliza-se a condição de módulo.

Um aspecto de interesse para o aprimoramento do diagrama é a determinação da direção com que os ramos que nascem nos polos, saem desses polos. Essa direção que fica determinada pelos denominados ângulos de partida também pode ser facilmente calculada com auxílio da condição angular do *LR*.

O aprimoramento e a calibração dos ramos podem ser feitos por processos exclusivamente gráficos que são úteis, mas, muitas vezes, são também trabalhosos. Esses processos atualmente podem ser facilitados por meio de programas computacionais. Há, nos dias de hoje, programas que desenham e calibraram de forma completa todo *LR*, o que, entretanto, não invalida o estudo conceitual e construtivo que fazemos aqui. Pelo contrário, esse estudo permite o bom entendimento do que seja o *LR*, dá uma visão do seu alcance e de sua utilização e permite que se tire dos programas computacionais todo proveito e alcance de que eles são capazes de oferecer aos profissionais com o preparo e o conhecimento indispensáveis a suas aplicações.

Para ilustrar estas observações, utilizaremos os exemplos que seguem.

#### Exemplo 12.5

Desenhe o diagrama do *LR* do sistema indicado na Figura 12.9.

Solução:

Neste caso, a função de transferência de malha aberta é

$$A(s) = G(s)H(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2-1)}$$

ou

$$A(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s-1)}$$

com polos em  $-1$  e  $+1$  e um zero em  $-2$ . Há, portanto, dois segmentos no eixo real: um ramo que vai de  $-1$  a  $+1$  e outro que vai de  $-2$  a  $-\infty$ . Em ambos os segmentos há conflito de sentidos de percurso (Figura 12.10). Teremos, então, dois pontos de separação, um em cada segmento. No segmento entre polos teremos um ponto de separação de partida. No segmento que vai de  $-2$  a  $-\infty$ , o ponto de separação é de chegada. Temos, também, ao todo, dois ramos que se originam no ponto de separação de partida e se dirigem para o ponto de separação de chegada.

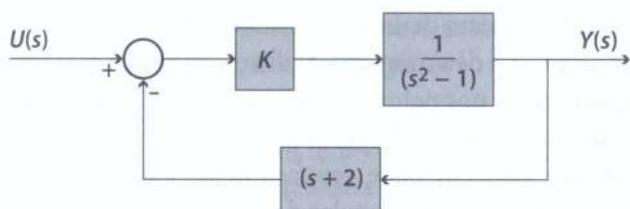


Figura 12.9 Diagrama de blocos.

Vamos determinar os pontos de separação e esboçar os segmentos que vão dos pontos de separação de partida aos pontos de separação de chegada. Como  $A(s) = -1$ , resulta

$$K = -\frac{s^2 - 1}{s + 2}$$

Como sabemos, os pontos de separação são obtidos igualando-se a zero a derivada de  $K$  em relação a  $s = \sigma$ :

$$\begin{aligned} \frac{dK}{d\sigma} &= -\frac{2\sigma(\sigma + 2) - (\sigma^2 - 1)}{(\sigma + 2)^2} = \\ &= -\frac{\sigma^2 + 4\sigma + 1}{(\sigma + 2)^2} = 0 \end{aligned}$$

Resultam as raízes  $\sigma_1 = -0,27$  e  $\sigma_2 = -3,73$ , ambos válidos porque se inserem nos ramos conflitantes do LR sobre o eixo real.

Os ramos que separam do eixo real no ponto  $\sigma_1 = -0,27$  dirigem-se ao ponto de chegada  $\sigma_2 = -3,73$ . São dois segmentos curvilíneos, simétricos em relação ao eixo real, que fazem esse percurso. Para podermos desenhar com alguma precisão esse segmentos é necessário que se determine um ou mais pontos pertencentes a esses ramos. Na Figura 12.11, traçamos duas curvas,  $a$  e  $b$ , ligando os pontos de separação, mas não sabemos qual das duas é mais próxima da curva correta. A maneira de fazermos o ajuste é procurar pelo menos um ponto que realmente pertença ao ramo correto do LR. O processo se faz por tentativas e aproximações sucessivas.

Se o ponto  $P$  da figura, escolhido arbitrariamente em uma posição plausível  $s = -2 \pm j1,5$ , pertencer realmente a um ramo do LR, a condição angular do LR deverá ser satisfeita. No caso:

$$\phi = \theta_1 + \theta_2 - \theta_3 = -180^\circ \pm N360^\circ$$

sendo (ver a Figura 12.11)

$$\begin{aligned} \theta_1 &= 180^\circ - \arctan\left(\frac{1,5}{-1}\right) = \\ &= 180^\circ - 26,56^\circ = 153,43^\circ \end{aligned}$$

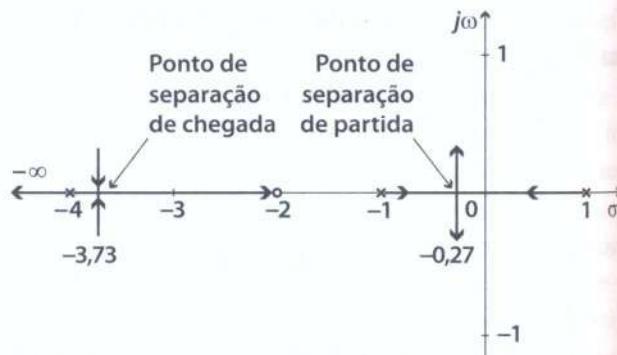


Figura 12.10

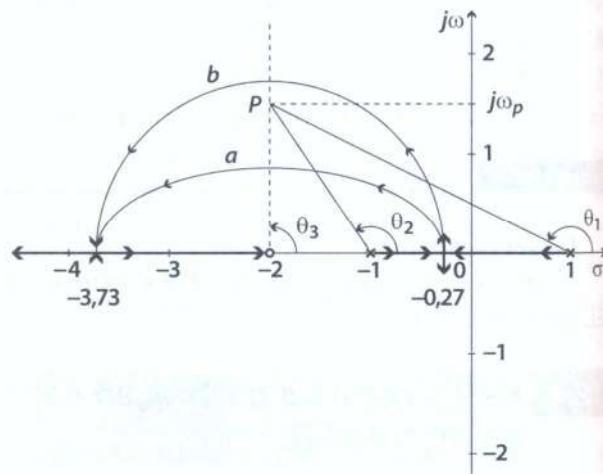


Figura 12.11 Ajuste do LR do exemplo 12.5.

$$\begin{aligned} \theta_2 &= 180^\circ - \arctan\left(\frac{1,5}{1}\right) = \\ &= 180^\circ - 56,31^\circ = 123,69^\circ \end{aligned}$$

$$\theta_3 = 90^\circ$$

Resulta

$$\phi = 153,43 + 123,69 - 90 = 187,12^\circ$$

Pouco acima da condição angular ( $\phi = 180^\circ$  para  $N = 1$ ), podemos tentar melhorar o resultado escolhendo uma nova posição para o ponto de teste. O resultado obtido, um pouco acima dos  $180^\circ$  da condição angular, sugere, de acordo com a figura, que se faça uma tentativa para um ponto um pouco acima do anterior. Adotaremos a posição  $s = -2 \pm j2,0$ . Refazendo os cálculos, obtemos:

$$\theta_1 = 146,31^\circ \quad \theta_2 = 116,56^\circ \quad \theta_3 = 90^\circ$$

Finalmente,

$$\phi = 146,31 + 116,56 - 90 = 172,87^\circ$$

O resultado agora é um pouco abaixo do desejado. Deveremos tentar uma posição intermediária. Por exemplo,  $s = -2 \pm j7,5$ . Resulta:

$$\theta_1 = 149,74^\circ \quad \theta_2 = 119,74^\circ \quad \theta_3 = 90^\circ$$

$$\phi = 149,74 + 119,74 - 90 = 179,48^\circ$$

Muito próximo do resultado correto! Mas temos ainda um refinamento final com  $s = -2 \pm j1,73$ :

$$\theta_1 = 150,03^\circ \quad \theta_2 = 120,03^\circ \quad \theta_3 = 90^\circ$$

$$\phi = 150,029 + 120,029 - 90 = 180,058^\circ$$

Resultado bastante satisfatório.

Isso quer dizer que no semiplano superior do plano  $s$  o ramo que parte do ponto  $-0,27$  do eixo real e se dirige para o ponto  $-3,73$  do mesmo eixo passa pelo ponto  $P$  na posição  $s = -2 \pm j1,73$ . O refinamento desse ramo pode ser ainda melhorado com a determinação de outros pontos ao longo de da trajetória. Uma vez determinado esse ramo, outro, no semiplano inferior, pode ser construído por simetria. A Figura 12.12 mostra o diagrama do LR completo, do sistema em estudo.

#### Observação

Nos diagramas do LR com dois polos e um ou dois zeros, em que ocorram ramos fora do eixo real, prova-se que esses ramos são arcos de circunferência. O conhecimento desse fato, no exemplo visto, tornaria desnecessário o trabalho de cálculos por tentativas.

#### Exemplo 12.6

Construa o diagrama do LR do sistema dotado de realimentação unitária negativa, cuja função de transferência do ramo direto é:

$$G(s) = \frac{K(s-2)}{(s+2)(s^2-2s+5)}$$

Solução:

A função de transferência do ramo direto é:

$$A(s) = G(s) = \frac{K(s-2)}{(s+2)(s^2-2s+5)} = \frac{K(s-2)}{s^3+s+10}$$

Temos um zero em  $+2$ , um polo real em  $-2$  e dois polos complexos  $1 \pm j2$ .

$$A(s) = \frac{K(s-2)}{s^3+s+10} = -1$$

Pela aplicação das duas primeiras regras, a localização dos polos e zeros, bem como o segmento sobre o eixo real, são indicados na Figura 12.13. O número total de ramos é três. Um deles situa-se no eixo real indo do polo em  $-2$  para o zero em  $+2$ . Os outros dois ramos partem dos polos complexos e vão para o infinito. Vemos, inicialmente, que não há, nesse caso, ramos com sentidos de percurso conflitantes. Logo, não há pontos de separação no eixo real. Podemos esboçar esses ramos determinando as assíntotas, bem como os eventuais pontos de cruzamento com o eixo imaginário  $j\omega$ . O ponto de irradiação das assíntotas pode ser facilmente calculado, pela expressão vista em 12.3.6:

$$\sigma_i = \frac{\sum \text{polos m.a.} - \sum \text{zeros m.a.}}{p-z} =$$

$$\frac{(1-j2)+(1+j2)-2-2}{2} = -1$$

O ponto de irradiação das duas assíntotas é  $-1$ . As direções das assíntotas também são facilmente determinadas. Usando a fórmula geral

$$\theta_{an} = \theta_{a1} \pm (n-1)\Delta\theta_a = \frac{\pm 360^\circ n - 180^\circ}{p-z}$$

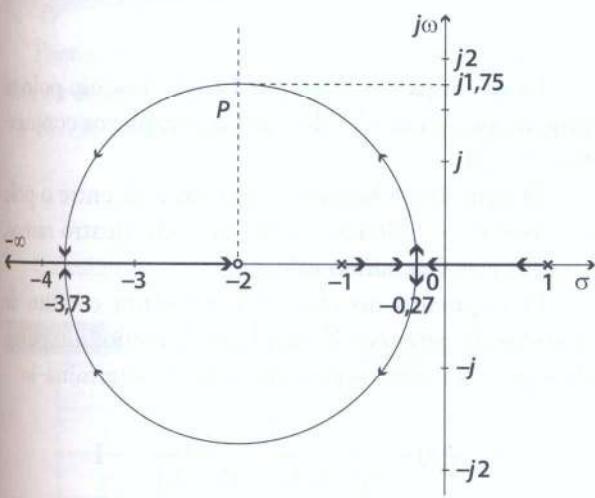


Figura 12.12

Resulta para este caso ( $p = 3, z = 1$ ):

$$\theta_{an} = \frac{\pm 360^\circ n - 180^\circ}{2}$$

Primeira assíntota: para  $n = 1$ , resulta  $\theta_{a1} = 90^\circ$ . Segunda assíntota: para  $n = 2$ , resulta  $\theta_{a2} = 270^\circ$  ou, o que é o mesmo,  $\theta_{a2} = -90^\circ$ .

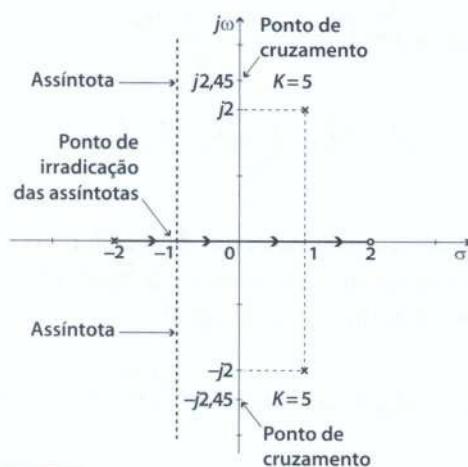
Os ramos que saem dos polos complexos e se dirigem para o infinito, balizados pelas assíntotas já definidas, cruzam necessariamente o eixo imaginário  $j\omega$ . Pode-se obter, então, um bom traçado, determinando esses pontos de cruzamento, o que pode ser feito com auxílio da tabela de Routh (Tabela 12.3), aplicada ao polinômio característico do sistema de malha fechada:

$$s^3 + s(1+K) + (10-2K) = 0$$

**Tabela 12.3**

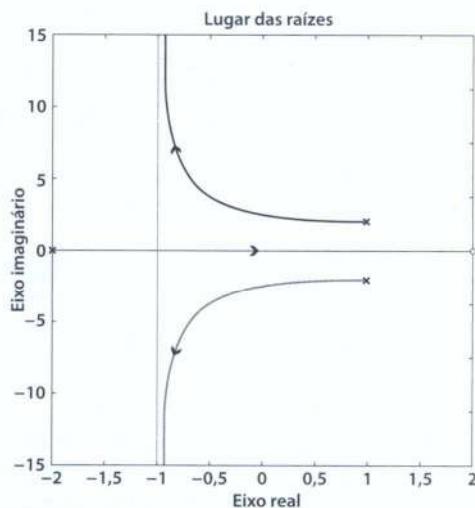
$s^3$	1	$K+1$
$s^2$	$0 \approx \varepsilon$	$10-2K$
$s$	$\frac{-(10-2K)}{\varepsilon}$	
1	$10-2K$	

Pela tabela de Routh (Tabela 12.3), vê-se que o valor de  $K$  correspondente ao cruzamento do eixo imaginário é  $K = 5$ . Substituindo esse valor de  $K$  no polinômio característico, vem  $s^3 + 6s = 0$ , cujas raízes são  $s_1 = 0$  e  $s_{2,3} = \pm j\sqrt{6}$ , ou seja,  $s_{2,3} = \pm j2,45$ . De fato, o ramo sobre o eixo real cruza o eixo imaginário na origem, enquanto os ramos curvilíneos cruzam o eixo  $j\omega$  nos pontos  $\pm j2,45$ . Nesses três pontos, temos  $K = 5$ .



**Figura 12.13** Polos e zeros e segmento no eixo real do Exemplo 12.6.

Com esses dados é possível desenhar com boa precisão o diagrama do LR do sistema em consideração, como na Figura 12.14.



**Figura 12.14** LR do Exemplo 12.6.

### Exemplo 12.7

Construa o diagrama do LR do sistema dotado de realimentação unitária negativa, cuja função de transferência do ramo direto é:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)}$$

Solução:

A função de transferência de malha aberta é:

$$A(s) = G(s) = \frac{K}{s(s+3)(s^2+2s+2)} = \frac{K}{s(s^3+5s^2+8s+6)}$$

Com relação ao Exemplo 12.7, temos um polo na origem, outro em  $-3$  e dois polos complexos conjugados  $-1 \pm j1$ .

Há um único segmento no eixo real, entre o polo na origem e o polo em  $-3$ . Há, ao todo, quatro ramos, e todos eles vão para o infinito.

O segmento no eixo real apresenta conflito de sentidos de percurso. Então, há pelo menos um ponto de separação nesse segmento. Vamos determiná-lo:

$$A(s) = \frac{K}{s(s^3+5s^2+8s+6)} = -1$$

$$K = -s(s^3+5s^2+8s+6)$$

$$\frac{dK}{d\sigma} = -(4\sigma^3 + 15\sigma^2 + 16\sigma + 6) = 0$$

Há uma raiz real (-2,29) mais um par de raízes complexas conjugadas  $(0,731 \pm j0,349)$ . A raiz real pertence ao ramo do eixo real e, portanto, indica a existência de um ponto de separação – no caso, ponto de separação de partida. As raízes complexas, fora do eixo real, não identificam pontos de separação.

**Quatro ramos que vão para o infinito indicam a existência de quatro assíntotas.** Vamos determinar essas assíntotas.

Ponto de irradiação:

$$\sigma_i = \frac{\sum \text{polos m.a.} - \sum \text{zeros m.a.}}{p - z} =$$

$$\frac{0 + (-1 - j) + (-1 + j) - 3}{4 - 0} = -1,25$$

Direção das assíntotas:

$$\theta_{an} = \frac{\pm 360^\circ n - 180^\circ}{p - z}$$

$$\theta_{an} = \theta_{a1} \pm (n - 1)\Delta\theta_a = \frac{\pm 360^\circ n - 180^\circ}{p - z}$$

Primeira assíntota ( $n = 1$ ):  $\theta_{a1} = \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$

Segunda assíntota ( $n = 2$ ):  $\theta_{a2} = \frac{540^\circ \cdot (2)}{4} = 135^\circ$

Terceira assíntota ( $n = 3$ ):  $\theta_{a3} = \frac{900^\circ}{4} = 225^\circ$  ou  $-135^\circ$

Quarta assíntota ( $n = 4$ ):  $\theta_{a4} = \frac{1260^\circ}{4} = 315^\circ$  ou  $-45^\circ$

Pontos de cruzamento com o eixo imaginário: podem ser determinados com auxílio do critério de Routh.

No caso, a equação característica de malha fechada é:

$$s^4 + 5s^3 + 8s^2 + 6s + K = 0$$

Calculamos, então, a tabela de Routh (Tabela 12.4):

Tabela 12.4

$s^4$	1	8	$K$
$s^3$	5	6	
$s^2$	6,8	$K$	
$s$	$6 - 0,735K$		
1	$K$		

O valor de  $K$  para que se tenha um polo no eixo imaginário deve satisfazer a relação

$$6 - 0,735K = 0, \text{ ou seja, } K = \frac{6}{0,735} = 8,16.$$

Levando-se esse valor de  $K$  à Tabela 12.4 e refazendo-se o cálculo, pode-se obter a localização dos pontos de cruzamento com o eixo imaginário (Tabela 12.5).

Tabela 12.5

$s^4$	1	8	8,16
$s^3$	5	6	
$s^2$	6,8	8,16	
$s$	0	Segundo caso especial	

Na linha  $s$ , temos o segundo caso especial do critério de Routh. Voltando para a linha anterior, por meio do polinômio auxiliar, podemos calcular a posição dos polos no eixo imaginário.

$$6,8s^2 + 8,16 = 0, \quad s^2 = -1,2 \quad \text{e} \quad s = \pm j1,095$$

Assim, os pontos de cruzamento estão nas posições  $\omega = \pm 1,095$  rad/s.

Os resultados obtidos até aqui são apresentados na Figura 12.15.

Para completar o gráfico, vamos calcular os ângulos de partida dos polos complexos, calcular com alguma precisão o posicionamento de alguns pontos e fazer a calibração desses ramos.

Comecemos pela determinação dos ângulos de partida dos polos complexos. Para sua determinação, aplicamos a condição angular em um ponto do LR muito próximo a um dos polos complexos conjugados.

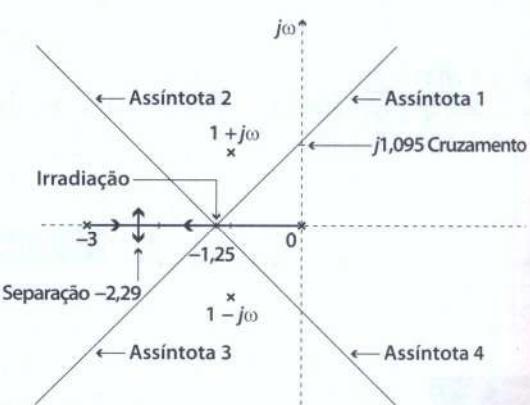


Figura 12.15 Detalhes da construção do LR do Exemplo 12.7.

Ângulo de partida dos polos complexos ( $\theta_i$ ):

$$-\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 = -180^\circ + N360^\circ$$

Com  $N = 0$  e ângulos calculados de acordo com a Figura 12.16

$$135^\circ + 90^\circ + 26,6^\circ + \theta_4 = 180^\circ$$

resulta:

$$\theta_4 = -71,6^\circ$$

Podemos fazer a calibração dos pontos dos ramos sobre o eixo real, uma vez que já sabemos que esses pontos pertencem ao LR. Por exemplo, qualquer ponto entre 0 e -3 pertence ao ramo real do LR. Então, para calcular o valor de  $K$  de qualquer desses pontos, basta usar a condição de módulo. No ponto -1, por exemplo, temos:

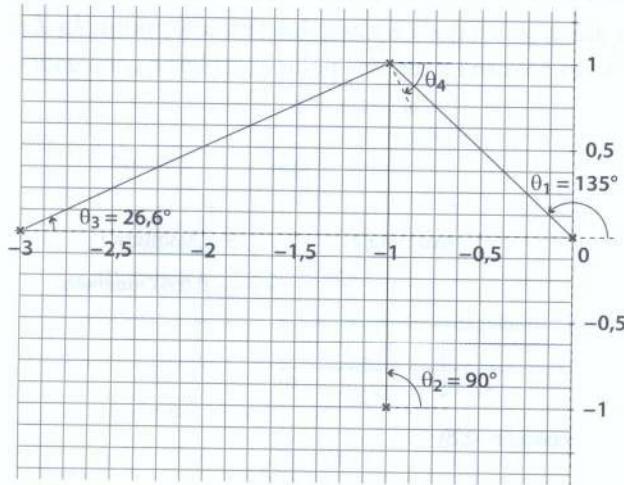
$$|A(s)| = \frac{K}{|s(s+3)(s^2+2s+2)|} = 1$$

ou

$$\frac{K}{|s||s+3||s+1-j||s+1+j|} = 1$$

ou, ainda,

$$K = |s||s+3||s+1-j||s+1+j|$$



Determinação do ângulo de partida dos polos complexos para o caso do Exemplo 12.7.

Figura 12.16

Note que os vários fatores dessa última expressão são as distâncias do ponto  $s$  considerado aos vários polos do sistema:

$$K = d_1 d_2 d_3 d_4$$

- $d_1 = |s|$ : a distância do ponto considerado ao polo na origem;
- $d_2 = |s+3|$ : a distância do ponto considerado ao polo em  $-3$ ;
- $d_3 = |s+1-j|$ : a distância do ponto considerado ao polo complexo  $-1+j$ ;
- $d_4 = |s+1+j|$ : a distância do ponto considerado ao polo complexo  $-1-j$ .

No caso proposto, o ponto considerado é  $s = -1$ . Então, teremos

$$d_1 = 1 \quad d_2 = 2 \quad d_3 = d_4 = 1$$

Resulta

$$K = 2$$

Analogamente, no ponto  $s = -2$

$$K = (2)(1)\sqrt{2}\sqrt{2} = 4$$

Finalmente, no ponto de separação  $s = -2,29$

$$K = 2,29(3 - 2,29)\sqrt{1,29^2 + 1^2}\sqrt{1,29^2 + 1^2}$$

$$K = (2,29)(0,71)(1,632)(1,632) = 4,332$$

No caso de pontos pertencentes aos ramos fora do eixo real, não se conhece a posição exata dos pontos pertencentes ao LR. Assim, é necessário que se faça previamente a localização desses pontos. Isso pode ser feito por tentativas baseadas na condição angular do LR, como se fez no exemplo anterior. Os ângulos podem ser calculados trigonometricamente em cada tentativa ou podem ser simplesmente medidos no diagrama, a partir dos polos e zeros de malha aberta, previamente localizados. (Neste último caso, as escalas nos dois eixos devem ser iguais.)

Outro método de calcular corretamente os pontos dos ramos complexos é com o auxílio de uma calculadora ou de um programa computacional que calcule diretamente as raízes da equação característica de malha fechada. Neste caso, entra-se com o valor de  $K$  no polinômio característico e obtém-se todas as raízes correspondentes, que são os polos de malha para esse valor de  $K$ .

Na Tabela 12.6, calculamos, dessa forma, vários pontos do *LR* do exemplo em estudo.

Tabela 12.6

$K$	$s_1$	$s_2$	$s_3$	$s_4$
0	$-1+j$	$-1-j$	0	-3
1,6	$-0,80+j0,64$	$-0,80+j0,64$	-0,53	-2,88
2	$-0,580+j0,606$	$-0,580-j0,606$	-1,00	-2,84
3,4	$-0,30+j0,80$	$-0,30-j0-0,80$	-1,74	-2,66
4	$-0,239+j0,858$	$-0,239-j0,858$	-2,00	-2,52
4,33	$-0,211+j0,884$	$-0,211-j0,884$	-2,31	-2,27
4,5	$-0,20+j0,90$	$-0,20-j0,90$	$-2,30+j1,80$	$-2,30-j1,80$
6	$-0,10+j1,00$	$-0,10+j1,00$	$-2,40+j0,53$	$-2,40-j0,53$
8,16	$0+j1,095$	$0-j1,095$	$-2,50+j0,741$	$-2,50-j0,741$
11	$0,100+j1,20$	$0,100-j1,20$	$-2,60+j0,914$	$-2,60-j0,914$

A título de ilustração, com o auxílio dos dados da tabela, foram registrados no gráfico da Figura 12.17 os pontos do ramo que partem do polo em  $1+j$ , e a curva foi desenhada.

O gráfico completo está indicado na Figura 12.18.

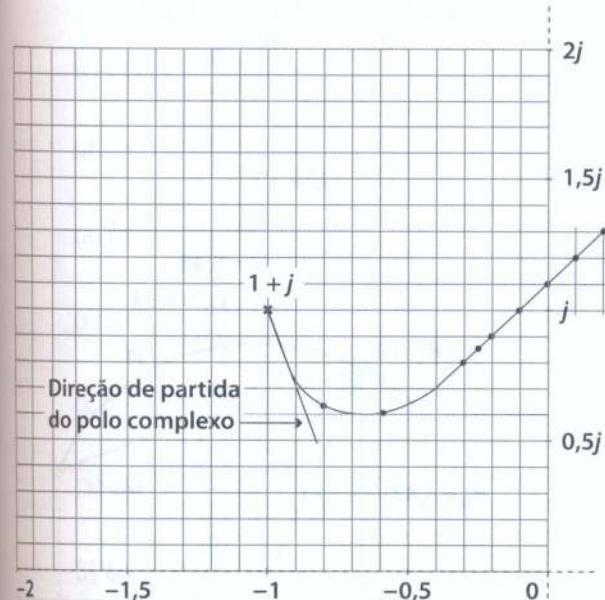


Figura 12.17 Ajuste de um ramo complexo do Exemplo 12.7.

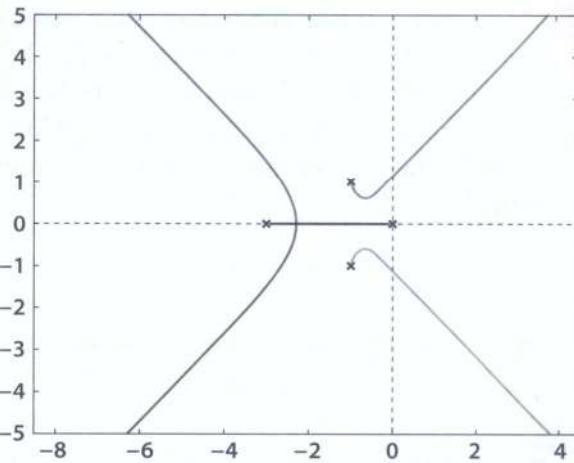


Figura 12.18 Lugar das raízes do Exemplo 12.7.

## 12.5 Análise pelo diagrama do *LR*

O diagrama do *LR* de um sistema permite que se faça uma análise gráfica bastante completa e muito útil para melhorar o comportamento dinâmico do sistema. Veremos no Capítulo 13 que um dos métodos mais importantes de projeto dos compensadores dos sistemas de controle é baseado nesses diagramas.

Para ilustrar esses fatos, usaremos o Exemplo 12.8, de um sistema de 2<sup>a</sup> ordem.

### Exemplo 12.8

Determine, com o auxílio do *LR*, o valor de  $K$  para que o sistema de malha fechada tenha um grau de amortecimento  $\zeta = 0,707$ . Determine também a posição dos polos e do zero, bem como as constantes de tempo, nessas condições (ver Figura 12.19).

Solução:

$$A(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 - 4s + 8} = \frac{K(s+2)}{(s-2)^2 + 4} = -1$$

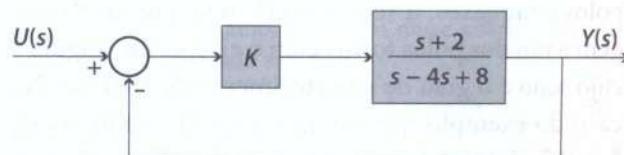


Figura 12.19

O sistema em malha aberta possui um zero real em -2 e dois polos complexos conjugados  $2 \pm j2$ . No eixo real, um ramo dirige-se para o zero em -2 e outro se dirige para  $-\infty$ , ambos a partir de um ponto de separação de chegada. Vamos determinar esse ponto de separação:

$$K = -\frac{\sigma^2 - 4\sigma + 8}{\sigma + 2}$$

$$\frac{dK}{d\sigma} = -\frac{(\sigma + 2)(2\sigma - 4) - (\sigma^2 - 4\sigma + 8)}{(\sigma + 2)^2} = 0$$

Raízes: 2,47 e -6,47. O ponto de separação válido é -6,47. O valor de  $K$  nesse ponto de separação é:

$$K = \frac{6,47^2 + 4(6,47) + 8}{4,47} = 16,94$$

Pontos de cruzamento com o eixo imaginário:

$$s^2 - 4s + 8 + (s + 2)K = 0$$

Com  $s = j\omega$ :

$$-\omega^2 + j\omega(K - 4) + 2K + 8 = 0$$

resulta:  $K = 4$

$-\omega^2 + 16 = 0$  e, portanto,  $\omega = \pm 4$  rad/s

Como dissemos (ver Observação no Exemplo 12.5), o ramo fora do eixo real nos sistemas dotados de dois polos e um ou dois zeros são arcos de circunferências e, no caso, ficam definidos por três pontos: os polos complexos de partida, a interseção com o eixo imaginário e o ponto de separação de chegada. O restante da análise pode ser feito graficamente com razoável precisão.

No diagrama de um sistema de 2ª ordem, com polos complexos, o segmento de reta que vai da origem a um dos polos forma com o eixo  $j\omega$  um ângulo  $\theta$  cujo seno é o grau de amortecimento do sistema. No caso do exemplo que estamos considerando, sendo  $\zeta = 0,707$ , teremos o ângulo  $\theta = 45^\circ$ . Traçando esse segmento no diagrama do LR deste exemplo, o ponto alcançado no ramo do LR é  $s = -4 + j4$ . Este deve ser o polo do sistema de malha fechada que satisfaz à condição imposta pelo enunciado (ver Figura 12.20).

Calculado o valor de  $K$  desse ponto, pela condição de módulo. O outro polo para o mesmo valor de  $K$  é

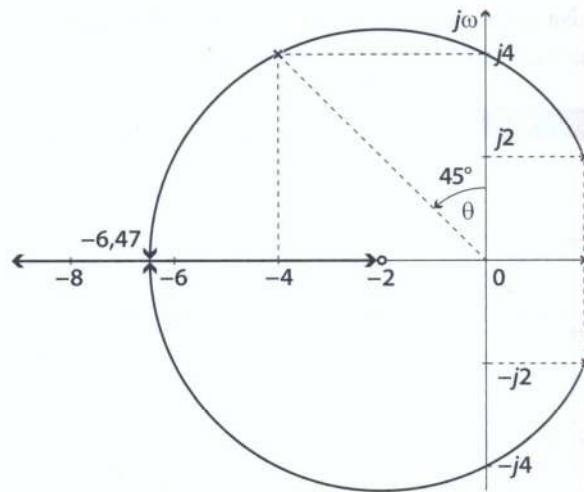


Figura 12.20 Lugar das raízes.

o polo simétrico, conjugado do primeiro:  $-4 - j4$ . A posição do zero é a mesma de malha aberta, porque a realimentação unitária mantém os mesmos zeros na malha aberta, no caso, -2. A constante de tempo é dada pelo par de polos complexos conjugados é o inverso da parte real em valor absoluto:  $\tau = 0,25$ .

O valor de  $K$  é obtido com o auxílio da condição de módulo do LR e pode ser determinado geometricamente (Figura 12.21):

$$K = \frac{d_1 d_2}{d_0} = \frac{6,32 \cdot 8,48}{4,47} = 12$$

ou

$$K = 12$$

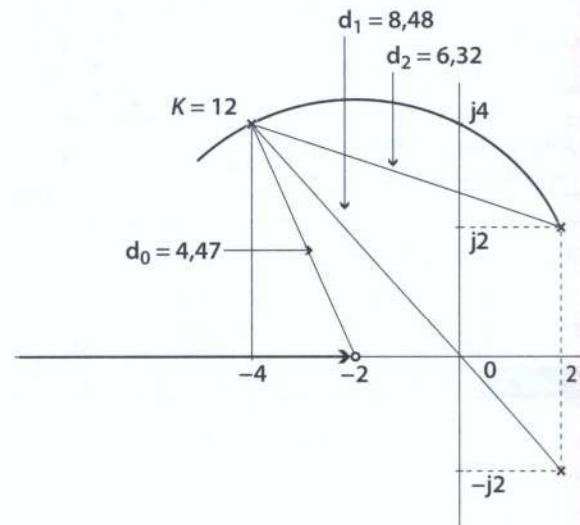


Figura 12.21 Calibração de um ramo do LR do Exemplo

## Considerações finais

Neste capítulo apresentou-se um método gráfico muito importante para o estudo dinâmico dos sistemas dotados de realimentação, como os sistemas de controle: é o denominado método do ‘lugar das raízes’ (*LR*). Trata-se de um método de construção gráfica que permite determinar as trajetórias no plano  $s$ , das raízes da equação característica (polos) de um sistema de malha fechada, em função da variação de um parâ-

metro (que geralmente é o ganho  $K$  do controlador) do sistema de malha aberta. Depois de uma introdução ao método do *LR*, o capítulo apresentou sucessivamente o princípio do método, as regras básicas de construção gráfica e os métodos de refinamento dos diagramas. Finalmente, foi apresentada uma análise bastante completa do diagrama, o que será útil no projeto de compensadores dos sistemas de controle.

## Problemas propostos

1. Faça o esboço do *LR* dos seguintes sistemas dotados de realimentação negativa unitária (Figura 12.22):

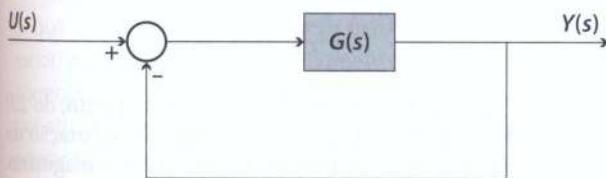


Figura 12.22

$$(a) G(s) = \frac{K}{(s+1)(s+3)}$$

$$(b) G(s) = \frac{K(s+2)}{(s+1)(s+3)}$$

$$(c) G(s) = \frac{K(s+1)}{(s+2)(s+3)}$$

$$(d) G(s) = \frac{K(s+3)}{(s+1)(s+2)}$$

$$(e) G(s) = \frac{K}{(s^2 + 2s + 2)}$$

$$(f) G(s) = \frac{K(s+2)}{(s^2 + 2s + 2)}$$

$$(g) G(s) = \frac{K}{s(s+1)(s+4)}$$

$$(h) G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+4)(s+6)}$$

$$(i) G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s+2)(s+6)}$$

$$(j) G(s) = \frac{K(s+4)(s+6)}{s(s+2)}$$

$$(k) G(s) = \frac{K(s+4)(s+6)}{s(s+2)^2}$$

$$(l) G(s) = \frac{K(s+4)}{s(s^2 + 1)}$$

$$(m) G(s) = \frac{K(s+2)(s+4)}{s(s^2 + 1)}$$

$$(n) G(s) = \frac{K}{s^2(s+16)}$$

$$(o) G(s) = \frac{K(s+2)}{s^2(s+16)}$$

2. Desenhe o diagrama do *LR* dos sistemas cuja configuração é a indicada pelo diagrama de blocos da Figura 12.23. São dadas as funções de transferências de *m.a.*:

$$A(s) = KG(s)$$

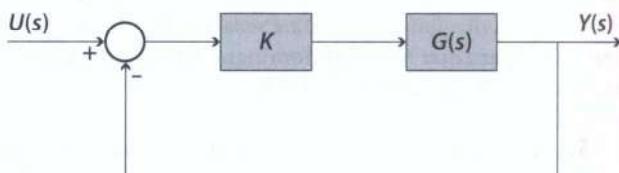


Figura 12.23

- (a)  $A(s) = \frac{K}{s^2 + 8s - 20}$ . Determine os valores de  $K$  para os quais o sistema é estável, bem como o valor de  $K$  no ponto de separação.

- (b)  $A(s) = \frac{K}{s^2 + 4s + 8}$ . Qual o valor de  $K$  para que o grau de amortecimento desse sistema em malha fechada seja 0,6?

- (c)  $A(s) = \frac{K(s+2)}{s^2 + 8s - 20}$ . Qual o valor de  $K$  correspondente a um polo de malha fechada na posição -1? Qual a posição do outro polo para esse mesmo valor de  $K$ ?

- (d)  $A(s) = \frac{K(s+6)}{s^2 - 16}$ . Determine o valor de  $K$  na origem e nos pontos de separação. Qual o valor da maior frequência de ressonância do sistema amortecido ( $\omega_d$ ) que se pode obter para esse sistema?

(e)  $A(s) = \frac{K(s+6)}{s^2 + 4s + 8}$ . Determine os ângulos de partida dos polos complexos conjugados e os valores de  $K$  para os quais o sistema é subamortecido.

(f)  $A(s) = \frac{K(s-8)}{s^2 + 4s + 8}$ . Determine os ângulos de partida e os valores de  $K$  para que o sistema seja superamortecido, mas estável.

3. Construa o  $LR$  dos seguintes sistemas de 3<sup>a</sup> ordem:

(a)  $A(s) = \frac{K}{(s+5,464)(s^2 + 4s + 8)}$ . Determine o ponto de irradiação das assíntotas e os pontos de cruzamento do eixo imaginário.

(b)  $A(s) = \frac{K}{(s+0,536)(s^2 + 8s + 20)}$ . Determine o ponto de irradiação das assíntotas e os valores de  $K$  para que o sistema seja estável.

4. A função de transferência de *m.a.* de um sistema com realimentação unitária é:

$$G(s) = \frac{K(s^2 - 4s + 5)}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

Localize polos e zeros de  $G(s)$ . Desenhe os segmentos do  $LR$  no eixo real. Indique aproximadamente o ponto de separação no eixo real. Determine os pontos de cruzamento com o eixo  $j\omega$ . Complete o esboço do  $LR$  no plano  $s$ . Quais os valores de  $K$  para os quais o sistema é estável? Qual o valor de  $K$  para que os polos dominantes tenham um grau de amortecimento  $\zeta = 0,5$ .

5. Desenhe o diagrama do  $LR$  do sistema indicado na Figura 12.24. Localize inicialmente os polos e zeros de malha aberta, indique claramente os segmentos do  $LR$  no eixo real (marque inclusive os sentidos de  $K$  crescente), localize o ponto de irradiação das assíntotas e faça a representação delas por meio de retas tracejadas. Além disso, indique aproximadamente (sem necessidade de cálculos) os pontos de separação sobre o eixo real. Finalmente, desenhe com clareza os ramos do  $LR$  fora do eixo real.

$$G(s) = \frac{K(s+2)}{s(s+3)(s+5)}$$

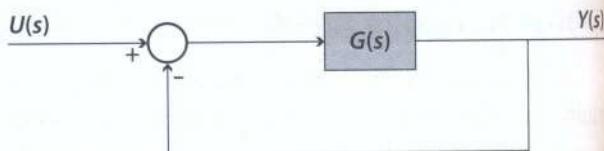


Figura 12.24

6. Dado um sistema com realimentação unitária negativa e com  $G(s) = K(s+4)/((s-2)^2 + 4)$  no ramo de avanço:

(a) Determine os valores de  $K$  para que os polos de malha fechada do sistema pertençam ao eixo imaginário. Onde se localizam esses polos no eixo  $j\omega$ ? Quais os valores de  $K$  para que o sistema seja estável?

(b) Construa cuidadosamente o  $LR$  desse sistema, calculando também o ponto de separação.

7. No sistema apresentado pelo diagrama de blocos da Figura 12.25, temos

$$G(s) = \frac{s}{s^2 - 15s + 36}$$

Faça um esboço aproximado, mas benfeito, do  $LR$  desse sistema. Calcule os pontos de separação do eixo real e de cruzamento com o eixo imaginário. Indique o valor de  $K$  nesses pontos.

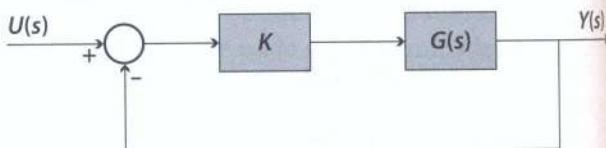


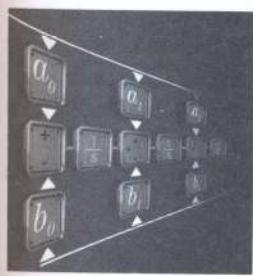
Figura 12.25

8. Desenhe o  $LR$  do sistema cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s^3 + 19s^2 + 80s - 100)}$$

- (a) Determine o ponto de separação e o respectivo valor de  $K$ .  
 (b) Determine o ponto de irradiação das assíntotas e a direção delas.  
 (c) Determine os pontos de cruzamento do eixo imaginário e os respectivos valores de  $K$ .  
 (d) Faça um esboço cuidadoso com o refinamento de alguns pontos (2 ou 3).  
 (e) Indique os valores de  $K$  para os quais o sistema é estável.

# capítulo 13



## Projeto de compensadores

Em um sistema realimentado (Figura 13.1), podem-se distinguir o sistema a ser controlado, o controlador (ou compensador) e a realimentação propriamente dita. O subsistema a ser controlado é constituído essencialmente por um processo e por atuadores capazes de efetuar o trabalho ou desenvolver a operação que se deseja. Essa é a parte fixa do sistema de controle, isto é, a parte que normalmente não pode ser modificada por serem seus componentes previamente escolhidos e projetados. Por exemplo, em um sistema de laminção de lingotes para obtenção de chapas de espessura calibrada, o processo em si, com seus motores, laminadores etc., constituem a parte fixa do sistema de controle, que é o resultado de um projeto já realizado. Por outro lado, o controlador (ou compensador) e a realimentação têm por finalidade fazer com que o desempenho da parte fixa seja estável e opere com precisão e rapidez, obedecendo a especificações preestabelecidas. No exemplo do laminador, o controlador é a parte do sistema que atua sobre a parte fixa de forma a fazer com que as chapas laminadas saiam com espessura uniforme dentro das especificações previstas.

Fisicamente, os controladores podem ser, conforme o caso, mecânicos, hidráulicos, pneumáticos, elétricos, eletrônicos ou uma combinação desses. Estudaremos aqui apenas o projeto e a implementação de controladores elétricos e eletrônicos. As especificações utilizadas para o projeto de controladores podem ser dadas no domínio do tempo (sobressinal, erros estacionários,

tempo de acomodação etc.) ou no domínio da frequência (margem de fase, de ganho, pico de ressonância, banda passante etc.). As formas de projetar, tratadas aqui, envolvem tipicamente métodos gráficos (*LR*, diagramas de Bode etc.), embora existam também métodos algébricos. Quando as especificações são dadas em termos de grandezas no domínio do tempo, o projeto pelo método do lugar das raízes (*LR*) é muito eficiente. Já os métodos de resposta em frequência (diagramas de Bode, Nyquist etc.) devem ser utilizados, preferencialmente, no caso em que as especificações sejam apresentadas no domínio da frequência.

Um sistema de controle dotado de realimentação compara em cada instante o valor de saída da planta medida pelo sensor, com o valor (desejado) de referência, na entrada do sistema. O resultado dessa comparação é o erro atuante. O erro atuante é levado ao controlador, que produz o denominado sinal de controle na variável manipulada. O sinal de controle, levado aos componentes seguintes do sistema de controle, tende a reduzir o desvio da saída em relação ao sinal desejado. A forma pela qual o controlador age para tentar minimizar o erro é denominada ação de controle.

Há, ainda, uma questão importante a ser mencionada: quais são os problemas gerais a serem resolvidos pelos compensadores? Em primeiro lugar, temos o problema da estabilidade do sistema de controle: se o sistema for instável, o controlador deve, antes de tudo, estabilizar o sistema. Além desse aspecto preliminar, há dois problemas gerais relativos aos sistemas que devem orientar o projeto dos controladores, que são o desempenho em regime transitório e a precisão e regime permanente. As especificações propostas por ocasião do projeto dos controladores envolvem justamente esses três tópicos: o desempenho em regime transitório, a precisão em regime permanente e as condições de estabilidade relativa.

O controlador fica em geral inserido no ramo direto do sistema de controle, na região de baixa potência, logo após o comparador (somador). Por estar situado no ramo direto, diz-se que é um controlador em série. Mas ele pode ser inserido também no ramo de realimentação ou pode fazer parte de malhas internas de realimentação.

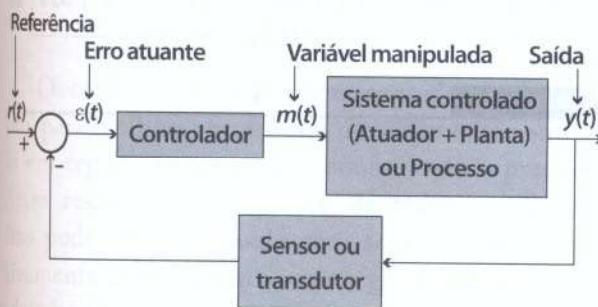
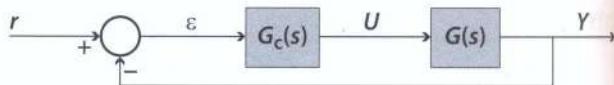


Figura 13.1

Veremos a seguir projetos dos vários tipos de controladores, primeiramente baseados no método do *LR* e depois projetos baseados na resposta em frequência.

O material apresentado neste capítulo a respeito de projeto de compensadores deve ser considerado apenas como uma introdução a um assunto muito amplo, variado e importante. Neste texto nos limitaremos a exemplos que ilustram alguns dos métodos clássicos desses projetos.

Sem perda de generalidade, a estrutura de controle que será utilizada neste capítulo é a da Figura 13.2, onde  $G_c(s)$  representa o controlador. Como nessa estrutura a realimentação é unitária, a função de transferência do sensor deve ser incorporada à da planta  $G(s)$ .



**Figura 13.2**

Estudaremos neste capítulo algumas das ações de controle básicas usadas nas aplicações gerais. São denominadas: ação proporcional (*P*), proporcional-integral (*PI*), proporcional derivativa (*PD*), proporcional-integral-derivativa (*PID*). Além dessas, há também ações similares denominadas avanço de fase, atraso de fase e atraso e avanço de fase, que também serão aplicadas no projeto de sistemas de controle.

## 13.1 Projeto de compensadores pelo método do Lugar das Raízes

Veremos nesta seção projetos de controladores pelo método do *LR*, que é um método conveniente para os casos em que as especificações são dadas diretamente no domínio do tempo (sobressinal, tempo de acomodação, tempo de subida etc.).

### ■ 13.1.1 Controlador proporcional (*P*)

O compensador de um sistema com realimentação é um dispositivo que permite alterar a função de transferência global do sistema de forma que sua resposta satisfaça às especificações propostas. Quando os polos que satisfazem as especificações dadas se situam nos ramos do *LR* do sistema dado, o desempenho desejado pode ser conseguido pelo ajuste conveniente do ganho  $K$  do controlador. De fato, como vimos anteriormente, os polos percorrem todo o diagrama do *LR* quando a constante  $K$  varia de zero a infinito. Então, nesses casos, para posicionar os polos nos pontos desejados, basta atribuir à constante  $K$  do sistema o valor adequado. Isso é conseguido com auxílio de um controlador proporcional. Esse controlador é simplesmente um amplificador, colocado no ramo direto, e com a constante de ganho  $K_p$  convenientemente ajustada.

Um exemplo poderá esclarecer melhor esse procedimento.

### Exemplo 13.1

Dado o sistema da Figura 13.3, vamos projetar um controlador proporcional de ganho  $K_p$  de forma que o sistema tenha um grau de amortecimento  $\zeta = 0,707$ .

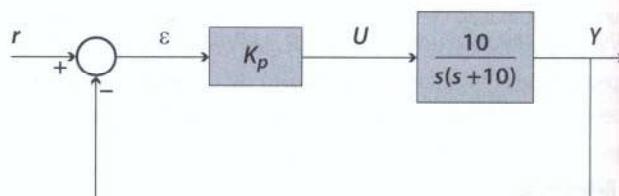
Solução:

Com o auxílio do diagrama do *LR* (Figura 13.4), vê-se que os polos com esse grau de amortecimento são  $-5 \pm j5$ , com  $K = 50$  e, em consequência,  $K_p = 5$ .

Note que o valor de  $K$  é obtido pelo produto das distâncias do ponto  $-5+j5$  (ou  $-5-j5$ ) até os polos de malha aberta:

$$10K_p = (7,07)^2$$

O gráfico da Figura 13.5 ilustra a resposta do sistema de controle para uma entrada tipo degrau unitário.



**Figura 13.3**

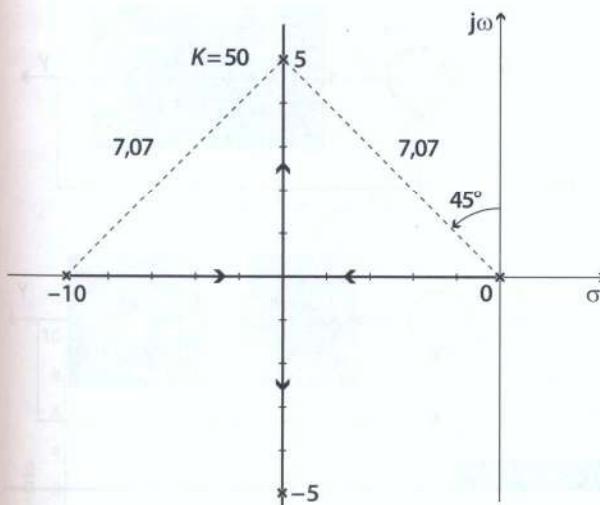


Figura 13.4

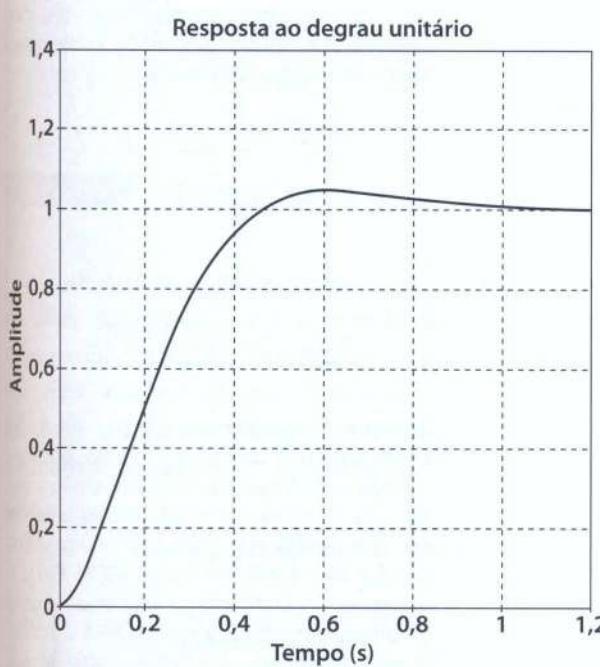


Figura 13.5 Resposta ao degrau do sistema do Exemplo 13.1.

### ■ 13.1.2 Controlador proporcional-integral (PI)

Os controladores PI podem ser usados, por exemplo, para melhorar a resposta do sistema de controle em regime permanente, aumentando a precisão dessa resposta. Dependendo da técnica utilizada, isso pode ser conseguido sem se alterar significativamente o desempenho em regime transitório. A ideia básica é colocar um polo na origem de forma a aumentar de uma unidade o tipo do sistema. Por

exemplo, se o sistema for do tipo zero (isto é, sem polo na origem, em malha aberta), a introdução de um polo na origem fará com que o erro estacionário de posição (caso de um degrau de entrada) passe a ser nulo. Se a entrada for uma rampa, o erro no sistema não compensado tenderá ao infinito. Mas, com o auxílio do compensador PI, será limitado e pode ser reduzido a valores toleráveis.

O acréscimo de um polo na origem, porém, altera a configuração do LR. Para evitar que isso aconteça, acrescenta-se um zero muito próximo do polo na origem. A quase superposição de um polo e um zero muito próximos um do outro praticamente não altera a configuração do LR do sistema nas posições relativamente distantes da origem. Assim, os polos originais do sistema de malha fechada praticamente não se deslocam, e o comportamento transitório fica muito pouco alterado. Entretanto, há um preço a se pagar: aparece, em malha fechada, um polo real dominante junto à origem, que faz com que o transitório exiba um comportamento assintótico lento que pode ser classificado como uma ‘cauda longa’, aumentando o tempo de acomodação.

A função de transferência do compensador é, então,

$$G_c(s) = \frac{K_p(s + x_i)}{s}$$

onde a distância do zero ( $-x_i$ ) deve ser suficientemente pequena em relação ao posicionamento do polo na origem. Costuma-se escrever também (ver Figura 13.6),

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

sendo, então,

$$K_i = K_p x_i \quad \text{ou} \quad x_i = \frac{K_i}{K_p}$$

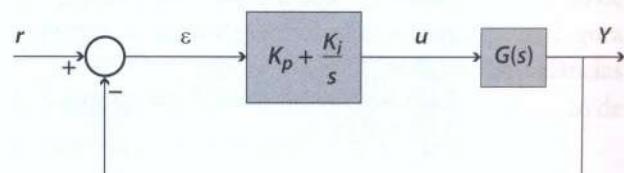


Figura 13.6

**Exemplo 13.2**

Dado o sistema indicado na Figura 13.7, cuja função de transferência de malha aberta é

$$G(s) = \frac{60}{(s+2)(s+3)}$$

vamos compensar o sistema de forma a anular o erro estacionário de posição, mas sem alterar o grau de amortecimento e mantendo, tanto quanto possível, a mesma resposta transitória.

**Observação**

O sistema com realimentação unitária e com um controlador proporcional de ganho unitário da Figura 13.7 será aqui denominado 'sistema não compensado', embora, rigorosamente, esse sistema também possua um compensador, apesar de elementar.

Solução:

(a) Sistema não compensado.

A constante de ganho do sistema não compensado em malha aberta é  $K_g = \frac{60}{6} = 10$ , e o erro estacionário de posição,  $\epsilon_{sp} = \frac{1}{1+10} = 0,091$  ou 9,1%. Os polos de malha fechada sem compensação são as raízes do polinômio característico  $Q(s) = s^2 + 5s + 66$ :

$-2,5 \pm j7,73$ , e o grau de amortecimento,  $\zeta = 0,308$ .

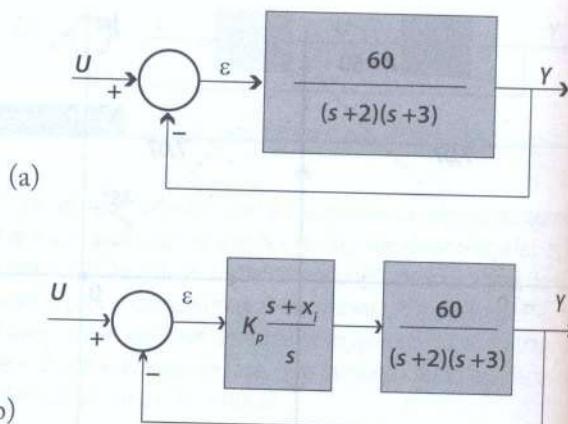
Queremos compensar o sistema de forma a anular esse erro, mas sem alterar o grau de amortecimento.

(b) Projeto do compensador.

Vamos usar um compensador PI de forma a transformar esse sistema do tipo zero para o tipo 1. Como vimos, se acrescentarmos simplesmente um polo na origem do sistema em malha aberta, por um lado transformamos o sistema dado, que é do tipo zero, em um sistema do tipo 1, o que garante que o erro estacionário de posição seja nulo. Por outro lado, o acréscimo desse polo altera significativamente a configuração do LR, o que modifica substancialmente a resposta transitória do sistema. O que se pode fazer nesses casos é usar um compensador PI, que possui um polo na origem e um zero que pode ser colocado muito próximo, de forma a alterar muito pouco, nas regiões relativamente distantes da origem, o posicionamento dos polos dominantes.

A função de transferência do compensador PI é, como já vimos,

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} = \frac{K_p(s+x_i)}{s}$$

**Figura 13.7**

O polo fica na origem e o zero situa-se em  $-x_i$ . Os polos do sistema dado estão nas posições  $-2$  e  $-3$ . Então, o zero próximo à origem pode ser empiricamente colocado em  $-0,1$ , por exemplo. A função de transferência de malha aberta do sistema compensado será, então,

$$G_c(s) = \frac{K_p(s+0,1)}{s} = K_p + \frac{K_i}{s}$$

sendo  $K_i = 0,1 K_p$

e

$$G_c(s) G(s) = \frac{K_p 60(s+0,1)}{s(s+2)(s+3)}$$

Com o zero do compensador em  $-0,1$  muito próximo do polo na origem, os polos do sistema não compensado praticamente não saem do lugar. Pode-se fazer um cálculo baseado no LR e verificar que os polos dominantes passam de  $-2,5 \pm j7,73$  para  $-2,45 \pm j7,59$ , mantendo-se praticamente inalterado o grau de amortecimento e a constante  $K$  variando apenas de 60 para 58. O terceiro polo de malha fechada do sistema compensado situa-se no segmento  $[0, -0,1]$  em  $-0,0913$ , portanto, muito próximo do zero do compensador. A constante  $K_p$  do compensador pode ser facilmente calculada (ver figuras 13.8 a 13.10):

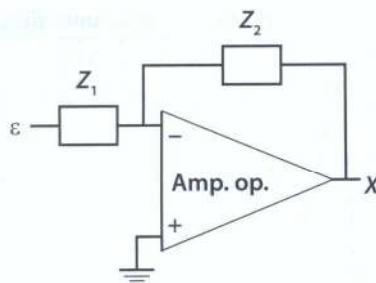
$$60 K_p = 57,9 \quad \text{ou} \quad K_p = \frac{57,9}{60} = 0,97 \quad \text{é}$$

$$K_i = 0,097$$

Finalmente,

$$G_c(s) = \frac{0,97(s+0,1)}{s} = 0,97 + \frac{0,097}{s}$$

E o sistema compensado, em malha aberta:



**Figura 13.11** Circuito operacional.

Então, para implementar um controlador *PI*, por exemplo, como aquele presente na Figura 13.12a, pode-se usar o circuito indicado na Figura 13.12b. O uso de dois amplificadores é necessário por causa da inversão de sinais.

O equacionamento que se obtém é:

$$X(s) = \frac{R_2}{R_1} \left( \frac{s + \frac{1}{R_2 C_2}}{s} \right) \varepsilon(s)$$

Comparando com a equação do compensador *PI* acima, temos:

$$K_p = \frac{R_2}{R_1} \quad x_i = \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{K_i}{K_p}$$

Temos, então, três incógnitas a serem determinadas na implementação desse compensador ( $R_1$ ,  $R_2$  e  $C_2$ ) e dispomos apenas de duas equações. Em geral, o que se faz é escolher um valor plausível para o condensador (por exemplo,  $1\mu F$ ) e, a partir daí, calcular o valor dos resistores. Se esses valores forem razoáveis, podem ser adotados. Caso contrário, faz-se outra ten-

tativa (já, agora, mais bem orientada) com o valor do condensador. Como o erro  $\varepsilon(t)$  pode ser tanto positivo como negativo, o capacitor deve ser despolarizado.

### Exemplo 13.3

Implementar o compensador *PI* projetado para o sistema do Exemplo 13.2.

Solução:

Neste exemplo temos muito aproximadamente  $K_p = 1$  e  $x_i = 0,1$ .

Sendo  $C_2 R_2 = \frac{1}{x_i} = 10$ , se adotarmos  $C_2 = 1\mu F$ ,

resulta  $R_2 = \frac{10}{C_2} = 10^7 = 10 M\Omega$ , o que é um valor muito grande para  $R_2$ . Podemos adotar, então,  $C_2 = 10\mu F$  e  $R_2 = 1 M\Omega$ .

Finalmente,  $R_1 = R_2 / K_p = 10 M\Omega$ . O valor dos resistores do inverter pode ser, por exemplo,  $R = 10 k\Omega$ .

Um controlador *PI* só pode ser realizado eletronicamente com circuitos ativos. Assim, caso uma realização passiva seja necessária, pode-se utilizar uma ação similar com o compensador por atraso de fase que contém um polo em  $-j2$ , normalmente muito próximo da origem.

$$\frac{K_p s + K_i}{s} \Rightarrow G_c(s) = \frac{K_p s + K_i}{s + f_2}$$

### ■ 13.1.3 Controlador de atraso de fase

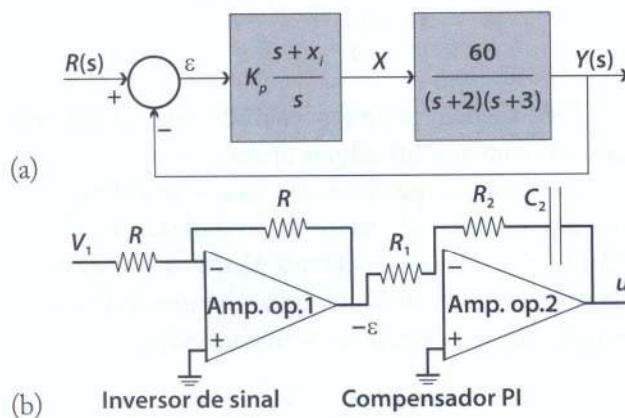
Os compensadores de atraso de fase possuem um polo e um zero reais, sendo que o zero se situa à esquerda do polo e este, à esquerda da origem. Esses compensadores podem ser entendidos como uma extensão dos compensadores *PI*, cujo polo, nestes, fica necessariamente na origem. A função de transferência de um compensador de atraso de fase é, então,

$$G_c(s) = \frac{K_c(s + b)}{(s + a)}$$

sendo as posições do polo ( $-a$ ) e do zero ( $-b$ ), tais que  $b > a > 0$ .

Os compensadores por atraso de fase podem ser usados de várias maneiras.

Por exemplo, há casos em que se pode localizar o zero do compensador de forma arbitrária e depois procurar a posição em que deve ficar o polo para que a condição angular do *LR* seja satisfeita. Uma variante conveniente dessa possibilidade é posicionar o zero do compensador de forma a cancelar um dos polos



**Figura 13.12**

do próprio sistema, enquanto o polo do próprio compensador é colocado de forma a se conseguir o atendimento das especificações desejadas.

#### Exemplo 13.4

Deseja-se projetar um compensador de atraso de fase para que o sistema de realimentação unitária, com

$$G(s) = \frac{20}{(s+2)(s+8)}$$

se torne duas vezes mais lento (constante de tempo duas vezes maior), mas sem alterar o tempo (instante) de pico  $T_p = \frac{\pi}{\omega_j}$ . A constante de tempo é dada por:  $\tau = \frac{4}{\alpha}$ .

Solução:

Os polos do sistema dado em malha fechada são  $-5 \pm j3,317$ . Para que o tempo de pico seja mantido, o valor de  $\omega_j$  não deve ser alterado. Por outro lado, para dobrar a constante de tempo, o coeficiente de amortecimento  $\alpha$  deve ser reduzido à metade. Assim, os novos polos serão:  $-2,5 \pm j3,317$ . O polinômio característico de malha fechada do sistema compensado deve ser, então,

$$(s+2,5)^2 + 3,317^2 = s^2 + 5s + 17,25$$

Isso pode ser conseguido, por exemplo, substituindo-se o polo em  $-8$  por um polo em  $-3$ . Resulta para o sistema compensado em malha fechada:

$$\frac{K}{(s+2)(s+3)+K} = \frac{K}{s^2 + 5s + 6 + K}$$

Para obter o polinômio característico desejado devemos fazer  $6+K=17,25$  ou  $K=11,25$ .

O sistema compensado em malha aberta resulta:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_c(s+8)}{(s+3)} \cdot \frac{20}{(s+2)(s+8)} = \frac{11,25}{(s+2)(s+3)}$$

com

$$K_c = \frac{11,25}{20} = 0,563.$$

Finalmente,

$$G_c(s) = \frac{0,563(s+8)}{(s+3)}$$

Outra possibilidade de conduzir o projeto de um compensador de atraso de fase é utilizar técnica semelhante à usada nos projetos PI para diminuir os erros estacionários quase sem afetar o componente transitório da resposta. No caso dos compensadores de atraso de fase, o polo não fica na origem como nos compensadores PI, mas pode ser colocado bem próximo dela, e o zero, próximo do polo à esquerda ( $b > a$ ), a fim de não alterar muito a posição dos polos dominantes que caracterizam o comportamento em regime transitório do sistema.

Pode-se mostrar, ainda, que, no sistema compensado, a constante de ganho de baixa frequência do sistema ( $K_g$ ) fica multiplicada por um fator igual  $b/a$ . Como  $b > a$  nesse tipo de compensador, temos sempre um aumento de constante de ganho. Por exemplo, se localizarmos o polo do compensador em  $-0,05$  e o zero em  $-0,5$ , teremos  $(b/a) = 10$  e a constante de ganho ficará dez vezes maior. Com aumento da constante de ganho, os erros estáticos de valor finito ficam menores.

#### Exemplo 13.5

No sistema indicado pelo diagrama de blocos da Figura 13.13, a função  $G(s)$  é dada por:

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{100}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$$

Projete um compensador de atraso de fase capaz de reduzir cerca de 12 vezes o erro estático de posição do sistema. Em seguida, implemente um compensador com as características encontradas.

Solução:

Constante de ganho de malha aberta, constante de erro estático de posição e erro estático de posição:

$$K_g = \frac{100}{15} = 6,666 \quad K_g = K_p = 6,666$$

$$e_{sp} = \frac{1}{1+K_p} = \frac{1}{7,666} = 0,130$$

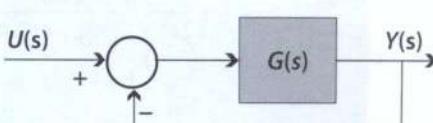


Figura 13.13

Desejamos reduzir esse erro aproximadamente 12 vezes.

Em malha fechada o polinômio característico é:

$$s^4 + 9s^3 + 23s^2 + 11s$$

Com polos em  $-0,5357 \pm j3,7706$  e  $-7,9285$ ,  $K = 100$  e  $\zeta = 0,141$  e a constante de ganho

$$K_g = 6,666; e_{stp} = \frac{1}{7,666} = 0,130 \text{ (já calculado).}$$

Erro estático de posição desejado:

$$\epsilon_{stp} = \frac{e_{stp}}{12} = 0,0108$$

$$\frac{e_{stp}}{\epsilon_{stp}} = \frac{1+K_p}{7,666} = 12 \quad K_p = \frac{1}{0,0108} - 1 = 91,3$$

$$\frac{b}{a} = \frac{K_p}{K_g} = \frac{91,3}{6,666} = 13,7$$

Se fizermos  $b = 14a$ , estaremos a favor da segurança na redução do erro.

Fazemos, então, com  $a = 0,02$  e  $b = 0,28$ . O compensador fica

$$G_c(s) = K_c \frac{s+b}{s+a} = K_c \frac{s+0,28}{s+0,02}$$

Sem alterar essencialmente a parte transitória da resposta ao degrau unitário e obtendo o erro estacionário 12 vezes menor, a função de transferência do sistema compensado em malha aberta é

$$G(s)G_c(s) = \frac{100K_c(s+0,28)}{(s+0,02)(s+1)(s+3)(s+5)}$$

E em malha fechada, com  $K = 100K_c$ ,

$$F_c(s) =$$

$$\frac{K(s+0,28)}{s^4 + 9,02s^3 + 23,18s^2 + (15,46 + K)s + 0,3 + 0,28K}$$

O valor de  $K$  calculado com auxílio do LR, para que se tenha o mesmo grau de amortecimento do sistema não compensado, resulta em  $K = 100K_c = 91$ . Resulta:  $K_c = 0,91$  (ver Figura 13.14).

$$G_c(s)G(s) = \frac{91(s+0,28)}{(s+0,02)(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{91(s+0,28)}{s^4 + 9,02s^3 + 23,18s^2 + 15,46s + 0,3}$$

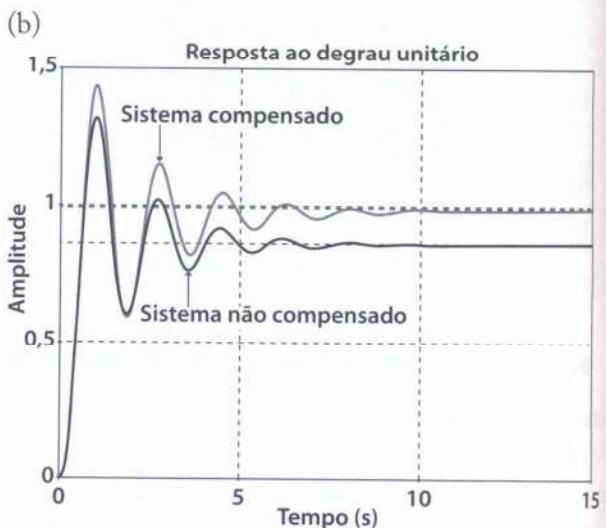
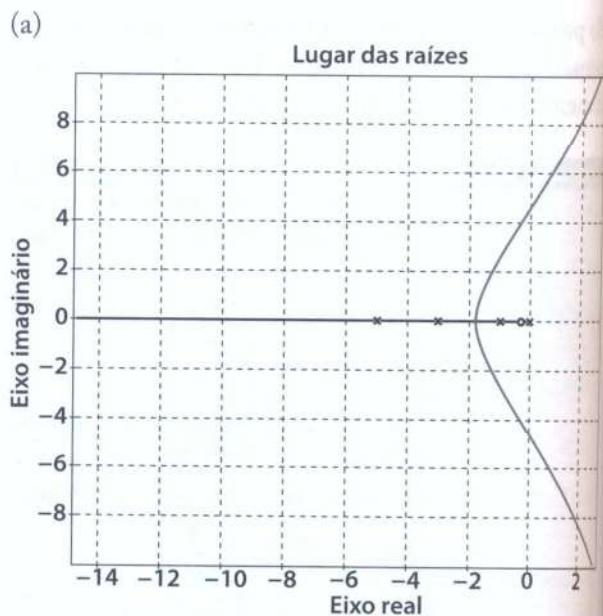


Figura 13.14 (a) Lugar de raízes do sistema compensado; (b) Comparação entre as respostas dos sistemas compensado e não compensado.

A realização de um compensador com as características citadas pode ser feita por meio de um circuito ativo com um par de amplificadores operacionais, como o indicado na Figura 13.15.

A função de transferência desse compensador é:

$$G_c(s) = \frac{R_f C_1}{R C_2} \frac{\frac{s}{R_1 C_1} + \frac{1}{R_2 C_2}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} = 0,91 \frac{(s+0,28)}{s+0,02}$$

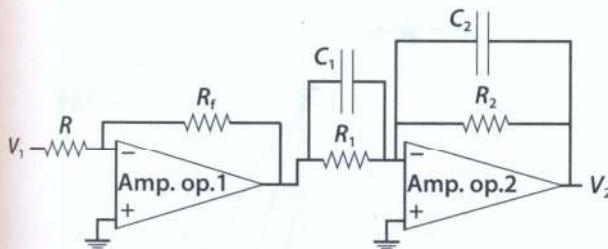


Figura 13.15

As equações que se obtêm são:

$$\frac{R_f}{R} = 0,91 \quad R_1 C_1 = \frac{1}{0,28} = 3,57$$

$$R_2 C_2 = \frac{1}{0,02} = 50$$

Temos seis grandezas a determinar e dispomos de apenas três equações. Podemos fazer arbitrariamente três escolhas. As duas primeiras podem ser:

$$C_1 = C_2 = 10^{-4} = 100 \mu\text{F}$$

do que resulta:

$$R_1 = 35710 \approx 37,5 \text{ k}\Omega \quad \text{e}$$

$$R_2 = 500000 = 0,5 \text{ M}\Omega$$

Para o ganho, a escolha pode ser  $R = 100 \text{ k}\Omega$  e  $R_f = 91 \text{ k}\Omega$ .

#### ■ 13.1.4 Controlador proporcional derivativo (PD)

Os controladores do tipo proporcional derivativo (PD) atuam essencialmente sobre a resposta transitória do sistema. Para tanto, deve-se modificar a posição dos polos dominantes do sistema de forma a se obter as especificações desejadas relativas ao componente transitório da resposta. Como sabemos, se a posição em que se deseja colocar os polos pertencer a um dos ramos do  $LR$  do sistema dado, basta utilizar um compensador proporcional, para ajuste do valor da constante de ganho. Se o caso não for esse, deve-se alterar o  $LR$  de forma que a nova posição dos polos situe-se em um dos ramos do novo diagrama. Em geral, a forma mais simples de se conseguir essa alteração no diagrama de  $LR$  é colocando-se um único zero em posição conveniente. O compensador PD consiste justamente desse zero acrescentado para ajuste da condição an-

gular do sistema, alterada pelo deslocamento desejado dos polos dominantes. Assim, escreve-se a função de transferência do compensador  $PD$ :

$$G_c(s) = K_c(s + b)$$

$K_c$  é a constante de ganho do compensador, e a posição em que fica o zero é  $-b$ .

Em geral, o acréscimo de um zero real no semiplano esquerdo tende a diminuir o sobressinal e o tempo de acomodação, tornando o sistema mais rápido.

#### Exemplo 13.6

Um sistema de controle de posição é representado pelo diagrama de blocos da Figura 13.16, sendo:

$$G(s) = \frac{30}{s(s+1)(s+5)} = \frac{30}{s(s^2 + 6s + 5)}$$

Da forma como está, esse sistema (em malha fechada e não compensado) tem um par de polos no eixo imaginário e em consequência apresenta oscilações não amortecidas, o que pode ser indesejável para o sistema. O que se propõe, então, é utilizar um controlador tipo  $PD$  para que sejam satisfeitas as seguintes especificações: um par de polos dominantes com grau de amortecimento  $\zeta = 0,5$  e tempo de acomodação  $T_{ac} = 2$  segundos.

Solução:

De acordo com o enunciado, o par de polos dominantes desejados ( $-\alpha \pm j\omega_d$ ) deve ter parte real tal que  $\alpha = \frac{4}{T_{ac}} = 2$ , e o grau de amortecimento é  $\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = 0,5$ . Portanto:

$$\omega_n = \frac{\alpha}{0,5} = 4 \quad \text{e}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = 2\sqrt{3} \quad \text{ou} \quad \omega_d = 3,464$$

Logo, os polos dominantes serão:

$$s_{1,2} = -2 \pm j3,464$$

É fácil ver, pelo diagrama do  $LR$  do sistema representado na Figura 13.17, que esse par

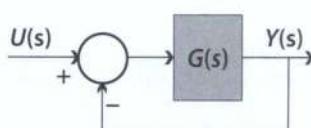


Figura 13.16

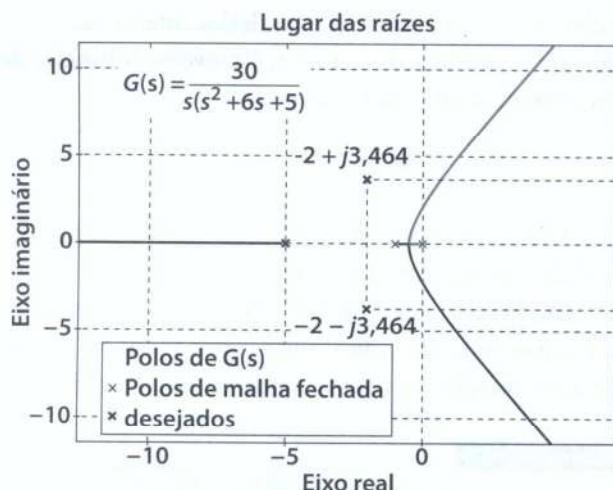


Figura 13.17

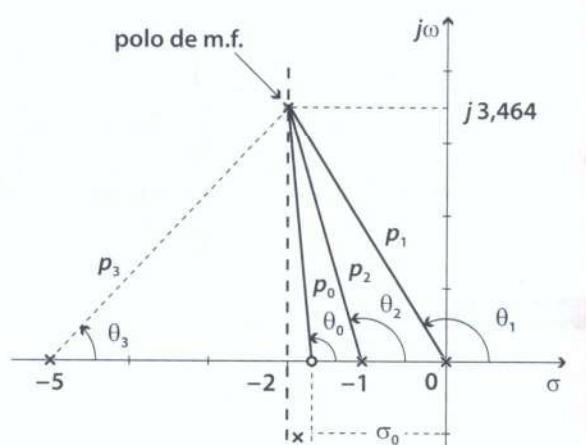


Figura 13.18

de polos não pertence aos ramos desse diagrama. De fato, a soma dos ângulos dos vetores com origem nos polos de malha aberta e extremidade no polo  $-2 - j3,464$ , é  $275,2^\circ - 180^\circ = 95,2^\circ$  sobre o ângulo fixado pela condição angular. Para compensar esse ângulo adicional podemos pôr o zero do compensador na posição  $\sigma_0 = -(2 + \omega_0 \cotan(\theta_0)) = -(2 - 0,315) = -1,685$ , conforme se vê na figura. Além disso, pode-se calcular facilmente a constante  $K$  no polo considerado, multiplicando os módulos dos vetores que partem dos polos de malha aberta e chegam ao polo dominante de malha fechada e dividindo o resultado pelo módulo do vetor que parte do zero do compensador:

Na Figura 13.19:

$$\begin{array}{ll} p_1 = 4,0 & \theta_1 = 120^\circ \\ p_2 = 3,6 & \theta_2 = 106,1^\circ \\ p_3 = 4,58 & \theta_3 = 49,1^\circ \\ p_0 = 3,478 & \theta_0 = 95,2^\circ \end{array}$$

Verificação:  $120^\circ + 106,1 + 49,1 - 95,2 = 180$

Posição do zero do compensador:

$$x = 3,464 / \cos(180 - 95,2) = 0,315$$

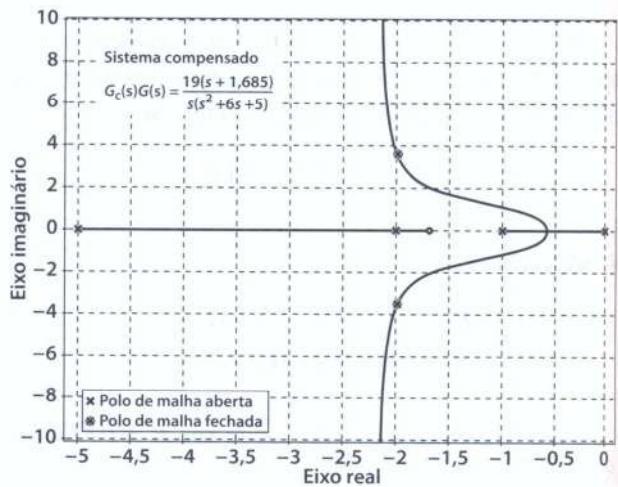
$$z_c = -2 + 0,315 = -1,685$$

$$K = \frac{p_1 p_2 p_3}{p_0} = \frac{4 \cdot 3,6 \cdot 4,58}{3,478} = 18,96 \approx 19$$

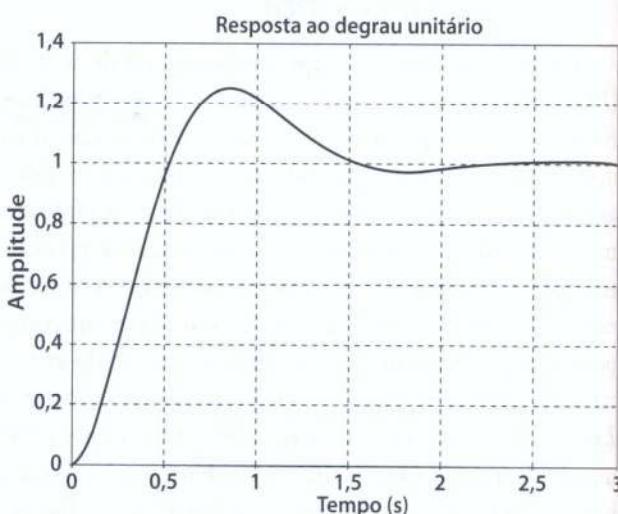
Temos, então:

Sistema compensado em malha aberta:

$$G_c(s)G(s) = K_c(s + 1,685) \frac{30}{s(s^2 + 6s + 5)} =$$



(a)



(b)

(a) Lugar de raízes do sistema compensado; (b) Resposta ao degrau do sistema compensado.

Figura 13.19

$$\frac{19(s+1,685)}{s(s^2+6s+5)}$$

$$K_c = \frac{19}{30} = 0,633$$

Compensador:

$$G_c(s) = 0,633(s+1,685)$$

Sistema compensado em malha fechada (ver figuras 13.19a e b):

$$F_c(s) = \frac{19s+32}{(s^3+6s^2+24s+32)}$$

#### ■ 13.1.4.1 Implementação do compensador PD

A configuração do circuito é a indicada na Figura 13.20. O amplificador 1 serve como inversor e eventual ajuste do ganho. O segundo amplificador é que caracteriza a dinâmica do compensador. No caso do controlador *PD*, temos

$$G_c(s) = K_c(s+b)$$

A equação do circuito pode ser escrita

$$G_c(s) = \frac{R_f}{R} R_2 C_1 \left( s + \frac{1}{R_1 C_1} \right)$$

Podemos fazer preliminarmente  $\frac{R_f}{R} = 1$ , com  $R_f = R = 100 \text{ k}\Omega$

Nessas condições, vemos que  $b = \frac{1}{R_1 C_1}$  e  $K_c = R_2 C_1$

No presente caso, temos

$$b = \frac{1}{R C_1} = 1,685 \quad K_c = R_2 C_1 = 0,633$$

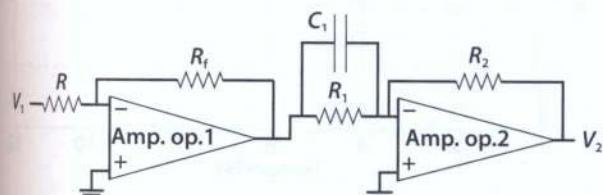


Figura 13.20

Resulta  $R_1 C_1 = \frac{1}{1,685}$ , podemos adotar  $C_1 = 1 \mu\text{F}$  e  $R_1 = 594 \text{ k}\Omega$ . Temos, então,

$$R_2 = \frac{0,633}{C_2} = 633 \text{ k}\Omega$$

#### Exemplo 13.7

No sistema de controle representado pelo diagrama de blocos da Figura 13.21, temos:

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+3)(s+5)} = \frac{100}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$$

Projete um compensador *PD* para que o sistema opere com um grau de amortecimento  $\zeta = 0,577$  e seja quatro vezes mais rápido (isto é, tenha um tempo de acomodação quatro vezes menor) que o sistema dado.

Solução:

Os polos de malha fechada com  $K = 100$  são as raízes do polinômio  $s^3 + 9s^2 + 23s + 115$ :  $-0,5357 \pm j3,7706$  e  $-7,928$ , e  $\zeta = 0,141$

e a constante de ganho de malha aberta

$$K_g = \frac{100}{15} = 6,667$$

O tempo de acomodação calculado nos dá  $T_a = \frac{4}{0,5357} = 7,467 \text{ s}$ . O novo tempo de acomodação será  $T_{ac} = \frac{T_a}{4} = 1,867 \text{ s}$ .

A parte real dos polos dominantes deve ser, a menos do sinal,  $\alpha = \frac{4}{T_{ac}} = \frac{4}{1,867} = 2,142 \text{ s}^{-1}$ .

Com  $\alpha = 2,142$  e grau de amortecimento  $\zeta = 0,577$ , podemos determinar facilmente a parte imaginária ( $\omega_n$ ) dos polos dominantes:

$$\omega_n = \frac{\alpha}{\zeta} = \frac{2,142}{0,577} = 3,712 \text{ e}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \sqrt{3,712^2 - 2,142^2} = 3,033$$

Portanto, os novos polos dominantes são  $-2,142 \pm j3,033$ . Com esses polos convenientemente localizados, podemos testar a condição angular do *LR*.

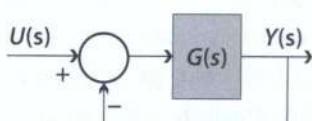


Figura 13.21

O ângulo obtido com os ângulos relativos ao primeiro desses polos dão o seguinte resultado:

$$\phi = 110,65 + 74,22 + 46,72 = 231,59$$

A condição angular é excedida por um ângulo de

$$\Delta\phi = 231,59 - 180 = 51,59$$

Esse ângulo pode ser compensado por um zero convenientemente localizado. Sendo  $x$  a distância horizontal entre os polos dominantes e a posição do zero do compensador:

$$x = \frac{\omega_d}{\tan(\Delta\phi)} = \frac{3,033}{1,261} = 2,405$$

A coordenada real desse zero será, então,

$$z_c = -(x + \infty) = -(2,405 + 2,142) = -4,547$$

A função de transferência do compensador resulta:

$$G_c(s) = K_c(s + 4,547)$$

Calculando as distâncias dos vários polos e do zero ao novo polo considerado, obtemos:

$$K = 3,24 \cdot 3,15 \cdot 4,16 / 3,87 \approx 11$$

A constante  $K_c$  do compensador é  $100K_c = 11$ . Logo,  $K_c = 0,11$ .

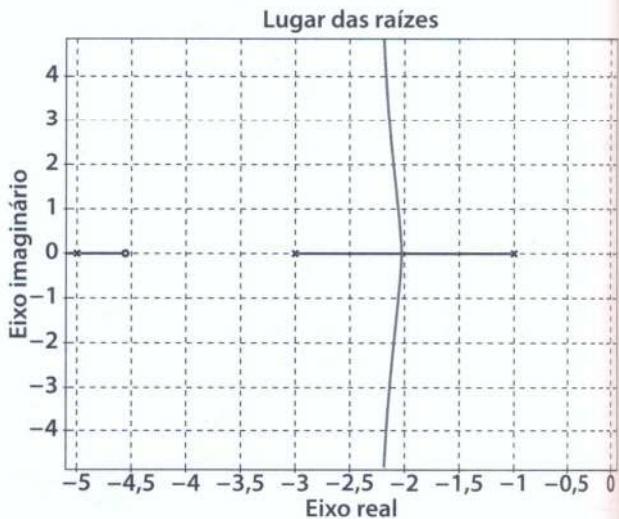
Função de transferência do sistema compensado em malha aberta (ver Figura 13.22):

$$G_c(s)G(s) = \frac{11(s + 4,546)}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15} = \frac{11s + 50}{s^3 + 9s^2 + 23s + 15}$$

E em malha fechada:

$$G_c(s)G(s) = \frac{11s + 50}{s^3 + 9s^2 + 34s + 65}$$

Uma observação importante relativa ao tipo de compensador utilizado neste exemplo é que, embora sejam atendidas as especificações relativas ao regime transitório (no caso, grau de amortecimento e tempo de acomodação), pode-se considerar que o comportamento do sistema em regime permanente, de certa forma, piorou, pois o erro estacionário da



Lugar das raízes do sistema compensado. Polos de malha aberta e de malha fechada desejadas.

resposta ao degrau aumentou, como se vê claramente no diagrama comparativo das respostas, mostrado na Figura 13.23. Entretanto, o objetivo deste tipo de compensador restringe-se à resposta transitória, e outras técnicas devem ser usadas em uma segunda etapa para resolver esse problema, se for necessário.

Um controlador *PD* só pode ser realizado eletronicamente com circuitos ativos. Assim, caso uma realização passiva seja necessária, pode-se utilizar uma ação similar por meio do compensador por avanço de fase que contém um polo em  $-1/f_1$ , em que o valor de  $f_1$  é normalmente pequeno.



Comparação entre as respostas dos sistemas compensado e não compensado.

Figura 13.23

$$K_p + s Kd \Rightarrow G_c(s) = \frac{K_p + s Kd}{f_1 s + 1}$$

### ■ 13.1.5 Controlador de avanço de fase

No item anterior estudamos a compensação *PD*, que consiste no acréscimo de um zero na função de transferência de malha aberta, convenientemente localizado para que o sistema compensado satisfaça à condição angular junto aos novos polos dominantes desejados.

Esses compensadores do tipo *PD* têm pelo menos dois inconvenientes: (1) a diferenciação do sinal ocasionada pelo zero amplifica os ruídos do sinal; e (2) a implementação do compensador deve ser feita por meio de circuito ativo, mais caro e complexo do que os circuitos sem fonte externa de alimentação. Esses inconvenientes podem ser contornados pelos compensadores de avanço de fase. Tais compensadores possuem um zero cuja localização é, em geral, optativa, e um polo mais à esquerda (mais afastado do eixo imaginário). Escolhida a posição do zero, a posição do polo deve ser tal que faça com que o ângulo do conjunto de polos e zeros do sistema compensado satisfaça à condição angular do *LR*. Se não forem impostos outros requisitos, é conveniente fazer com que a distância entre o zero e o polo do compensador seja a maior possível. Um valor elevado dessa distância geralmente resulta em um valor mais elevado da constante de erro estacionário do sistema, o que geralmente é desejável.

$$G_c(s) = \frac{K_c(s+b)}{s+a} \quad \text{com} \quad a > b$$

A posição do zero, em princípio, é arbitrária, mas os valores de  $a$  e  $b$  devem ser tais que façam com que o sistema compensado satisfaça a condição angular do *LR*.

#### Exemplo 13.8

Dado o sistema de controle dotado de realimentação unitária, sendo o controlador do ramo direto

$$G(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+4)} = \frac{20}{s^3 + 6s^2 + 8s}$$

projete um compensador de avanço de fase para que o sistema opere com um grau de amortecimento  $\zeta = 0,577$  e seja quatro vezes mais rápido (isto é, tenha um tempo de acomodação quatro vezes menor) que o sistema original.

Solução:

No projeto de um compensador por avanço de fase, costuma-se começar por uma tentativa arbitrária de atribuição do zero do compensador. Então, neste caso, vamos fazer uma primeira escolha do zero em  $-2$ .

Os polos de malha fechada com  $K = 20$  são as raízes do polinômio  $s^3 + 6s^2 + 8s + 20 = 0$ :

$$-0,399 \pm j1,920 \quad \text{e} \quad -5,201, \quad \text{e} \quad \zeta = 0,204.$$

O tempo de acomodação calculado é

$$T_d = \frac{4}{0,399} = 10,02 \text{ s. O novo tempo de-}$$

$$\text{acomodação deverá ser } T_{dc} = \frac{T_d}{4} = 2,506 \text{ s. A}$$

parte real dos polos dominantes, a menos do sinal, será  $\alpha = \frac{4}{T_{dc}} = \frac{4}{2,506} = 1,597 \text{ s}^{-1}$ .

Com  $\alpha = 1,597$  e grau de amortecimento  $\zeta = 0,577$ , podemos determinar a parte imaginária ( $\omega_d$ ) dos polos dominantes:

$$\omega_d = \frac{\alpha}{\zeta} = \frac{1,597}{0,577} = 2,768 \quad \text{e}$$

$$\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} = \sqrt{2,768^2 - 1,597^2} = 2,261$$

Portanto, os novos polos dominantes são  $-1,597 \pm j2,261$ . Com esses polos convenientemente localizados, podemos testar a condição angular do *LR*.

Se colocarmos o zero do compensador na posição  $-2$ , ele neutralizará o polo ali existente, restando apenas os dois outros polos, um na origem e outro em  $-4$ . A soma dos ângulos correspondentes, calculada a partir do *LR*:

$$\phi = 125,24 + 43,27 = 168,51$$

A condição angular é insuficiente por um ângulo de

$$\Delta\phi = 180 - 168,51 = 11,49$$

Esse ângulo deve ser compensado pelo polo do compensador de avanço de fase.

Sendo  $x$  a distância horizontal entre os polos dominantes e a posição do polo do compensador:

$$x = \frac{\omega_d}{\tan(-\Delta\phi)} = \frac{2,261}{0,203} = 11,23$$

A coordenada desse polo sobre o eixo real será, então,

$$z_c = -(x + \alpha) = -(11,23 + 1,597) = -12,82$$

Localizados o polo e o zero do compensador, podemos agora calcular a constante  $K$  do sistema compensado, calculando o produto das distâncias dos vários polos e do zero ao novo polo considerado. No caso, devido ao cancelamento do par polo e zero em  $-2$ , resulta:

$$K = \rho_1 \rho_3 \rho_{dc} = 2,769 \cdot 3,299 \cdot 11,45 = 104,56$$

Função de transferência do sistema compensado de malha aberta:

$$G_c(s) G(s) = \frac{K_c(s+2)}{(s+12,82)(s^3+6s^2+8s)} = \frac{20}{s^3+16,82s^2+51,28s}$$

$$104,6 = 20K_c \quad K_c = 104,6/20 = 5,23$$

Para o compensador, temos:

$$G_c(s) = \frac{5,23(s+2)}{s+12,82}$$

Função de transferência do sistema compensado de malha fechada (ver figuras 13.24 e 13.25):

$$F(s) = \frac{104,6}{s^3+16,82s^2+51,28s+104,6}$$



Comparação entre as respostas dos sistemas compensado e não compensado.

### ■ 13.1.5.1 Implementação do compensador de avanço de fase

A configuração do circuito é a indicada na Figura 13.26. O amplificador 1 serve como inversor e eventual ajuste do ganho. O segundo amplificador é que caracteriza o compensador de avanço de fase. No caso desse compensador, temos

$$G_c(s) = K_c \frac{(s+b)}{(s+a)} \quad \text{com} \quad a > b$$

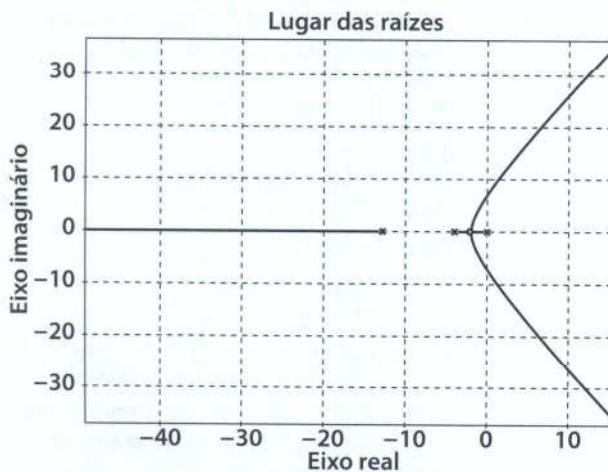


Figura 13.24 Lugar das raízes do sistema compensado.

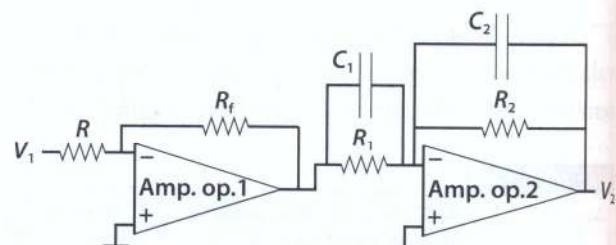


Figura 13.26

A equação do circuito pode ser escrita

$$G_c(s) = \frac{R_f}{R} \frac{C_1}{C_2} \left( \frac{s + \frac{1}{R_1 C_1}}{s + \frac{1}{R_2 C_2}} \right) \text{ com } R_1 C_1 > R_2 C_2$$

### Exemplo 13.9

Sendo

$$G_c(s) = \frac{5,23(s+2)}{s+12,82}$$

temos:

$$b = \frac{1}{R_1 C_1} = 2 \quad \text{e} \quad a = \frac{1}{R_2 C_2} = 12,8$$

ou

$$R_1 C_1 = 0,5 \quad \text{e} \quad R_2 C_2 = 0,078$$

Podemos começar por escolher os capacitores  $C_1 = C_2 = 1\mu F$ . Os resistores correspondentes resultam:  $R_1 = 500\text{ k}\Omega$  e  $R_2 = 78\text{ k}\Omega$ . Além disso, temos  $\frac{R_f}{R} = 5,23$ . Pode ser  $R = 10\text{ k}\Omega$  e

$$R_f = 52,3\text{ k}\Omega.$$

Vamos refazer o projeto agora, com o zero do compensador em  $-1,5$ . As especificações serão mantidas; portanto, queremos posicionar os polos em  $-1,597 \pm j2,261$ , como antes. Com esses polos convenientemente localizados, podemos testar a condição angular do  $LR$ .

Se colocarmos o zero do compensador na posição  $-1,5$ , a soma dos ângulos correspondentes, calculada a partir do  $LR$ , é:

$$\phi = 125,24 + 79,91 + 43,27 - 92,47 = 155,95$$

A condição angular é excedida por um ângulo de

$$\Delta\phi = 155,95 - 180 = -24,05$$

Esse ângulo negativo deve ser compensado pelo polo do compensador de avanço de fase.

Sendo  $x$  a distância horizontal entre os polos dominantes e a posição do polo do compensador:

$$x = \frac{\omega_d}{\tan(-\Delta\phi)} = \frac{2,261}{0,447} = 5,058$$

A coordenada desse polo sobre o eixo real será, então,

$$p_c = -(x + \alpha) = -(5,058 + 1,597) = -6,66$$

Localizados o polo e o zero do compensador, podemos agora calcular a constante  $K$  do sistema compensado, calculando as distâncias dos vários polos e do zero ao novo polo considerado. No caso, devido ao cancelamento do par polo e zero em  $-2$ , resulta:

$$K = (p_1 p_2 p_3 p_{pc}) / p_{oc} =$$

$$(2,769 \cdot 2,296 \cdot 3,299 \cdot 5,547) / 2,264 = 51,43$$

Função de transferência do sistema compensado de malha aberta:

$$G_c(s) G(s) = \frac{K_c(s+1,5)}{(s+6,664)} \frac{20}{(s^3 + 6s^2 + 8s)} = \frac{51,43(s+1,5)}{s^4 + 12,66s^3 + 47,98s^2 + 53,31s}$$

$$51,43 = 20K_c$$

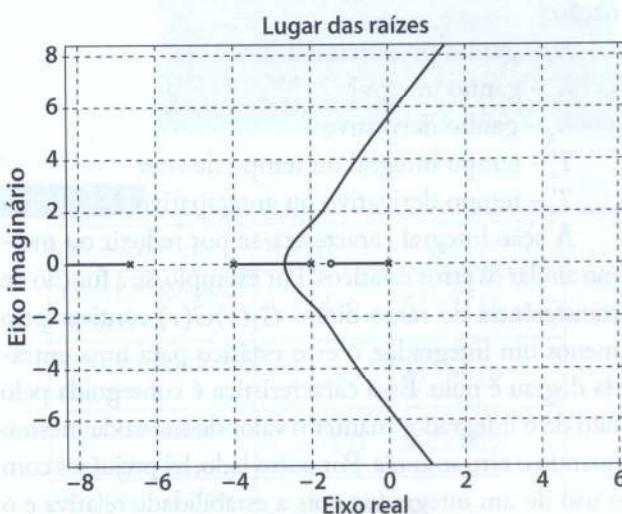
$$K_c = 51,43 / 20 = 2,57$$

Para o compensador

$$G_c(s) = \frac{2,57(s+1,5)}{s+6,664}$$

Função de transferência do sistema compensado de malha fechada (ver figuras 13.27 e 13.28):

$$F(s) = \frac{51,43(s+1,5)}{s^4 + 12,66s^3 + 47,99s^2 + 104,7s + 77,15}$$



**Figura 13.27** Lugar das raízes do sistema compensado.



Comparação entre as respostas dos sistemas compensado e não compensado.

### ■ 13.1.6 Controlador proporcional-integral-derivativo (PID)

O controlador *PID* envolve os três tipos de ações já estudados: proporcional, integral e derivativo. Ele é caracterizado pela função de transferência

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + sK_d$$

ou

$$G_c(s) = K_p \left( 1 + \frac{1}{T_i s} + s T_d \right)$$

Sendo que as constantes têm a seguinte denominação:

$K_p$  – ganho proporcional

$K_i$  – ganho integral

$K_d$  – ganho derivativo

$T_i$  – tempo integral ou tempo de *reset*

$T_d$  – tempo derivativo ou antecipativo

A ação integral caracteriza-se por reduzir ou mesmo anular os erros estáticos. Por exemplo, se a função de transferência do ramo direto  $G_c(s)G(s)$  contiver pelo menos um integrador, o erro estático para uma entrada degrau é nulo. Essa característica é conseguida pelo fato de o integrador manter o valor de sua saída mesmo quando o erro se anula. Por outro lado, há prejuízos com o uso de um integrador, pois a estabilidade relativa e o amortecimento da resposta tendem a diminuir.

Como a função de transferência do controlador *PID* é fixa, não há como colocar outros integradores.

Se for necessário reduzir ainda mais o erro estacionário, por exemplo, para uma entrada tipo rampa, isso é possível com a elevação do ganho  $K_p$  (ação proporcional).

A parcela derivativa tem implicações no sentido contrário da parcela integral, ou seja, aumenta o amortecimento e, normalmente, melhora a estabilidade relativa do sistema. A ação derivativa realiza a função de antecipar erros futuros, ao preço de aumentar a banda passante do sistema e, portanto, a amplificação dos inevitáveis ruídos.

Para se obter uma resposta e estabilidade relativa aceitáveis, deve-se combinar adequadamente os três termos (proporcional, integral e derivativo).

#### Observação:

A combinação do compensador por avanço de fase com o controlador por atraso de fase, resulta no controlador por avanço e atraso de fase, que é similar ao controlador *PID*.

$$\left( K_p + s K_d \right) \left( \frac{K_p s + K_i}{s} \right) \Rightarrow \\ G_c(s) = \left( \frac{K_p + s K_d}{f_1 s + 1} \right) \left( \frac{K_p s + K_i}{s + f_2} \right)$$

Na Figura 13.29 vemos duas formas equivalentes de representação de um controlador *PID* no ramo direto de um sistema de controle.

A função de transferência do controlador *PID* pode ser escrita de várias formas.

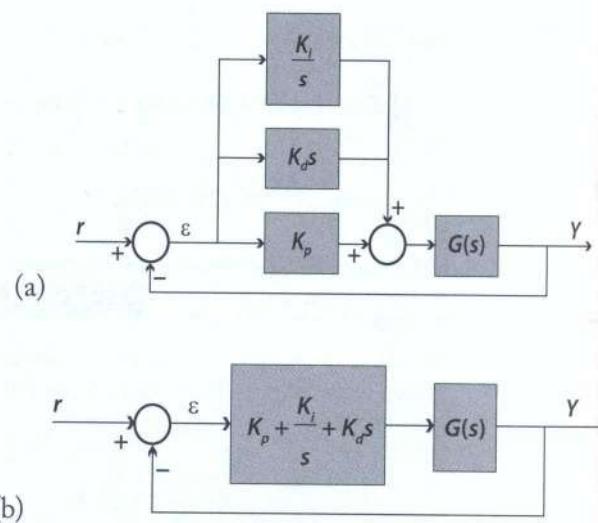


Figura 13.29

$$G_c(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s = \frac{K_d s^2 + K_p s + K_i}{s} =$$

$$K_d \frac{s^2 + as + b}{s} = K_d \frac{(s + z_{c1})(s + z_{c2})}{s}$$

Costuma-se projetar um compensador *PID* em duas etapas: primeiro, calcula-se o compensador *PD* para atender às especificações relativas à resposta transitória; em seguida, projeta-se a seção *PI* do compensador para atender às especificações de erro da resposta de regime permanente.

O exemplo a seguir esclarece os vários pontos desse projeto.

#### Exemplo 13.10

Dado o sistema indicado na Figura 13.30, onde

$$G(s) = \frac{200(s+6)}{(s+2)(s+5)(s+10)}$$

projete um compensador do tipo *PID* que atenda às seguintes especificações:

(1) Mantenha o mesmo tempo de pico  $T_p$  do sistema sem compensação.

(2) Mude o grau de amortecimento para  $\zeta = 0,5$  do par de polos complexos conjugados.

(3) Obtenha o erro estacionário de posição nula ( $\epsilon_{e_{sp}} = 0$ ).

Solução:

A função de transferência do sistema dado em malha aberta é:

$$G(s) = \frac{200(s+6)}{(s+2)(s+5)(s+10)} =$$

$$\frac{200(s+6)}{s^3 + 17s^2 + 80s + 100}$$

e, em malha fechada:

$$F(s) = \frac{200(s+6)}{s^3 + 17s^2 + 280s + 1300}$$

Cujos polos são:

$$-5,456 + 13,557j$$

$$-5,456 - 13,557j$$

$$-6,0867$$

O tempo de pico que deve ser conservado pode ser facilmente calculado:

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_d} = \frac{3,1416}{13,557} = 0,232$$

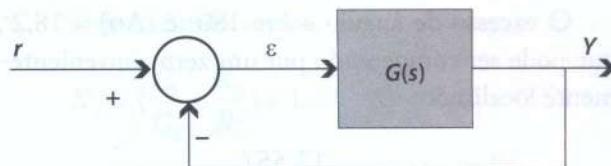


Figura 13.30

Mas note que manter o mesmo valor de  $T_p$  implica conservar o mesmo valor da frequência de ressonância  $\omega_d = 13,557$  rad/s.

Nesse sistema, temos, ainda:

$$\omega_n = \sqrt{\omega_d^2 + \alpha^2} = \sqrt{13,557^2 + 5,457^2} = 14,614$$

e o grau de amortecimento

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = \frac{5,456}{14,614} = 0,373$$

Esse valor do grau de amortecimento deve mudar no sistema compensado para  $\zeta = 0,5$ .

Nessas condições, o novo  $\omega_n$  deve ser:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} = \frac{13,557}{\sqrt{0,75}} = 15,654$$

Podemos agora calcular o novo coeficiente de amortecimento  $\alpha$ :

$$\zeta = \frac{\alpha}{\omega_n} = 0,5 \quad \text{ou} \quad \alpha = 7,827$$

Então os novos polos dominantes serão  $-7,827 \pm j13,557$ .

Podemos calcular agora o módulo e os argumentos (ângulos de fase) dos vetores com origem nos polos e zeros de malha aberta e extremidade em um dos novos polos, por exemplo, no polo  $-7,827 + j13,557$  (ver Tabela 13.1).

Tabela 13.1

Origem do vetor	Módulo	Ângulo (°)
Vetor com origem no polo -2	$R_2 = 14,76$	$\theta_2 = 113,2$
Vetor com origem no polo -5	$R_5 = 13,85$	$\theta_5 = 101,8$
Vetor com origem no polo -10	$R_{10} = 13,73$	$\theta_{10} = 80,9$
Vetor com origem no zero -6	$R_6 = 13,68$	$\theta_6 = -97,7$
		$\phi = \sum \theta_i = 198,2$

O excesso de ângulo sobre  $180^\circ$  é  $(\Delta\phi) = 18,2^\circ$ , que pode ser compensado por um zero convenientemente localizado:

$$z_c = -\frac{\omega_d}{\tan(\Delta\phi)} - \alpha = -\frac{13,557}{\tan(18,2^\circ)} - 7,827 \approx -49,0$$

A seção *PD* do compensador *PID* terá a função de transferência:

$$G_{pd} = s + 49,0$$

Também vemos que o vetor que vai de  $z_c$  ao novo polo considerado tem módulo  $R_{zc} = 43,3$  e ângulo de fase  $\theta_{zc} = -18,2^\circ$  (o sinal é negativo por se tratar de um zero).

Podemos prosseguir o projeto calculando agora a seção *PI* do compensador, destinada a corrigir o erro estacionário da resposta ao degrau.

A seção *PI* do compensador tem um polo na origem e um zero próximo, à esquerda. A posição do zero pode ser escolhida por simulação. Se o resultado não for aceito, muda-se a posição do zero e faz-se nova avaliação. Se necessário, repete-se o procedimento até se conseguir um resultado satisfatório.

No presente caso, colocamos o zero em  $-0,5$ .

$$G_{pi} = \frac{s + 0,5}{s}$$

O módulo e os argumentos (ângulos de fase) dos vetores com origem no polo e no zero desse compensador *PI* e extremidade no polo selecionado  $(-7,827 + j13,557)$  são: para o polo na origem,  $R_0 = \omega_n = 15,654$  e  $\theta_0 = 120^\circ$ ; para o zero em  $-0,5$ , temos  $R_{0,5} = 15,410$  e  $\theta_{0,5} = 118,39^\circ$ . Devido ao acréscimo do polo na origem e do zero em  $-0,5$ , a condição angular do *LR* não é mais satisfeita. A soma dos ângulos agora é  $\Delta\phi = 181,61^\circ$ . A diferença para  $180^\circ$  é pequena, porque o polo e o zero do compensador *PI* estão muito próximos. A função de transferência do compensador *PID* completo é:

$$G_{PID} = \frac{K_c(s + 0,5)(s + 49)}{s}$$

e a função de transferência do sistema compensado de malha aberta será:

$$G_c(s)G(s) = \frac{K_c(s + 0,5)(s + 49)}{s} \frac{200(s + 6)}{(s + 2)(s + 5)(s + 10)}$$

ou, calculando a constante  $K$ , a partir do *LR*, pelo duto das distâncias entre cada polo de malha aberta um dos polos de malha fechada desejados dividido pelas distâncias análogas correspondentes aos zeros, temos:

$$G(s) = \frac{200K_c(s + 0,5)(s + 49)(s + 6)}{s(s + 2)(s + 5)(s + 10)} = \frac{4,82(s^3 + 55,5s^2 + 321,5s + 147)}{s(s^3 + 17s^2 + 80s + 100)}$$

Em malha fechada, temos:

$$F(s) = \frac{4,82(s^3 + 55,5s^2 + 321,5s + 147)}{(s^4 + 21,82s^3 + 347,2s^2 + 1648s + 707)}$$

com polos  $-7,62 \pm 13,64j$ ,  $-6,09$  e  $-0,476$  e grau de amortecimento do par de polos complexos  $\zeta = 0,476$  (ver Figura 13.31).

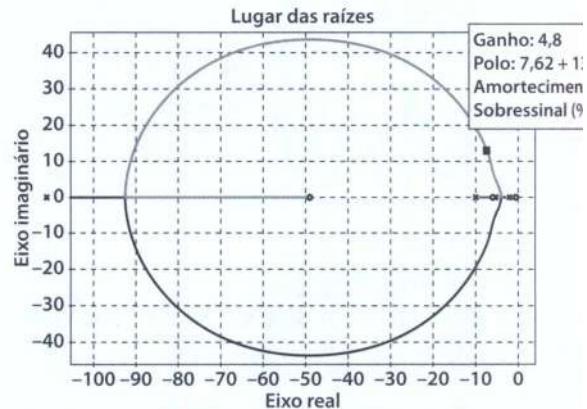
De qualquer forma, os polos do sistema que fazem a condição imposta para o grau de amortecimento sofrem um pequeno deslocamento. Os resultados obtidos mostram uma boa aproximação, como se pode ver inclusive pelo *LR*.

Completando o projeto do compensador, temos:

As características do compensador *PID* projetado são indicadas abaixo.

$$K_c = \frac{4,815}{200} = 0,024$$

$$G_{PID} = \frac{0,024(s^2 + 49,5s + 24,5)}{s} = 1,19 + \frac{0,59}{s} + 0,024s$$



**Figura 13.31**

Identificando-se assim os coeficientes dos componentes proporcional, integral e derivativo, respectivamente:

$$K_p = 1,19 \quad K_i = 0,59 \quad K_d = 0,024$$

A configuração do compensador *PID* é a indicada na Figura 13.32, e as equações correspondentes são as seguintes:

$$G_{PID}(s) = \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1} \frac{R_2 C_2 s + 1}{C_2 s} = \frac{R_1 C_1 R_2 C_2 s^2 + (R_1 C_1 + R_2 C_2)s + 1}{R_1 C_2 s}$$

$$G_{PID}(s) = \left( \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{R_1 C_2 s} + R_2 C_1 s = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

Comparando os coeficientes dos dois últimos termos da equação acima, podemos escrever:

$$K_p = \left( \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} \right) \quad K_i = R_2 C_1 \quad K_d = \frac{1}{R_1 C_2}$$

A realização do projeto do compensador indicado na figura exige agora a determinação do valor dos capacitores e resistores a serem utilizados. São quatro incógnitas ( $R_1$ ,  $C_1$ ,  $R_2$  e  $C_2$ ), e temos apenas três equações independentes. A sequência de cálculo geralmente adotada é a seguinte: escolhe-se arbitrariamente o valor de um dos componentes;  $C_1$ , por exemplo. Calcula-se, então,  $R_2 = K_i / C_1$ . Em seguida, elimina-se  $C_1$  e  $C_2$  na primeira equação, em função de  $R_1$  e  $R_2$ . Obtém-se

$$K_i K_d R_1^2 - K_p R_2 R_1 + R_2^2 = 0$$

Conhecido  $R_2$ , determinamos  $R_1$  com auxílio da equação acima e em seguida  $C_2$ .

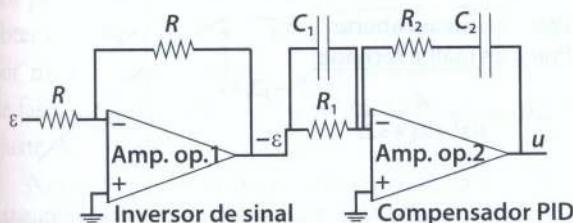


Figura 13.32

Neste exemplo, temos:

$$K_p = \left( \frac{C_1}{C_2} + \frac{R_2}{R_1} \right) = 1,19 \quad K_i = R_2 C_1 = 0,59$$

$$K_d = \frac{1}{R_1 C_2} = 0,024$$

Fazendo  $C_1 = 10^{-6}$  F, resulta  $R_2 = 590$  kΩ, e a equação acima torna-se:

$$0,0142 R_1^2 + 702100 R_1 + 3,481 \cdot 10^{11} = 0$$

obtendo-se, então,

$$R_1 = 500 \text{ k}\Omega \quad C_2 = 83,2 \mu\text{F}$$

### ■ 13.1.7 Compensação por realimentação interna

Até aqui estudamos circuitos compensadores diretamente inseridos no ramo direto dos sistemas de controle. Existem evidentemente outras possibilidades. Outra possibilidade muito conveniente em certos casos é obter a compensação por meio de uma malha interna de realimentação auxiliar. Esse tipo de compensação é muito utilizado, por exemplo, nos sistemas de controle de posição quando o uso de tacogerador fornece um sinal que é a derivada da saída. É também, algumas vezes, denominado ‘controle em cascata’.

#### Exemplo 13.11

Dado o sistema posicionador indicado na Figura 13.33, vamos projetar um compensador com auxílio de realimentação de velocidade para que o sistema compensado satisfaça às seguintes especificações: (1) tenha grau de amortecimento da malha interna:  $\zeta = 0,707$ ; e (2) o tempo de acomodação da malha interna seja duas vezes menor que o do sistema completo.

Solução:

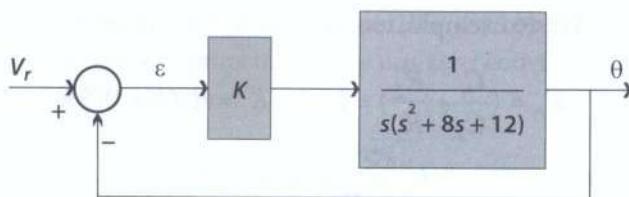
Projeto da malha interna (ver Figura 13.34):

A função de transferência da malha interna é, em malha aberta,

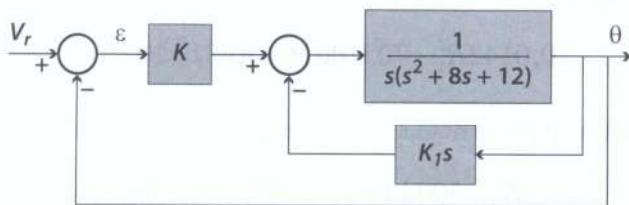
$$G_{int} = \frac{K_1 s}{s(s^2 + 8s + 12)}$$

e, em malha fechada (ver Figura 13.35):

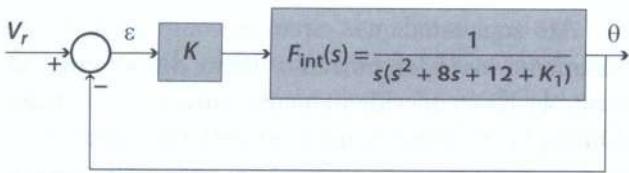
$$F_{int} = \frac{1}{s(s^2 + 8s + 12 + K_1)}$$



**Figura 13.33** Sistema não compensado.



**Figura 13.34** Sistema com malha interna de compensação.



**Figura 13.35** Sistema com malha interna reduzida.

De acordo com a equação característica da malha interna e a especificação sobre o grau de amortecimento ( $\zeta = 0,707$  ou  $\theta = 45^\circ$ ), as raízes da malha interna deverão ser:

$$s_{1,2} = -4 \pm j4 \quad \text{e} \quad s_3 = 0$$

o que nos leva ao polinômio característico

$$s[(s+4)^2 + 16] = s[s^2 + 8s + 32]$$

Logo,

$$12 + K_1 = 32 \quad \text{ou} \quad K_1 = 20$$

Malha externa:

Função de transferência do ramo direto do sistema com malha externa aberta será:

$$G(s) = \frac{K}{s(s^2 + 8s + 32)}$$

E, em malha fechada

$$F(s) = \frac{K}{s^3 + 8s^2 + 32s + K}$$

Para que o sistema final de malha fechada tenha polos dominantes duas vezes mais lentos que os da malha interna, a parte real desses novos polos deve ser  $-2$ , isto é: polo  $1 = -2 + j\omega_d$  e polo  $2 = -2 - j\omega_d$ . Podemos agora construir o LR de  $F(s)$ , a partir dos polos  $(0, -4 + j4)$  e  $(-4 - j4)$ , de  $G(s)$ , que são os polos de malha aberta de  $F(s)$ . Nesse diagrama do LR, podemos determinar graficamente os polos dominantes desejados de  $F(s)$ . De fato, os polos desejados ficam na paralela ao eixo imaginário que passa pelo ponto  $-2$  do eixo real.

Cuidadosamente, pelo gráfico, obtemos  $\omega_d = 3,47$ ; portanto, polos em  $-2 \pm j3,47$ . O ganho  $K$  também pode ser obtido graficamente a partir do diagrama LR. Neste exemplo, temos  $K = 63,9$ . Podemos determinar ainda:

Função de transferência:

$$F(s) = \frac{63,9}{s^3 + 8s^2 + 32s + 63,9}$$

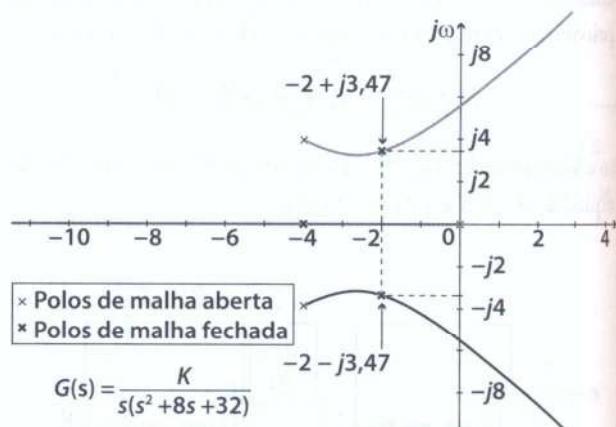
Raízes (polos):

$$-2 \pm j3,47 \text{ e terceiro polo em } -4$$

Grau de amortecimento:

$$\zeta = \operatorname{sen}\left(\arctan\left(\frac{2}{3,47}\right)\right) = 0,5$$

Tempo de acomodação:  $t_{ac} = \frac{4}{a} = \frac{4}{2} = 2$  segundos, aproximadamente (ver figuras 13.36 e 13.37).



LR do sistema com a malha interna já reduzida e com indicação de polos desejados para o sistema completo.

**Figura 13.36**



Figura 13.37

## 13.2 Projeto de compensadores pelo método da resposta em frequência

Quando as especificações de um sistema de controle forem feitas no domínio da frequência, o projeto do compensador deve ser preferencialmente feito pelo método da resposta em frequência. São exemplos de tais especificações as margens de ganho e de fase, o pico de ressonância, a largura de banda etc. O estudo da compensação é, mais comumente, feito a partir da resposta em frequência do sistema em malha aberta. Nos diagramas de Bode, as curvas de ganho e de fase permitem determinar as margens de ganho e de fase, bem como as respectivas frequências de cruzamento e, a partir delas, verificar a estabilidade absoluta do sistema em malha fechada, bem como avaliar também a estabilidade relativa. O formato das curvas também nos dá uma boa indicação sobre o comportamento do sistema tanto no que se refere à resposta transitória como à resposta de regime e sugerem as modificações a serem introduzidas pelo compensador. Nos compensadores projetados por meio de resposta em frequência, procura-se obter o atendimento das especificações, por exemplo, por meio compensadores de atraso de fase, avanço de fase, atraso e avanço de fase ou simplesmente por ajuste de ganho.

Neste texto examinaremos apenas alguns exemplos relativos à compensação por ajuste de ganho e por atraso e avanço de fase.

### ■ 13.2.1 Compensação por ajuste de ganho

Iniciaremos com o caso mais simples, que é o de compensação por ajuste de ganho

#### Exemplo 13.12

No sistema da Figura 13.38, tem-se  $G(s) = \frac{45000}{s(s+5)(s+90)}$ . Determine o ajuste de ganho necessário para que o sistema tenha margem de ganho da ordem de 20 dB.

Solução:

A função de transferência de malha aberta pode ser escrita sob a forma

$$G(s) = \frac{100}{s\left(\frac{s}{5}+1\right)\left(\frac{s}{90}+1\right)}$$

Onde se vê que a constante de ganho de frequência zero é 100, ou seja, 40 dB (ver Figura 13.39). Vê-se também que a frequência de cruzamento de ganho é de 21,7 rad/s e a de fase é aproximadamente a mesma. Em consequência, as margens de fase e de ganho são praticamente nulas.

Pelas figuras 13.39a e b, verificamos que a diminuição do ganho de 40 para 20 dB nos leva aos seguintes resultados:

margem de ganho: frequência de cruzamento:  $\omega_{cg} = 21,2$  rad/s  $\rightarrow MG = 19,5$  dB;

margem de fase: frequência de cruzamento:  $\omega_{cf} = 6,24$  rad/s  $\rightarrow MF = 34,7^\circ$ .

Os resultados obtidos com essa redução de ganho são satisfatórios.

Note que a simples redução de ganho é razoável quando as especificações se reduzem a fixar as margens de ganho e de fase. Se houver outra condição imposta, como as relativas à precisão da resposta em regime permanente, talvez seja necessário recorrer a compensadores mais elaborados.

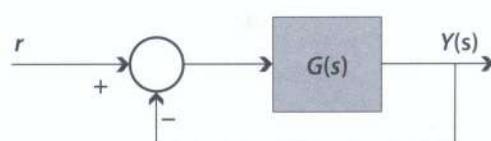


Figura 13.38

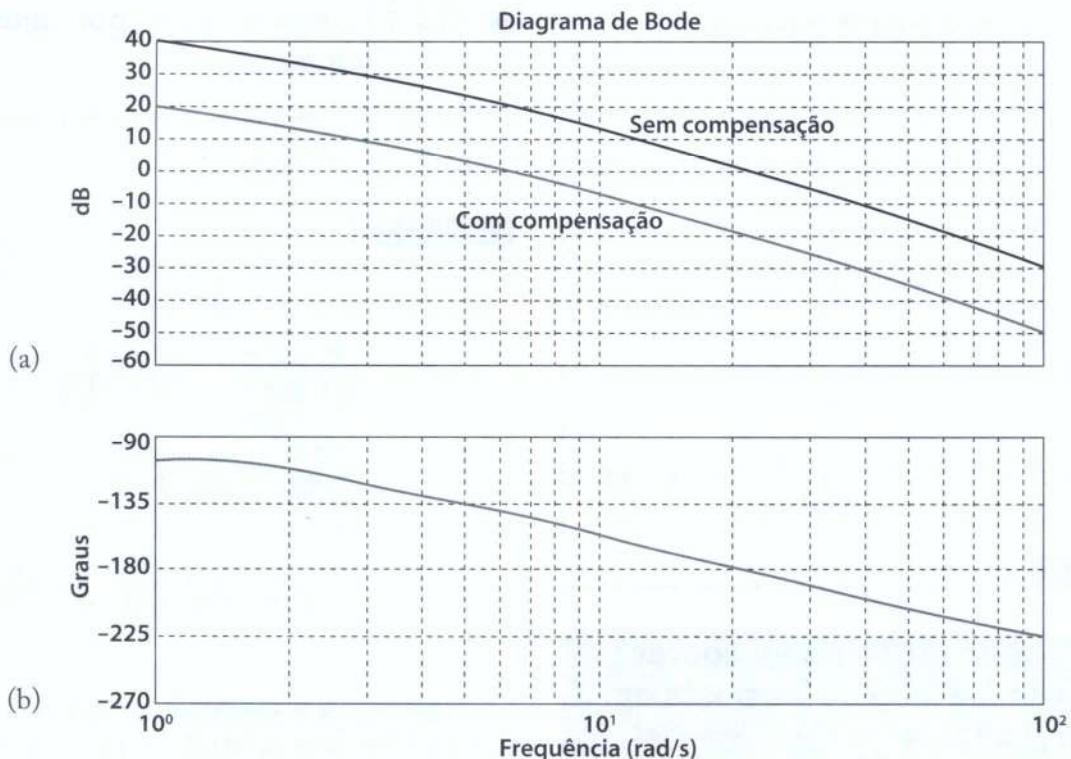


Figura 13.39

### ■ 13.2.2 Compensação por atraso de fase

Os compensadores de atraso de fase destinam-se a fazer com que a resposta em frequência do sistema apresente atenuação nas altas frequências sem alterar o ganho nas baixas. Dessa forma, pode-se aumentar a margem de fase sem alterar a constante de ganho de frequência zero do sistema. A resposta em frequência de fase não se deve alterar sensivelmente na região onde ocorre a frequência de cruzamento do sistema compensado. O compensador de atraso de fase, que poderia ser denominado compensador de atenuação em alta frequência, deve ter um polo em uma frequência  $\omega_1$  e um zero em uma frequência  $\omega_2 > \omega_1$ :

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} = \frac{1 + aTs}{1 + Ts}$$

com

$$\omega_1 < \omega_2, \quad aT = \frac{1}{\omega_2}, \quad T = \frac{1}{\omega_1}$$

$$a = \frac{\omega_1}{\omega_2} < 1,$$

$$20 \log(a) = 20 \log(\omega_1) - 20 \log(\omega_2) < 0$$

Também

$$K_g = \lim_{\omega \rightarrow 0} (G_c(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}} \right) = 1$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (G_c(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + \frac{j\omega}{\omega_2}}{1 + \frac{j\omega}{\omega_1}} \right) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = a$$

Vê-se, então, que as altas frequências ficam atenuadas em  $a$ (dB), mas a constante de ganho de baixa frequência ( $K_g$ ) não se altera.

Um procedimento para o projeto de um compensador de atraso de fase é o seguinte:

- (1) Ajuste, se for o caso, o ganho  $K_g$  de malha aberta ( $A(s) = G(s)H(s)$ ), necessário para satisfazer a especificação relativa ao erro estacionário.

(2) Determine a frequência ( $\bar{\omega}_c$ ) em que o diagrama de resposta em frequência de fase de  $A(s)$  é igual a  $(-180^\circ + \Delta\phi + \Delta\varphi)$ , onde  $\Delta\phi$  é a margem de fase especificada, e  $\Delta\varphi$ , acréscimo de segurança de  $5^\circ$  a  $12^\circ$  (esse acréscimo de segurança destina-se a compensar a alteração prejudicial do diagrama de resposta em frequência de fase). Use essa frequência ( $\bar{\omega}_c$ ) como sendo a frequência de cruzamento do sistema compensado.

(3) Para minimizar efeitos negativos no atraso de fase introduzido pelo compensador, o zero desse compensador deve ser localizado em uma frequência  $\omega_2$  distante de uma década a uma oitava abaixo de  $\bar{\omega}_c$  (isto é,  $0,1\bar{\omega}_c \leq \omega_2 \leq 0,5\bar{\omega}_c$ ).

(4) Determine a atenuação necessária para trazer a curva de ganho para 0 dB, na frequência de cruzamento ( $\bar{\omega}_c$ ). Notando que essa atenuação é justamente  $a(\text{dB}) = 20 \log(a) = 20 \log(\omega_1/\omega_2)$ , pode-se determinar  $a$ . Então, a frequência correspondente ao polo do compensador será  $\omega_1 = a\omega_2$ .

Na Figura 13.40 vemos o diagrama de Bode de um compensador com  $\omega_1 = 1 \text{ rad/s}$  e  $\omega_2 = 10 \text{ rad/s}$ .

### ■ 13.2.2.1 Implementação do compensador por atraso de fase

Os compensadores de atraso de fase podem ser realizados por meio de circuitos passivos ou ativos.

(1) Compensadores passivos de atraso de fase (Figura 13.41).

$$G_c(s) = \frac{R_2 + \frac{1}{Cs}}{R_1 + R_2 + \frac{1}{Cs}} = \frac{1 + R_2 Cs}{1 + (R_1 + R_2)Cs}$$

Com vimos, modelo de um compensador de atraso de fase.

$$G(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} = \frac{1 + aTs}{1 + T_s}$$

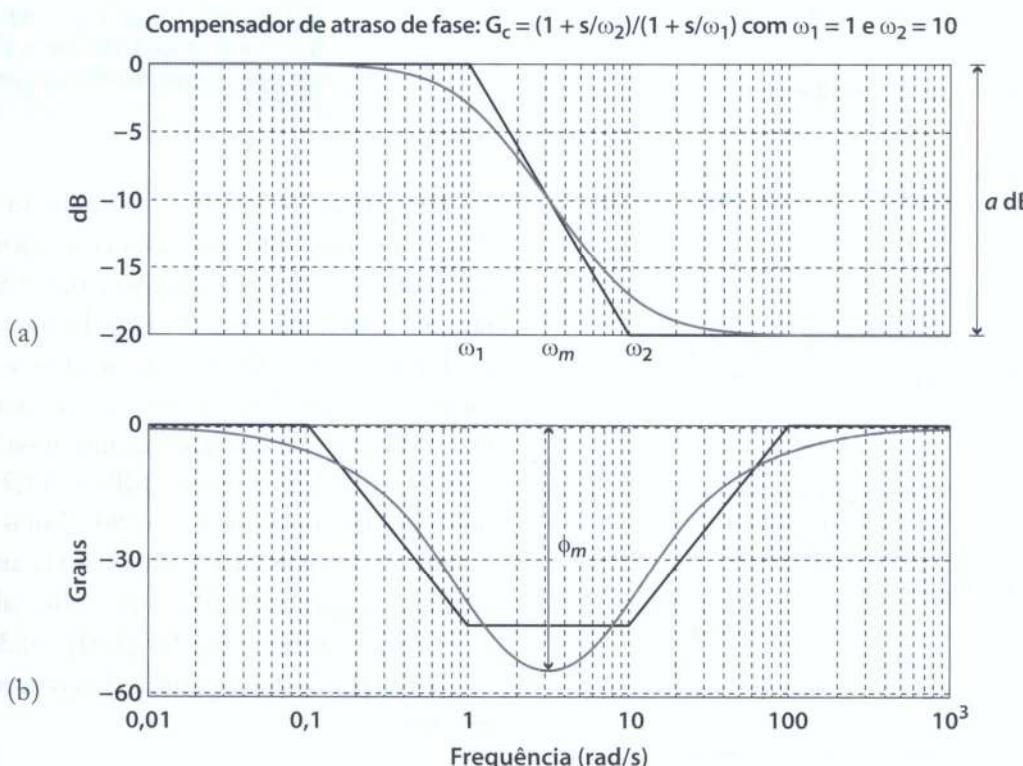
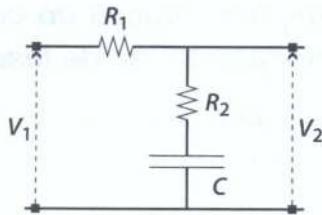


Figura 13.40



**Figura 13.41** Compensador passivo de atraso de fase.

Comparando as duas últimas expressões, resulta:

$$\omega_1 = \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \quad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C} > \omega_1$$

$$\frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_1}{R_2} + 1$$

$$R_2 = \frac{1}{C\omega_2} \quad R_1 = \left( \frac{\omega_2}{\omega_1} - 1 \right) R_2$$

O valor de  $C$  costuma ser fixado previamente.

(2) Compensadores ativos de atraso de fase (Figura 13.42).

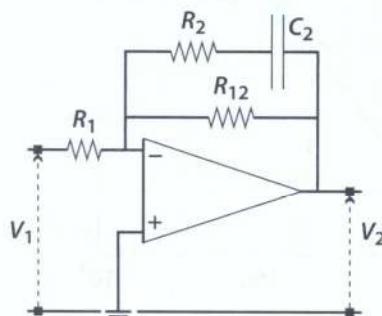
$$G_c(s) = -\frac{R_{12}}{R_1} \frac{1 + R_2 C_2 s}{1 + (R_{12} + R_2) C_2 s}$$

Conhecidos  $\omega_1$  e  $\omega_2$ , escolhe-se  $C_2$  e calcula-se  $R_2$ :

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} \quad R_2 = \frac{1}{\omega_2 C_2}$$

e depois,  $R_{12}$

$$\omega_1 = \frac{1}{(R_{12} + R_2)C_2} \quad R_{12} = \frac{1}{\omega_1 C_2} - R_2$$



**Figura 13.42** Compensador ativo de atraso de fase.

O valor de  $R_1$  fica determinado pelo eventual ganho de baixa frequência ( $K_c$ ) que se deseja para o compensador.

$$K_c = \frac{R_{12}}{R_1}$$

**Exemplo 13.13**

Dada a função de transferência do ramo direto de um sistema dotado de realimentação unitária negativa,  $G(s) = \frac{K}{(s+6)(s+21)}$ , projete o compensador de atraso de fase para fazer com que o sistema tenha um erro estacionário de posição  $e_{sp} = 1/26$  e margem de fase de  $60^\circ$ .

Solução:

No caso, temos  $e_{sp} = \frac{1}{K_g + 1} = \frac{1}{26}$ ,  $K_g = 25$  ou  $K_g(\text{dB}) = 28 \text{ dB}$ ; também  $K = (25)(6)(21) = 3150$ ; e a função de transferência de malha aberta do sistema não compensado será:

$$G(s) = \frac{3150}{(s+6)(s+21)}$$

Para o sistema sem compensador, tem-se frequência de cruzamento  $\omega_c = 54 \text{ rad/s}$ , e margem de fase apenas  $MF = 180^\circ - 152^\circ = 28^\circ$  (ver Figura 13.43). Utilizaremos o compensador para aumentar a margem para pelo menos  $60^\circ$ .

Para efeito da determinação da nova frequência de cruzamento, utilizaremos uma margem de segurança de  $5^\circ$ . Assim, teremos  $\Delta\phi = (60^\circ + 5^\circ) = 65^\circ$  e a fase  $\phi = (180^\circ - 65^\circ) = 115^\circ$ . Dos diagramas de Bode da Figura 13.44, obtemos a frequência de cruzamento correspondente à margem de fase desejada:  $\bar{\omega}_c = 19,1 \text{ rad/s}$ . A curva de ganho nessa frequência é de  $14,9 \text{ dB}$ . Assim, temos  $a(\text{dB}) = -14,9 \text{ dB}$  ou, em unidades de amplitude,  $a = 0,180$ . Vamos posicionar o zero do compensador a uma década antes de  $\bar{\omega}_c$ . Logo,  $\omega_2 = 1,91 \text{ rad/s}$ . Por outro lado, sabemos que  $\omega_1 = a \omega_2$ . Logo,  $\omega_1 = (0,180)(1,91) = 0,344 \text{ rad/s}$ .

A função de transferência do compensador deverá ser

$$G_c(s) = \frac{0,344}{1,91} \frac{(s+1,91)}{(s+0,344)} = \frac{0,180(s+1,91)}{s+0,344}$$

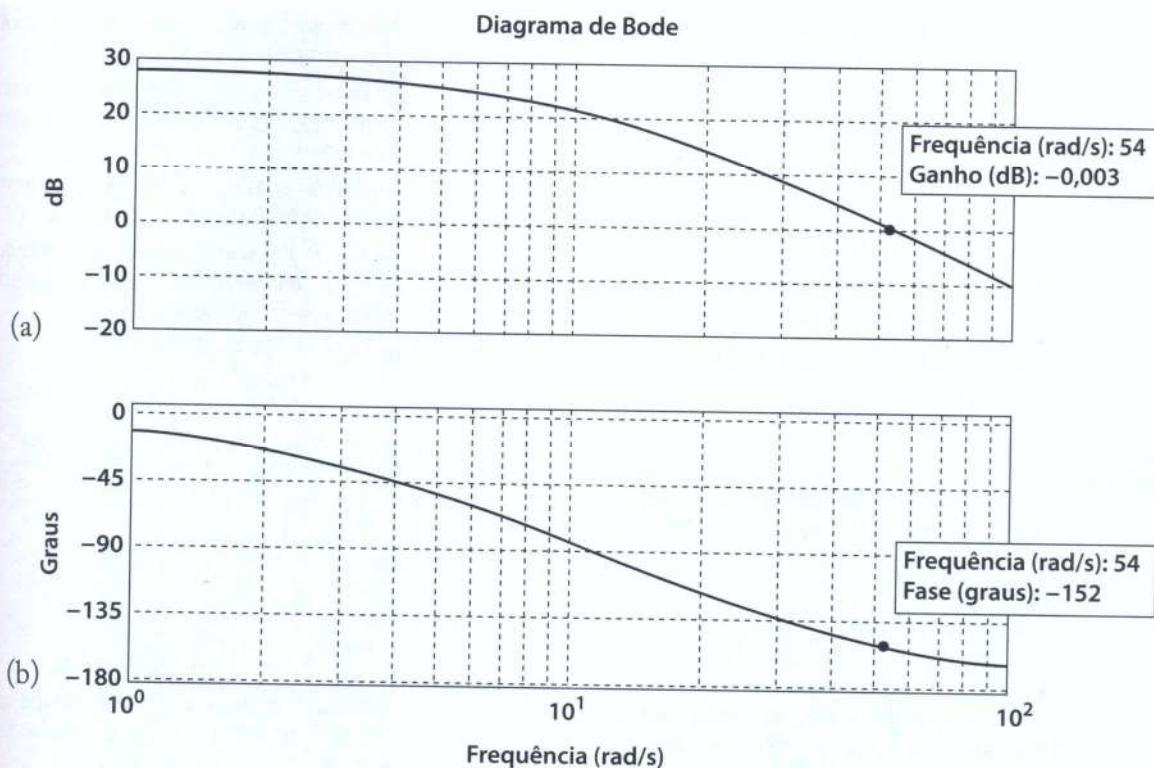


Figura 13.43

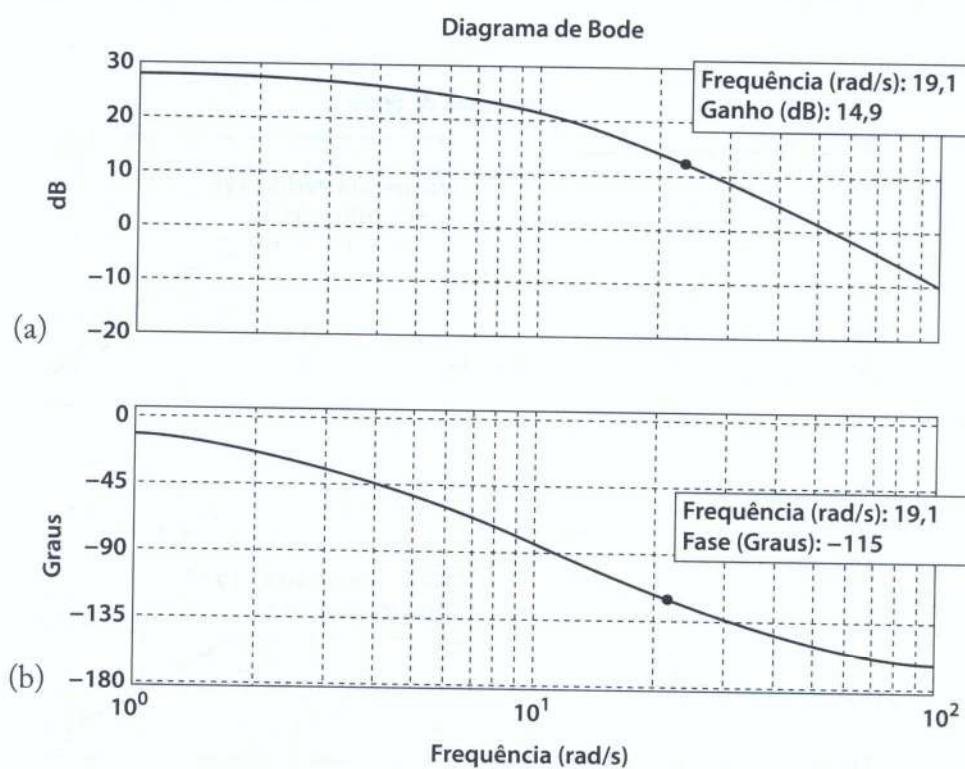


Figura 13.44

O sistema compensado em malha aberta será, então,

$$G_c(s)G(s) = \frac{567(s + 1,91)}{s^3 + 27,344s^2 + 135,288s + 43,344}$$

O novo cruzamento se dá na frequência de 19,1 rad/s com margem de fase de  $MF = (180 - 120) = 60^\circ$ , que é o valor desejado. Os vários diagramas de interesse para solução deste problema estão indicados nas figuras 13.43 a 13.45.

#### Exemplo 13.14

Considere o sistema dotado de realimentação unitária negativa, cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{120000}{s(s+10)(s+60)}$$

(a) Determine a constante de ganho de baixa frequência ( $K_g$ ) e as margens de ganho e de fase. Comente sobre a estabilidade do sistema.

(b) Calcule um compensador de atraso de fase, de modo a obter margem de fase  $\Delta\phi = 40^\circ$ ,

sem alterar o ganho de baixa frequência do sistema inicial.

(c) Determine a resposta em frequência do sistema compensado, bem como as margens de fase e de ganho resultantes.

(d) Implemente um compensador de atraso de fase, posterior, por meio de um circuito ativo.

(e) Determine a função de transferência do sistema de malha fechada e verifique a estabilidade a um degrau unitário, resultante.

Solução:

(a)

$$G(s) = \frac{120000}{s(s^2 + 70s + 600)} = \frac{1200}{s(s+10)(s+60)}$$

$$\frac{200}{s(\frac{s}{10}+1)(\frac{s}{60}+1)}$$

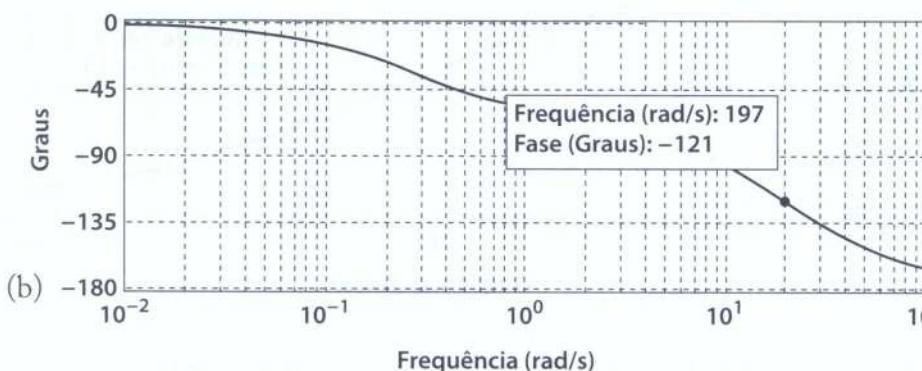
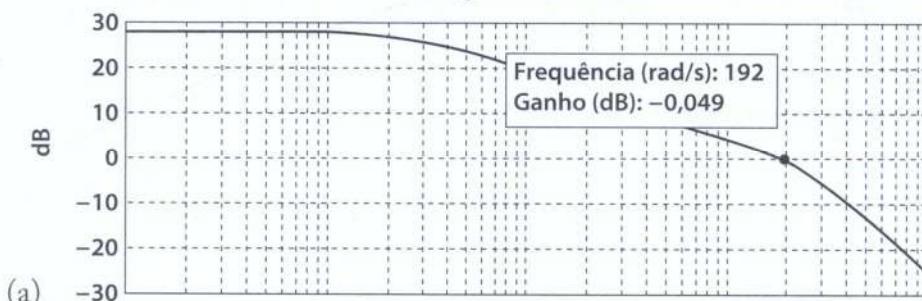
Logo,  $K_g = 200$     $K_g(\text{dB}) = 46 \text{ dB}$

A frequência de cruzamento corresponde a 0dB é  $\omega_c = 40,1 \text{ rad/s}$ , e o ângulo de fase é  $\phi = -200^\circ$ .

Resulta:

margem de fase  $\Delta\phi = 180 - 200 = -20^\circ$

Diagrama de Bode



**Figura 13.45** Sistema compensado.

A frequência de cruzamento correspondente a  $\phi = -180^\circ$  é  $\omega_c' = 24,5$  rad/s e a margem de ganho, -9 dB.

Sendo as margens de ganho e de fase negativas ( $MF = -20^\circ$  e  $MG = -9$  dB), o sistema é instável.

(b)

Vamos adotar neste estudo 5° de acréscimo, como segurança da margem de fase,  $\Delta\phi = 40 + 5 = 45^\circ$  e a frequência  $\omega_2$  correspondente ao zero do compensador, uma década antes de  $\bar{\omega}_c$  (frequência de cruzamento do sistema compensado).

Com o auxílio dos diagramas de resposta em frequência (Figura 13.46), a margem de fase de  $\Delta\phi = 45^\circ$  encontra-se na frequência  $\bar{\omega}_c = 7,7$  rad/s. Para essa frequência temos também módulo igual 20,4 ou ganho de 26,2 dB e ângulo de fase  $\phi = -135^\circ$ . O fator de atenuação do compensador é  $a(\text{dB}) = -26,2$  dB e, em consequência,  $a = 0,049 \equiv 0,05$ .

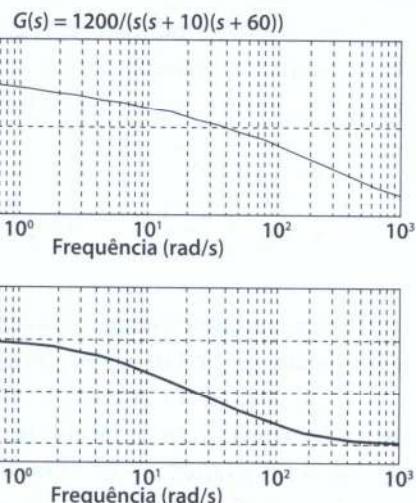
A frequência  $\omega_2$  correspondente ao zero do compensador estará uma década antes de  $\bar{\omega}_c$ :

$$\omega_2 = \frac{\omega_c}{10} = 0,77 \text{ rad/s e}$$

$$\omega_1 = a\omega_2 = 0,77 \cdot 0,05 = 0,0385 \text{ rad/s}$$

A função de transferência do compensador será, então:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{0,77}}{s + \frac{s}{0,0385}} = \frac{0,05(s + 0,77)}{s + 0,0385}$$



Resposta em frequência do sistema não compensado.

Figura 13.46

(c)

Resposta em frequência do sistema compensado:

$$G_1(s) = \frac{200 \left( \frac{s}{0,77} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{10} + 1 \right) \left( \frac{s}{60} + 1 \right) \left( \frac{s}{0,039} + 1 \right)} = \frac{6000(s + 0,77)}{s(s + 0,039)(s + 10)(s + 60)}$$

ou

$$G_1(s) = \frac{6000(s + 0,77)}{s(s^3 + 70s^2 + 600s + 23,4)}$$

Resultados obtidos na resposta em frequência (ver Figura 13.47):

$\bar{\omega}_c = 7,7$  rad/s, ganho  $\approx 0$  dB,  $\phi = -140^\circ$  e  $\Delta\phi = 40^\circ$

$\bar{\omega}_c' = 23,5$  rad/s, ganho  $\approx -16$  dB, margem de ganho  $\approx 16$  dB e  $\phi = -180^\circ$

(d)

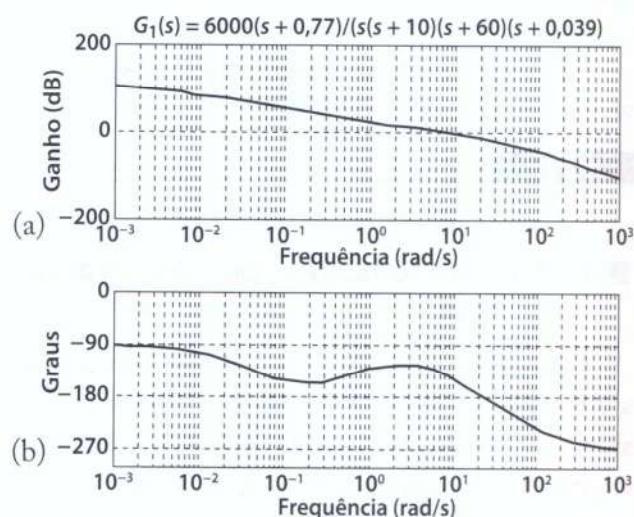
Projeto do compensador ativo:

$$\omega_1 = 0,039 \quad \omega_2 = 0,77$$

Escolha:  $C_2 = 10 \mu\text{F}$

$$R_2 = \frac{1}{\omega_2 C_2} = \frac{10^6}{0,77 \cdot 10} = 129870$$

$$R_2 \approx 130 \text{ k}\Omega$$



Resposta em frequência do sistema compensado.

Figura 13.47

$$\begin{aligned}
 R_{12} &= \frac{1}{\omega_1 C_2} - R_2 \\
 R_{12} &= \frac{10^6}{0,039 \cdot 10} - 130000 = 2,434 \cdot 10^6 \\
 R_{12} &= 2,5 \text{ M}\Omega \quad K_c = \frac{R_{12}}{R_1} = 1 \quad \therefore \\
 R_1 &= R_{12} = 2,5 \text{ M}\Omega
 \end{aligned}$$

Recalculando as frequências:

$$\omega_1 = \frac{1}{(R_{12} + R_2)C_2} = \frac{10^5}{2630000} = 0,038 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2} = \frac{10^5}{130000} = 0,769 \text{ rad/s}$$

(e)

Função de transferência de malha fechada ( $F_1(s)$ ) e respectiva resposta a degrau unitário (ver Figura 13.48).

$$F_1(s) = \frac{6000(s + 0,77)}{s^4 + 70s^3 + 603s^2 + 6600s + 4643,4}$$



Figura 13.48

### ■ 13.2.3 Compensação por avanço de fase

Os compensadores de avanço de fase destinam-se a introduzir, em uma certa faixa de frequências, um avanço de fase do diagrama de resposta em frequência, de forma a aumentar a margem de fase do sistema. O compensador típico para esse fim deve ter um zero em uma frequência  $\omega_1$  e um polo em uma frequência  $\omega_2 > \omega_1$ :

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} = \frac{1 + \alpha T s}{1 + T s},$$

com

$$\omega_1 > \omega_2, \quad \alpha T = \frac{1}{\omega_2}, \quad T = \frac{1}{\omega_1},$$

$$\alpha = \frac{\omega_1}{\omega_2} > 1, \quad \alpha_{\text{dB}} = 20 \log(\alpha) < 0$$

Também

$$K_g = \lim_{\omega \rightarrow 0} (G_c(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \left( \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \right) = 1$$

e

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} (G_c(j\omega)) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( \frac{1 + j \frac{\omega}{\omega_2}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_1}} \right) = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \alpha$$

Vê-se, então, que há um ganho igual a  $\alpha_{\text{dB}} = 20 \log(\alpha)$ , nas altas frequências, mas a constante de ganho de baixa frequência  $K_g$  não se altera. Na Figura 13.49, vemos os diagramas de resposta em frequência de ganho e de fase de um compensador de avanço de fase, com  $\omega_2 = 1$  e  $\omega_1 = 10$  rad/s.

Pode-se provar também as seguintes relações, incluindo o máximo ângulo de fase  $\phi_m$ , a frequência  $\omega_m$  em que o máximo ocorre, e a constante  $\alpha$ :

$$\begin{aligned}
 \omega_m &= \sqrt{\omega_1 \omega_2} & \omega_1 &= \alpha \omega_2 \\
 \operatorname{sen}(\phi_m) &= \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} & \alpha &= \frac{1 + \operatorname{sen} \phi_m}{1 - \operatorname{sen} \phi_m}
 \end{aligned}$$

Um procedimento para o projeto de um compensador de avanço de fase é o seguinte:

(1) Ajuste, se for o caso, o ganho  $K_g$  de malha aberta ( $A(s) = G(s)H(s)$ ), necessário para satisfazer a especificação relativa aos erros estacionários.

(2) Especifique a margem de fase  $\Delta\phi$  desejada e adote  $\phi_m = \Delta\phi + \Delta\phi$  onde  $\Delta\phi$  é a margem de fase de  $A(s)$ , antes da compensação, e  $\Delta\phi$  um acréscimo de segurança de  $5^\circ$  a  $20^\circ$  (esse acréscimo de segurança

**Compensador de avanço de fase:  $G = (1 + s/\omega_2)/(1 + s/\omega_1)$  com  $\omega_2 = 1$  e  $\omega_1 = 10$**

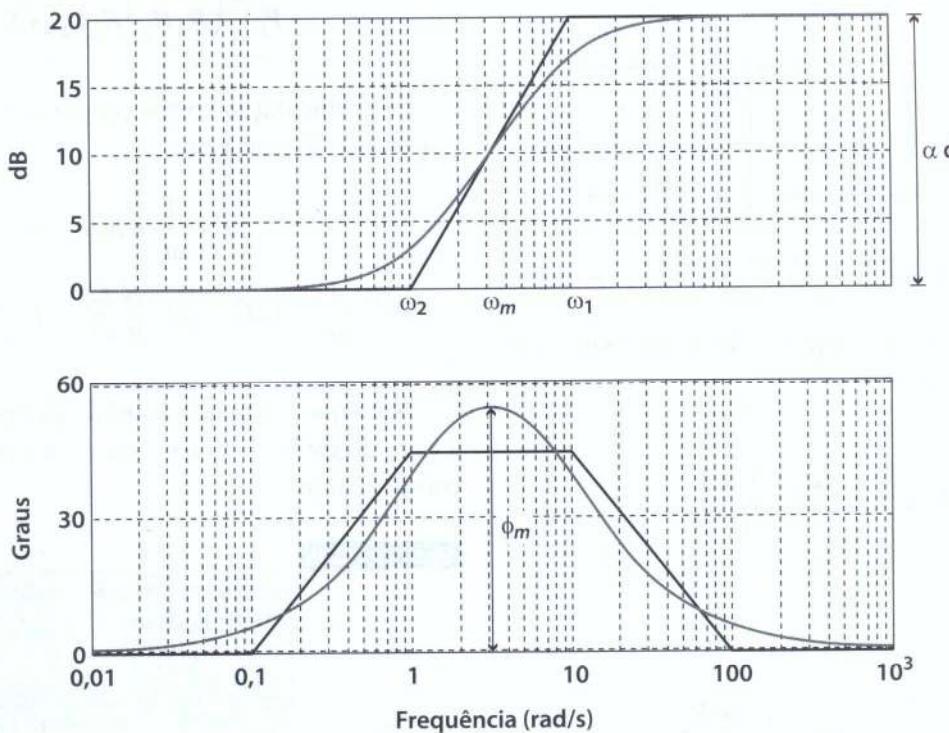


Figura 13.49

destina-se a compensar a alteração indesejada do diagrama de resposta em frequência de ganho).

(3) Calcule  $\alpha$  e  $\alpha_{\text{dB}}$ , com o auxílio das fórmulas

$$\alpha = \frac{1 + \text{sen}\phi_m}{1 - \text{sen}\phi_m} \quad \alpha_{\text{dB}} = 20 \log(\alpha)$$

(4) Obtenha, a partir dos diagramas de Bode, a frequência  $\omega_m$ , no ponto em que a atenuação na curva de ganho é igual a  $\frac{\alpha_{\text{dB}}}{2}$  (isto é, o ganho é  $-\frac{\alpha_{\text{dB}}}{2}$ ).

(5) Determine  $\omega_2 = \frac{\omega_m}{\sqrt{\alpha}}$ .

(6) Determine  $\omega_1 = \alpha \omega_2$ .

#### Observações:

(1) A nova frequência de cruzamento  $\bar{\omega}_c$  pode ser obtida pelo gráfico e, em geral, será igual ou muito próxima de  $\omega_m$ .

(2) Por razões de ordem prática, raramente se usa  $\alpha > 10$ . Para  $\alpha = 10$ , temos  $\phi_m = 56^\circ$ .

(3) Nem sempre é possível compensar um sistema por meio de avanço de fase.

#### ■ 13.2.3.1 Implementação do compensador por avanço de fase

No caso de sistemas elétricos, os compensadores podem ser realizados por meio de vários circuitos, os quais devem ter pelo menos um amplificador para garantir aumento do ganho. A seguir, temos dois tipos de circuitos que podem ser implementados como compensadores de avanço de fase.

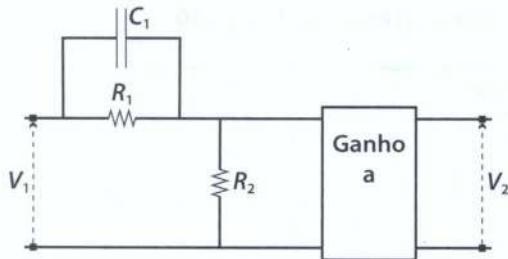
(1) Circuito passivo + amplificador

Uma análise do circuito da Figura 13.50 permite escrever

$$\frac{V_2}{V_1} = K_c \frac{R_2}{R_2 + \frac{R_1}{R_1 C_1 s + 1}}$$

ou

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{K_c R_2}{R_1 + R_2} \right) \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_1 R_2 C_1 s + 1}$$

**Figura 13.50** Compensador de avanço de fase.

Comparando com a equação do compensador por avanço de fase, que é

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{\omega_2}}{1 + \frac{s}{\omega_1}} = \frac{1 + aT s}{1 + T s}$$

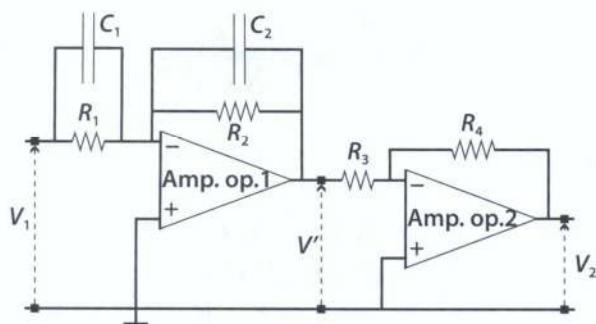
temos,

$$\begin{aligned} \omega_2 &= \frac{1}{R_1 C_1} & \omega_1 &= \frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 C_1} \\ a &= \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_2} & \text{e} & T = \frac{1}{\omega_1} = \frac{R_1 R_2 C_1}{R_1 + R_2} \end{aligned}$$

Além disso, devemos ter para um compensador de ganho unitário:  $\frac{K_c R_2}{R_1 + R_2} = 1$  e, portanto, o ganho do amplificador deve ser:

$$K_c = \frac{R_1 + R_2}{R_2} = a$$

(2) Circuito com amplificadores operacionais  
Neste caso, a equação do circuito da Figura 13.51 é:

**Figura 13.51**

$$\frac{V_2}{V_1} = \left( \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \right) \frac{R_1 C_1 s + 1}{R_2 C_2 s + 1}$$

Por comparação com a equação do compensador por avanço de fase, vem:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{\omega_1} = R_2 C_2 \\ aT &= \frac{1}{\omega_2} = R_1 C_1 \quad a = \frac{R_1 C_1}{R_2 C_2} \quad K_g = \frac{R_2 R_4}{R_1 R_3} \end{aligned}$$

Note que o segundo amplificador permite ajustar o valor do ganho, bem como faz a inversão de sinal no compensador.

#### Exemplo 13.15

Dado o sistema cuja função de transferência de malha aberta é

$$A(s) = \frac{2 \cdot 10^7}{s(s+10)(s+2000)}$$

pede-se compensar o sistema e implementar o compensador, de acordo com as seguintes especificações:

O ganho de baixa frequência deve permanecer  $K_g = 1000$ .

(b) O ganho de amplitude para  $\omega = 10 \text{ rad/s}$  deve ser no mínimo de 34 dB;

(c) Margem de fase  $\Delta\phi = 50^\circ$ .

Solução:

Pelos diagramas de Bode na Figura 13.52, verifica-se que as margens de fase e de ganho do sistema dado são praticamente nulas.

$$\omega_c = 100 \text{ rad/s} \quad \Delta\phi \approx 0$$

O item (b) das especificações sugere que a compensação se faça por avanço de fase.

Pela especificação (c), a margem de fase deve ser  $\Delta\phi = 50^\circ$ . Então, pelas regras da compensação por avanço de fase, devemos ter

$$\phi_m = \Delta\phi + \Delta\phi = 50 + 5 = 55^\circ$$

De onde se obtém:

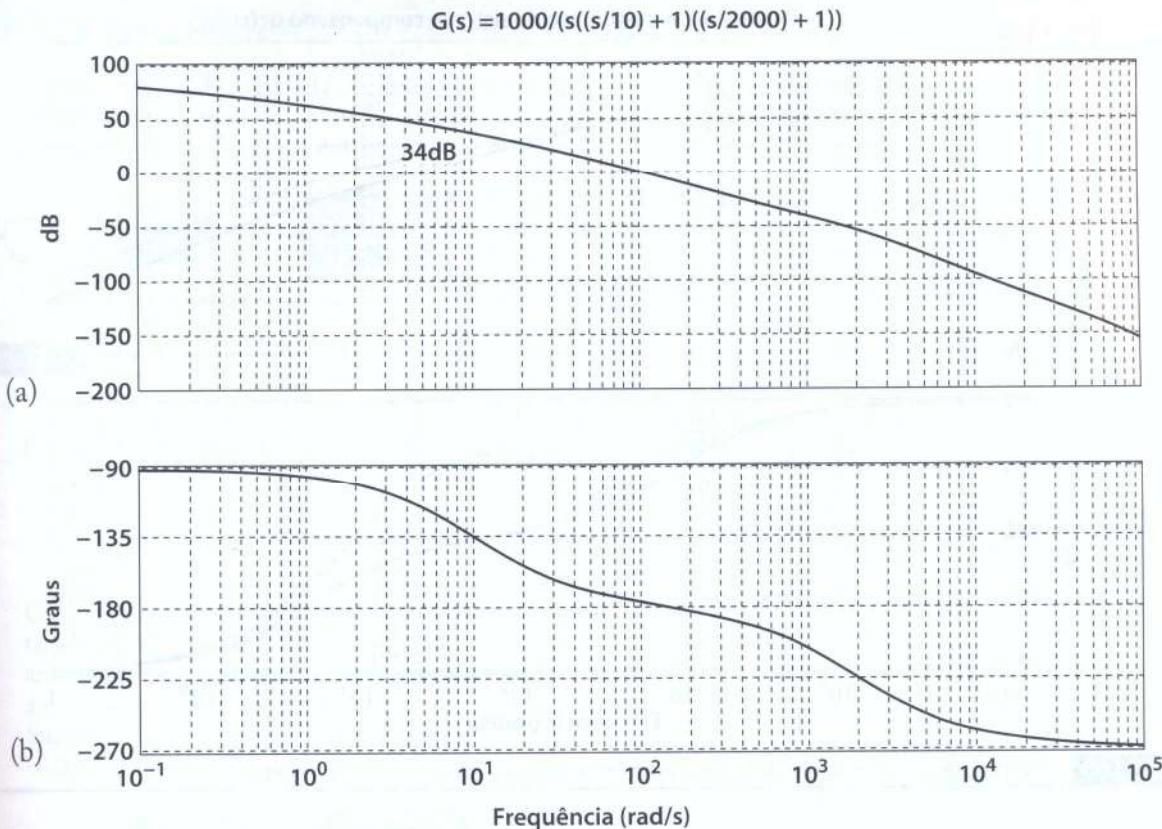
$$a = \frac{1 + \sin(\phi_m)}{1 - \sin(\phi_m)} = \frac{1 + \sin(55^\circ)}{1 - \sin(55^\circ)} = \frac{1,819}{0,181} \approx 10$$

$$a = 10 \quad a_{dB} = 20 \quad \frac{a_{dB}}{2} = 10 \text{ dB}$$

$$\omega_m \approx 180 \text{ rad/s}$$

$$\omega_1 = \frac{\omega_m}{\sqrt{a}} = \frac{180}{\sqrt{10}} = 57 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = a \omega_1 = 10 \cdot 57 = 570 \text{ rad/s}$$



Na Figura 13.53 representam-se os diagramas de Bode do sistema compensado e não compensado, onde se verifica que as especificações foram satisfeitas, inclusive a relativa ao ganho de 34 dB na frequência de 10 rad/s. As frequências

$\bar{\omega}_c \approx 180$  rad/s  $\bar{\phi}_c = 127^\circ$  e  $\Delta\bar{\phi}_c = 53^\circ$  mostram um resultado que pode ser considerado plenamente satisfatório.

A função de transferência do compensador projetado é, então:

$$G_c(s) = \frac{1 + \frac{s}{57}}{1 + \frac{s}{570}} = \frac{10(s + 57)}{s + 570}$$

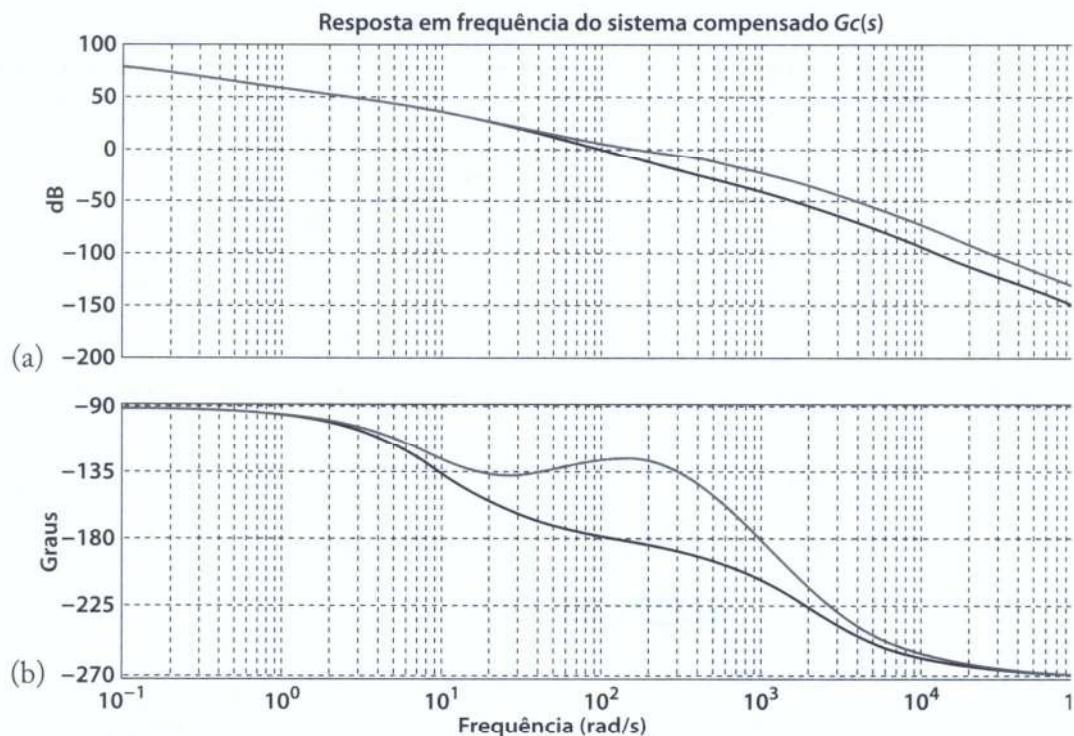
A função de transferência do sistema compensado em malha aberta resulta:

$$A_c(s) = G_c(s) A(s) = \frac{1000 \left( \frac{s}{57} + 1 \right)}{s \left( \frac{s}{10} + 1 \right) \left( \frac{s}{570} + 1 \right) \left( \frac{s}{2000} + 1 \right)}$$

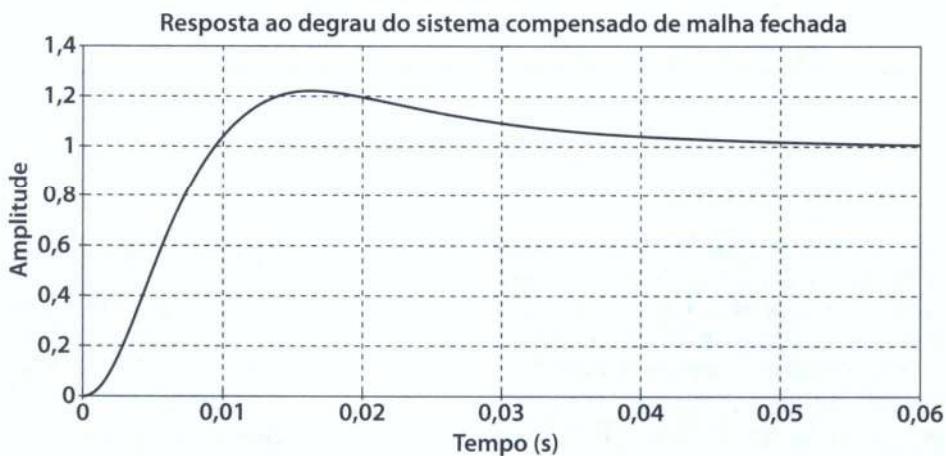
ou

$$A_c(s) = G_c(s) A(s) = \frac{2 \cdot 10^8 (s + 57)}{s (s + 10) (s + 570) (s + 2000)}$$

Para finalizar este exemplo, apresentamos um gráfico comparativo dos diagramas de Bode dos sistemas compensado e não compensado (figuras 13.53a e b) e a resposta do sistema compensado a um degrau unitário (Figura 13.54).



**Figura 13.53** Comparação dos diagramas de Bode dos sistemas compensado e não compensado.



**Figura 13.54** Resposta ao degrau do sistema compensado de malha fechada.

## Considerações finais

O capítulo se inicia apresentando e definindo as várias ações de controle. Em seguida, aborda os projetos de controladores baseados no método do *LR*, iniciando pelo caso mais simples, que é o do controlador proporcional. Depois, são apresentados os compensadores *PI*, os de atraso de fase, os proporcionais-derivativos, os de avanço de fase e, finalmente, os mais usados industrialmente, os do tipo *PID*, como são chamados, e os compensadores dotados de malha interna. Em seguida, foi abordado o projeto de compensadores pelo método da

resposta em frequência. Neste caso, os projetos são feitos a partir dos diagramas de Bode, por meio da moldagem dos gráficos de respostas em frequência de ganho e de fase. O formato das curvas dá uma boa indicação sobre o comportamento do sistema, tanto em regime transitório como em regime permanente e sugerem as modificações a serem introduzidas pelo compensador. Na sequência, são tratadas compensações ditas por atraso de fase e por avanço de fase, bem como a implementação de compensadores passivos e ativos, em cada caso.

## Problemas propostos

1. Dado o sistema da Figura 13.55, projete um controlador proporcional de ganho  $K_p$  de forma que o sistema tenha um grau de amortecimento  $\zeta = 0,5$ .

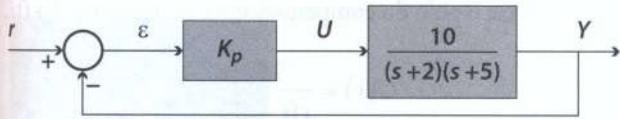


Figura 13.55

2. Dado o sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{100}{(s+4)(s+5)}$$

Compensar o sistema de forma a anular o erro estacionário de posição, mas sem alterar o grau de amortecimento e mantendo, tanto quanto possível, a mesma resposta transitória.

Sugestão: Use um compensador PI com zero em -0,05 (ver Figura 13.56).

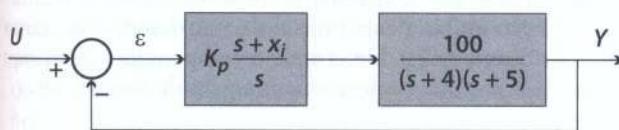


Figura 13.56

3. Implemente, por meio de amplificadores operacionais, o compensador PI cuja função de transferência é  $G_c(s) = \frac{(s+0,05)}{s} = 1 + \frac{0,05}{s}$  (Figura 13.57).

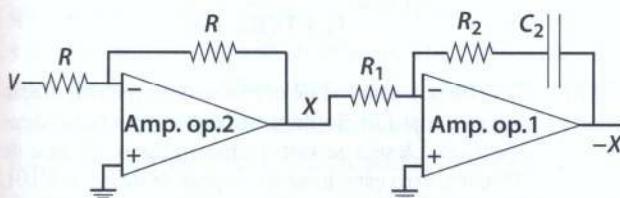


Figura 13.57

4. No sistema dotado de realimentação unitária indicado na Figura 13.58,

$$G(s) = \frac{100}{s(s+5)(s+8)}$$

Projete um compensador PD para que sejam satisfeitas as seguintes especificações:

tempo de acomodação  $T = 1$  s e grau de amortecimento  $\zeta = 0,5$  para o par de polos complexos conjugados.

5. Dado o sistema indicado na Figura 13.58, onde

$$G(s) = \frac{100}{s(s+3)(s+8)},$$

projete um compensador de avanço de fase para que o sistema opere com grau de amortecimento  $\zeta = 0,42$  e que seja duas vezes mais rápido que o sistema original.

**Observação:**

Use o zero do compensador para cancelar o polo em -3.

6. Dado o sistema indicado na Figura 13.65, onde

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(s+3)(s+8)}$$

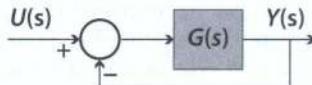


Figura 13.58

projete um compensador do tipo PID, para que o sistema atenda às seguintes especificações:

- (1) Tenha metade da constante de tempo relativa ao par de polos dominantes do sistema.
- (2) Tenha grau de amortecimento  $\zeta = 0,5$ .
- (3) Apresente erro estacionário de posição nulo. Coloque o zero da seção PI do compensador na posição -0,1. Dê como resposta as funções de transferência do compensador, do sistema compensado de malha fechada e os polos do sistema compensado.

7. Dada a função de transferência  $G(s)$  de uma planta, projete o compensador de avanço de fase que faz com que a resposta dominante da malha fechada tenha  $\omega_n = 14$  rad/s e  $\zeta = 0,5$ . Determine a função de transferência do compensador  $G_C(s)$ .

Sugestão: Usar o zero do compensador para cancelar o polo fora da origem.

$$G(s) = \frac{40}{s(s+4)}$$

8. Dada a função de transferência  $G(s)$  de uma planta, projete o compensador de avanço de fase que faz com que a resposta dominante da malha fechada tenha  $\omega_n = 10\sqrt{2}$  rad/s e  $\zeta = \sqrt{2}/2$ . Determine a função de transferência do compensador  $G_C(s)$ .

Sugestão: Usar o zero do compensador para cancelar o polo fora da origem.

$$G(s) = \frac{10}{(s+1)(0.5s+1)}$$

9. Dada a função de transferência  $G(s)$ , projete o compensador de *avanço de fase* que faz com que a resposta dominante da malha fechada tenha  $\omega_n = 5\sqrt{5}$  rad/s e  $\zeta = \sqrt{5}/5$ . Fixe o zero do compensador na posição  $-10 + 0j$  e determine a função de transferência do compensador  $G_c(s)$ .

$$G(s) = \frac{10}{s(0.2s+1)}$$

10. Dada a função de transferência da planta  $G(s)$ , projete o compensador de *avanço de fase* que faz com que os polos dominantes de malha fechada estejam na posição  $-2 \pm 10j$ . Para tanto, fixe o polo do compensador na posição  $-10 + 0j$  e determine a função de transferência do compensador  $G_c(s)$ .

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 25}$$

11. Dada a função de transferência do ramo direto  $G(s)$ , projete o compensador de *atraso de fase* que faz com que o erro estacionário de *velocidade* seja  $e_{ss} = 0,01$ , mantendo os polos dominantes de malha fechada aproximadamente na mesma posição. Determine a função de transferência do compensador  $G_c(s)$ . Fixe o polo do compensador na posição  $-0,01 + 0j$ .

$$G(s) = \frac{200}{s(s+16)}$$

12. Dada a função de transferência do ramo direto  $G(s)$ , projete o compensador de *atraso de fase* que faz com que o erro estacionário de *posição* seja  $e_{ss} = 0,1$ , mantendo os polos dominantes de malha fechada aproximadamente na mesma posição. Determine a função de transferência do compensador  $G_c(s)$ . Fixe o polo do compensador na posição  $-0,01 + 0j$ .

$$G(s) = \frac{200}{(s+10)(s+30)}$$

13. Dada a função de transferência do ramo direto  $G(s)$ , projete o compensador de *atraso de fase* que faz com que o erro estacionário de *posição* seja  $e_{ss} = 0,01$ , mantendo os polos dominantes de malha fechada aproximadamente na mesma posição. Determine a função de transferência do compensador  $G_c(s)$ . Fixe o polo do compensador na posição  $-0,005 + 0j$  e o zero em  $-0,05 + 0j$ .

$$G(s) = \frac{2}{(s+1)(10s+1)}$$

14. Dada a função de transferência do ramo direto  $G$  projete o compensador de *atraso de fase* que faz com que o erro estacionário de *velocidade* seja  $e_{ss} = 0,1$ , mantendo os polos dominantes de malha fechada aproximadamente na mesma posição. Determine a função de transferência do compensador  $G_c$ . Fixe o polo do compensador na posição  $-0,01 + 0j$ .

$$G(s) = \frac{160}{s(s+20)}$$

15. Dada a função de transferência de uma planta  $G$  deseja-se determinar a função de transferência  $G_c(s)$  do compensador de *atraso de fase* que faz com que o erro estacionário de *posição* seja  $e_{ss} = -1/2$ , mantendo os polos dominantes de malha fechada aproximadamente na mesma posição. Fixe o polo do compensador na posição  $-0,01 + 0j$ . Note que a presença do polo no SPD faz com que o erro estacionário seja negativo, ou seja, o valor final é maior que o valor da referência.

$$G(s) = \frac{4(s+6)}{(s-2)(s+4)}$$

16. Considere o sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto é  $G(s)$ . Determine o compensador de *avanço de fase* que confere uma margem de fase de  $30^\circ$ .

$$G(s) = \frac{25}{s^2}$$

17. Considere o sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto é  $G(s)$ . Deseja-se obter uma margem de fase de  $6^\circ$ . Projete o compensador de *atraso de fase*  $G_c(s)$  que mantém inalterado o erro estacionário de *posição*.

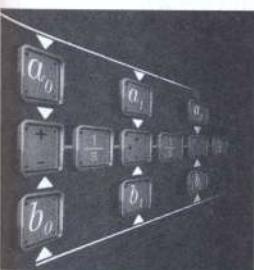
$$G(s) = \frac{100}{(s+1)(10s+1)}$$

18. Considere o sistema de controle com realimentação unitária cuja função de transferência do ramo direto é  $G(s)$ . Deseja-se obter uma margem de fase de  $90^\circ$  e um erro estacionário de *posição* de  $e_{ss} = 1/10$ . Projete o compensador de *atraso de fase*  $G_c(s)$  que atenda às especificações dadas.

$$G(s) = \frac{100}{(s+1)^2}$$

19. Considere um sistema de controle cuja função de transferência da planta é desconhecida, porém o ganho crítico  $K_c$  e a frequência crítica  $\omega_c$  foram obtidos experimentalmente e resultaram iguais a 3 e 2 rad/s, respectivamente. Projete um controlador de *atraso de fase*  $G_c(s)$  tal que o ganho crítico passe a ser 30.

# capítulo 14



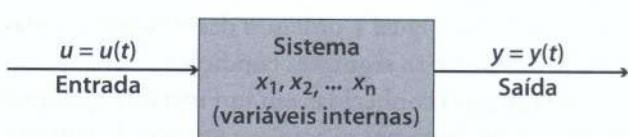
## Espaço de estados

Como vimos no Capítulo 1, o modelo matemático básico de um sistema dinâmico é constituído pelas *equações diferenciais* que exprimem as leis físicas que descrevem o comportamento desse sistema, o qual é representado no domínio do tempo. A partir desse modelo básico, outras formas do modelo matemático podem ser obtidas.

Neste curso, por exemplo, foi definido (Capítulo 3) e amplamente usado um modelo que relaciona diretamente as variáveis de entrada e de saída do sistema, denominado ‘função de transferência’. Esse modelo é representado no domínio da frequência, por meio da transformada de Laplace do modelo básico. Trata-se de um modelo muito útil e conveniente para o estudo de sistemas de controle *LIT* que não sejam muito complexos.

Entretanto, esse modelo apresenta algumas limitações, cujas principais são as seguintes (Figura 14.1):

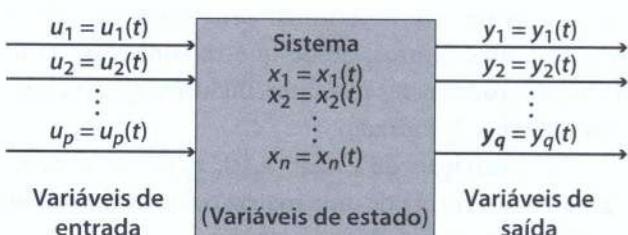
- (1) O sistema deve ter entrada e saída únicas (sistema escalar ou SISO).
- (2) O sistema deve ser linear e invariante no tempo (*LIT*).
- (3) As condições iniciais são supostas nulas (*C.I. = 0*).
- (4) Ignoram-se as variáveis internas do sistema.



**Figura 14.1** Sistema *LIT* de entrada e saída únicas.

### 14.1 O modelo de estados – definições

Um modelo alternativo, mais poderoso, usado no que se convencionou chamar de ‘controle moderno’, é o denominado *modelo de estados*. Pode ser representado no domínio do tempo ou no domínio da frequência e não apresenta as dificuldades inerentes às funções de transferência. Em particular, ele é válido para sistemas com entradas e saídas múltiplas (também denominados sistemas a multivariáveis, sistemas vetoriais ou MIMO), conforme a Figura 14.2.



**Figura 14.2** Sistema *LIT* dotado de  $p$  entradas e  $q$  saídas.

As  $p$  variáveis de entrada são aqui indicadas pelas variáveis  $u_1(t), u_2(t) \dots u_p(t)$ , que sob a forma de uma matriz coluna constituem o vetor de entrada do sistema:

$$u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix} \text{ ou simplesmente } u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

Da mesma forma, as  $q$  variáveis de saída,  $y_1(t), y_2(t) \dots y_q(t)$ , apresentadas sob forma de uma matriz coluna, constituem o vetor de saída

$$y(t) = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix} \text{ ou simplesmente } y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix}$$

Além das variáveis de entrada e de saída, esse modelo inclui um número  $n$  de variáveis internas do sistema, designadas por  $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$ , denominadas variáveis de estado. O número de variáveis de estado de um sistema é igual à ordem  $n$  desse sistema, e elas devem satisfazer às seguintes condições:

(a) Quando conhecidas em um instante qualquer  $t_0$ , permitem, juntamente com as variáveis de entrada, determinar, nesse instante, o valor de todas as demais variáveis do sistema.

(b) Quando conhecidas em um determinado instante  $t_0$ , permitem determinar seus próprios valores nos instantes futuros, desde que se conheçam também para todos esses instantes, inclusive  $t_0$ , os valores das variáveis de entrada.

As  $n$  variáveis de estado  $x_1(t), x_2(t) \dots x_n(t)$  apresentadas sob forma de uma matriz coluna, constituem o que se denomina vetor de estado:

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \text{ ou simplesmente } x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

### ■ 14.1.1 Estado de um sistema

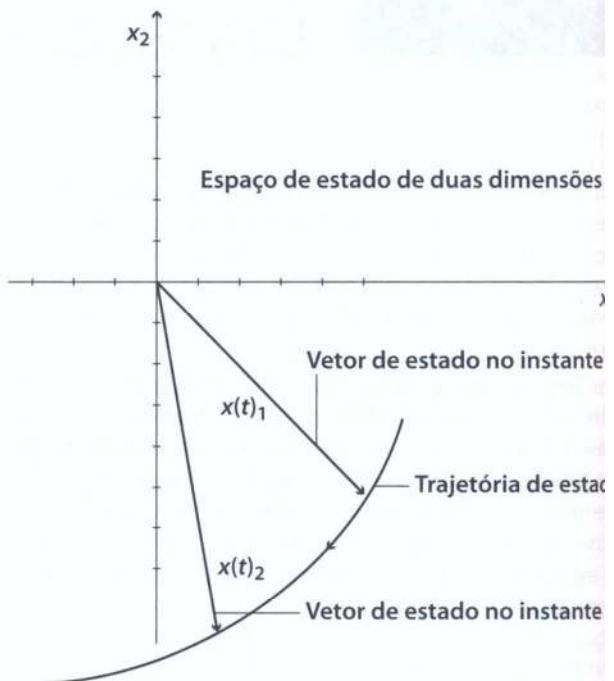
De maneira geral, define-se como estado do sistema em um instante qualquer  $t$  o conjunto de informações nesse instante do vetor de estado.

### ■ 14.1.2 Espaço de estado

É o espaço de  $n$  dimensões, no qual os eixos ordenados representam os componentes do vetor de estado. A Figura 14.3 apresenta um exemplo para caso de um sistema de 2ª ordem ( $n = 2$ ).

### ■ 14.1.3 Trajetória de estado

É a curva descrita pela extremidade do vetor de estado  $x(t)$ .



**Figura 14.3** Espaço de estado de duas dimensões.

## 14.2 Equações de estado e de saída

A estrutura matemática do modelo de estado resulta essencialmente das propriedades atribuídas às variáveis de estado. Assim, a propriedade expressa no item (b) da seção anterior, relativas à determinação futura do estado de um sistema de ordem  $n$ , com  $p$  variáveis de entrada e  $q$  variáveis de saída, leva-nos a escrever  $n$  equações diferenciais de 1ª ordem, da forma:

$$\dot{x}_i = f_i [x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)]$$

onde  $\dot{x}_i = d(x_i(t)/dt)$ ; e  $f_i$  representa uma função das variáveis indicadas, sendo  $i = 1, 2, 3, \dots, n$ .

Essas equações diferenciais são denominadas equações escalares de estado do sistema.

Além das equações de estado, o modelo matemático deve incluir um conjunto de equações adicionais que permitem determinar as  $q$  variáveis de saída. Pela propriedade (a) já referida, as variáveis de saída devem ser expressas em função das variáveis de estado e de entrada, por meio de equações algébricas do tipo:

$$y_j(t) = g_j[x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t); u_1(t), u_2(t), \dots, u_p(t)]$$

onde  $g_j$  representa uma função das variáveis indicadas, sendo  $j = 1, 2, 3, \dots, q$ .

Tais são as equações de saída.

As funções:

$$f_i \text{ com } i = 1, 2, \dots, n \quad \text{e} \quad g_j \text{ com } j = 1, 2, \dots, q$$

podem ser funções quaisquer das variáveis de estado e das variáveis de entrada. Se, porém, essas funções forem lineares, então o sistema também será linear. Nesse caso, as funções  $f_i$  e  $g_j$  serão expressas por combinações lineares das variáveis de estado e de entrada do sistema. Teremos, então:

Equações escalares de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + b_{11}u_1 + b_{12}u_2 + \dots + b_{1p}u_p \\ \dot{x}_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + b_{21}u_1 + b_{22}u_2 + \dots + b_{2p}u_p \\ &\vdots && \vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n + b_{n1}u_1 + b_{n2}u_2 + \dots + b_{np}u_p \end{aligned}$$

sendo  $x_i = x_i(t)$  com  $i = 1, 2, 3, \dots, n$

e  $u_j = u_j(t)$  com  $j = 1, 2, 3, \dots, p$

Equações escalares de saída:

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \dots + c_{1n}x_n + d_{11}u_1 + d_{12}u_2 + \dots + d_{1p}u_p \\ y_2 &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \dots + c_{2n}x_n + d_{21}u_1 + d_{22}u_2 + \dots + d_{2p}u_p \\ &\vdots && \vdots \\ y_q &= c_{q1}x_1 + c_{q2}x_2 + \dots + c_{qn}x_n + d_{q1}u_1 + d_{q2}u_2 + \dots + d_{qp}u_p \end{aligned}$$

sendo  $y_k = y_k(t)$  com  $k = 1, 2, 3, \dots, q$

$u_j = u_j(t)$  com  $j = 1, 2, 3, \dots, p$

Essas equações podem ser escritas sob forma matricial, como segue:

Equação vetorial de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

Equação vetorial de saída:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & c_{q3} & \dots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2p} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & d_{q3} & \dots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

Além das definições já vistas, de vetor de estado:

$$[x] = x = x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

vetor de entrada:

$$[u] = u = u(t) = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ u_3(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

vetor de saída:

$$[y] = y = y(t) = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ \vdots \\ y_q(t) \end{bmatrix}$$

definem-se, ainda:

matriz do sistema ( $n \times n$ ):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matriz de entrada ( $n \times p$ ):

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}$$

matriz de saída ( $q \times n$ ):

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & c_{q3} & \dots & c_{qn} \end{bmatrix}$$

matriz de transmissão ( $q \times p$ ):

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2p} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & d_{q3} & \dots & d_{qp} \end{bmatrix}$$

Finalmente, as equações vetoriais de estado e de saída podem ser escritas sob forma compacta:

Equação de estado:

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + Bu(t)$$

Equação de saída:

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

ou simplesmente

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad \text{e} \quad y = Cx + Du$$

### Exemplo 14.1

Dado um sistema de 2ª ordem ( $n = 2$ ) com uma variável de entrada ( $p = 1$ ) e duas variáveis de saída ( $q = 2$ ), represente as equações de estado e de saída, sob forma escalar e vetorial (ver Figura 14.4).

Solução:

Equações de estado. Forma escalar.

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + b_1u$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + b_2u$$

Equação de estado. Forma vetorial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}u$$

Equações de saída. Forma escalar.

$$y_1(t) = c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + d_1u$$

$$y_2(t) = c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + d_2u$$

Equação de saída. Forma vetorial.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix}u$$

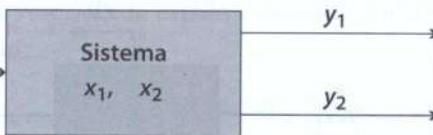


Figura 14.4 Diagrama de blocos.

**Exemplo 14.2**

Dado um sistema de 3<sup>a</sup> ordem ( $n = 3$ ) com duas variáveis de entrada ( $p = 2$ ) e duas variáveis de saída ( $q = 2$ ), represente as equações de estado e de saída, sob forma vetorial (ver Figura 14.5).

Solução:

Equação de estado. Forma vetorial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Equação de saída. Forma vetorial.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

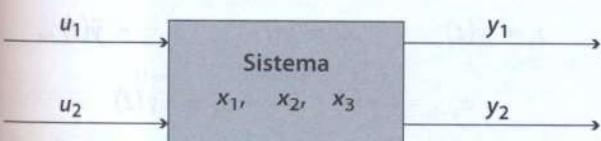


Figura 14.5 Diagrama de blocos.

**14.3 Critérios de escolha das variáveis de estado**

A representação de estados de um sistema requer um número de variáveis de estado igual à ordem do sistema. Se o sistema for de ordem  $n$ , o vetor de estado terá  $n$  componentes. O vetor de estado que pode ser utilizado para descrever um sistema, porém, não é único. Seus componentes, como veremos posteriormente, podem ser escolhidos de infinitas maneiras. Há, entretanto, alguns critérios simples e convenientes para a escolha das

variáveis de estado. Algumas informações sobre esses critérios de escolha serão apresentadas a seguir.

Quando o sistema for dado fisicamente ou através de seu modelo funcional, uma escolha válida é a das variáveis que representam as condições iniciais de funcionamento do sistema. Assim, se o sistema for um circuito elétrico, podem ser escolhidas como variáveis de estado as tensões (ou as cargas) nos capacitores e as correntes (ou os fluxos de indução magnética) nos indutores. São variáveis relacionadas com o armazenamento de energia (energia do campo elétrico, nos capacitores, e energia do campo magnético, nos indutores).

Salvo aviso em contrário, nos exemplos deste capítulo, as condições iniciais são consideradas nulas ( $C.I. = 0$ ).

**Exemplo 14.3**

Faça a representação de estado do circuito da Figura 14.6. Considere como variáveis de estado a tensão no capacitor ( $x_1 = v_c$ ) e a corrente no indutor ( $x_2 = i$ ). As variáveis de saída são a tensão no capacitor ( $v_c = y_1$ ) e a tensão ( $y_2$ ) na associação  $RL$ . A variável de entrada é a f.e.m.  $e(t) = u(t)$ , do gerador.

Solução:

Variáveis de estado escolhidas:

Tensão no capacitor  $v_c = x_1$  e corrente no indutor  $i = x_2$ .

Resulta: corrente no capacitor  $i = C\dot{v}_c$ .

Logo,

$$C\dot{v}_c = x_2 \quad \text{ou} \quad \dot{v}_c = (1/C)x_2$$

que é a primeira equação escalar de estado.

A segunda lei de Kirchhoff ao longo da malha permite escrever

$$\begin{aligned} L\dot{i} + Rx_2 + x_1 &= u(t) \quad \text{ou} \\ \dot{i} &= -(1/L)x_1 - (R/L)x_2 + (1/L)u(t), \end{aligned}$$

que é a segunda equação escalar de estado. Por outro lado, as equações de saída são

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = -x_1 + u(t)$$

Temos aí as equações escalares de estado e de saída. Sob forma vetorial essas equações permitem escrever:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1/C \\ -1/L & -R/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/L \end{bmatrix} u \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

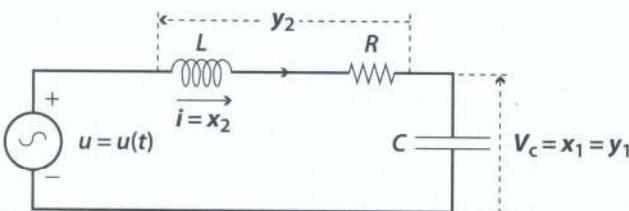


Figura 14.6 Circuito do Exemplo 14.3.

No caso de sistemas mecânicos, geralmente se podem escolher como variáveis de estado as posições e velocidades das massas móveis, as quais também representam as condições iniciais. Essas variáveis de estado também estão relacionadas com as energias potencial (de posição) e cinética (de velocidade) dos móveis.

**Exemplo 14.4**

Determine um modelo de estado do sistema mecânico indicado na Figura 14.7. O sistema está sob a ação da força externa  $f(t) = u(t)$ , que atua na direção do movimento. A variável de saída é a posição do móvel (abscissa  $x = x(t)$ ).

Solução:

Podemos escolher como variáveis de estado a abscissa  $x = x(t)$  e a velocidade  $v = dx/dt$ . Assim, temos:

$$x_1 = x(t) \quad \text{e} \quad x_2 = v = dx/dt = \dot{x}$$

Sendo a equação do movimento:

$$M\ddot{x} + B\dot{x} + Kx = f(t)$$

ou, em função das variáveis de estado

$$M\ddot{x}_2 = -Kx_1 - Bx_2 + f(t)$$

As equações escalares de estado, com  $u(t) = f(t)$ , resultam

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{K}{M}x_1 - \frac{B}{M}x_2 + \frac{1}{M}u(t) \end{aligned}$$

Finalmente, a equação vetorial de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K/M & -B/M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/M \end{bmatrix} u(t)$$

Equação vetorial de saída:

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

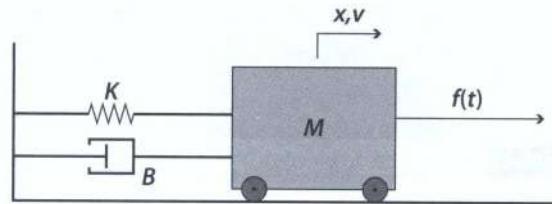


Figura 14.7 Sistema mecânico do Exemplo 14.4.

Os critérios de escolha das variáveis de estado, com base nas condições iniciais do sistema, podem ser estendidos a quaisquer outros sistemas.

Se o sistema, de entrada e saída únicas, for descrito pelo modelo matemático na forma de uma equação diferencial linear de coeficientes constantes de ordem  $n$ , na variável de saída  $y(t)$ , e onde não comparecem as derivadas da variável  $u(t)$  de entrada:

$$\begin{aligned} &y^{(n)}(t) + q_{n-1}y^{(n-1)}(t) + q_{n-2}y^{(n-2)}(t) + \dots + \\ &q_2\ddot{y}(t) + q_1\dot{y}(t) + q_0y(t) = p_0u(t) \end{aligned}$$

podemos escolher como variáveis de estado as denominadas variáveis de estado de fase. Essas variáveis de estado são definidas da seguinte maneira: a primeira variável,  $x_1(t)$ , é a própria variável de saída  $y(t)$ ; as demais variáveis, menos a última,  $x_n(t)$ , são as derivadas sucessivas de  $y(t)$ . A última variável será, então, definida pela própria equação do sistema. Temos, assim:

$$\begin{aligned} x_1 &= y(t) & x_2 &= \dot{y}(t) & x_3 &= \ddot{y}(t) \dots \\ x_{n-1} &= {}^{(n-2)}y(t) & x_n &= {}^{(n-1)}y(t) \end{aligned}$$

e, finalmente,  $\dot{x}_n = {}^n y(t)$ . Como consequência, resultam as equações escalares de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2(t) \\ \dot{x}_2 &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -q_0x_1(t) - q_1x_2(t) - q_2x_3(t) \dots - \\ &q_{n-2}x_{n-1}(t) - q_{n-1}x_n(t) + p_0u(t) \end{aligned}$$

A equação de saída será simplesmente

$$y = x_1(t)$$

As equações vetoriais de estado e de saída podem ser escritas, então:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -q_0 & -q_1 & -q_2 & \cdots & -q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ p_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + [0] u(t)$$

O caso em que na equação do sistema aparecem derivadas da variável  $u(t)$  será considerado adiante.

#### Exemplo 14.5

Represente por variáveis de estado o sistema descrito pela equação abaixo:

$$\ddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 2y(t) = 5u(t)$$

Solução:

O sistema é de 3ª ordem. As variáveis de estado de fase serão:

$$\begin{aligned} x_1 &= y(t); & x_2 &= \dot{y}(t); & x_3 &= \ddot{y}(t). \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 5u(t) \\ y(t) &= x_1 \end{aligned}$$

Em notação vetorial, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

#### Exemplo 14.6

Represente por variáveis de estado o sistema descrito pelas equações abaixo (ver Figura 14.8).

$$\begin{aligned} \ddot{y}_1(t) + 2\dot{y}_1(t) - 2y_2(t) &= u_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) + y_2(t) - y_1(t) &= u_2(t) \end{aligned}$$

Solução:

Note que o sistema é de 4ª ordem, portanto, deverá ter quatro variáveis de estado. O modelo matemático é formado por duas equações de 2ª ordem. A escolha das variáveis de estado pode ser feita da seguinte maneira (que é uma espécie de generalização do conceito de variáveis de estado de fase):

$$x_1 = y_1(t); x_2 = \dot{y}_1(t); x_3 = y_2(t); x_4 = \dot{y}_2(t)$$

Evidentemente,  $\dot{x}_2 = \ddot{y}_1(t)$ ; e  $\dot{x}_4 = \ddot{y}_2(t)$ .

Equações escalares de estado Equações escalares de saída

$$\dot{x}_1 = x_2 \quad y_1(t) = x_1$$

$$\dot{x}_2 = -2x_2 + 2x_3 + u_1(t)$$

$$\dot{x}_3 = x_4 \quad y_2(t) = x_3$$

$$\dot{x}_4 = x_1 - x_3 + u_2(t)$$

Sob forma vetorial, temos:

Equação de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

Equação de saída

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

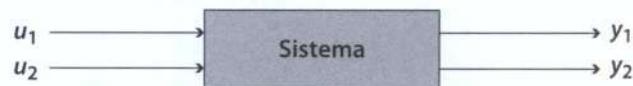


Figura 14.8

Para efeito de escolha das variáveis de estado, quando o sistema é dado pela função de transferência

$$G(s) = Y(s)/U(s),$$

procura-se reduzir este caso ao caso anterior, com o auxílio da transformada inversa de Laplace.

Vejamos inicialmente o caso em que o sistema dado possui  $n$  polos e nenhum zero:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K}{s^n + q_{n-1}s^{n-1} + q_{n-2}s^{n-2} + \dots + q_2s^2 + q_1s + q_0}$$

Temos, então, por multiplicação cruzada:

$$(s^n + q_{n-1}s^{n-1} + q_{n-2}s^{n-2} + \dots + q_2s^2 + q_1s + q_0) Y(s) = K U(s)$$

Efetuando a transformada inversa de Laplace dessa equação e lembrando que na definição de função de transferência  $C.I. = 0$ , resulta:

$$y^{(n)} + q_{n-1}y^{(n-1)} + q_{n-2}y^{(n-2)} + \dots + q_2y'' + q_1y' + q_0y = Ku(t)$$

$$q_2\ddot{y}(t) + q_1\dot{y}(t) + q_0y(t) = Ku(t)$$

Caímos no caso visto anteriormente, de um sistema descrito por uma equação diferencial linear que não contém derivadas do sinal de entrada. Assim, o procedimento que se segue é o mesmo visto naquele caso.

#### Exemplo 14.7

Represente por variáveis de estado o sistema indicado pelo diagrama de blocos da Figura 14.9, onde:

$$G(s) = \frac{10}{s(s+2)(s+3)}$$

Solução:

Reduzindo o diagrama de blocos, resulta:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{10}{s^3 + 5s^2 + 6s + 10}$$

de onde

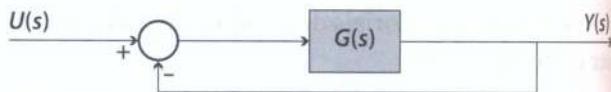
$$(s^3 + 5s^2 + 6s + 10) Y(s) = 10 U(s)$$

ou pela transformada inversa

$$\ddot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) + 6\dot{y}(t) + 10y(t) = 10u(t)$$

Escolhendo variáveis de estado de fase:

$$\begin{aligned} x_1 &= y(t), \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \ddot{x}_1 = x_3, \\ \dot{x}_3 &= -10x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 10u(t) \\ \text{e } y(t) &= x_1 \end{aligned}$$



**Figura 14.9** Diagrama de blocos.

Resultam as seguintes equações vetoriais:

Equação de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \end{bmatrix} u(t)$$

Equação de saída

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Quando a função de transferência de um sistema apresenta também zeros, o procedimento para chegar à representação de estados por meio de variáveis de estado de fase pode ser feito com a utilização de uma variável auxiliar. Seja a função de transferência de um sistema escalar dotado de  $n$  polos e  $m$  zeros (com  $m \leq n$ ):

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P_m s^m + P_{m-1} s^{m-1} + P_{m-2} s^{m-2} + \dots + P_2 s^2 + P_1 s + P_0}{s^n + q_{n-1} s^{n-1} + q_{n-2} s^{n-2} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0}$$

com  $n \geq m$

Multiplicando-se, então, numerador e denominador da função de transferência, por uma variável arbitrária  $X(s)$ :

$$\begin{aligned} \frac{Y(s)}{U(s)} &= \frac{(P_m s^m + P_{m-1} s^{m-1} + P_{m-2} s^{m-2} + \dots + P_2 s^2 + P_1 s + P_0) X(s)}{(s^n + q_{n-1} s^{n-1} + q_{n-2} s^{n-2} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0) X(s)} \\ &\quad + \frac{P_2 s^2 + P_1 s + P_0}{q_2 s^2 + q_1 s + q_0} X(s) \end{aligned}$$

Sendo  $X(s)$  uma variável arbitrária, ela pode ser escolhida de forma a fazer com que os numeradores do primeiro e do segundo membro da igualdade se-

jam iguais entre si. O mesmo deverá ocorrer com os denominadores. Resulta:

$$\begin{aligned} Y(s) &= (p_m s^m + p_{m-1} s^{m-1} + p_{m-2} s^{m-2} + \dots + p_2 s^2 + p_1 s + p_0) X(s) \\ U(s) &= (s^n + q_{n-1} s^{n-1} + q_{n-2} s^{n-2} + \dots + q_2 s^2 + q_1 s + q_0) X(s) \end{aligned}$$

Pela transformação inversa, obtém-se:

$$\begin{aligned} \overset{(n)}{x}(t) + q_{n-1} \overset{(n-1)}{x}(t) + \dots + q_2 \ddot{x}(t) + q_1 \dot{x}(t) + q_0 x(t) &= u(t) \\ y(t) &= p_m \overset{(m)}{x}(t) + p_{m-1} \overset{(m-1)}{x}(t) + \dots + p_2 \ddot{x}(t) + \\ &\quad p_1 \dot{x}(t) + p_0 x(t) \end{aligned}$$

Escolhem-se, então, as variáveis de estado de fase:

$$x_1 = x(t), x_2 = \dot{x}(t), x_3 = \ddot{x}(t), \dots, x_n = \overset{(n-1)}{x}(t) \text{ e, como consequência, resultam as equações escalares de estado}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= x_3(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1}(t) &= x_n(t) \\ \dot{x}_n(t) &= -q_0 x_1(t) - q_1 x_2(t) - \dots - q_{n-1} x_n(t) + u(t) \end{aligned}$$

e de saída

$$y(t) = p_0 x_1(t) + p_1 x_2(t) + \dots + p_{m-1} x_m(t)$$

Sob forma vetorial:

Equação de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -q_0 & -q_1 & -q_2 & \dots & -q_{n-2} & -q_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Equação de saída

$$y(s) = [p_0 \ p_1 \ \dots \ p_{m-1} \ 0 \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \\ x_{m+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + [0] u$$

#### Exemplo 14.8

Determine o modelo de estados do sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20(s^2 + 2s + 17)}{s^3 + 13s^2 + 53s + 40}$$

Solução:

Multiplica-se o numerador e o denominador dessa função por uma variável arbitrária  $X(s)$ :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{20(s^2 + 2s + 17)X(s)}{(s^3 + 13s^2 + 53s + 40)X(s)}$$

Escolhe-se, então,  $X(s)$  de tal forma que:

$$(s^3 + 13s^2 + 53s + 40)X(s) = U(s)$$

e

$$Y(s) = 20(s^2 + 2s + 17)X(s)$$

Por meio da transformada inversa de Laplace, obtém-se:

$$\ddot{x}(t) + 13\dot{x}(t) + 53x(t) + 40x(t) = u(t)$$

e

$$y(t) = 20\ddot{x} + 40\dot{x} + 340x$$

As variáveis de estado de fase serão:

$$x_1 = x \quad x_2 = \dot{x} \quad x_3 = \ddot{x}$$

Resultam as seguintes equações escalares de estado:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -40x_1 - 53x_2 - 13x_3 + u(t) \end{aligned}$$

e a equação de saída:

$$y(t) = 340x_1 + 40x_2 + 20x_3$$

Neste caso, podemos escrever:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -40 & -53 & -13 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [340 \quad 40 \quad 20] \quad D = [0]$$

Esse processo permite também a escolha das variáveis de estado de fase, para o caso em que o modelo do sistema se reduz a uma equação diferencial linear, contendo derivadas da variável de entrada  $u(t)$ .

### Exemplo 14.9

Represente por variáveis de estado o sistema cujo comportamento dinâmico é descrito pela equação:

$$\ddot{y}(t) + 3\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 8y(t) = 2\dot{u}(t) + u(t)$$

Solução:

Obtém-se a função de transferência do sistema e utiliza-se o processo indicado no Exemplo 14.8:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(2s+1)X(s)}{(s^3 + 3s^2 + 5s + 8)X(s)}$$

$$\ddot{x}(t) + 3\ddot{x}(t) + 5\dot{x}(t) + 8x(t) = u(t)$$

$$y(t) = 2\dot{x} + x$$

Pela escolha habitual das variáveis de estado de fase,

$$x_1 = x \quad x_2 = \dot{x} \quad x_3 = \ddot{x}$$

obtém-se:

Equação de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Equação de saída

$$y(t) = [1 \quad 2 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

## 14.4 Vantagens da representação de estado

O método de análise de sistemas baseado nas funções de transferência apresenta limitações. De fato, esse método aplica-se normalmente a sistemas lineares, de entrada e saída únicas. Além disso, ele é definido para o caso de  $C.I. = 0$ . As funções de transferência relacionam diretamente as variáveis de entrada e saída, sem que se tenham necessariamente informações sobre as variáveis internas do sistema.

Já o método da descrição de estado permite superar essas limitações. Além disso, ele apresenta as seguintes vantagens adicionais:

- (a) As equações diferenciais do modelo de estados apresentam formato adequado para a sistematização da solução por meio de computadores.
- (b) As variáveis de estado constituem uma poderosa estrutura unificada, conveniente para o estudo, tanto dos sistemas lineares como dos não lineares.
- (c) Constituem uma importante ferramenta de pesquisa da teoria dos sistemas.
- (d) A conceituação de estado tem ampla motivação de natureza física.
- (e) Presta-se ao desenvolvimento de métodos robustos e eficientes para simulação digital.

## Problemas propostos (1)

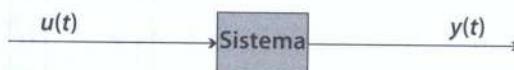
1. Determine o modelo no espaço de estados dos sistemas cujo comportamento dinâmico é regido pelas equações diferenciais indicadas. Escreva as equações vetoriais de estado e de saída. Identifique as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ . Indique também a ordem de cada sistema (utilize as figuras 14.10 e 14.11).

(a)  $\ddot{y} + 3\dot{y} + y = u(t)$

(b)  $\ddot{y} + 5\ddot{y} + 8\dot{y} + 12y = u(t)$

(c)  $\ddot{x} + 6\ddot{x} + 18\dot{x} + 64x = u(t)$  com  $y(t) = 16(\dot{x} + 4x)$

(d)  $\ddot{y}(t) + 5\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 12y = u(t)$  com  $y(t) = 10(\dot{u}(t) + 2u(t))$



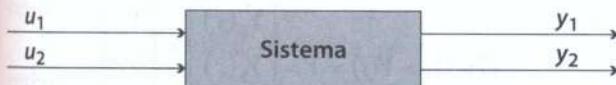
**Figura 14.10** Sistema para Problema 1, itens (a), (b), (c), (d), (e) e (f).

$$(e) \ddot{y} + 6\dot{y} + 5y = 2\frac{du}{dt} + u(t)$$

$$(f) \ddot{y} + 2\dot{y} + y + \int_0^t y dt = \frac{du}{dt} + 5u(t)$$

$$(g) \ddot{y}_1 + 3\dot{y}_1 + 2y_1 - 2y_2 = u_1(t)$$

$$\ddot{y}_2 + 2\dot{y}_2 + 2y_1 = u_2(t)$$



**Figura 14.11** Sistema para Problema 1, item (g).

2. Converta ao modelo de estados os sistemas cujas funções de transferência estão indicadas abaixo (utilize a Figura 14.12):

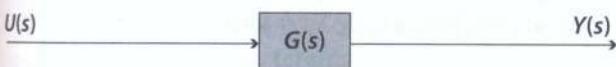
$$(a) G(s) = \frac{100}{s^3 + 5s^2 + 15s + 10}$$

$$(b) G(s) = \frac{10}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

$$(c) G(s) = \frac{250}{s(s+2)(s+5)}$$

$$(d) G(s) = \frac{200}{s^4 + 5s^3 + 15s + 10}$$

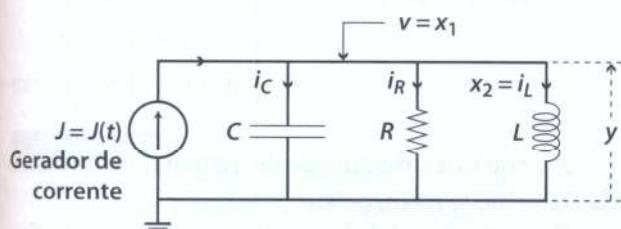
$$(e) G(s) = \frac{(s+2)}{(s^3 + 3s^2 + 5s + 8)}$$



**Figura 14.12**

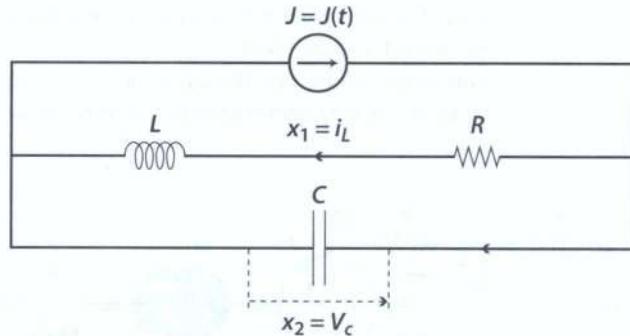
3. Escreva as equações de estado e de saída dos circuitos indicados a seguir.

- (a) Circuito  $R-L-C$  paralelo alimentado por gerador de corrente. As variáveis de saída são a tensão ( $y$ ) no circuito (Figura 14.13).



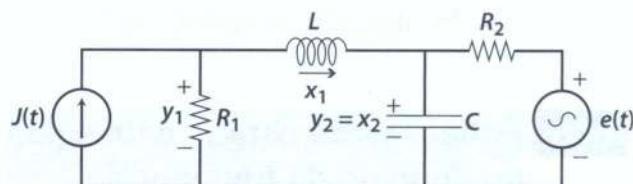
**Figura 14.13**

- (b) Circuito  $R-L-C$  da Figura 14.14, alimentado por um gerador de corrente. As variáveis de saída são as tensões no capacitor  $y_1$  e no indutor  $y_2$ .



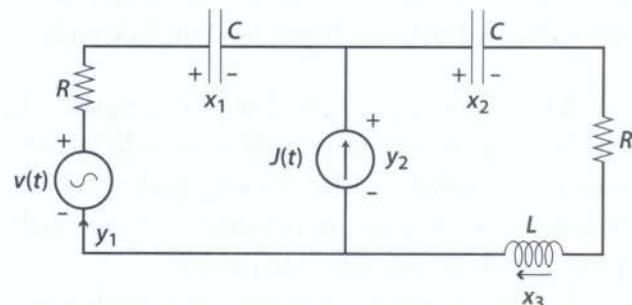
**Figura 14.14**

- (c) No circuito da Figura 14.15, as variáveis de entrada são a corrente no gerador de corrente ( $u_1 = j(t)$ ) e a tensão no gerador de tensão ( $u_2 = e(t)$ ). As variáveis de saída são as tensões,  $y_1$  na resistência  $R_1$  e  $y_2$  no capacitor  $C$ . Determine as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do modelo de estado.



**Figura 14.15**

- (d) No circuito da Figura 14.16, as variáveis de entrada são a tensão do gerador de tensão ( $u_1 = v(t)$ ) e a corrente do gerador de corrente ( $u_2 = J(t)$ ). As variáveis de saída são a tensão do gerador de corrente ( $y_1(t)$ ) e a corrente do gerador de tensão ( $y_2(t)$ ). Considere como variáveis de estado as tensões nos capacitores ( $x_1$  e  $x_2$ ) e a corrente no indutor ( $x_3$ ).



**Figura 14.16**

4. A Figura 14.17 representa um servomotor de corrente contínua controlado pela tensão de armadura  $u(t)$ .

- (a) Escreva as equações diferenciais desse sistema.

- (b) Adote como variáveis de estado  $x_1 = \theta(t)$ , posição angular do rotor;  $x_2 = \omega(t)$ , velocidade an-

gular;  $x_3 = i_a(t)$ , corrente no motor; e escreva a equação vetorial de estado.

- (c) Adote como saídas  $y_1 = \theta(t)$ ;  $y_2 = \omega(t)$ ,  $y_3 = e(t)$ , f.c.e.m do motor e escreva a equação vetorial de saída.

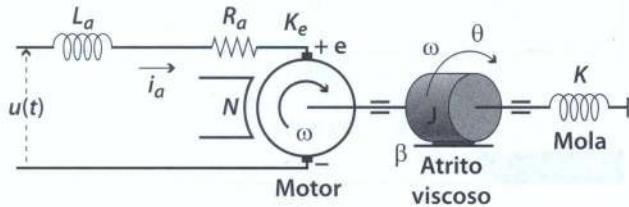


Figura 14.17

$$\omega = \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} \quad \text{velocidade angular}$$

$$e = K_e \omega \quad \text{f.e.m.}$$

$$K_e i_a = J \ddot{\omega} + \beta \dot{\omega} + K \theta \quad \text{equação do conjugado}$$

## 14.5 Equações de estado e de saída no domínio da frequência

No início deste capítulo foram apresentadas tanto a conceituação de variáveis de estado quanto as técnicas habituais de representação de estado de um sistema linear. O modelo matemático obtido para esses sistemas, sob forma vetorial, é apresentado como segue:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) && \text{Equação vetorial de estado} \\ y(t) &= Cx(t) + Du(t) && \text{Equação vetorial de saída} \end{aligned}$$

A tarefa que se põe agora é resolver a equação de estado. Dados o vetor de entrada a partir do instante inicial  $t_0$  e o estado inicial  $x_0 = x(t_0)$ , poderemos determinar o estado  $x(t)$ , e através dele, o vetor de saída  $y(t)$ , em qualquer instante posterior a  $t_0$ .

Apresentaremos inicialmente a solução da equação de estado via transformada de Laplace, ou, como se costuma dizer, determinaremos a solução dessa equação no domínio da frequência.

Comecemos por examinar a aplicação da transformada de Laplace às matrizes e às equações vetoriais.

A transformada de Laplace de um vetor, ou de uma matriz, é obtida transformando-se cada elemento do vetor ou da matriz. Assim, para os vetores de entrada, de saída e de estado, definimos:

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = U(s) = U = \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \\ \vdots \\ U_p(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_p \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}\{y(t)\} = Y(s) = Y = \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \\ \vdots \\ Y_q(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = X = \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix}$$

Com relação ao vetor das derivadas das variáveis de estado (derivada do vetor de estado), vamos lembrar o seguinte: a transformada de Laplace da derivada de uma variável inclui o valor inicial dessa variável da seguinte forma: se  $\mathcal{L}\{x_i(t)\} = X_i(s)$ , então, a transformada da derivada de  $x_i(t)$  será

$$\mathcal{L}\{\dot{x}_i(t)\} = sX_i(s) - x_{0i} \quad \text{com } x_{0i} = x_i(0)$$

Portanto,

$$\mathcal{L}\{\dot{x}(t)\} = sX(s) - x(0) = s \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \\ X_3(s) \\ \vdots \\ X_n(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix}$$

As equações dinâmicas do sistema, no domínio da frequência, serão, pois:

Equação vetorial de estado no domínio da frequência:

$$s \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \\ x_{03} \\ \vdots \\ x_{0n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & \dots & b_{2p} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & \dots & b_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{np} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_p \end{bmatrix}$$

onde  $X_i = X_i(s)$  e  $U_j = U_j(s)$ .

Equação vetorial de saída no domínio da frequência:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ \vdots \\ Y_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & \dots & c_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{q1} & c_{q2} & c_{q3} & \dots & c_{qn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & \dots & d_{1p} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & \dots & d_{2p} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & \dots & d_{3p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{q1} & d_{q2} & d_{q3} & \dots & d_{qp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ \vdots \\ U_p \end{bmatrix}$$

onde  $Y_r = Y_r(s)$ ,  $X_i = X_i(s)$  e  $U_j = U_j(s)$ .

Sob forma vetorial, teremos:

Equação vetorial de estado

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

Equação vetorial de saída

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

Para ilustrar essas ideias iniciais, daremos um exemplo.

#### Exemplo 14.10

Um sistema de entrada  $u(t)$  e saídas  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

As condições iniciais são:  $x_{01} = 2$  e  $x_{02} = -1$ .

Escreva as equações de estado e de saída no domínio da frequência sob as formas vetorial e escalar.

Solução:

Transformando por Laplace as equações dadas, resulta:

Equações vetoriais de estado

$$s \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

e de saída

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U(s)$$

Equações escalares de estado

$$\begin{aligned} sX_1(s) - 2 &= X_2(s) \\ sX_2(s) + 1 &= -10X_1(s) - 7X_2(s) + U(s) \end{aligned}$$

e de saída

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= X_1(s) + X_2(s) \\ Y_2(s) &= -X_2(s) + U(s) \end{aligned}$$

## 14.6 Modelo de estados e diagramas de blocos

Da mesma forma que as equações de estado, os diagramas de blocos tanto podem ser escalares como vetoriais. Para facilitar esse entendimento, vamos representar os diagramas com o auxílio do Exemplo 14.10. Comecemos o caso escalar, que nos é mais familiar.

As equações escalares de estado do Exemplo 14.10 podem ser escritas sob a forma:

$$sX_1(s) = 2 + X_2(s)$$

$$sX_2(s) = -1 - 10X_1(s) - 7X_2(s) + U(s)$$

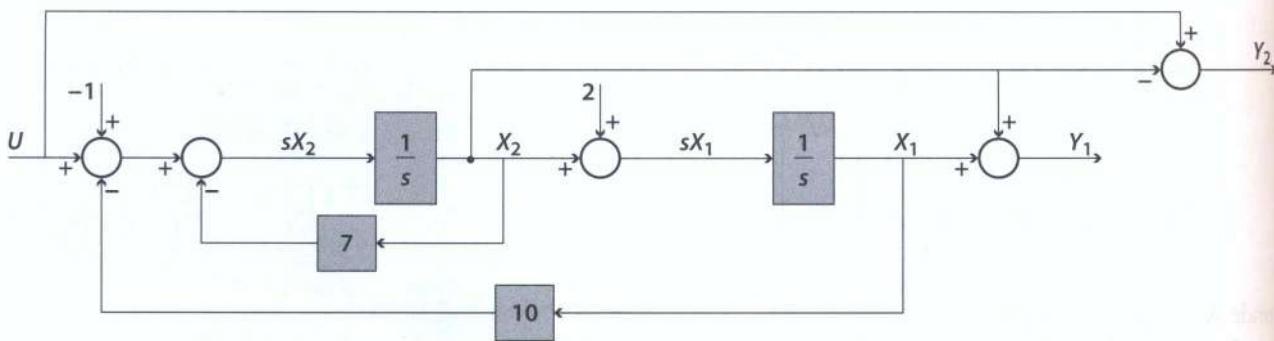
E as de saída,

$$Y_1(s) = X_1(s) + X_2(s)$$

$$Y_2(s) = -X_2(s) + U(s)$$

O diagrama com saídas  $Y_1$  e  $Y_2$  pode ser, então, representado pela Figura 14.18.

Note que os valores das condições iniciais  $x_{01} = 2$  e  $x_{02} = -1$  aparecem como entradas constantes no diagrama de blocos, porque esse diagrama se refere ao domínio da frequência. No domínio do tempo, portanto, essas condições iniciais serão consideradas



**Figura 14.18** Diagrama de blocos escalar do Exemplo 14.10.

como impulsos ( $\delta(t)$ ) de valor igual às respectivas condições iniciais.

Já as equações vetoriais de estado e de saída no domínio da frequência podem ser representadas, na sua forma geral, por um diagrama de blocos vetorial, muito útil em certas aplicações (por exemplo, no estudo do controle de um sistema por realimentação de estado, no caso dos denominados, observadores de estados, e em cálculos feitos via programas computacionais).

Os diagramas de blocos vetoriais prestam-se para representação das equações de estado vetoriais, indicando propriedades gerais dessas equações.

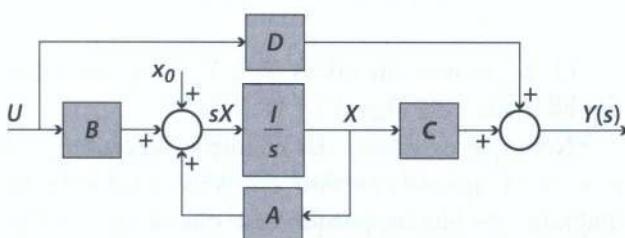
As equações em referência são as seguintes:

$$\begin{aligned} sX(s) - x_0 &= AX(s) + BU(s) \\ Y(s) &= CX(s) + DU(s) \end{aligned}$$

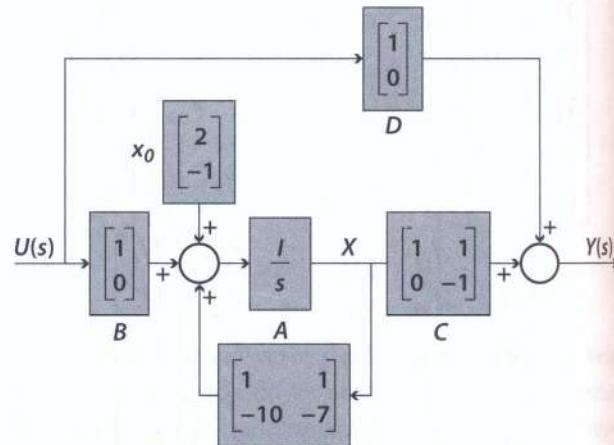
Nos diagramas de blocos vetoriais, os ramos indicam variáveis vetoriais e não escalares (são, às vezes, representados por setas de traço duplo); os blocos representam matrizes.

Vejamos, então, na Figura 14.19, como as equações acima podem ser representadas por um diagrama de blocos vetorial.

Vejamos também como fica o diagrama de blocos vetorial de representação de estados do exemplo numérico que estamos seguindo (ver Figura 14.20).



**Figura 14.19** Diagrama de blocos vetorial das equações de estado e de saída.



**Figura 14.20** Diagrama de blocos vetorial do Exemplo 14.10.

Note que o bloco integrador representa tantos integradores quantos forem os estados. Então, de fato, ele deve ser representado por  $I/s$  (em vez de  $1/s$ ), onde  $I$  denota uma matriz-identidade de dimensão igual à da matriz  $A$ .

## 14.7 Matriz de transição de estado

Voltemos a considerar as equações de estado e de saída no domínio da frequência:

Equação vetorial de estado

$$sX(s) - x_0 = AX(s) + BU(s)$$

Equação vetorial de saída

$$Y(s) = CX(s) + DU(s)$$

No domínio do tempo, a equação de estado é uma equação diferencial vetorial linear que pode ser resolvida analiticamente por integração ou numericamente com auxílio de um programa de computador. Já no domínio da frequência, a equação de estado torna-se

uma equação vetorial algébrica no campo complexo, cuja solução (determinação de  $X(s)$ ) depende essencialmente da inversão de uma matriz simbólica. De fato, a equação de estados previamente apresentada pode ser escrita:

$$sIX(s) - AX(s) = x_0 + BU(s)$$

onde  $I$  é a matriz identidade (de  $n$  linhas e  $n$  colunas, sendo  $n$  a ordem do sistema):

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Prosseguindo, a matriz  $X(s)$  pode ser posta em evidência à direita, no primeiro membro:

$$[sI - A]X(s) = x_0 + BU(s)$$

O determinante da matriz  $(sI - A)$  é um polinômio de grau  $n$  em  $s$ , denominado polinômio característico da matriz  $A$  do sistema ou, simplesmente, polinômio característico do sistema:

$$\det[sI - A] = \Delta(s) = s^n + q_{n-1}s^{n-1} + q_{n-2}s^{n-2} \dots + q_1s + q_0$$

A equação que se obtém igualando a zero o determinante de  $(sI - A)$  denomina-se equação característica do sistema ou da matriz  $A$ :

$$s^n + q_{n-1}s^{n-1} + q_{n-2}s^{n-2} \dots + q_1s + q_0 = 0$$

As raízes  $s_1, s_2, \dots, s_n$  da equação característica são os autovalores da matriz  $A$ . Os autovalores da matriz  $A$  são também os polos do sistema.

#### Exemplo 14.11

Determine o polinômio característico do sistema cuja equação de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Determine também os autovalores da matriz do sistema.

Solução:

$$\text{A matriz do sistema é } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix}$$

Portanto,

$$[sI - A] = s \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+2 \end{bmatrix}$$

$$\Delta(s) = \det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 6 & s+2 \end{bmatrix}$$

e a equação característica será

$$\Delta(s) = s^2 + 2s + 6 = 0.$$

Os autovalores da matriz  $A$  (ou polos do sistema) são as raízes dessa equação característica:

$$s_1 = 1 + j2,236 \quad \text{e} \quad s_2 = -1 - j2,236$$

Para isolar a variável  $X(s)$  na equação:

$$[sI - A] X(s) = x_0 + BU(s)$$

devemos pré-multiplicar ambos os membros da expressão pela inversa da matriz  $[sI - A]$ . Resulta:

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x_0 + [sI - A]^{-1}BU(s)$$

Essa é a solução completa da equação de estado no domínio da frequência. Note que ela apresenta dois componentes: uma primeira parcela que só depende do estado inicial  $x_0$ , e outra que é função apenas do vetor de entrada  $X(s)$ . Então, se  $U(s)$  for nulo, teremos

$$X(s) = [sI - A]^{-1}x_0$$

Vemos que, nesse caso, a matriz  $(sI - A)^{-1}$  aplicada ao estado inicial  $x_0$  resulta no estado atual  $X(s)$ . Essa é a razão pela qual a matriz  $(sI - A)^{-1}$  é denominada matriz de transição de estado. Essa primeira parcela da solução completa da equação de estado denomina-se solução de entrada zero (pois é obtida com o sinal de entrada  $u(t) = 0$ ).

A segunda parcela da solução completa da equação de estado denomina-se solução de estado zero (pois é obtida da condição de estado inicial nula:  $x(0) = x_0 = 0$ ).

A matriz de transição de estado é comumente representada pela notação  $\phi(s)$ :

$$\phi(s) = [sI - A]^{-1}$$

Com essa notação, a solução completa da equação de estado fica sendo:

$$X(s) = \phi(s)x_0 + \phi(s)BU(s)$$

A solução dessa equação é, conforme vimos:

$$X(s) = \phi(s)x_0 + \phi(s)BU(s)$$

Levando esse valor de  $X(s)$  na equação de saída, resulta:

$$Y(s) = C\phi(s)x_0 + C\phi(s)BU(s) + DU(s)$$

ou

$$Y(s) = C\phi(s)x_0 + [C\phi(s)B + D]U(s)$$

Essa é a resposta completa do sistema à excitação  $U(s)$  e ao estado inicial  $x_0$ . Como acontece com a solução completa da equação de estado, a resposta completa também apresenta duas parcelas distintas: a resposta à entrada zero, que é aquela que não depende de  $U(s)$  (também denominada resposta livre), e resposta ao estado zero, que é aquela que não depende do estado inicial  $x_0$ . Podemos escrever:

Resposta à entrada zero:

$$Y_L(s) = C\phi(s)x_0$$

Resposta ao estado zero:

$$Y_U(s) = [C\phi(s)B + D]U(s)$$

Resposta completa do sistema:

$$Y(s) = Y_L(s) + Y_U(s)$$

ou seja,

$$Y(s) = C\phi(s)x_0 + [C\phi(s)B + D]U(s)$$

Na expressão da resposta de estado zero, podemos definir a matriz transferência (de dimensões  $q \times p$ ):

$$G(s) = [C\phi(s)B + D]$$

que nos permite escrever:

$$Y_u(s) = G(s)U(s)$$

A matriz  $G(s)$  assim definida denomina-se matriz de transferência (ou matriz das funções de transferência) do sistema. No caso dos sistemas escalares, isto é, com uma só variável escalar de entrada e outra de saída, a matriz de transferência se reduz à função de transferência do sistema.

### Exemplo 14.13

O comportamento dinâmico de um sistema é descrito pela equação de estado

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$Y(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

(a) Determine o vetor de estado  $x(t)$  para o caso em que  $x_{01} = 3$  e  $x_{02} = -1$  e as variáveis de entrada são nulas ( $u_1(t) = 0$  e  $u_2(t) = 0$ ).

(b) Determine o vetor de estado  $x(t)$  para o caso em que  $x_0 = 0$  e  $u_1(t) = 0$  e  $u_2(t) = h(t)$  degrau unitário.

(c) Sendo a saída  $y(t) = x_1(t)$ , determine a matriz de transferência  $G(s)$ .

Solução:

(a) Neste caso, o estado inicial é:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

e o vetor de entrada é nulo. A solução da equação de estado se reduz, pois, o componente livre, a saber:

$$X(s) = \phi(s)x_0 \quad \text{com} \quad \phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

Calculemos  $\phi(s)$ :

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix}$$

$$\Delta = \det \begin{bmatrix} s+3 & 1 \\ -2 & s \end{bmatrix} = s^2 + 3s + 2 = (s+1)(s+2)$$

Invertendo a matriz  $(sI - A)$ , obtemos:

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta} & \frac{-1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+3}{\Delta} \end{bmatrix}$$

Logo,

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta} & \frac{-1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+3}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{3s+1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{3-s}{(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2}{s+1} + \frac{5}{s+2} \\ \frac{4}{s+1} + \frac{-5}{s+2} \end{bmatrix}$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2e^{-t} + 5e^{-2t} \\ 4e^{-t} - 5e^{2t} \end{bmatrix}, \text{ para } t \geq 0$$

(b) Neste caso, o estado inicial  $x_0$  é nulo, uma das variáveis de entrada também é nula ( $u_1(t) = 0$ ) e a outra é um degrau unitário ( $u_2(t) = h(t)$ ). A solução da equação de estado se reduz ao componente de estado zero:

$$X(s) = \phi(s)BU(s)$$

onde  $\phi(s)$  é o mesmo do caso anterior e  $U(s) = \mathcal{E}(h(t)) = 1/s$ .

$$\begin{bmatrix} X_1(s) \\ X_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta} & \frac{-1}{\Delta} \\ \frac{2}{\Delta} & \frac{s+3}{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{s} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+2)} \\ \frac{2}{s(s+1)(s+2)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \\ 1 - \frac{2}{s+1} + \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$$

Finalmente, utilizando a transformada inversa de Laplace, obtemos para  $t \geq 0$ :

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} - e^{-2t} \\ 1 - 2e^{-t} + e^{-2t} \end{bmatrix}$$

(c) O sistema em estudo tem duas entradas ( $u_1$  e  $u_2$ ) e apenas uma saída ( $y = x_1$ ). A matriz de transferência pode ser obtida facilmente pela expressão:

$$G(s) = [C\phi(s)B + D]$$

No caso atual:  $D = 0$  e  $C = [1 \ 0]$  e

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ e } \phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta(s)} & \frac{-1}{\Delta(s)} \\ \frac{2}{\Delta(s)} & \frac{s+3}{\Delta(s)} \end{bmatrix}$$

Resulta:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s}{\Delta(s)} & \frac{-1}{\Delta(s)} \\ \frac{2}{\Delta(s)} & \frac{s+3}{\Delta(s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & s \\ \Delta & \Delta \end{bmatrix}$$

Matriz de transferência:

$$G(s) = \begin{bmatrix} -1 & s \\ (s+1)(s+2) & (s+1)(s+2) \end{bmatrix}$$

A equação de saída do sistema é, então:

$$Y(s) = \begin{bmatrix} -1 \\ (s+1)(s+2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Note que o primeiro termo da matriz de transferência é a função de transferência da primeira entrada ( $U_1$ ) para a saída. Analogamente, o segundo termo é a função de transferência da segunda entrada para a saída.

No exemplo numérico que estamos desenvolvendo, sendo  $U_1(s) = 0$  e  $U_2(s) = \frac{1}{s}$ , resulta:

$$Y(s) = \frac{s}{(s+1)(s+2)} U_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{(s+1)} - \frac{1}{(s+2)}$$

Finalmente,

$$y(t) = e^{-t} - e^{-2t}, \text{ para } t \geq 0$$

## Problemas propostos (2)

- Para o sistema descrito pela equação vetorial de estados
- $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$
- Escreva as equações escalares de estado no domínio da frequência.
  - Supondo  $C.I. = 0$ , determine  $x_1(t)$  e  $x_2(t)$ , no caso em que  $u_1(t) = h(t) = \text{degrau unitário}$  e  $u_2(t) = 0$ .
- O diagrama de blocos da Figura 14.21 representa um sistema com realimentação unitária. O sistema do ramo de avanço, designado por  $G(s)$ , é descrito pelas equações
- $$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} e(t)$$
- $$y(t) = [3 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Faça a representação de estado do sistema de malha fechada.

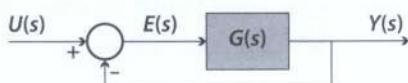


Figura 14.21

Ajuda:

$$G: \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

$$e = u - y = u - Cx$$

3. Dadas as equações de estado e de saída de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

- (a) Os autovalores da matriz  $A$  (polos do sistema).
  - (b) A matriz de transição de estado  $\phi(s)$ .
  - (c) A matriz de transferência do sistema.
  - (d) A resposta do sistema para o caso de  $C.I. = 0$  e  $u_1(t) = 0$  e  $u_2(t) = \delta(t)$  = impulso unitário.
4. Dado o circuito da Figura 14.22, que contém dois amplificadores operacionais, escreva as equações de estado e de saída:
- (a) Considerando como variáveis de estado as tensões nos condensadores ( $x_1$  e  $x_2$ ).
  - (b) Escolhendo variáveis de estado de fase.
- A entrada no sistema é a tensão  $u(t)$  e a saída, a tensão  $y(t)$ . Determine, para cada caso, os autovalores da matriz do sistema, a resposta  $y(t)$  a um degrau de tensão de  $50 \text{ mV}$  ( $u(t) = 0,05 \text{ b}(t)$ ) e as condições iniciais  $x_{01} = -0,5$  e  $x_{02} = -7,0$ . Compare os resultados (a) e (b).

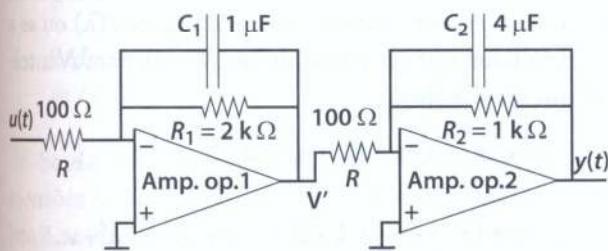


Figura 14.22

## 14.9 Notação de Bellman

Prosseguindo no estudo da solução da equação de estado dos sistemas lineares, que iniciamos na primeira parte deste capítulo, trabalhando no domínio da frequência, vamos agora encaminhar a solução diretamente no domínio do tempo. Examinaremos aqui a obtenção da solução analítica. Note, entretanto, que a maioria dos programas de solução numérica desenvolvidos para o cálculo via computador não utilizam a solução analítica, mas sim a integração numérica (Runge Kuta, Euler etc.) da equação de estado.

O tratamento do modelo vetorial de estado no domínio do tempo depende de uma notação apropriada, atribuída a Bellman, e que será nosso ponto de partida neste estudo.

### ■ 14.9.1 Polinômio de matriz quadrada

Seja  $A$  uma matriz quadrada de dimensões  $n \times n$ , constituída por elementos reais ou complexos. Define-se, para  $k$  inteiro positivo:

$$A^k = A A A \dots A$$

(produto de  $k$  matrizes iguais a  $A$ )

e, para  $k = 0$ :  $A^0 = I$  (matriz identidade)

Consideremos agora um polinômio  $p(\lambda)$ , de grau  $n$ , na variável escalar  $\lambda$ :

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + a_{n-2} \lambda^{n-2} + \dots + a_1 \lambda + a_0$$

Então, define-se polinômio da matriz quadrada  $A$ , associado a  $p(\lambda)$ , como o polinômio que se obtém substituindo-se  $\lambda$  por  $A$  em  $p(\lambda)$  e multiplicando-se o termo constante pela matriz identidade  $I$ .

$$p(A) = a_n A^n + a_{n-1} A^{n-1} + a_{n-2} A^{n-2} + \dots + a_1 A + a_0 I$$

Em particular, dizemos que  $A$  é uma raiz ou um zero de  $p(\lambda)$ , se  $p(A) = 0$ .

**Exemplo 14.14**

Sejam os polinômios  $p(\lambda) = \lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda + 3$  e  $q(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 3$  e a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Escreva os polinômios associados  $p(A)$  e  $q(A)$  e determine seus valores numéricos.

Solução:

Substituindo  $\lambda$  por  $A$ , vem

$$p(A) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 - 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

sendo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix}$$

resulta

$$p(A) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ou

$$p(A) = \begin{bmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 16 \\ 0 & 18 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 12 \\ 0 & 15 \end{bmatrix}$$

No caso do polinômio  $q(A)$ , temos:

$$q(A) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 8 \\ 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Então, a matriz  $A$ , é raiz do polinômio  $q(A)$ . Note ainda que  $q(\lambda)$  é o polinômio característico da matriz  $A$ :

$$\det[\lambda I - A] = \det \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -2 \\ 0 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 3$$

Esse fato é exemplo de uma propriedade geral muito importante, garantida por um teorema denominado teorema de Cayley-Hamilton: Toda matriz é raiz de seu próprio polinômio característico.

**■ 14.9.2 Função de matriz quadrada**

Seja a representação de uma função  $f(\lambda)$ , por meio de uma série de potências:

$$f(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$$

com raio de convergência  $\rho$ . A série de potências  $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \lambda^k$  define a função  $f(\lambda)$  somente enquanto for uma série convergente, o que ocorre para os valores de  $\lambda$  situados no interior do círculo de convergência  $|\lambda| < \rho$ .

**Exemplo 14.15**

$$f(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$$

Note que, neste exemplo, a série de potências só define a função se  $|\lambda| < 1$ . Caso contrário, a série torna-se divergente e não representa mais  $f(\lambda)$ . O raio de convergência é, então,  $\rho = 1$ .

Analogamente à definição de polinômio de matriz quadrada, apresentada, define-se função de matriz quadrada  $A$  associada a uma função escalar  $f(\lambda)$ , substituindo-se em  $f(\lambda)$ , o escalar  $\lambda$  pela matriz  $A$ :

$$f(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k A^k$$

A definição é válida apenas se a série exponencial de  $A$  for convergente. Prova-se que isso ocorre quando os valores absolutos dos autovalores de  $A$  forem menores que o raio de convergência  $\rho$  de  $f(\lambda)$  ou se a matriz tiver a propriedade de ser  $A^N = 0$ , para  $N$  inteiro, finito, positivo.

No caso do exemplo acima

$$f(\lambda) = \frac{1}{1-\lambda} = 1 + \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$$

vemos que a série só é convergente se  $|\lambda| < 1$ . O raio de convergência é, pois,  $\rho = 1$ . A função da matriz quadrada  $A$ , associada à função  $f(\lambda)$  apresentada será, pois

$$f(A) = (I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3 + A^4 + \dots$$

desde que as condições de convergência sejam satisfeitas. Neste caso, são satisfeitas quando os valores absolutos dos autovalores de  $A$  forem menores que 1.

### ■ 14.9.3 Matriz exponencial

A função exponencial  $e^{\lambda t}$  é definida pela série de potências

$$\begin{aligned} f(\lambda) = e^{\lambda t} &= 1 + \lambda t + \frac{\lambda^2 t^2}{2!} + \frac{\lambda^3 t^3}{3!} + \frac{\lambda^4 t^4}{4!} + \dots \\ &\quad + \frac{\lambda^n t^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

ou seja

$$e^{\lambda t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k t^k}{k!}$$

Esta série tem a grande vantagem de ser convergente para qualquer valor finito, real ou complexo, de  $\lambda$  ou de  $t$ . Isto é, seu raio de convergência é infinito. O mesmo ocorre com a função de matriz quadrada  $A$ , associada a  $f(A) = e^{At}$ , que recebe o nome de matriz exponencial:

$$\begin{aligned} f(A) = e^{At} &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \frac{A^4 t^4}{4!} + \dots \\ &\quad + \frac{A^n t^n}{n!} + \dots \end{aligned}$$

ou seja,

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

A série é convergente, quaisquer que sejam a matriz quadrada  $A$  e os valores de  $t$ . Da definição apresentada resultam, para matriz exponencial, propriedades análogas às da própria função exponencial:

$$\begin{array}{lll} \text{se } A = 0 & e^{[0]t} = I & \text{(matriz identidade)} \\ \text{se } t = 0 & e^{A0} = I & \text{(matriz identidade)} \end{array}$$

Se  $A$  e  $B$  forem matrizes quadradas de mesmas dimensões ( $N \times N$ ) e se o produto delas for comutativo, isto é, se  $AB = BA$ , então vale a seguinte propriedade:

$$e^{(A+B)t} = e^{At} e^{Bt}$$

Para qualquer  $A$  (matriz quadrada), sendo  $t$  e  $\tau$  dois instantes quaisquer, vale a seguinte propriedade:

$$e^{A(t+\tau)} = e^{At} e^{A\tau}$$

Fazendo-se nessa última igualdade  $t = -\tau$ , resulta:

$$e^{A0} = e^{At} e^{-At} = I$$

Logo, as matrizes  $e^{At}$  e  $e^{-At}$  são inversas uma da outra:

$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At}$$

Assim, para inverter a matriz exponencial  $e^{At}$ , basta trocar o sinal de  $t$ .

Derivada da função exponencial: prova-se facilmente que

$$\frac{d}{dt} e^{At} = Ae^{At} = e^{At} A$$

#### Observação:

Propriedade geral das funções de matriz quadrada: O produto de duas funções da mesma matriz quadrada é comutativo. No caso anteriormente apresentado, vê-se que a propriedade é válida por simples inspeção, pois ambas as matrizes são funções de  $A$ .

#### Exemplo 14.16

Dada a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

determine a matriz exponencial  $e^{At}$  correspondente e sua inversa.

Solução:

Para essa matriz  $A$ , tem-se  $A^2 = 0$ . Logo

$$\begin{aligned} e^{At} &= I + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots = \\ &\quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} t = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

A matriz inversa será

$$[e^{At}]^{-1} = e^{-At} = \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

De fato

$$e^{At} e^{-At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**Exemplo 14.17**

Determine a matriz  $e^{At}$  para o caso em que

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Sendo  $A$  uma matriz diagonal, tem-se

$$A^n = \begin{bmatrix} (-1)^n & 0 \\ 0 & (-2)^n \end{bmatrix} \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix} \quad \text{etc.}$$

$$\begin{aligned} e^{At} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -t & 0 \\ 0 & -2t \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & 0 \\ 0 & 2t^2 \end{bmatrix} + \\ &\quad \begin{bmatrix} \frac{-t^3}{6} & 0 \\ 0 & \frac{-4t^3}{3} \end{bmatrix} + \dots \\ e^{At} &= \begin{bmatrix} 1-t+\frac{t^2}{2}-\frac{-t^3}{6} \dots & 0 \\ 0 & 1-2t+2t-\frac{4t^3}{3}+\dots \end{bmatrix} \end{aligned}$$

As séries que aparecem na matriz são facilmente identificáveis:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix}$$

A matriz inversa será simplesmente

$$e^{-At} = \begin{bmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

#### ■ 14.9.4 Matriz de transição de estado no domínio do tempo

Anteriormente, estudamos a matriz de transição de estado no domínio da frequência:

$$\phi(s) = [sI - A]^{-1}$$

A matriz de transição de estado no domínio do tempo será, então:

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\}$$

Para obter  $\phi(t)$ , começemos por procurar a derivada da matriz exponencial por dois caminhos diferentes. Partimos da expressão da derivada da matriz exponencial:

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At}$$

A transformada de Laplace do primeiro membro dessa igualdade resulta em:

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d}{dt}(e^{At})\right\} = s\mathcal{L}\{e^{At}\} - I$$

sendo  $I = e^{A0}$  a condição inicial.

Transformada do segundo membro:

$$\mathcal{L}\{Ae^{At}\} = A\mathcal{L}\{e^{At}\}$$

Igualando os dois segundos membros transformados

$$s\mathcal{L}\{e^{At}\} - I = A\mathcal{L}\{e^{At}\}$$

ou

$$s\mathcal{L}\{e^{At}\} - A\mathcal{L}\{e^{At}\} = I$$

ou, ainda,

$$[sI - A]\mathcal{L}\{e^{At}\} = I$$

Pré-multiplicando ambos os membros dessa expressão por  $[sI - A]^{-1}$ , resulta:

$$\mathcal{L}\{e^{At}\} = [sI - A]^{-1}$$

Finalmente,

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}\}$$

Portanto, sendo  $\phi(s) = [sI - A]^{-1}$  a matriz de transição de estado no domínio da frequência, resulta que sua transformada inversa é

$$\phi(t) = e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{\phi(s)\}$$

matriz de transição de estado no domínio do tempo. Isto é, a matriz de transição de estado de um sistema, no domínio do tempo, é a matriz exponencial da matriz  $A$  do referido sistema.

Esta última expressão permite-nos obter a matriz exponencial  $e^{At}$  em forma fechada (isto é, não sob forma de séries infinitas) usando a transformada inversa de  $\phi(s)$ .

#### Exemplo 14.18

Determine a matriz  $e^{At}$ , em forma fechada, sendo

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

Usaremos a expressão

$$\begin{aligned} e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}\} \\ [sI - A] &= \begin{bmatrix} s+1 & 0 \\ 0 & s+2 \end{bmatrix} \\ [sI - A]^{-1} &= \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix} \\ e^{At} &= \mathcal{L}^{-1}\{[sI - A]^{-1}\} = \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}\right\} &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### ■ 14.9.5 Propriedades de $\phi(t)$

Sendo

$$\phi(t) = e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!}$$

resultam as seguintes propriedades para  $\phi(t)$ :

- (1)  $\phi(0) = I$
- (2)  $\dot{\phi}(t) = A\phi(t)$
- (3)  $\phi(-t) = [\phi(t)]^{-1}$
- (4)  $\dot{\phi}(t)\phi(-t) = A$
- (5)  $\phi(t + \tau) = \phi(t)\phi(\tau)$
- (6)  $\phi(t)\phi(\tau) = \phi(\tau)\phi(t)$

#### Exemplo 14.19

Verifique se a matriz

$$M(t) = \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & t + 1 \end{bmatrix}$$

pode ser matriz de transição de estado de um sistema linear.

Solução:

Verifica-se facilmente que a propriedade (1) da tabela acima é satisfeita pela matriz dada

$$M(0) = I$$

mas a propriedade (3) já não é satisfeita:

$$\begin{aligned} M(t)M(-t) &= \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & t + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^2 + 1 & 0 \\ 0 & -t + 1 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (t^2 + 1)^2 & 0 \\ 0 & 1 - t^2 \end{bmatrix} \neq I \end{aligned}$$

Logo  $M(t)$  não pode ser matriz de transição de estado

#### Exemplo 14.20

Determine a matriz  $A$  do sistema cuja matriz de transição de estado é

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

Solução:

Pela propriedade (4) tem-se

$$\dot{\phi}(t)\phi(-t) = A$$

$$\begin{aligned} A &= \begin{bmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\cos t & -\sin t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \cos^2 t + \sin^2 t \\ -\cos^2 t - \sin^2 t & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Logo,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Para confirmar esse resultado, vamos recalcular  $\phi(t) = e^{At}$ :

$$\phi(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2 + 1} & \frac{1}{s^2 + 1} \\ \frac{-1}{s^2 + 1} & \frac{s}{s^2 + 1} \end{bmatrix}$$

A transformada  $\mathcal{L}$  inversa dessa última matriz resulta:

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$$

o que confere com os dados iniciais do problema.

## 14.10 Solução da equação de estado no domínio do tempo

Retomemos as equações de estado e de saída:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

$$y(t) = Cx(t) + Du(t)$$

A solução da equação de estado pode ser obtida com o auxílio da função auxiliar:

$$\psi(t) = e^{At}x(t)$$

onde, evidentemente,

$$\psi(0) = x(0) = x_0$$

Derivando  $\psi(t)$ :

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}\dot{x}(t)$$

Substituindo  $\dot{x}(t)$  pelo segundo membro da equação de estado

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = -Ae^{-At}x(t) + e^{-At}(Ax(t) + Bu(t))$$

ou

$$\frac{d}{dt}\psi(t) = e^{-At}Bu(t)$$

Integrando ambos os membros entre 0 e  $t$ .

$$\int_0^t d\psi(\tau) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

$$\psi(t) - \psi(0) = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

ou, pela própria definição de  $\psi(t)$

$$e^{-At}x(t) - x_0 = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

Finalmente, a solução da equação de estado pode ser escrita sob a forma:

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

E a equação de saída fica, então:

$$y(t) = C\left(e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau\right) + Du(t)$$

ou

$$y(t) = Ce^{At}x_0 + \left(Ce^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau + Du(t)\right)$$

Onde se identificam a resposta de entrada zero e a resposta de estado zero.

### Exemplo 14.21

Dada a equação de estado de um sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

com  $u(t) = 10$  para  $t \geq 0$  e

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}$$

determine  $x(t)$  para  $t \geq 0$ .

Solução:

Adotaremos a solução no domínio do tempo:

$$x(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau$$

A matriz de transição de estado  $e^{At}$  já calculada no Exemplo 14.1 é

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A primeira parcela é a solução de entrada zero:

$$x_L(t) = e^{At}x_0 = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-3t \\ -3 \end{bmatrix}$$

Já a solução de estado zero:

$$x_U(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} 1 & -\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} 10d\tau$$

$$\begin{aligned}x_U(t) &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \int_0^t \begin{bmatrix} -10\tau & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} d\tau = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5t^2 & 0 \\ 0 & 10t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5t^2 \\ 10t \end{bmatrix}\end{aligned}$$

A solução completa resulta:

$$x(t) = x_L(t) + x_U(t) = \begin{bmatrix} 2-3t+5t^2 \\ -3+10t \end{bmatrix}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 5t^2 - 3t + 2 \\ x_2(t) &= 10t - 3, \text{ para } t \geq 0\end{aligned}$$

### Exemplo 14.22

Dadas as equações de estado e de saída de um sistema.

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Determine:

- O polinômio característico e os polos do sistema.
- As matrizes de transição de estado  $\phi(s)$  e  $\phi(t)$ .
- A resposta  $y(t)$  do sistema, para  $u(t) = 0$  e  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ .
- O mesmo, para  $x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $u(t) = h(t)$  degrau unitário.
- O mesmo, para  $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$  e  $u(t) = h(t)$ .

Solução:

(a) Polinômio característico

$$\begin{aligned}\Delta = \det[sI - A] &= \det \begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ -1 & s+2 \end{bmatrix} = \\ s^2 + 4s + 3 &= (s+1)(s+3)\end{aligned}$$

Polos do sistema:  $s_1 = -1$ ,  $s_2 = -3$

(b) Matriz de transição de estado  $\phi(s)$  e  $\phi(t)$

$$\phi(s) = [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{\Delta} & \frac{-1}{\Delta} \\ \frac{1}{\Delta} & \frac{s+2}{\Delta} \end{bmatrix}$$

com  $\Delta = (s+1)(s+3)$

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{(s+1)(s+3)} = \frac{0,5}{s+1} - \frac{0,5}{s+3} \\ \mathcal{E}^{-1} \left\{ \frac{1}{\Delta} \right\} &= 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) \\ \frac{s+2}{\Delta} &= \frac{s+2}{(s+1)(s+3)} = \frac{0,5}{s+1} + \frac{0,5}{s+3} \\ \mathcal{E}^{-1} \left\{ \frac{s+2}{\Delta} \right\} &= 0,5(e^{-t} + e^{-3t})\end{aligned}$$

$$\therefore \phi(t) = \mathcal{E}^{-1}[sI - A]^{-1} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

(c) Resposta do sistema para  $u(t) = 0$  e estado inicial  $[1 \ -1]$ . No caso de entrada nula:

$$x(t) = e^{At} x_0 = \phi(t) x_0$$

No caso,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-3t} \\ -e^{-3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -e^{-3t} \end{bmatrix}$$

(d) Resposta para o caso de estado inicial nulo e entrada em degrau unitário.

A solução da equação de estado é dada pela expressão:

$$x(t) = e^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau$$

Calculemos inicialmente o núcleo da integral.

Note que para  $t > 0$ ,  $u(t) = 1$  (degrau unitário),  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  e a matriz de transição de estado:

$$e^{At} = \phi(t) = \begin{bmatrix} 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

O núcleo da integral será, então:

$$\begin{bmatrix} 0,5(e^{+\tau} + e^{+3\tau}) & 0,5(e^{+\tau} - e^{+3\tau}) \\ 0,5(e^{+\tau} - e^{+3\tau}) & 0,5(e^{+\tau} + e^{+3\tau}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0,5(e^{+\tau} - e^{+3\tau}) \\ 0,5(e^{+\tau} + e^{+3\tau}) \end{bmatrix}$$

E a solução da equação de estados:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) \\ 0,5(e^{-t} - e^{-3t}) & 0,5(e^{-t} + e^{-3t}) \end{bmatrix}$$

$$\int_0^t \begin{bmatrix} 0,5(e^{\tau} - e^{3\tau}) \\ 0,5(e^{\tau} + e^{3\tau}) \end{bmatrix} d\tau =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{-\tau} + e^{-3\tau}) & \frac{1}{2}(e^{-\tau} - e^{-3\tau}) \\ \frac{1}{2}(e^{-\tau} - e^{-3\tau}) & \frac{1}{2}(e^{-\tau} + e^{-3\tau}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^t - \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2}e^t + \frac{1}{6}e^{3t} - \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} + \frac{1}{6}e^{-3t} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{-t} \\ \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} \end{bmatrix}$$

(e) Como o sistema é linear, este caso é a superposição dos casos (c) e (d).

$$\bar{y}_1 = 0 + 1 - e^{-t} = 1 - e^{-t}$$

$$\bar{y}_2 = -e^{-3t} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{1}{6}e^{-3t} = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}e^{-t} - \frac{7}{6}e^{-3t}$$

para  $t \geq 0$

#### Observação

A solução desse problema foi encaminhada no domínio do tempo com a finalidade de ilustrar o procedimento. A solução no domínio da frequência nesse caso, entretanto, é mais rápida. Sugerimos ao leitor que tente esse caminho e compare os resultados.

## Considerações finais

Este capítulo começa fazendo uma revisão sobre alguns aspectos dos modelos matemáticos utilizados no estudo dos sistemas de controle. Até este ponto, utilizou-se preferencialmente como modelo a representação denominada ‘função de transferência’. Trata-se de um modelo muito útil, mas que apresenta alguns inconvenientes. Entre eles, o de ser limitado ao estudo dos sistemas lineares. A partir deste capítulo passamos a estudar um novo modelo, mais abrangente, denominado ‘modelo de estados’. Tal modelo utiliza certas variáveis do sistema denominadas variáveis de estado, que dão origem a dois grupos de equações: as equações de estado, que são equações diferenciais, e as equa-

ções de saída, que são algébricas. O modelo pode ser apresentado sob forma escalar ou vetorial (ou matricial) e permite uma representação muito conveniente por diagramas de blocos vetoriais. Embora o modelo de estados seja abrangente, o capítulo preocupa-se especialmente com o caso dos sistemas LIT. A solução das equações de estado, bem como a determinação da resposta a uma entrada qualquer, foi calculada primeiramente com o auxílio da transformação de Laplace, que é mais fácil de ser abordada. Na parte final do capítulo, foi, então, apresentada a solução das equações de estado inteiramente no domínio do tempo, com base na denominada notação de Bellman.

## Problemas propostos (3)

1.  $A$  e  $M$  são duas matrizes quadradas:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix} \quad M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine o polinômio característico  $Q_a(s)$  da matriz  $A$ .

- (b) Escreva e calcule o polinômio da matriz  $M$ , associado a  $Q_a(s)$ .  
(c) Calcule o polinômio característico  $Q_m(s)$  da matriz  $M$  e mostre que essa matriz satisfaz seu próprio polinômio característico (isto é, mostre que  $Q_m(M) = 0$ ).

2. Determine a matriz exponencial  $\varphi(\tau)$  referente às seguintes matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

3. Verifique se as matrizes abaixo indicadas podem ser matrizes de transição de estado. No caso afirmativo, determine a matriz  $A$  correspondente.

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} e^{-t} & e^{-2t} \\ e^{-t}-1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Phi_2 = \begin{bmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \sin(t)+1 \end{bmatrix}$$

$$\Phi_3 = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. São dadas as seguintes matrizes de transição de estado de dois sistemas:

$$(a) \Phi_a(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} & 0 \\ 0 & e^{-6t} \end{bmatrix}$$

$$(b) \Phi_b(t) = \begin{bmatrix} \cos(2t) & 0,5\sin(2t) \\ -2\sin(2t) & \cos(2t) \end{bmatrix}$$

Determine os polos de cada sistema.

5. Calcule, utilizando pelo menos 10 termos da série de definição, a matriz exponencial de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

#### Informação útil

Observe que  $A^3 = -I$ . Assim, com quatro termos, teremos:

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}t + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}\frac{t^2}{2} + \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\frac{t^3}{6} + \dots$$

6. Dado o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

- (a) Os autovalores da matriz  $A$  do sistema. O sistema é estável?

- (b) A resposta dos sistemas às condições iniciais:

$$x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- (c) A função de transferência do sistema.

7. Dado o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -24 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [1 \ 1] u(t)$$

sendo as condições iniciais  $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ , determine:

- (a) Os autovalores da matriz  $A$ . O sistema é estável?  
 (b) A matriz de transição de estado  $\Phi(s)$ .  
 (c) A função de transferência  $G(s)$ .  
 (d) A resposta às condições iniciais.

8. Considere as equações de estado e de saída do sistema a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine a resposta do sistema no caso em que  $x_0 = 0$  e  $u(t) = h(t)$  = degrau unitário.

9. Um sistema de entrada  $u(t)$  e saída  $y(t)$  é descrito pelas seguintes equações:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 16 \\ -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- (a) Calcule a matriz de transição de estado  $\Phi(s)$  desse sistema.  
 (b) Determine para esse sistema a função de transferência  $F(s) = Y(s)/U(s)$ .  
 (c) Determine a resposta  $y(t)$  do sistema para o caso de entrada zero ( $u(t) = 0$ ) e condições iniciais  $x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 0,5 \end{bmatrix}$ .

10. Considere o sistema a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad y = [1 \ 1] x(t)$$

- (a) Qual a resposta do sistema às condições iniciais  $x_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$ ?

- (b) Qual a resposta do sistema a um degrau unitário, supondo  $C.I. = 0$ ?

- (c) Qual a resposta do sistema a um degrau unitário, quando as condições iniciais forem as mesmas do item (a)?

- 11.** Considere as equações de estado e de saída de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Determine:

- (a) Os polos do sistema e faça sua representação no plano  $s$ .  
 (b) As matrizes de transição de estado  $\phi(s)$  no domínio da frequência e  $\phi(t)$ , no domínio do tempo.

- (c) A resposta do sistema para o caso de  $C.I. = u_1(t) = u_2(t) = b(t) = \text{degrau unitário.}$

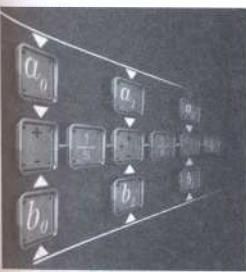
- 12.** A equação de estado de um sistema é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$\text{com } \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ para } t \geq 0$$

Determine a matriz de transição de estados  $\phi(t)$  resolva a equação de estados, no domínio do tempo, para  $C.I. = 0$ .

# capítulo 15



## Realimentação de estados

Como vimos no Capítulo 14, as variáveis de estado, contidas no vetor  $x$ , caracterizam-se por propriedades básicas que são traduzidas por um modelo matemático formado por duas equações vetoriais que se apresentam sob as formas:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, u) && \text{Equação de estado} \\ y &= g(x, u) && \text{Equação de saída} \end{aligned}$$

No caso dos sistemas lineares, em particular, as funções  $f$  e  $g$  passam a ser combinações lineares das variáveis  $x$  e  $u$  e podem ser apresentadas, respectivamente, sob a forma:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

e

$$y = Cx + Du$$

Sempre que o modelo matemático de um sistema puder ser apresentado sob essa forma, qualquer que seja o critério de escolha das variáveis  $x$ , estas serão, necessariamente, variáveis de estado. Já sabemos, inclusive, que há vários critérios clássicos recomendáveis para a escolha dessas variáveis. Por exemplo, as chamadas variáveis de estado de fase. Ou a escolha de variáveis que caracterizam as condições iniciais de um sistema. Qualquer que seja a escolha, porém, o número de variáveis será sempre igual à ordem do sistema.

No estudo que se segue consideraremos também apenas o caso de sistemas lineares.

### 15.1 Transformação linear das variáveis de estado

Veremos para o caso linear como as variáveis de estado que descrevem um sistema podem ser substituídas por outras, obtidas das primeiras por meio de uma transformação linear. Assim, o estado de um sistema pode ser descrito pelo vetor

$$x = x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

ou por um outro vetor

$$x' = x'(t) = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

desde que as novas variáveis ( $x'$ ) sejam uma combinação linear das antigas variáveis ( $x$ ):

$$\begin{aligned} x'_1 &= q_{11}x_1 + q_{12}x_2 + \cdots + q_{1n}x_n \\ x'_2 &= q_{21}x_1 + q_{22}x_2 + \cdots + q_{2n}x_n \\ &\vdots && \vdots && \vdots \\ x'_n &= q_{n1}x_1 + q_{n2}x_2 + \cdots + q_{nn}x_n \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Ou, ainda, sob forma compacta  $\dot{x}' = Qx$

onde  $Q$  é o operador matricial da transformação linear  $x \rightarrow x'$

$$Q = \begin{bmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13} & \cdots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & \cdots & q_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ q_{n1} & q_{n2} & q_{n3} & \cdots & q_{nn} \end{bmatrix}$$

Se a matriz  $Q$  for não singular, existirá a matriz inversa  $P = Q^{-1}$  que representaremos por

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

$P$  é o operador matricial da transformação linear  $x' \rightarrow x$

$$x = Px'$$

isto é

$$\begin{aligned} x_1 &= p_{11}x'_1 + p_{12}x'_2 + p_{13}x'_3 + \cdots + p_{1n}x'_n \\ x_2 &= p_{21}x'_1 + p_{22}x'_2 + p_{23}x'_3 + \cdots + p_{2n}x'_n \\ &\vdots && \vdots & \vdots \\ x_n &= p_{n1}x'_1 + p_{n2}x'_2 + p_{n3}x'_3 + \cdots + p_{nn}x'_n \end{aligned}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & p_{n3} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}$$

## 15.2 Transformação das equações de estado e de saída

Retomemos as equações de estado e de saída:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

Desejamos escrever essas equações em função de novas variáveis  $x'$ .

Considerando a transformação  $x' = Qx$  e sua inversa  $x = Px'$ , podemos escrever tais equações em função das novas variáveis:

$$\dot{x}' = APx' + Bu$$

$$y = CPx' + Du$$

Pré-multiplicando a primeira dessas equações pela inversa da matriz  $P$ , obtemos:

$$\dot{x}' = P^{-1}APx' + P^{-1}Bu$$

$$y = CPx' + Du$$

Esse resultado permite que se escrevam essas novas equações sob a forma

$$\dot{x}' = A'x' + B'u$$

$$y = C'x' + D'u$$

As equações de transformação das várias matrizes do sistema são, portanto, as seguintes:

$$A' = P^{-1}AP$$

$$C' = CP$$

$$B' = P^{-1}B$$

$$D' = D$$

A matriz de transmissão  $D$  não se altera nessa transformação.

A primeira das quatro equações de transformação apresentadas pode ser escrita na forma

$$AP = PA'$$

que é uma forma útil para estudos teóricos e para verificação auxiliar de resultados de cálculo às vezes trabalhosos.

O fato de que as novas variáveis  $x'$  satisfazem uma equação com a forma normal das equações de estado prova que essas variáveis se qualificam como variáveis de estado.

Uma importante propriedade relativa às transformações lineares das variáveis de estado é a que se refere à invariância dos autovalores da matriz  $A$  do sistema nessas transformações. Essa propriedade vem expressa pelo teorema:

*Os autovalores da matriz  $A$  são invariantes em uma transformação da forma  $P^{-1}AP$  em que  $P$  é matriz de uma transformação linear (compatível com as dimensões de  $A$ ).*

Seja  $A'$  a matriz resultante dessa transformação:  $A' = P^{-1}AP$ . O que o teorema diz é que os autovalores de  $A'$  são os mesmos de  $A$ . De fato, se  $A = PA'P^{-1}$ , podemos escrever para qualquer autovalor  $\lambda$  de  $A$ :

$$[\lambda I - A] = ([\lambda PP^{-1} - PA'P^{-1}]) = P(\lambda I - A')P^{-1}$$

Recordando que o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores, vem:

$$\det([\lambda I - A]) = \det(P) \det(\lambda I - A') \det(P^{-1})$$

Sendo a matriz  $P$  não singular (isto é, sendo  $\det(P) \neq 0$  e, consequentemente, também,  $\det(P^{-1}) \neq 0$ ), resulta que se  $\det([\lambda I - A]) = 0$ , isso implica, pela igualdade apresentada, ter-se, também,  $\det([\lambda I - A']) = 0$ . Logo, se  $\lambda$  é autovalor de  $A$ , será, necessariamente, também, autovalor de  $A'$ . Portanto, os autovalores de um sistema são independentes da escolha das variáveis de estado utilizadas na descrição do sistema.

### Exemplo 15.1

Dado o sistema cujo modelo de estados é descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0] \text{ e } D = 0$$

Determine as novas matrizes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  do sistema, resultantes da transformação de variáveis de estado definida pelas relações:

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= x_1 + x_2 \end{aligned}$$

Verifique também a invariância dos autovalores da matriz  $A$ .

Solução:

$$Q = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = P^{-1} \quad P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix}$$

Verificação:  $AP = PA'$

$$AP = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -12 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$PA' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -13 & 15 \\ -6 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Verificação da invariância dos autovalores:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s & -1 \\ 12 & s+7 \end{bmatrix} = s^2 + 7s + 12 = (s+3)(s+4)$$

$$\det(sI - A') = \det \begin{bmatrix} s+13 & -15 \\ 6 & s-6 \end{bmatrix} = (s+13)(s-6) + 90 = s^2 + 7s + 12$$

Observe que os polinômios característicos das duas matrizes são iguais. Logo, os autovalores serão os mesmos, a saber:  $s_1 = -3$  e  $s_2 = -4$ . Finalmente, calculemos as matrizes  $B'$  e  $C'$ :

$$B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = CP = [1 \ 0] \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = [1 \ -2]$$

### Exemplo 15.2

As equações de estado e de saída de um sistema linear são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Deseja-se representar esse sistema por meio das variáveis

$$x_1' = x_1 + x_2 \quad \text{e} \quad x_2' = x_1 - 2x_2$$

Determine as novas equações de estado e de saída.

Solução:

Sendo  $x' = Qx$  onde  $P = Q^{-1}$ , temos, neste caso:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

$$P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$$

$$A' = P^{-1}AP =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$$

Note que obtivemos a matriz do sistema diagonalizada, e os elementos da diagonal principal são os autovalores de  $A$ .

$$B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = CP = [1 \ 1] \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} = [1 \ 0]$$

As equações de estado e de saída do sistema descrito pelas variáveis de estado  $x'_1$  e  $x'_2$  são, respectivamente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 1,5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad \text{e}$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix}$$

No estudo dos sistemas, recorre-se às transformações de variáveis de estado, por vários motivos, como a simplificação dos cálculos ou da manipulação das matrizes, bem como a facilidade de pôr em evidência propriedades do sistema, efetuar a realimentação de estado etc.

Há dois tipos importantes de transformações de variáveis de estado, a saber:

(a) a transformação que diagonaliza a matriz  $A$  do sistema (ou seja, que transforma  $A$  em uma matriz  $A'$ , em que todos os elementos fora da diagonal principal são nulos).

(b) a transformação que resulta em uma matriz de uma das denominadas formas canônicas, que serão vistas adiante.

### 15.3 Matriz $A$ diagonalizada

Vamos estudar, nesta seção, como é constituída a matriz  $A'$  que resulta da transformação que diagonaliza a matriz do sistema. Adotaremos, neste caso, para a matriz diagonalizada, a notação  $A' = A_d$ .

Seja um sistema de ordem  $n$ , cuja matriz  $A$  possui os autovalores  $s_1, s_2, \dots, s_n$ , todos distintos entre si. (Diz-se que todos os autovalores são simples, ou que não há autovalores múltiplos, ou repetidos.)

Teremos, qualquer que seja a matriz  $A$

$$\det([sI - A]) = (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_n)$$

Por outro lado, sendo  $A' = A_d$  a matriz diagonalizada, obtida pela transformação

$$A_d = P^{-1}AP,$$

podemos escrever

$$A_d = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d \end{bmatrix}$$

Evidentemente, resulta

$$\det([sI - A_d]) = \begin{bmatrix} s - a & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s - b & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s - d \end{bmatrix} = (s - a)(s - b) \dots (s - d)$$

Conclui-se que  $a, b, \dots, d$  são os autovalores de  $A_d$ . Mas, como os autovalores não se alteram com a transformação de  $A$  em  $A_d$ , resulta, ainda:

$$a = s_1 \quad b = s_2 \quad \dots \quad d = s_n$$

o que significa que a matriz diagonalizada de um sistema tem como elementos da diagonal principal os autovalores da matriz  $A$  do sistema dado:

$$A_d = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & s_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & s_n \end{bmatrix}$$

**Exemplo 15.3**

Determinar a matriz diagonalizada que se obtém a partir das matrizes  $A_1$  e  $A_2$ .

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & -134 & 39 \\ 0 & -38 & 8 \\ 0 & -153 & 32 \end{bmatrix}$$

Solução:

Verifique que os polinômios característicos das duas matrizes são iguais a

$$s^3 + 7s^2 + 14s + 8$$

e, portanto, deles resultam os mesmos autovalores para as duas matrizes, a saber:  $-1$ ,  $-2$  e  $-4$ . Em consequência, a matriz diagonalizada que se obtém nos dois casos é a mesma:

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

**Observação**

A diagonalização é sempre possível nos casos em que os autovalores da matriz  $A$  são todos distintos. Se houver autovalores múltiplos, a diagonalização nem sempre é possível. Nesse caso, a forma que mais se aproxima da diagonalização é a denominada forma de Jordan (Ogata, 2003).

## 15.4 Diagonalização da matriz do sistema — autovetores

Sejam  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  as matrizes do modelo de estado de um sistema dado. Vamos agora determinar qual a transformação  $P$  capaz de diagonalizar a matriz  $A$  desse sistema. Digamos que as matrizes resultantes da diagonalização sejam  $A_d$ ,  $B'$  e  $C'$  (a matriz  $D$ , como sabemos, não se altera).

Admitiremos por simplicidade um sistema de 3ª ordem. A generalização dos resultados é simples e imediata.

As matrizes  $A$  e  $A_d$  são conhecidas. Resta determinar  $P$ :

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

Os vetores

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} \quad p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} \quad p_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix}$$

são as colunas da matriz  $P$  e permitem escrever:

$$P = [p_1 \ p_2 \ p_3]$$

Para determinar  $P$ , partimos da relação já estudada:

$$AP = PA_d$$

que, então, pode ser escrita

$$A[p_1 \ p_2 \ p_3] = [p_1 \ p_2 \ p_3] \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & s_2 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix}$$

Efetuando as multiplicações indicadas:

$$[Ap_1 \ Ap_2 \ Ap_3] = [s_1 p_1 \ s_2 p_2 \ s_3 p_3]$$

Sendo iguais as matrizes do primeiro e segundo membros, suas colunas devem ser respectivamente iguais:

$$\begin{aligned} Ap_1 &= s_1 p_1 & Ap_1 - s_1 p_1 &= 0 \\ Ap_2 &= s_2 p_2 & Ap_2 - s_2 p_2 &= 0 \\ Ap_3 &= s_3 p_3 & Ap_3 - s_3 p_3 &= 0 \\ && [A - s_1 I] p_1 &= 0 \\ &\text{ou ainda} & [A - s_2 I] p_2 &= 0 \\ && [A - s_3 I] p_3 &= 0 \end{aligned}$$

Todo vetor  $p_i$  (não nulo) que satisfaça à relação

$$[A - s_i I] p_i = 0$$

é denominado autovetor da matriz  $A$ , associado ao autovalor  $s_i$  dessa matriz. No caso, temos apenas  $i = 1, 2, 3$ , pois supusemos um sistema de 3ª ordem. Entretanto, a demonstração pode ser estendida a um sistema de ordem  $n$  qualquer.

**Conclusão:** A matriz  $P$  da transformação que diagonaliza a matriz  $A$  tem suas colunas formadas pelos autovetores (linearmente independentes) da própria matriz  $A$ .

## Observação:

Em geral, os autovetores não são únicos. Eles podem ser definidos de uma infinidade de maneiras. O que caracteriza os autovetores é sua direção no espaço de estado. Dois autovetores que têm a mesma direção são ditos linearmente dependentes.

### Exemplo 15.4

Determine os autovalores e dois autovetores (linearmente independentes) da matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \quad D = 0$$

Escreva também a matriz  $A_d$  e a matriz  $P$  da transformação  $A \rightarrow A_d$ , e determine as matrizes  $B'$  e  $C'$  resultantes da transformação.

Solução:

Autovetores de  $A$ :

$$\det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s+1 & +2 \\ -1 & s+4 \end{bmatrix} = \\ s^2 + 5s + 6 = (s+2)(s+3) = 0$$

Autovalores de  $s_1 = -2$  e  $s_2 = -3$

A matriz diagonalizada será, então:

$$A_d = \begin{bmatrix} s_1 & 0 \\ 0 & s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Autovetores:

Para  $s_1 = -2$

$$[s_1 I - A]p_1 = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-p_{11} + 2p_{21} = 0 \quad \text{ou} \quad p_{11} = 2p_{21}$$

Dessa equação matricial, resulta apenas uma equação (linearmente independente), a saber:

$$p_{11} = 2p_{21}$$

Há, portanto, uma infinidade de soluções (linearmente dependentes). Com exceção da solução trivial (isto é,  $p_{11} = 0$  e  $p_{21} = 0$ ), qualquer outra é permitida. Por exemplo,  $p_{21} = 1$  e  $p_{11} = 2$ . Assim, podemos escolher como primeiro autovetor:

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, com  $s_2 = -3$

$$[s_2 I - A]p_2 = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$-2p_{12} + 2p_{22} = 0$$

$$-p_{12} + p_{22} = 0$$

Mais uma vez, temos apenas uma equação independente:  $p_{12} = p_{22}$ .

Podemos escolher  $p_{12} = 1$  e  $p_{22} = 1$ .

$$p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

A matriz da transformação que diagonaliza a matriz  $A$  é, então:

$$P = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Pode-se fazer uma verificação do cálculo, pela condição

$$AP = PA_d$$

$$AP = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$PA_d = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}$$

Cálculos de  $B'$  e  $C'$ :

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B' = P^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C' = CP = \begin{bmatrix} 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \end{bmatrix}$$

### Exemplo 15.5

Escreva, para o circuito da Figura 15.1, as equações de estado, usando as correntes de malha como variáveis de estado. Calcule os autovalores e autovetores da matriz  $A$ , a matriz  $Q$  da transformação  $A \rightarrow A_d$  e escreva as novas equações de estado com o auxílio da matriz do sistema diagonalizada. Interprete o significado físico das novas variáveis de estado.

Solução:

Equações de análise de malhas:

$$1\dot{X}_1 + 2X_1 - 1\dot{X}_2 - 2X_2 = u(t)$$

$$3\dot{X}_2 + 4X_2 + 2X_1 + 1\dot{X}_2 - 1\dot{X}_1 - 2X_1 = 0$$

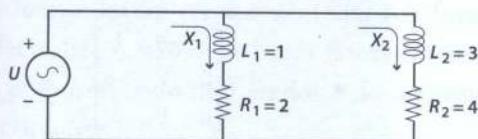
Reescrevendo

$$\dot{X}_1 + 2X_1 - 1\dot{X}_2 - 2X_2 = u(t)$$

$$-3\dot{X}_2 - 4X_2 - 2X_1 + 1\dot{X}_2 = 0$$

Somando as equações membro a membro:

$$3\dot{X}_2 + 4X_2 = u(t)$$

**Figura 15.1** Unidades S.I.

Somando quatro vezes a primeira com a segunda:

$$3\dot{x}_1 + 6x_1 - 2x_2 = 4u(t)$$

Resultam as equações de estado:

$$\dot{x}_1 = -2x_1 + \frac{2}{3}x_2 + \frac{4}{3}u(t)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{4}{3}x_1 + \frac{1}{3}u(t)$$

Sob forma vetorial, temos:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2/3 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s+2 & -2/3 \\ 0 & s+4/3 \end{bmatrix} = (s+2)(s+4/3) = 0$$

Autovalores  $s_1 = -2$  e  $s_2 = -4/3$

Portanto,

$$A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$

Autovetores

Para  $s_1 = -2$

$$[s_1 I - A]p_1 = \begin{bmatrix} 0 & -2/3 \\ 0 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resulta  $q_{11}$  qualquer e  $p_{21} = 0$ . Faremos  $p_{11} = 1$ . Logo

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para  $s_2 = -4/3$

$$[s_2 I - A]q_2 = \begin{bmatrix} 2/3 & -2/3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{12} \\ q_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resulta  $q_{12} = q_{22}$ . Faremos  $p_{12} = p_{22} = 1$ . Logo

$$p_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = [p_1 \ p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na nova representação, temos:

$$A_d = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4/3 \end{bmatrix}$$

$$B' = P^{-1}B \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

As novas variáveis relacionam-se com as antigas pela transformação:

$$x' = P^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$x'_1 = x_1 - x_2$$

$$x'_2 = x_2$$

$x'_1$  e  $x'_2$  podem ser interpretadas como correntes de ramo, no circuito dado. De fato, as novas equações podem ser postas sob a forma

$$\dot{x}'_1 = -2x'_1 + u(t) \quad \text{ou} \quad x'_1 + 2x'_1 = u(t)$$

$$\dot{x}'_2 = -4/3x'_2 + 1/3u(t) \quad \text{ou} \quad 3\dot{x}'_2 + 4x'_2 = u(t)$$

As duas últimas equações à direita são, claramente, equações de representação do circuito por correntes de ramos.

#### Observação

Note que quando se diagonaliza a matriz do sistema as variáveis de estado ficam desacopladas, isto é, em cada equação escalar de estado só comparece uma das variáveis de estado, além das variáveis de entrada.

Agora, um exemplo focalizando um sistema de 3ª ordem.

#### Exemplo 15.6

O modelo de estados de um sistema é descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 1 \ 1] \quad D = [0]$$

Escreva as equações desse sistema com as variáveis desacopladas.

Solução:

Para desacoplar as variáveis de estado, devemos diagonalizar a matriz  $A$  do sistema.

$$\det[sI - A] = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 0 & s+2 & -1 \\ 0 & -1 & s+3 \end{bmatrix} =$$

$$s(s^2 + 4s + 3) = s(s+1)(s+3)$$

Autovalores  $s_1 = 0$   $s_2 = -1$   $s_3 = -3$   
matriz  $A$  diagonalizada

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Cálculo dos autovetores

Primeiro autovetor:

$$[s_1 I - A] p_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resulta:  $p_{11}$  qualquer,  $p_{21} = 0$  e  $2p_{21} - p_{31} = 0$ . Das duas últimas equações resulta  $p_{21} = p_{31} = 0$ . Em consequência, fazendo  $p_{11} = 1$ , o primeiro autovetor será

$$p_1 = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ p_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Segundo autovetor:

$$[s_2 I - A] p_2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resulta:  $p_{12} + p_{22} = 0$  e  $p_{22} - p_{32} = 0$ . Fazendo  $p_{12} = -1$ , vem  $p_{22} = p_{32} = 1$  e, então:

$$p_2 = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ p_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Terceiro autovetor:

$$[s_3 I - A] p_3 = \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Resulta:  $3p_{13} + p_{23} = 0$  e  $p_{23} + p_{33} = 0$ . Fazendo  $p_{13} = 1$ , vem  $p_{23} = -3$  e  $p_{33} = 3$ .

$$p_3 = \begin{bmatrix} p_{13} \\ p_{23} \\ p_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}$$

A matriz  $P$  da transformação é:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix}$$

Determinação da matriz  $B'$ :

$$B' = P^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/6 & 1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 9 \\ 6 \\ -18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix}$$

Determinação da matriz  $C'$ :

$$C' = CP = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente, as equações de estado e de saída, com as variáveis desacopladas, são, respectivamente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \\ \dot{x}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 \\ -6 \\ -4 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

## 15.5 Outros casos de transformações

Além da apresentação das equações de estado com a matriz  $A$  sob forma diagonal, existem outros casos importantes de apresentação dessa matriz, especialmente para efeito de projetos baseados no modelo de estado dos sistemas. As mais importantes são as denominadas formas canônicas em duas versões: a forma canônica controlável e a forma canônica observável. São formas muito utilizadas em sistemas de entrada e saída únicas, sistemas esses que podem ter como modelo também a função de transferência. Apesar dessa restrição, entrada e saída únicas são casos importantes.

Vejamos a seguir como surgem esses dois formatos da matriz  $A$  dos sistemas, a partir das respectivas funções de transferências. Para esse estudo, é

importante lembrar que as funções de transferência dos sistemas devem ser apresentadas sob formas irreduzíveis, isto é, não deve haver fatores comuns entre os polinômios do numerador e do denominador dessas funções.

### ■ 15.5.1 Forma canônica controlável

Consideremos uma função de transferência de um sistema de 3<sup>a</sup> ordem de entrada  $u = u(t)$  e saída  $y = y(t)$ . A generalização para sistemas de ordem  $n$  qualquer pode ser depois facilmente intuída.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

A transformação para o modelo de estado pode ser feita da forma habitual, com o auxílio de uma variável  $X(s)$ , de forma a obter as variáveis de estado de fase:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(c_2 s^2 + c_1 s + c_0)X(s)}{(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)X(s)}$$

resultando, pela escolha adequada da variável auxiliar,

$$(s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0)X(s) = U(s)$$

$$Y(s) = (c_2 s^2 + c_1 s + c_0)X(s)$$

Utilizando a transformada inversa de Laplace e a escolha das variáveis de estado de fase:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -a_0 x_1 - a_1 x_2 - a_2 x_3 = u(t) \\ y(t) &= c_0 x_1 + c_1 x_2 + c_2 x_3\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

A lei de formação dessas matrizes é evidente.

Os elementos da última linha da matriz  $A$  são os coeficientes do polinômio característico da matriz, mas escritos em ordem inversa e com sinal trocado.

Os elementos imediatamente acima da diagonal principal são unitários.

Todos os demais elementos são nulos.

A matriz  $B$  tem apenas uma coluna, cujo último elemento é a unidade e os demais são nulos.

Finalmente, a matriz  $C$  tem apenas uma linha e é constituída pelos coeficientes do numerador da função de transferência original, em ordem inversa.

$$y(t) = [c_0 \ c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Essa forma de apresentação do modelo de estados é denominada *forma canônica controlável*. As variáveis de estado utilizadas são denominadas, como já sabemos, variáveis de estado de fase.

Um diagrama de blocos típico desse modelo canônico é o indicado na Figura 15.2.

### ■ 15.5.2 Forma canônica observável

Há, ainda, a forma canônica observável. Essa forma é útil no projeto dos sistemas denominados observadores de estados. Por isso, a forma canônica observável também é importante. Para estudar os observadores,

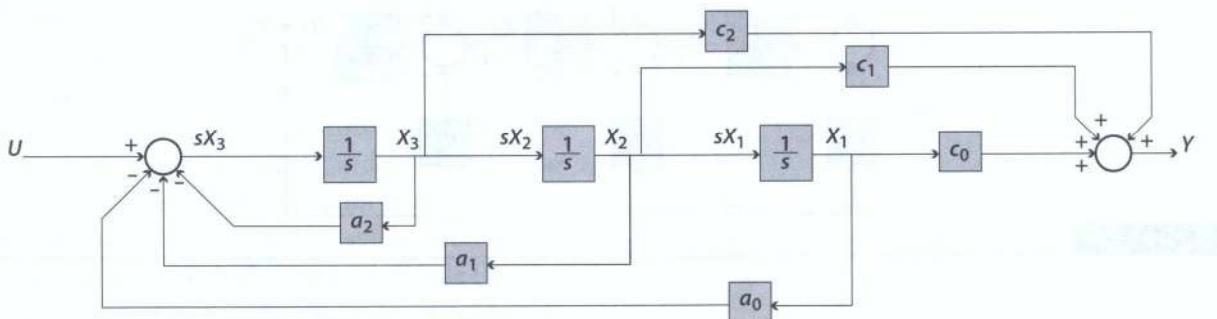


Figura 15.2

consideraremos o mesmo ponto de partida do caso anterior. Apenas por conveniência, contudo, faremos uma alteração na notação do numerador da função de transferência adotada:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_2 s^2 + b_1 s + b_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0} = \frac{b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}}{1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}}$$

Por multiplicação cruzada, obtemos:

$$(1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}) Y(s) = \\ (b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}) U(s)$$

Escolhe-se  $X_1(s) = Y(s)$ , e, então:

$$(1 + a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}) X_1(s) = \\ (b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}) U(s)$$

ou

$$X_1 = -(a_2 s^{-1} + a_1 s^{-2} + a_0 s^{-3}) X_1 + \\ (b_2 s^{-1} + b_1 s^{-2} + b_0 s^{-3}) U$$

ou, ainda:

$$sX_1 = -a_2 X_1 - \underbrace{(a_0 s^{-1} + a_1 s^{-2}) X_1}_{X_2} + (b_0 s^{-1} + b_1 s^{-2}) U + b_2 U$$

$$sX_2 = -a_1 X_1 - \underbrace{a_0 s^{-1} X_1}_{X_3} + b_0 s^{-1} U + b_1 U$$

Finalmente, resulta:

$$sX_1 = -a_2 X_1 + X_2 + b_2 U \quad \dot{x}_1 = -a_2 x_1 + x_2 + b_2$$

$$sX_2 = -a_1 X_1 + X_3 + b_1 U \quad \dot{x}_2 = -a_1 x_1 + x_3 + b_1$$

$$sX_3 = -a_0 X_1 + b_0 U \quad \dot{x}_3 = -a_0 x_1 + b_0 U$$

e a equação de saída

$$Y(s) = X_1(s) \quad y(t) = x_1$$

Vetorialmente, resulta:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Essa é a *forma canônica observável* para um sistema escalar de 3ª ordem e pode ser facilmente generalizado para um sistema de ordem qualquer. Na forma da matriz  $A$ , a primeira coluna é formada pelos coeficientes do polinômio característico do sistema, com sinal trocado, e em ordem crescente do índice baixo para cima, os elementos imediatamente acima da diagonal principal são unitários e todos os demais elementos são nulos.

Um diagrama de blocos típico desse modelo canônico é o indicado na Figura 15.3.

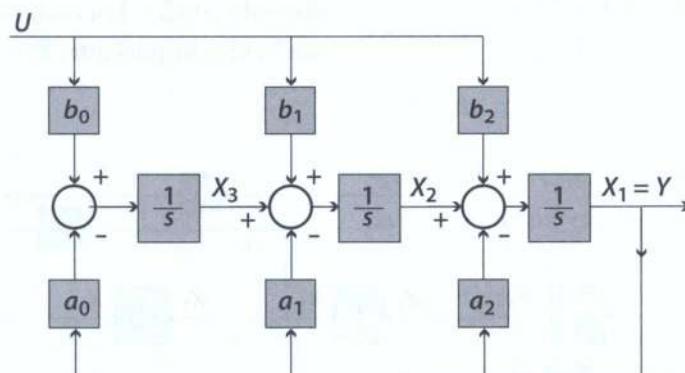


Figura 15.3

## 15.6 Controlabilidade e observabilidade

Um dos objetivos relevantes do controle moderno baseado no modelo de estados é o projeto de sistemas a multivariáveis. A obtenção de tais controles está vinculada aos conceitos de controlabilidade e de observabilidade dos sistemas.

### ■ 15.6.1 Controlabilidade

No modelo de entrada e saída, isto é, nos modelos que utilizam a função de transferência, o controle do sistema é habitualmente obtido via realimentação da variável de saída. No modelo de estado, podem-se realimentar as variáveis de estado, o que permite modificar o comportamento de sistema de forma muito mais efetiva. De fato, por meio da realimentação de estado, é possível, teoricamente, reallocar os polos do sistema para posições que deem ao sistema o comportamento mais apropriado para a finalidade desejada (maior rapidez, sobressinal adequado, tempo de acomodação desejado etc.). Na prática, há apenas limitações de ordem física, pois para que o sistema tenha transatório mais rápido, por exemplo, é necessário dispor de maior potência de acionamento, o que pode ser ou não viável. De qualquer forma, para que todos os polos possam ser deslocados por realimentação de estado para posições convenientes, é necessário que o sistema seja completamente controlável. Essa propriedade denomina-se controlabilidade e depende essencialmente das matrizes do sistema (matriz  $A$ ) e de entrada (matriz  $B$ ).

Uma definição formal de controlabilidade pode ser a seguinte:

Um sistema se diz completamente controlável em um certo instante  $t_0$  se for possível, por meio de um vetor de entrada adequado, transferir o sistema de qualquer estado inicial  $x(t_0)$  para outro estado dado arbitrariamente, em tempo finito.

Para isso, é necessário que se exerça controle sobre todas as variáveis de estado do sistema. Então, diz-se que o sistema é completamente controlável.

Prova-se que para que um sistema de ordem  $n$  seja completamente controlável, a denominada matriz de controlabilidade ( $M_c$ ) deve ter posto  $n$  (pleno), ou seja, deve ter  $n$  linhas (ou colunas) linearmente independentes. Se a matriz de controlabilidade for quadrada, isso equivale a seu determinante ser diferente de zero.

A matriz de controlabilidade tem a forma:  
 $M_c = [B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B]$ .

#### Exemplo 15.7

Calcule a matriz de controlabilidade do sistema e verifique se ele é completamente controlável.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Solução:

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad e$$

$$\det(M_c) = [B \ AB] = \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

O sistema é de 2ª ordem, mas o posto da matriz  $M_c$  é inferior a 2. Logo, o sistema não é completamente controlável.

Existe uma forma alternativa de se determinar se o sistema é ou não completamente controlável que consiste em diagonalizar a matriz do sistema. Se depois da transformação do sistema uma das linhas do novo vetor de entrada  $B'$  for nula, o sistema não é completamente controlável. Vê-se claramente, dessa forma, que uma variável fica fora de controle, quer diretamente pela entrada  $u(t)$ , quer por outra variável de estado.

No Exemplo 15.7, a matriz de transformação para diagonalização da matriz do sistema é:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad e \text{ sua inversa} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix}$$

Resulta:

$$B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

e, finalmente,

$$\begin{bmatrix} \dot{x}'_1 \\ \dot{x}'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$$

Devido à linha nula na matriz  $B'$  conclui-se que o sistema não é completamente controlável. De fato,

$$\dot{x}'_1 = x'_1$$

$$\dot{x}'_2 = -x'_2 + u(t)$$

Vê-se claramente que a variável  $x'_1$  não é controlada, nem diretamente pela entrada  $u(t)$  nem pela outra variável de estado.

### Exemplo 15.8

Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- (a) Verifique por meio da matriz de controlabilidade se o sistema é completamente controlável.
- (b) Desenhe um diagrama de blocos do sistema (entrada  $u$  e saída  $y$ ) e verifique se, por meio desse diagrama, pode ser confirmada ou não a conclusão do item anterior.
- (c) Essa conclusão poderia ter sido obtida diretamente por simples observação das equações dadas inicialmente? Explique.

Solução:

Sistema de 3ª ordem:

$$AB = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad A^2B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$M_c = [B \ AB \ A^2B] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

$\det(M_c) = -2 \neq 0 \rightarrow$  Sistema completamente controlável

(b) Das equações de estado e de saída, obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u(t) & sX_1(s) &= U(s) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u(t) & sX_2(s) &= -X_2(s) + U(s) \\ \dot{x}_3 &= -2x_3 + u(t) & sX_3(s) &= -2X_3(s) + U(s) \end{aligned}$$

Pelo diagrama da Figura 15.4 torna-se evidente que todas as variáveis podem ser controladas pela entrada  $U(s)$ .

(c) O resultado pode ser constatado diretamente pela simples inspeção da equação de estado, pois ela já foi dada com a matriz  $A$  diagonalizada, e todas as linhas do vetor  $B$  são não nulas.

As matrizes de controlabilidade têm, ainda, uma propriedade interessante, útil no projeto de controladores, como veremos posteriormente.

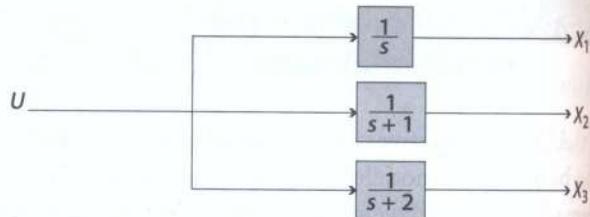


Figura 15.4

Vamos supor agora que se deseja transformar o modelo de um sistema totalmente controlável (de entrada e saída únicas) dado por,

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

em outro, cujas matrizes  $A'$  e  $B'$  são dadas arbitrariamente (mas mantendo os mesmos autovalores de  $A$ ):

$$\dot{x}' = A'x' + B'u$$

$$y = Cx' + Du$$

Sejam, ainda,  $M_c = [B \ AB \ A^2B \ ...]$  e  $M'_c = [B' \ A'B' \ A'^2B' \ ...]$  as matrizes de controlabilidade respectivamente dos dois sistemas. Demonstra-se (Nise, 2002) que a matriz  $P$  da transformação  $A \rightarrow A'$  pode ser obtida pela expressão

$$P = M_c (M'_c)^{-1}$$

### Exemplo 15.9

Determine a matriz de transformação do sistema indicado a seguir, para o modelo de estado na forma canônica controlável.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Solução:

A função de transferência dessa função é:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 6}$$

Sistema dado:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix} = s^2 + 5s + 6$$

No modelo canônico do controlador, teremos, então:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$M_c = [B \ AB] = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$M'_c = [B' \ A'B'] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \quad M'^{-1}_c = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz  $P$  da transformação e sua inversa:

$$P = M_c (M'_c)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{e } P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Comprovação de que a matriz  $P$  calculada transforma a matriz  $A$  dada inicialmente, na matriz  $A'$  da forma canônica controlável:

$$A' = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & -5 \end{bmatrix}$$

Vejamos a matriz  $B'$ :

$$B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Calculemos a nova matriz de saída:

$$C' = CP = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = [0 \ 1]$$

Note que os resultados conferem com a função de transferência do sistema.

Relação entre as novas e as antigas variáveis:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

## ■ 15.6.2 Observabilidade

Analogamente ao conceito de controlabilidade que acabamos de examinar existe outro conceito, de

certa forma complementar ao primeiro, que é o de observabilidade. Trata-se de um conceito muito importante porque, na prática, uma das dificuldades de se implementar o controle por realimentação de estado é o fato de que algumas das variáveis de estado do sistema não são acessíveis, ou as possibilidades de acesso são economicamente desvantajosas, ou o sinal do sensor é por demais corrompido por ruídos, ou a resposta do sensor é muito lenta etc. Resulta daí a necessidade de se estimar tais variáveis para poder realizar a realimentação. Essa reconstituição das variáveis de estado de um sistema é possível somente se o sistema for observável. A estimativa das variáveis de estado de um sistema é obtida por meio de um sistema denominado observador de estado.

Um sistema se diz completamente observável quando os valores de todas as variáveis de estado puderem ser determinados através das variáveis de saída e de entrada do sistema.

Uma definição formal de observabilidade pode ser a seguinte:

Um sistema é completamente observável no instante  $t_0$  se for possível determinar o estado  $x(t_0)$  a partir da observação da entrada  $u(t)$  e da saída  $y(t)$  durante um intervalo de tempo finito a partir de  $t_0$ .

Prova-se que para que um sistema de ordem  $n$  seja completamente observável, a denominada matriz de observabilidade

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

deve ter posto  $n$  (pleno), ou seja, deve ter  $n$  linhas (ou colunas) linearmente independentes. Se a matriz de observabilidade for quadrada, isso equivale a seu determinante ser diferente de zero.

### Exemplo 15.10

Dado o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Verifique por meio da matriz de observabilidade se o sistema é completamente observável.

Solução:

$$CA = [1 \ 0] \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -4 & -1 \end{bmatrix} = [-1 \ 1]$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(M_{ob}) = \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = 1 \neq 0$$

sistema completamente observável

### Exemplo 15.11

Verifique, por meio da matriz de observabilidade, se o sistema indicado pelo diagrama de blocos da Figura 15.5 é ou não completamente observável.

Solução:

Equações de estado:

$$X_1 = \frac{1}{s+6} X_2 \quad \text{ou} \quad sX_1 = -6X_2 + X_2$$

e, pela transformada inversa:

$$\dot{X}_1 = -6x_1 + x_2$$

Analogamente, obtém-se:

$$\dot{X}_2 = -4x_2 + x_3$$

$$\dot{X}_3 = -2x_3 + u$$

Saída:

$$Y = 10(s+1)x_1$$

$$y(t) = 10\dot{x}_1 + 10x_1 = 10(-6x_1 + x_2) + 10x_1$$

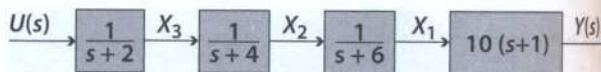
ou

$$y(t) = -50x_1 + 10x_2$$

Vetorialmente:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$



**Figura 15.5**

Cálculo da matriz de observabilidade:

$$CA = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 300 & -90 & 10 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} -6 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 36 & -10 & 1 \\ 0 & 16 & -6 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 300 & -90 & 10 \\ -1800 & 660 & -110 \end{bmatrix}$$

$\det(M_{ob}) = -1500 \neq 0$  sistema completamente observável.

Também aqui existe uma forma alternativa de se determinar se o sistema é ou não completamente observável. Consiste em diagonalizar a matriz do sistema e verificar se depois da transformação do sistema a nova matriz de saída  $C'$  possui uma ou mais colunas nulas. Se nenhuma coluna for nula, o sistema é completamente observável. Caso contrário, é não-completamente observável.

### Exemplo 15.12

Dado o sistema indicado pelas matrizes abaixo

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2,5 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \quad D = [0]$$

Verifique, pela transformação de diagonalização da matriz  $A$ , se o sistema é ou não completamente observável.

Solução:

Os autovalores de  $A$  são:

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -1 \quad \lambda_3 = -2$$

A matriz  $P$  de transformação, no caso, é a matriz de Vandermonde. Temos, então:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1,5 & 0,5 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0,5 & 0,5 \end{bmatrix}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \quad B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 0,5 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C' = CP = [1 \ 1 \ 0]$$

A matriz  $C'$  tem uma coluna nula. O sistema é, pois, não observável. Mas note, ainda, que a matriz  $B'$  tem uma linha nula. Então, o sistema é não controlável e não observável.

Um diagrama de blocos (Figura 15.6) foi construído para o sistema diagonalizado, a partir das equações escalares:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 0,5u(t) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + 2u(t) \\ \dot{x}_3 &= -2x_3\end{aligned}$$

Note que o diagrama de blocos do sistema diagonalizado mostra que a variável  $x'_3$  não é nem observável nem controlável.

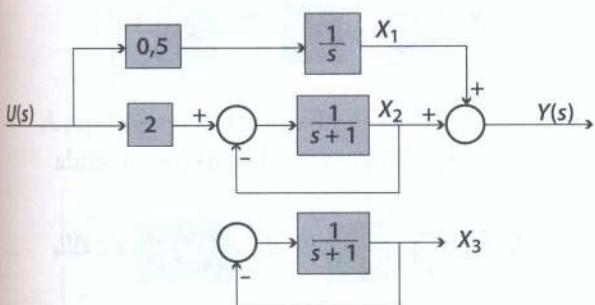
As matrizes de observabilidade têm, ainda, uma propriedade interessante, útil no projeto de observadores de estado, como veremos posteriormente.

Vamos supor agora que se deseja transformar o modelo de um sistema totalmente observável (de entrada e saída únicas), dado por:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

em outro, cujas matrizes  $A'$  e  $B'$  são dadas arbitrariamente (mas mantendo os mesmos autovalores de  $A$ ):

$$\begin{aligned}\dot{x}' &= A'x' + B'u \\ y &= C'x' + Du\end{aligned}$$



Sejam, ainda,

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad M'_{ob} = \begin{bmatrix} C' \\ C'A' \\ C'A'^2 \\ \vdots \\ C'A'^{n-1} \end{bmatrix}$$

as matrizes de observabilidade, respectivamente, dos dois sistemas. Demonstra-se (Nise, 2002) que a matriz  $P$  da transformação  $A \rightarrow A'$  pode ser obtida pela expressão:

$$P = (M_{ob})^{-1} M'_{ob}$$

### Exemplo 15.13

Determine a matriz de transformação do sistema indicado a seguir para o modelo de estado na forma canônica observável.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = [1 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Esse sistema é o mesmo do Exemplo 15.9.

Solução:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 2]$$

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -5 & -7 \end{bmatrix}$$

$$(M_{ob})^{-1} = \begin{bmatrix} -2,3333 & -0,6667 \\ 1,6667 & 0,3333 \end{bmatrix}$$

Polinômio característico:

$$\det(sI - A) = \det \begin{bmatrix} s+1 & -1 \\ 2 & s+4 \end{bmatrix} = s^2 + 5s + 6$$

Na forma canônica observável, teremos, então:

$$A' = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix} \quad C' = [1 \ 0]$$

$$M'_{ob} = [C' \ C'A'] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

Figura 15.6

Matriz  $P$  da transformação e sua inversa:

$$P = (M_{ob})^{-1} M'_{ob} =$$

$$\begin{bmatrix} -2,3333 & -0,6667 \\ 1,6667 & 0,3333 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -0,6667 \\ 0 & 0,3333 \end{bmatrix}$$

e

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Comprovação de que a matriz  $P$  calculada transforma a matriz  $A$  dada inicialmente, na matriz  $A'$  da forma canônica observável:

$$A' = P^{-1}AP =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -0,6667 \\ 0 & 0,3333 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -6 & 0 \end{bmatrix}$$

Vejamos a matriz  $B'$ :

$$B' = P^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Calculemos a nova matriz de saída:

$$C' = CP = [1 \ 2] \begin{bmatrix} 1 & -0,6667 \\ 0 & 0,3333 \end{bmatrix} = [1 \ 0]$$

Como já sabemos, a função de transferência desse sistema é:

$$G(s) = \frac{s}{s^2 + 5s + 6}$$

o que confirma a exatidão dos resultados obtidos.

Relação entre as novas e as antigas variáveis:

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{bmatrix} = P^{-1}x = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \text{ isto é}$$

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + 2x_2 \\ x'_2 &= 3x_2 \end{aligned}$$

## 15.7 Realimentação de estados

Os projetos de controladores desenvolvidos no Capítulo 13 utilizam como base o modelo do

sistema representado pela função de transferência. Tais projetos utilizam técnicas geralmente denominadas clássicas ('lugar das raízes' e 'resposta em frequência').

Já projetos baseados no modelo de estado realimentam as variáveis de estado do sistema, o que permite deslocar os polos para quaisquer posições no plano  $s$ , de forma que o comportamento dinâmico do sistema possa ter, em princípio, o desempenho que se desejar. Limitações de ordem física, como a potência de acionamento disponível, podem limitar a escolha da dinâmica desejável para o sistema.

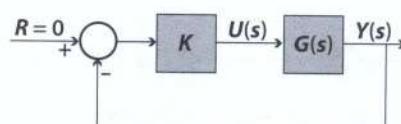
Uma forma de projeto de controladores baseados no modelo de estados denomina-se projeto por relocação ou de atribuição de polos, que são os autovalores da matriz  $A$ .

Estudaremos neste curso apenas o projeto para sistemas escalares, isto é, para sistemas com apenas uma entrada e uma saída: assim,  $u(t)$  e  $y(t)$  são grandezas escalares.

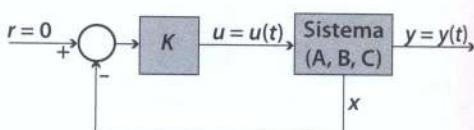
No caso de sistema dotado de realimentação de estado, temos as equações apresentadas a seguir (Tabela 15.1 e Figura 15.7).

**Tabela 15.1**

Equação de estado	$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$
Equação de saída	$y(t) = Cx(t)$ (na prática, $D=0$ )
Lei da realimentação (linear)	$u(t) = K[r(t) - x(t)]$



(a) Realimentação da variável de saída



(b) Realimentação de estado

**Figuras 15.7**

Note que a matriz  $D$  representa uma ligação direta para a saída em todas as frequências. Na prática, sempre existirá um efeito de filtragem e, portanto, a matriz  $D$  é nula.

Detalhando a lei da realimentação para um sistema de ordem  $n$ , temos

$$u = -[k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{bmatrix}$$

sendo  $r$  a variável de referência do sistema e  $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$  a matriz de realimentação das variáveis de estado do sistema. Projetar um controlador para o sistema é determinar a matriz de realimentação  $K$  capaz de alocar os polos do sistema em malha fechada que satisfaça as especificações relativas à dinâmica desse sistema.

Um dos problemas frequentes que ocorrem para implementar a realimentação de estado é que nem sempre as variáveis de estado estão diretamente disponíveis ou são de fácil acesso para a realimentação. Nesses casos, usa-se um observador de estado, conforme veremos posteriormente.

Consideraremos, inicialmente, o sistema dado sob forma canônica controlável. Dessa forma, o modelo de estado pode ser reconhecido pela própria função de transferência do sistema.

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{c_2 s^2 + c_1 s + c_0}{s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0}$$

A representação de estado é:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [c_0 \ c_1 \ c_2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Veremos a seguir como se processa um projeto de atribuição de polos por realimentação de estado, a partir da forma canônica controlável.

## 15.8 Projeto de controladores

Seja um sistema dado pelas equações de estado e de saída em malha aberta, isto é, antes de se estabelecer a realimentação de estado.

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned}$$

A lei de realimentação é:

$$u(t) = K[r(t) - x(t)]$$

Como a entrada de referência não contribui para a localização dos polos, ela será desconsiderada para fins de projeto.

$$u(t) = -Kx(t)$$

Substituindo  $u(t)$  na equação de estado pela expressão anteriormente apresentada, vem:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + B(-Kx(t)) \\ \dot{x}(t) &= [A - BK]x(t) \end{aligned}$$

A matriz  $A_f$

$$A_f = [A - BK]$$

é a matriz do sistema de malha fechada (isto é, já dotada da realimentação de estado).

A matriz de entrada  $B$  não se altera. Podemos escrever  $B_f = B$ .

Vamos considerar, inicialmente, que as matrizes  $A$  e  $B$  de malha aberta estejam na forma canônica controlável. Nesse caso, a matrizes  $A_f$  e  $B_f$  também estarão nessa forma canônica, como se verá.

De fato, isso pode ser verificado facilmente, sem prejuízo da generalidade, utilizando-se um sistema de 3ª ordem:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

Nessa forma da matriz  $A$ , a última linha é formada pelos coeficientes do polinômio característico do sistema de malha aberta, com sinal trocado e em ordem inversa. O polinômio característico nesse caso é, então:

$$\rho_a(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

Substituindo-se  $u$ , expresso de acordo com a lei da realimentação

$$u(t) = -Kx(t)$$

resulta:

$$[A - BK] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \end{bmatrix} =$$

$$A_f = [A - BK] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -(k_1 + a_0) & -(k_2 + a_1) & -(k_3 + a_2) \end{bmatrix}$$

Sendo a matriz  $A_f$  do sistema de malha fechada apresentada na forma canônica controlável, a última linha dessa matriz também é constituída pelos do polinômio característico do sistema em malha fechada:

$$\rho_f(s) = s^3 + f_2s^2 + f_1s + f_0$$

e a matriz  $A_f$  pode ser escrita

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -f_0 & -f_1 & -f_2 \end{bmatrix}$$

Comparando as duas últimas expressões do polinômio  $\rho_f$  e igualando os coeficientes de mesma potência em  $s$ , podemos determinar facilmente os coeficientes  $k_i$  da matriz de realimentação de estado do sistema:

$$f_0 = (a_0 + k_1) \longrightarrow k_1 = f_0 - a_0$$

$$f_1 = (a_1 + k_2) \longrightarrow k_2 = f_1 - a_1$$

$$f_2 = (a_2 + k_3) \longrightarrow k_3 = f_2 - a_2$$

Generalizando para o caso sistemas de ordem  $n$ , temos:

$$k_i = f_{i-1} - a_{i-1} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

Vejamos alguns exemplos.

Consideremos, em primeiro lugar, um exemplo com referência nula ( $r(t) = 0$ ). Nesse caso, simplesmente, o estado inicial tende a zero (se o sistema for estável). A alocação de polos pode servir para formar e tornar mais rápidos os transitórios.

#### Exemplo 15.14

Dado o sistema do diagrama de blocos da Figura 15.8, onde estão indicadas as variáveis de estado de fases  $x_1$  e  $x_2$ , bem como o estado inicial:

$$x_0 = \begin{bmatrix} x_{01} \\ x_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ sendo inicialmente } u(t) = 0.$$

(a) Determine para esse sistema as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do modelo de estado na forma canônica controlável.

(b) Por meio de realimentação das variáveis de estado (Figura 15.9), obtenha a matriz  $K$  para que os polos do sistema sejam alocados nas posições  $s_{1,2} = -8 \pm j8$ .

(c) Complete o diagrama de blocos inicial mostrando as realimentações das variáveis de estado resultantes do projeto do controlador.

Solução:

(a) Função de transferência do sistema dado

$$G(s) = \frac{2s+1}{s^2+6s+8}$$

Forma canônica controlável

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 2] \quad D = 0$$

(b) Cálculo do controlador  $K$ .

Polinômio característico de malha aberta  $\rho_a = s^2 + 6s + 8$ . Logo,  $a_0 = 8$  e  $a_1 = 6$ .

Polinômio de malha fechada

$$\rho_f = (s + 8 - j8)(s + 8 + j8) = s^2 + 16s + 128.$$

Logo,  $b_0 = 128$  e  $b_1 = 16$ .

Resulta:  $k_1 = b_0 - a_0 = 128 - 8 = 120$  e  $k_2 = b_1 - a_1 = 16 - 6 = 10$ . Finalmente,

$$K = [k_1 \ k_2] = [120 \ 10]$$

(c) O diagrama de blocos escalar evidenciando a realimentação das variáveis de estado bem como o diagrama vetorial, está indicado nas figuras 15.9 e 15.10, respectivamente.

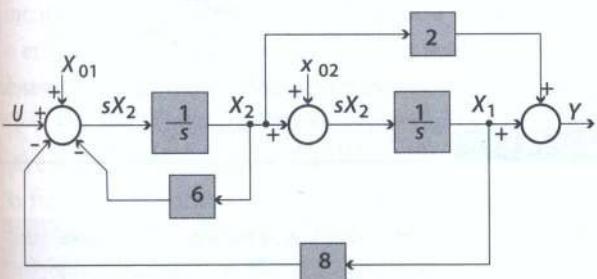


Figura 15.8

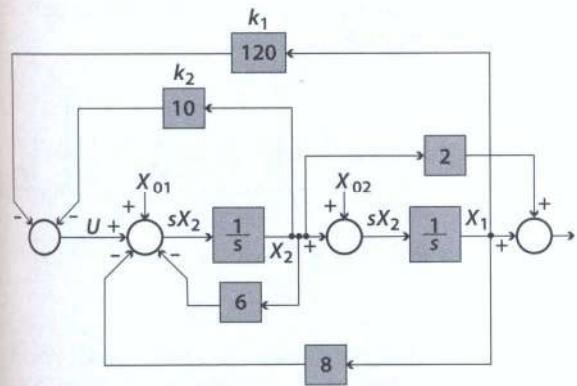


Diagrama de blocos escalar do sistema (Exemplo 15.14), com realimentação de estados.

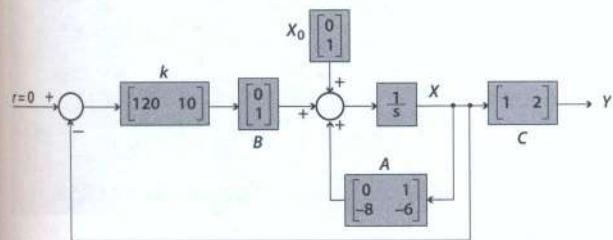


Diagrama de blocos vetorial do sistema (Exemplo 15.14), com realimentação de estados.

### Exemplo 15.15

Dado o sistema cuja função de transferência é

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$

- (a) Determine para esse sistema as matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  do modelo de estados, usando variáveis de estado de fase.
- (b) Por meio de realimentação das variáveis de estado, obtenha a matriz  $K$  para que os

polos do sistema sejam alocados nas posições  $s_{1,2} = -10 \pm j10$  e  $s_3 = -10$ . Determine também a matriz do sistema de malha fechada  $A_f$ .

(c) Deseja-se que a realimentação de estado seja feita de maneira que o sistema acompanhe um sinal constante de referência (para  $t \geq 0$ ). Desenhe os diagramas de blocos pertinentes e calcule o erro estacionário que se obtém.

Solução:

(a) Ver Figura 15.11.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+5)} = \frac{1}{(s^3 + 8s^2 + 17s + 10)}$$

Forma canônica controlável:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & -17 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

(b)

Polinômio característico de malha aberta:

$$p_o = s^3 + 8s^2 + 17s + 10$$

$$a_0 = 10 \quad a_1 = 17 \quad a_2 = 8$$

Polinômio característico de malha fechada:

$$p_f = (s+10)(s+10-j10)(s+10+j10)$$

ou

$$p_f = s^3 + 30s^2 + 400s + 2000$$

A matriz do sistema de malha fechada será, então:

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2000 & -400 & -30 \end{bmatrix}$$

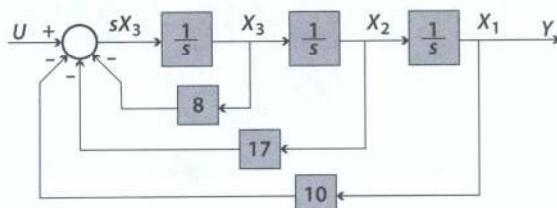


Figura 15.11 Sistema em malha aberta (sem realimentação de estado).

Finalmente,

$$f_0 = 2000 \quad f_1 = 400 \quad f_2 = 30$$

e

$$k_1 = f_0 - a_0 = 2000 - 10 = 1990$$

$$k_2 = f_1 - a_1 = 400 - 17 = 383$$

$$k_3 = f_2 - a_2 = 30 - 8 = 22$$

A matriz  $K$  de realimentação de estado será, então:

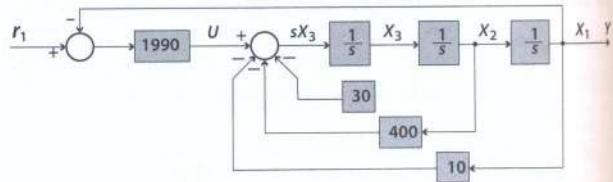
$$K = [k_1 \ k_2 \ k_3] = [1990 \ 383 \ 22] \quad (c)$$

Nos sistemas em que se deseja que as variáveis de estado sigam entradas de referência, é conveniente que se tenha realimentação unitária, como indicado na Figura 15.12.

Neste exemplo, desejamos apenas que a saída, que coincide com a variável  $x_1$ , siga o degrau unitário  $r_1$  de referência, com erro estacionário mínimo. Então, podemos fazer  $r_2 = 0$  e  $r_3 = 0$ . O diagrama de blocos da Figura 15.13 mostra essa configuração. O diagrama da Figura 15.14 mostra apenas uma simplificação, com redução dos ramos de realimentação.

#### Observação

As variáveis de estado de um sistema são interdependentes. Por exemplo, se  $x_1$  designar a posição de um móvel e  $x_2$  a velocidade,  $x_2$  será



Sistema em malha fechada (com realimentação de estado), equivalente ao da Figura 15.13.  $r_1 = h(s) = \text{degrau unitário}$ ;  $r_2 = 0$ ;  $r_3 = 0$  e  $Y = X_1$ .

a derivada de  $x_1$ ; a mesma relação deverá existir entre as respectivas referências:  $r_2$  deverá ser a derivada de  $r_1$ ; assim, por exemplo, se  $r_1$  for constante,  $r_2$  deverá ser igual a zero).

Do diagrama de blocos da Figura 15.14 obtemos o modelo de estado do sistema de malha fechada:

$$A_f = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2000 & -400 & -30 \end{bmatrix}$$

$$B_f = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1990 \end{bmatrix} \quad C_f = [1 \ 0 \ 0]$$

Reduzindo ainda as malhas internas do último diagrama, obtemos o que aparece na Figura 15.15.

A partir desse diagrama, calcula-se facilmente o erro estacionário devido a um degrau unitário de referência:

$$K_p = K_g = \frac{1990}{10} = 199$$

$$\epsilon_{stp} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{200} = 0,005$$

O erro estacionário de posição é de 0,5%.

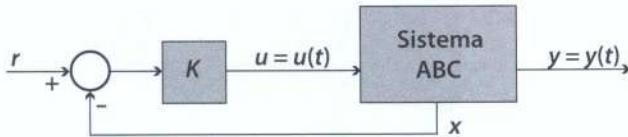
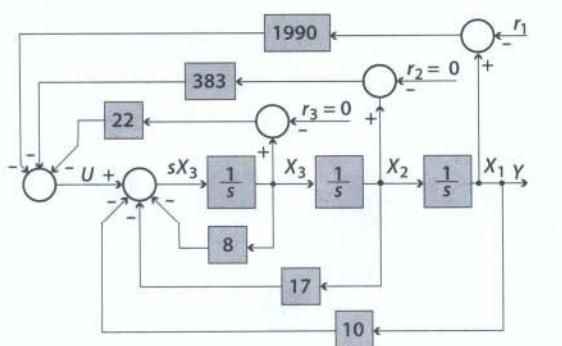


Figura 15.12



Sistema em malha fechada (com realimentação de estado)  $r_1 = h(s) = \text{degrau unitário}$ ;  $r_2 = 0$ ;  $r_3 = 0$ ;  $Y = X_1$ .

Figura 15.13

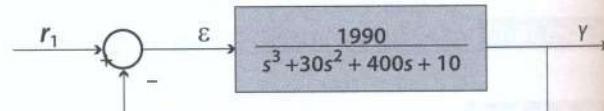


Figura 15.15

## 15.9 Projeto de controle integral

Uma providência interessante para obter erro estacionário nulo para entrada degrau em um sistema do tipo zero é transformar esse sistema em um do tipo 1, pela adição à saída de um integrador. A Figura 15.16 indica a realimentação dos estados originais da

planta por meio de  $K$ , além da realimentação do novo estado ( $x_{n+1}$ ), por meio de  $k_{n+1}$ .

Adicionando-se a referência ( $r$ ) ao sinal de saída, resulta na Figura 15.17. Isso equivale a fazer a realimentação unitária (negativa) da saída ( $y$ ) e integrar o erro em relação à referência ( $r - y = \varepsilon$ ). A saída do integrador define, então, uma nova variável de estado ( $x_{n+1}$ ) e, em consequência (ver Figura 15.16), o erro ( $\varepsilon$ ) é a derivada dessa nova variável:  $\dot{x}_{n+1} = r - y$ . Desse forma, o sistema torna-se do tipo 1 (supondo que fosse anteriormente do tipo zero).

Matematicamente, o desenvolvimento do projeto vai descrito a seguir.

O sistema dado inicialmente é:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned}$$

Depois de estabelecidas as realimentações e a integração do erro atuante, vem:

$$\varepsilon = r - y \quad \text{ou} \quad \dot{x}_{n+1} = -Cx + r$$

e

$$u = k_{n+1}x_{n+1} - Kx = [-K \quad k_{n+1}] \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

Compondo essas expressões na equação de estado ( $\dot{x} = Ax + Bu$ ):

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -K & k_{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

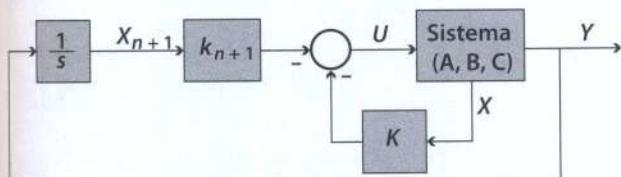


Figura 15.16

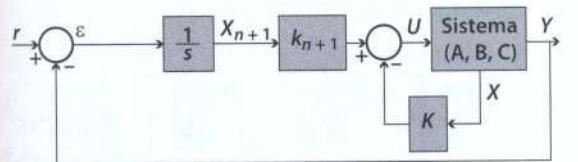


Figura 15.17

ou

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -BK & Bk_{n+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

ou, ainda,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_{n+1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

e também

$$y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}$$

Vemos que a ordem e o tipo do sistema aumentaram de uma unidade, pois em malha aberta foi acrescentado um polo na origem. Podemos, então, usar a equação característica relativa aos polos desejados em malha fachada, para o cálculo das constantes  $K$  e  $k_{n+1}$  do projeto do compensador.

A seguir, daremos um exemplo desse tipo de projeto.

### Exemplo 15.16

Considere o sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Projete um controlador dotado de controle integral com um par de polos em  $-10 \pm j8$  e um terceiro polo em  $-20$ .

Solução:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{x}_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BK & Bk_{n+1} \\ -C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} =$$

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -10 - k_1 & -7 - k_2 & k_3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$\Delta(s) = \det \begin{bmatrix} s & -1 & 0 \\ 10 + k_1 & s + 7 + k_2 & -k_3 \\ 1 & 0 & s \end{bmatrix} =$$

$$s^3 + (k_2 + 7)s^2 + (k_1 + 10)s + k_3$$

Por outro lado,

$$\Delta(s) = (s + 20)(s + 10 + j8)(s + 10 - j8) =$$

$$s^3 + 40s^2 + 564s + 3280$$

Igualando os coeficientes nas duas expressões de  $\Delta(s)$ , resulta:

$$k_3 = 3280$$

$$k_2 + 7 = 40, \quad k_2 = 33$$

$$k_1 + 10 = 564, \quad k_1 = 554$$

Resposta:

$$K = [554 \quad 33] \quad k_3 = 3280$$

Modelo de estado completo do sistema de controle integral:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -564 & -40 & 3280 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} r$$

$$y = [C \quad 0] \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = [1 \quad 0 \quad 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1$$

## 15.10 Fórmula de Ackermann

A solução encaminhada para o projeto de atribuição de polos para os sistemas de uma entrada e uma saída requer que o modelo do sistema esteja na forma canônica controlável, como vimos. Se o modelo do sistema dado não estiver na forma canônica controlável, pode-se recorrer a uma transformação de variáveis que permita obter esse modelo canônico. Em seguida, calcula-se o valor da matriz de realimentação  $K$  pelo método estudado e, pela transformação inversa, determina-se a matriz de realimentação das variáveis de estado utilizada no sistema real. Esse processo foi utilizado por J. E. Ackermann para deduzir uma fórmula que leva seu nome e que permite calcular diretamente a matriz de realimentação de estado qualquer que seja a forma do modelo de estado original do sistema.

A fórmula de J. E. Ackermann é a seguinte:

$$K = [0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \quad 1](M_c)^{-1} \rho_f(A)$$

Nesta expressão,  $M_c$  é a matriz de controlabilidade do sistema:

$$M_c = [B \quad AB \quad \cdots \quad A^{n-2}B \quad A^{n-1}B]$$

A inversa de  $M_c$  como fator na fórmula de Ackermann mostra que só é possível projetar um controlador por realimentação completa de estado se o sistema for totalmente controlável. Caso contrário, a matriz  $M_c$  não pode ser invertida.

O fator  $\rho_f(A)$  é constituído pelo polinômio da matriz  $A$  associado ao polinômio  $\rho_f(s)$  característico de malha fechada do sistema.

A seguir, daremos alguns exemplos de aplicação dessa fórmula.

### Exemplo 15.17

Considere o sistema em que

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Determine a matriz de realimentação de estado para que os polos do sistema sejam alocados em  $-10 \pm j10$ .

Solução:

Solução pela aplicação da fórmula de Ackermann.

$$\rho_a(s) = \det[sI - A] = s^2 + 3s + 2$$

Polos de malha aberta:  $-1, -2$

Matriz de controlabilidade de  $A$ :

$$M_c = [B \quad AB] = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -11 \end{bmatrix}$$

Inverso da matriz de controlabilidade de  $A$ :

$$M_c^{-1} = [B \quad AB]^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5238 & 0,2381 \\ 0,0952 & -0,0476 \end{bmatrix}$$

Polos de malha fechada:  $-10 \pm j10$

$$\rho_f(s) = s^2 + 20s + 200$$

Polinômio característico de malha fechada da matriz  $A$  de malha aberta:

$$\rho_f(A) =$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix}^2 + 20 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{bmatrix} + 200 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 215 & 34 \\ -51 & 130 \end{bmatrix}$$

Cálculo de  $K$  pela fórmula de Ackermann:

$$K = [0 \ 1] M_c^{-1} P_r(A) = \\ [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0,5238 & 0,2381 \\ 0,0952 & -0,0476 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 215 & 34 \\ -51 & 130 \end{bmatrix}$$

resultando:

$$K = [22,90 \quad -2,95]$$

Verificação:

$$A_f = [A - BK] = \begin{bmatrix} -21,905 & 4,952 \\ -48,910 & 1,905 \end{bmatrix}$$

$$\det[sI - A_f] = \det \begin{bmatrix} s + 21,905 & -4,952 \\ 48,910 & s - 1,905 \end{bmatrix} = \\ s^2 + 20s + 200$$

$$s_{1,2} = -10 \pm j\sqrt{100 - 200} = -20 \pm j10$$

### Exemplo 15.18

Considere o sistema cujas variáveis de estado são definidas pelo diagrama de blocos da Figura 15.18.

Escreva as equações de estado e de saída correspondentes e projete um controlador para que os polos do sistema situem-se em  $-10 \pm j10$  e  $-10$ .

Solução:

As equações de estado e de saída do sistema resultam:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [4 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$P_o = s^3 + 8s^2 + 17s + 10$  polos de malha aberta:  $-1 \pm 2j$

Matriz de controlabilidade de malha aberta:

$$M_c = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

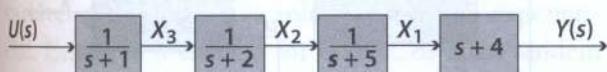


Figura 15.18

Matriz de controlabilidade inversa, em malha aberta:

$$M_c^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Polos de malha fechada:  $-10$  e  $-10 \pm j10$

$$P_r(s) = s^3 + 30s^2 + 400s + 2000$$

Polinômio característico de malha fechada da matriz  $A$ :

$$P_r(A) = A^3 + 30A^2 + 400A + 2000 / \text{ou}$$

$$P_r(A) = \begin{bmatrix} 625 & 229 & 22 \\ 0 & 1312 & 317 \\ 0 & 0 & 1629 \end{bmatrix}$$

Fórmula de Ackermann:

$$K = [0 \ 0 \ 1] M_c^{-1} P_r(A)$$

$$K = [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 625 & 229 & 22 \\ 0 & 1312 & 317 \\ 0 & 0 & 1629 \end{bmatrix}$$

Resulta:

$$K = [625 \ 229 \ 22]$$

Verificação:

$$A_f = [A - BK] = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ -625 & -229 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\det[sI - A_f] = \det \begin{bmatrix} s - 5 & -1 & 0 \\ 0 & s + 2 & -1 \\ 625 & 229 & s + 23 \end{bmatrix} = \\ s^3 + 30s^2 + 400s + 2000$$

Polos:  $-10; -10 \pm j10$

## 15.11 Observadores de estados

A realização de um controlador que utiliza realimentação de estado depende, evidentemente, do acesso às variáveis do sistema real dado. Surgem, então, dois problemas. O primeiro é que algumas variáveis de estado podem ser praticamente inacessíveis. O segundo é que, mesmo quando as variáveis são acessíveis, o acesso a algumas delas pode exigir o emprego de sensores de alto custo que tornam seu emprego economicamente desaconselhável ou mesmo proibitivo. Então, quando as variáveis de estado

não estiverem disponíveis por causa do custo ou da configuração do sistema real, o que se pode fazer é estimá-las por meio do que se chama um observador ou estimador de estado. Tal sistema deve ser construído de forma a ter o mesmo modelo matemático que o sistema real, mas com variáveis de estado facilmente acessíveis.

A planta real, evidentemente, é constituída por componentes físicos (motores, amplificadores, engrenagens etc.) adequados à finalidade para que o sistema foi projetado. Já o sistema observador é, geralmente, realizado por meio de um computador capaz de simular o sistema real, tendo as mesmas variáveis de estado que ele, mas facilmente acessíveis. Na verdade, os observadores podem ser realizados fisicamente ou podem ser modelos virtuais, realizados com auxílio de computadores.

Considere o caso da Figura 15.19. Temos a planta real e um observador, ambos tendo o mesmo modelo de estado ( $A$ ,  $B$  e  $C$ ) e o mesmo vetor de entrada  $u = u(t)$ . Teoricamente, a saída do observador é idêntica à do próprio sistema ( $y(t) = \hat{y}(t)$ ). Na prática, entretanto, isso não acontece, por várias razões: (1) há sempre imprecisão de modelagem — o modelo ( $A$ ,  $B$ ,  $C$ ) adotado para o observador nunca coincide exatamente com o sistema real (no caso, a planta considerada); (2) durante a operação podem aparecer distúrbios que afetam o sistema real, mas não o observador; (3) as condições iniciais do sistema podem ser diferentes das condições iniciais do observador. Qualquer dessas divergências faz com que as saídas  $y = y(t)$  e  $\hat{y} = \hat{y}(t)$  não coincidam o tempo todo.

Na verdade, o que se deseja como saída do observador não é propriamente a resposta  $y(t)$ , mas sim as variáveis de estado que devem reproduzir em cada instante as variáveis de estado do sistema real. Entretanto, pode-se mostrar que, se houver diferença entre as variáveis de estado do sistema e as do observador, essa diferença se refletirá nas variáveis de saída. Da mesma forma, se as saídas forem iguais, as variáveis

de estado do sistema real e as do observador deverão ser iguais também. Então, para garantir que os vetores de estado sejam iguais entre si ou, pelo menos, muito próximos uns dos outros, usa-se comparar a saída  $y$  do observador com a saída  $\hat{y}$  do sistema real, determinando o erro resultante  $e = y - \hat{y}$ . Esse erro é realimentado a fim de corrigir o estado  $\hat{x}$  do observador que, assim, torna-se um seguidor de estado do sistema real, com a vantagem de que variáveis de estado do observador, ao contrário das do sistema real, são facilmente acessíveis.

Entretanto, para que o observador seja um eficiente seguidor de estado, é necessário que ele corrija os desvios mais rapidamente do que as alterações de estado ocasionadas pela própria evolução natural do sistema real. Isso exige que as constantes de tempo do observador sejam consideravelmente menores que as do sistema dado. Assim, dado um observador, para torná-lo mais rápido, com constantes de tempo suficientemente pequenas, deve-se realocar convenientemente seus polos, o que pode ser feito realimentando-se o erro  $e = y - \hat{y}$  através de um bloco  $H$  de ajuste dos polos (como mostra a Figura 15.20). A Figura 15.21, por sua vez, mostra o sistema completo (planta + observador). Para realizar a realimentação de estado do sistema, pode-se, então, utilizar as variáveis de estado  $\hat{x} = \hat{x}(t)$  fornecidas pelo observador de estado. Aliás, essa é a principal utilidade dos observadores de estado.

Resumindo, um observador de estado tem por finalidade reproduzir as variáveis de estado ( $x = x(t)$ ) do sistema real dado. As entradas no observador de

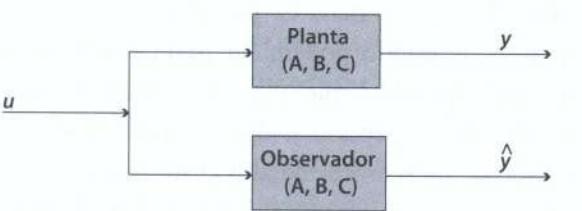


Figura 15.19

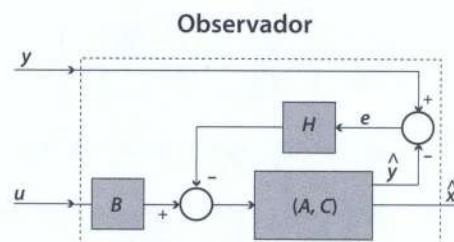


Figura 15.20

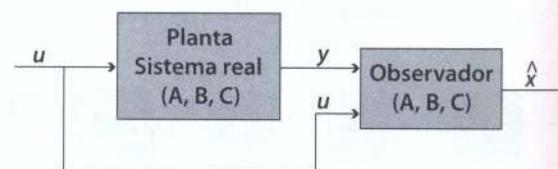


Figura 15.21

estado são a entrada ( $u(t)$ ) do próprio sistema considerado, bem como a respectiva saída ( $y = y(t)$ ). Já a saída do observador é o vetor de estado estimado, que são as variáveis  $\hat{x} = \hat{x}(t)$  tão próximas de  $x = x(t)$  quanto possível.

A realocação de polos do observador com a finalidade de torná-lo mais rápido que o sistema dado pode, então, ser feita via matriz de realimentação  $H$ . O problema aqui é semelhante ao da realocação de polos com base na realimentação de estado que ocorre no projeto dos compensadores. O projeto do observador consta essencialmente da determinação da matriz  $H$ .

Consideremos (figuras 15.20 e 15.21) um sistema dotado de observador.

Equações do sistema:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}\quad (15.1a, b)$$

Equações do observador

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + H(y - \hat{y}) \quad (15.2a)$$

$$\hat{y} = C\hat{x}$$

Substituindo  $y$  e  $\hat{y}$  em função de  $x$  e  $\hat{x}$ , respectivamente, resulta:

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + HC(x - \hat{x}) \quad (15.3)$$

Subtraindo a Equação 15.3 da Equação 15.1a, vem:

$$\dot{x} - \dot{\hat{x}} = (A - HC)(x - \hat{x})$$

A diferença

$$\varepsilon = x - \hat{x}$$

é, em cada instante, o erro entre o vetor de estado do sistema e o do respectivo observador

$$\dot{\varepsilon} = (A - HC)\varepsilon$$

Vemos, então, que esse sinal de erro constitui um sistema de equações de 1ª ordem livres, isto é, sem variável de entrada, cuja solução é do tipo exponencial. Então, se o sistema for estável, os erros tendem a zero com constantes de tempo que dependem do posicionamento dos polos. Para que a eliminação dos

erros seja rápida, os autovalores da matriz que denominaremos matriz de erro do observador [ $A - HC$ ] devem estar consideravelmente mais à esquerda no plano  $s$  que os da matriz  $A$  do sistema. Essa condição é uma das que nos permite orientar os projetos dos observadores.

## 15.12 Projeto de observadores

Vamos considerar, inicialmente, um sistema cujas matrizes estejam na forma canônica observável. Nesse caso, a matriz  $[A - HC]$  também estará nessa forma canônica. De fato, isso pode ser verificado facilmente, sem prejuízo da generalidade, utilizando-se um sistema de 3ª ordem:

$$\begin{aligned}A &= \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & B &= \begin{bmatrix} b_2 \\ b_1 \\ b_0 \end{bmatrix} \\ C &= [1 \ 0 \ 0] & D &= [0]\end{aligned}$$

Nessa forma da matriz  $A$ , a primeira coluna é formada pelos coeficientes do polinômio característico do sistema, com sinal trocado e em ordem crescente do índice de baixo para cima. O polinômio característico nesse caso é:

$$p_a(s) = s^3 + a_2s^2 + a_1s + a_0$$

A matriz  $[A - HC]$  do observador resulta:

$$\begin{aligned}[A - HC] &= \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \\ &\quad \begin{bmatrix} -a_2 & 1 & 0 \\ -a_1 & 0 & 1 \\ -a_0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 \\ b_2 & 0 & 0 \\ b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad [A - HC] = \begin{bmatrix} -a_2 & -b_1 & 1 & 0 \\ -a_1 & -b_2 & 0 & 1 \\ -a_0 & -b_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Conhecida a nova posição desejada para os polos do observador, podemos calcular o polinômio característico de malha fechada correspondente a esses polos

$$p_e(s) = s^3 + e_2s^2 + e_1s + e_0$$

Como se vê, a matriz  $[A - HC]$  (matriz dinâmica do observador) está na forma canônica observável. Sendo assim, o polinômio característico dessa matriz pode ser escrito

$$\rho_e(s) = s^3 + (a_2 + b_1)s^2 + (a_1 + b_2)s + (a_0 + b_3)$$

Igualando os coeficientes de mesma potência em  $s$  nos dois polinômios acima, podemos determinar facilmente os coeficientes  $b_i$  da matriz de realimentação de estado do sistema:

$$e_2 = (a_2 + b_1) \longrightarrow b_1 = e_2 - a_2$$

$$e_1 = (a_1 + b_2) \longrightarrow b_2 = e_1 - a_1$$

$$e_0 = (a_0 + b_3) \longrightarrow b_3 = e_0 - a_0$$

Generalizando para o caso sistemas de ordem  $n$ , temos:

$$b_i = e_{n-i} - a_{n-i} \text{ para } i = 1, 2, \dots, n$$

### Exemplo 15.19

Para o sistema indicado a seguir, projete um observador de estado tal que seus polos sejam:  $-10 \pm j10$ .

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \ 0] \quad D = [0]$$

Solução:

$$a_0 = 1 \quad a_1 = 3$$

Polinômio da matriz do observador:

$$\rho_e = (s + 10 - j10)(s + 10 + j10) = s + 20s + 200$$

$$e_0 = 200 \quad e_1 = 20$$

Cálculo da matriz  $H$ :

$$h_1 = e_1 - a_1 = 20 - 3 = 17$$

$$h_0 = e_0 - a_0 = 200 - 1 = 199$$

Finalmente,

$$H = \begin{bmatrix} 17 \\ 199 \end{bmatrix}$$

Verificação: matriz do observador:

$$[A - HC] = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 17 \\ 199 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 0 \\ -200 & 1 \end{bmatrix}$$

Autovalores:  $-10 \pm j10$

Os projetos de observadores de estado vistos até aqui requerem que o modelo do sistema esteja na forma canônica observável. Na prática, esse requisito nem sempre é satisfeito, uma vez que as variáveis de estado desse modelo geralmente não são as mesmas que ocorrem nas leis naturais básicas do sistema físico descrito.

Se o modelo do sistema dado não estiver na forma canônica observável, pode-se recorrer ao cálculo da matriz  $H$  do observador e a uma variante da fórmula de Ackermann. Essa fórmula nos permite calcular a matriz  $H$ , qualquer que seja a forma de apresentação do modelo de estado.

A variante da fórmula de Ackermann (ou segunda fórmula de Ackermann) é a seguinte:

$$H = \rho_e(A)[M_{ob}]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Nessa expressão, o fator  $\rho_e(A)$  é constituído pelo polinômio da matriz  $A$  associado ao polinômio  $\rho_e(s)$  característico do observador:

$$\rho_e(s) = s^n + e_{n-1}A^{n-1} + e_{n-2}A^{n-2} + \cdots + e_2A^2 + e_1A + e_0I$$

O fator  $[M_{ob}]^{-1}$  é o inverso da matriz de observabilidade do sistema:

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

Ela aparece invertida como fator nessa fórmula de Ackermann. Esse fato, por si mesmo, mostra que para que se possa projetar um controlador por realimentação de estado o sistema deve ser totalmente observável. Caso contrário, a matriz  $M_{ob}$  não pode ser invertida.

A seguir, daremos um exemplo de projeto de um controlador observador, utilizando a fórmula Ackermann para esse caso.

**Exemplo 15.20**

O diagrama de blocos da Figura 15.22 representa um servomotor de corrente contínua. As variáveis de estado escolhidas são a posição angular do rotor ( $x_1 = \theta$ ) e a velocidade angular ( $x_2 = \omega$ ).

Desejamos realocar os polos para as posições  $-8 \pm j6$  sem utilizar o sensor de velocidade. Isso pode ser conseguido por meio de um observador de estado. Projete a matriz  $K$  de realimentação de estado e a matriz  $H$  do observador.

Solução:

A equação de estado do sistema dado pode ser escrita:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

E de saída:

$$[y] = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + [0] u(t)$$

A matriz  $A = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$  não está em nenhuma das formas canônicas e, portanto, convém calcular a matriz  $K$ , com auxílio da fórmula de Ackermann, para o caso.

Para isso, devemos calcular a matriz de observabilidade ( $M_{ob}$ ) e sua inversa ( $M_{ob}^{-1}$ ), bem como o polinômio da matriz  $A$ , associado ao polinômio característico de malha fechada.

Vejamos agora o projeto do observador usando a variante da fórmula de Ackermann para esse caso:

$$H = p_e(A)[M_{ob}]^{-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$U \xrightarrow{\frac{4}{s+4}} X_2 \xrightarrow{\frac{10}{s}} X_1 \xrightarrow{\theta} Y = X_1$$

Figura 15.22

## Considerações finais

Este capítulo apresentou vários tópicos importantes para o projeto dos sistemas de controle. Em primeiro lugar foi vista a transformação linear das variáveis de estado e a consequente transformação das

matrizes do modelo de estados. Depois foram definidas propriedades importantes do controle do sistema: controlabilidade e observabilidade. Em seguida foi estudado o problema da alocação de polos por reali-

mentação de estados. Depois foram definidas propriedades importantes do controle do sistema: controlabilidade e observabilidade. Em seguida foi estudado o problema da alocação de polos por reali-

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}, \text{ resulta:}$$

$$p_e(A) = A^2 + 16A + 100I = \begin{bmatrix} 100 & 120 \\ 0 & 52 \end{bmatrix}$$

Matriz de observabilidade e sua inversa:

$$M_{ob} = \begin{bmatrix} C \\ CA \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \quad M_{ob}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix}$$

Cálculo da matriz  $H$  do observador:

$$H = p_e(A)[M_{ob}]^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 100 & 120 \\ 0 & 52 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

Verificação:

$$A_h = [A - CH] = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 12 \\ 5,2 \end{bmatrix} [1 \ 0] =$$

$$\begin{bmatrix} -12 & 10 \\ -5,2 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\det([sI - A_h]) = \det \begin{bmatrix} s+12 & -10 \\ 5,2 & s+4 \end{bmatrix} =$$

$$s^2 + 16s + 100$$

Polos:  $s_{1,2} = -8 \pm j6$

O sistema completo indicando as interligações dos vários blocos matriciais dotado de realimentação vía observador está indicado na Figura 15.23.

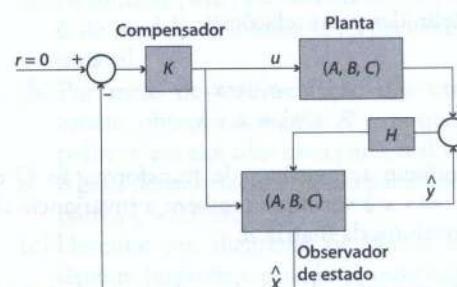


Figura 15.23 Compensação por realimentação de estado.

mentação de estado. Esse é um material diretamente ligado ao projeto do controlador dos sistemas de controle, inclusive ao do denominado controle integral.

Finalmente, fez-se uma complementação necessária para a realização de certos projetos na prática, abordando os observadores de estado.

## Problemas propostos

1. Dadas as equações de estado e de saída do sistema

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

e a transformação de variáveis de estado  $x'_1 = 1,25x_1 + 0,25x_2$  e  $x'_2 = -0,25x_1 - 0,25x_2$ , determine a matriz dessa transformação  $Q$  e sua inversa  $P = Q^{-1}$  e escreva as equações de estado e de saída relativas às novas variáveis.

2. As equações de estado e de saída de um sistema linear são as seguintes:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -25,75 & 8,125 \\ -52,5 & 15,75 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [2 \ -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Deseja-se representar esse sistema por meio das variáveis:

$$x'_1 = 2x_1 - x_2 \quad \text{e} \quad x'_2 = x_1 + 0,5x_2$$

Determine as novas equações de estado e de saída. Verifique que houve invariancia dos autovalores de  $A$ .

3. Tem-se o sistema cujo modelo de estados é descrito pelas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -13 & 7 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad C = [1 \ 0] \quad \text{e} \quad D = 0$$

Determine as novas matrizes  $A'$ ,  $B'$  e  $C'$  do sistema, resultantes da transformação de variáveis de estado, definidas pelas relações:

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_2 \\ x'_2 &= x_1 - x_2 \end{aligned}$$

Indique as matrizes de transformação  $Q$  e  $P$  de  $x' \leftrightarrow x$  e verifique também a invariancia dos autovalores da matriz  $A$ .

4. As equações de estado e de saída de um sistema são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,125 \\ -0,125 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Faça uma transformação das variáveis de estado, tal que a matriz do sistema seja da forma:

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{bmatrix}$$

- (a) Determine  $a$  e  $b$ .  
 (b) Determine a matriz de transformação  $P$  de  $A$  para  $A'$  e sua inversa.  
 (c) Escreva as equações vetoriais de estado e de saída nas novas variáveis.

5. Dado o sistema cujas equações de estado e de saída são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ a-2 & b-15 & c-8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ -a & -b & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine as constantes  $a$ ,  $b$  e  $c$  de forma que a matriz diagonalizada seja:

$$A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

- (b) Determine a matriz  $P$  da transformação  $A \Rightarrow A_d$

Escreva também as matrizes transformadas de entrada ( $B'$ ) e de saída ( $C'$ ).

6. Dado o sistema cujas equações de estado e de saída são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine os autovetores de  $A$ .

- (b) Escreva as equações de estado e de saída com a matriz  $A$  diagonalizada.

7. Considere as equações de estado e de saída de um sistema linear:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} u \quad \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine os autovalores e autovetores da matriz do sistema.  
 (b) Determine as matrizes de transformação ( $P$ ) e sua inversa ( $Q$ ) que diagonalizam a matriz do sistema.  
 (c) Escreva as equações de estado e de saída para as variáveis de estado desacopladas (matriz do sistema diagonalizada).
8. Considerando o mesmo sistema da questão anterior (Problema 7), calcule a resposta desse sistema para o caso em que  $u_1(t) = u_2(t) = h(t)$  degrau unitário. Verifique que o resultado obtido é o mesmo, tanto para o cálculo feito pelo formato inicial do sistema como quando é feito pelas equações do sistema já diagonalizado.

9. As equações de estado e de saída de um sistema são:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} u(t) \quad \text{e} \quad y = [1 \ 2] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Considere as condições iniciais nulas ( $C.I. = 0$ ) e  $u(t) = h(t)$  = degrau unitário.

- (a) Determine a matriz  $P$  de transformação capaz de diagonalizar a matriz do sistema.  
 (b) Escreva as equações de estado e de saída do sistema, com a matriz  $A$  diagonalizada.  
 (c) Determine a matriz de transição de estado  $\phi(s)$ , para o caso da matriz  $A$  diagonalizada.  
 (d) Calcule a resposta  $y(t)$  do sistema ao degrau unitário.

10. Considere as equações de estado e de saída:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

- (a) Determine os autovalores da matriz  $A$  e escreva a matriz diagonalizada  $A_d$ .  
 (b) Determine a matriz de transformação  $P$  associada.  
 (c) Escreva as equações de estado e de saída, com a matriz do sistema diagonalizada.  
 (d) Calcule a matriz de transição de estado  $\phi(s)$ , referente a  $A_d$ .  
 (e) Calcule a resposta impulsiva do sistema.

11. Considere o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y(t) = [0 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Verifique se o sistema é controlável por dois diferentes métodos, a saber:

- (a) utilizando a matriz de controlabilidade;  
 (b) diagonalizando a equação de estado. Há coerência entre os resultados?

12. Considere o sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \quad y = [1 \ 1 \ 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

- (a) Verifique por meio da matriz de controlabilidade se o sistema é controlável.  
 (b) Verifique, por meio da matriz de observabilidade, se o sistema é observável.  
 (c) Essas conclusões poderiam ser obtidas diretamente, por simples observação das equações dadas inicialmente? Explique.

13. A função de transferência de um processo é:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+2)}{(s+1)(s+3)(s+5)}$$

- (a) Determine para esse sistema as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do modelo de estado na forma canônica controlável.  
 (b) Por meio de realimentação das variáveis de estado, obtenha a matriz  $K$  para que os polos sejam alocados nas posições  $s_1 = -50$ ;  $s_2 = -20 - j20$  e  $s_3 = -20 + j20$ .  
 (c) Desenhe um diagrama de blocos escalar do sistema (entrada  $r$  e saída  $y$ ) mostrando as variáveis de estado e as realimentações, em malha aberta e em malha fechada.

14. A função de transferência de um processo industrial é:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+5)}{(s+1)(s+2)(s+4)}$$

- (a) Determine para esse sistema as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do modelo de estado na forma canônica controlável.  
 (b) Por meio de realimentação das variáveis de estado, obtenha a matriz  $K$  para que todos os polos sejam alocados com parte real = -8, sendo o grau de amortecimento do par de polos complexos  $\zeta = 0,625$ .  
 (c) Desenhe um diagrama de blocos escalar do sistema (entrada  $r$  e saída  $y$ ) mostrando as variáveis de estado e as realimentações, em malha aberta e em malha fechada.

15. Considere o processo a controlar  $G(s) = \frac{1}{s(s+3)(s+7)}$ , cujas variáveis de estado não são acessíveis.

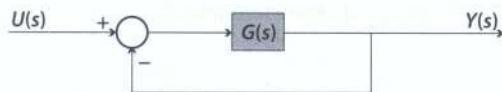
- (a) Represente o sistema (matrizes  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$ ) na forma canônica observável.  
 (b) Projete um observador ( $H$ ) para o sistema assim descrito, com dois polos complexos em  $-30 \pm j40$  e um terceiro polo em -300.

- (c) Desenhe um diagrama vetorial do sistema dado interligado com o observador, mostrando em cada ramo as variáveis correspondentes e em cada bloco a matriz numérica ou a operação que ele representa.

16. Considere o processo da Figura 15.24, sendo

$$G(s) = \frac{8}{s(s+4)}$$

- (a) Determine os polos de malha fechada do sistema ( $s_1, s_2$ ).  
 (b) Escreva o modelo de estado desse sistema (de malha fechada) sob forma canônica observável.



- (c) Para alocar os polos de forma conveniente, deve-se usar uma realimentação de estado por meio de um controlador  $K = [1 \ 0,5]$ . Onde se situam os polos do sistema compensado?  
 (d) Sendo inacessíveis as variáveis de estado na planta real, necessita-se de um observador de estados que seja duas vezes mais rápido que o sistema dado, mas conservando grau de amortecimento  $\zeta$ . Localize os polos do observador.  
 (e) Projete o observador (matriz  $H$ ).

17. Considere o sistema cuja função de transferência é:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+2}{(s+0,5)(s+0,9)}$$

- (a) Represente o modelo de estado sob forma canônica observável.  
 (b) Verifique se o sistema é observável.  
 (c) Projete um observador cujos polos se situem em  $-6 \pm j6$ .

18. A função de transferência de um processo é:

$$F(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{(s+1)(s+3)}{(s+2)(s+4)(s+5)}$$

- (a) Determine para esse sistema as matrizes  $A$ ,  $B$  e  $C$  do modelo de estado na forma canônica controlável.

- (b) Por meio de realimentação das variáveis de estado (ver Figura 15.25), obtenha a matriz  $K$  para que os polos sejam alocados nas posições  $s_1 = -50$ ;  $s_2 = -20 - j20$  e  $s_3 = -20 + j20$ .  
 (c) Escreva a equação vetorial de estado do sistema compensado (entrada  $r$  e saída  $y$  — ver Figura 15.24).  
 (d) Desenhe um diagrama de blocos vetorial do sistema (entrada  $r$  e saída  $y$ ) indicando as matrizes em cada bloco.

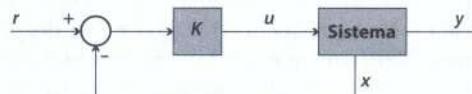


Figura 15.24

19. O diagrama de blocos de um sistema real de entrada e saída únicas está indicado na Figura 15.25.  
 (a) Determine a função de transferência do sistema.  
 (b) Escreva o modelo de estados desse sistema na forma canônica observável.  
 (c) Deseja-se projetar para o sistema dado um observador de estado cujos polos estejam situados nas posições:  $-40$  e  $-20 \pm j34,6$ . Determine o polinômio característico desse observador.  
 (d) Projete um observador de estado (matriz  $H$ ) cujos polos sejam os indicados acima.  
 (e) Escreva a matriz  $A_{ob}$  =  $[A - HC]$  do observador.  
 (f) O observador assim projetado é mais rápido que o sistema dado? Por quê?

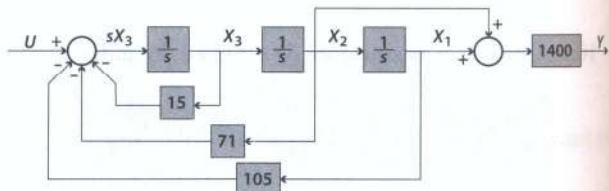


Figura 15.25

20. O diagrama de blocos de um sistema de entrada e saída únicas está indicado na Figura 15.26.  
 (a) Calcule a função de transferência do sistema  

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}.$$
  
 (b) Determine o modelo de estados desse sistema na forma canônica controlável.  
 (c) Quais são os autovalores da matriz  $A$  do sistema?  
 (d) Redesenhe o diagrama de blocos do sistema indicando as variáveis de estado de fase.

- (d) Deseja-se projetar um compensador que aloque os polos do sistema compensado em  $-7,5 \pm j10$  e o terceiro polo em -10. Escreva o polinômio característico do sistema compensado.  
(e) Calcule a matriz  $K$  do compensador desejado.  
(f) Complete o diagrama de blocos que você desenhou, indicando a realimentação das variáveis de estado.

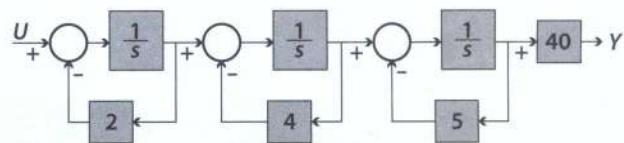
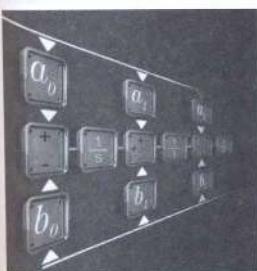


Figura 15.26

# capítulo 16



## Sistemas de tempo discreto

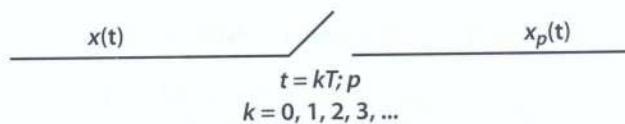
No estudo dos sinais de tempo discreto não se considera o tempo como uma variável que evolui continuamente, conforme nossa sensibilidade e intuição. Considera-se o tempo uma variável discreta, que só existe em instantes discretos, evoluindo descontinuamente. Para desenvolver esse tema, este capítulo inicia-se com a apresentação dos denominados sinais amostrados e em seguida uma classificação dos sinais em geral. Depois apresenta um exemplo básico de como são os sistemas de controle que utilizam um controlador digital. O capítulo mostra em seguida que, matematicamente, as equações que modelam sinais e sistemas de tempo discreto e que são denominadas equações de diferenças, podem ser obtidas a partir das equações análogas ao caso de tempo contínuo. Mostra, ainda, como as soluções das equações de

diferenças podem ser resolvidas pelo denominado método de solução por recorrência. Podem se valer também dos diagramas de blocos adaptados ao tempo discreto. No item seguinte mostra como as equações de diferenças usam, em vez da transformada de Laplace, a transformada Z. Vêm então alguns teoremas importantes sobre a transformada Z, a inversão dessa transformada, aplicações e finalmente a função de transferência para sistemas de tempo discreto, que é também denominada função de transferência pulsada. Depois são abordadas as associações de funções de transferência de tempo discreto via álgebra de blocos, noções de estabilidade para esses sistemas e uma referência ao importante teorema da amostragem. Finalmente uma seção introdutória aos projetos de controladores de tempo discreto.

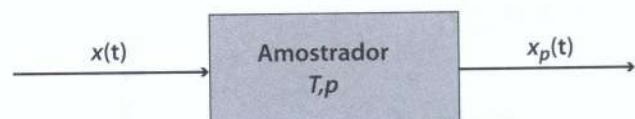
### 16.1 Amostragem uniforme de sinais

#### 16.1.1 Generalidades

Sinais amostrados de período  $T$  e duração  $p \leq T$  são sinais modulados por um trem de pulsos de altura unitária, de duração  $p$  e que ocorrem a cada  $T$  segundos. Podem ser considerados como sinais na saída de um amostrador, que permite a saída do sinal de entrada apenas a cada  $T$  segundos e durante um intervalo de duração  $p \leq T$ . Um modulador desse tipo é denominado amostrador e seu modelo mais simples é o de uma chave (Figura 16.1) que fecha a cada  $T$  segundos e permanece fechada por um intervalo subsequente de  $p$  segundos. Pode ser apresentado também por bloco, como na Figura 16.2.

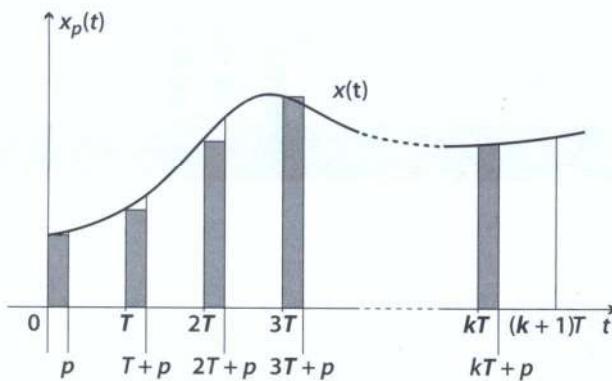


**Figura 16.1** Amostrador representado por uma chave.



**Figura 16.2** Bloco amostrador.

Em geral, a amostragem real é aproximada por uma amostragem por pulsos retangulares que fixam o valor do sinal nos instantes iniciais da amostragem (Figura 16.3). O sinal de entrada é um sinal de tempo



**Figura 16.3** Sinal de tempo contínuo  $x(t)$  e amostragem por pulsos retangulares.

contínuo  $x(t)$ , e o sinal de saída é, na realidade, um trem de pulsos retangulares, representados por  $x_p(t)$ .

### ■ 16.1.2 Representação matemática

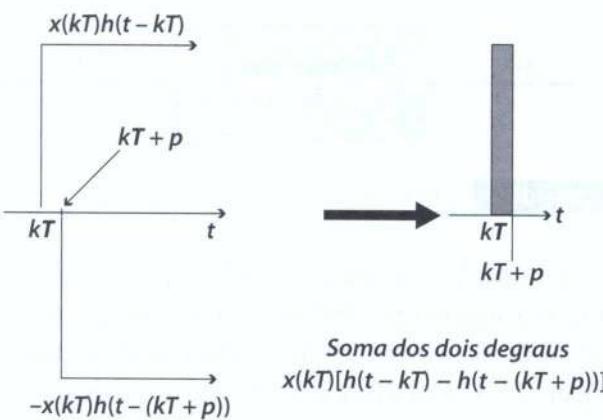
Os pulsos retangulares (*flat top*) de período  $T$  e duração  $p$  podem ser considerados como formados pela soma de dois degraus de mesma altura, mas de sinais opostos e deslocados de um intervalo de tempo  $p$ , conforme mostra a Figura 16.4.

Lembrando que  $h(t - t_0)$  é um degrau unitário no instante  $t_0$ , a representação matemática da sequência de pulsos de amostragem será:

$$x_p(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)[h(t - kT) - h(t - (kT + p))]$$

No domínio da frequência, resulta:

$$X_p(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \left\{ \frac{e^{-kTs}}{s} - \frac{e^{-(kT+p)s}}{s} \right\}$$



**Figura 16.4**

ou

$$X_p(s) = \left\{ \frac{1 - e^{-ps}}{s} \right\} \left( \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs} \right)$$

O somatório

$$X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-kTs}$$

representa um trem de impulsos de período  $T$ , modulado pela variável  $x(t)$ . Diz-se que é uma amostragem ideal (ou por impulsos) da variável  $x(t)$ . No domínio do tempo, a transformada inversa de Laplace dessa sequência é:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

Por outro lado, a expressão

$$G_p(s) = \frac{1 - e^{-ps}}{s}$$

pode ser interpretada como uma função de transferência que produz os pulsos (retangulares) de duração  $p$  quando excitado pelo trem de impulsos. Pode-se, então, escrever:

$$X_p^*(s) = G_p(s) X^*(s)$$

Para o caso de a duração  $p$  do pulso se estender até o final do período de amostragem  $T$ , a função de transferência  $G_p(s)$  é denominada ZOH (Segurador de Ordem Zero – Holder). O ZOH é usado no processo de reconstrução do sinal amostrado, convertendo o mesmo para o tempo contínuo. Ele normalmente aparece entre o controlador de tempo discreto e a planta, como ilustrado na Figura 16.9b.

$$ZOH(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s}$$

## 16.2 Classificação dos sinais

Quanto ao comportamento no tempo, os sinais podem ser classificados como: sinais de tempo contínuo e sinais de tempo discreto, e, quanto à amplitude, sinais analógicos e sinais digitais.

## ■ 16.2.1 Sinais de tempo contínuo

São aqueles definidos para qualquer  $t$  pertencente ao conjunto dos números reais. Essa definição é extensível aos sistemas que utilizam esses sinais: sistemas de tempo contínuo.

## ■ 16.2.2 Sinais de tempo discreto

São aqueles que só existem ou só carregam informação em instantes definidos. São representados nesses instantes  $t = kT$  por impulsos, onde  $k$  é um número inteiro ( $k = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$ ) e  $T$  é um número positivo qualquer. Essa denominação é também extensível aos sistemas que utilizam sinais de tempo discreto: sistemas de tempo discreto (às vezes, mais brevemente, sistemas discretos).

## ■ 16.2.3 Sinais analógicos

Aqueles cujo nível (amplitude ou intensidade) pode assumir qualquer valor dentro do intervalo em que são definidos. Os sistemas que utilizam sinais analógicos também são denominados sistemas analógicos. Por exemplo: a tensão medida por um voltímetro de bobina móvel (de ponteiro), de escala  $-10, +10$  volts. Voltímetro analógico.

## ■ 16.2.4 Sinais digitais

São sinais que só podem assumir um número finito de valores dentro do intervalo em que são definidos. Muitas vezes, eles são sinais resultantes da conversão da amplitude de sinais analógicos para uma representação quantizada, por exemplo, a binária. A conversão de amplitude normalmente é feita apenas em determinados momentos. Portanto, nesse caso, os sinais digitais são também discretos. Sendo quantizados em amplitude, só podem apresentar um número finito e predeterminado de valores. Por exemplo: a tensão medida por um voltímetro digital de escala de  $-9,99$  a  $+9,99$ ; o número apresenta polaridade e três dígitos. Os níveis de sinal que podem ser obtidos são apenas 1999 (a saber,  $-9,99; -9,98; \dots; -0,01; 0,00; +0,01; \dots; +9,98; +9,99$ ). Voltímetro digital.

### Exemplo 16.1

A entrada no amostrador ideal indicado na Figura 16.5 é o sinal de tempo contínuo  $x(t) = e^t$ . Determine o sinal amostrado  $x^*(t)$  de saída do amostrador, sabendo que o período de amostragem é  $T = 0,1$  segundo. Determine



**Figura 16.5** Amostrador ideal.

também a transformada de Laplace do sinal amostrado  $X^*(s)$ .

Solução:

$$\begin{aligned} x^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kt} \delta(t - kT) \\ X^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} e^{-skT} = \\ &\sum_{k=0}^{\infty} e^{-0,1(1+s)k} = 1 + e^{-0,1(1+s)} + e^{-0,2(1+s)} + \dots \\ X^*(s) &= 1 + e^{-0,1(1+s)} + e^{-0,2(1+s)} + \dots \end{aligned}$$

Trata-se de uma série geométrica infinita como:  $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots$ , sendo  $a$  o primeiro elemento da série e  $r$  a razão. Para  $0 < r < 1$ , a soma da série infinita é  $\frac{a}{1-r}$ . No caso do nosso exemplo,  $a = 1$  e  $r = e^{-0,1(1+s)}$ . Então, para  $|e^{-0,1(1+s)}| < 1$ , resulta:

$$X^*(s) = \frac{1}{1 - e^{-0,1(1+s)}}$$

### Exemplo 16.2

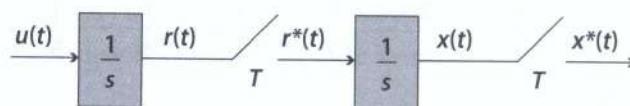
Para o sistema indicado na Figura 16.6, onde as chaves representam amostradores ideais, e  $u(t) = \delta(t)$  (um único impulso unitário no instante  $t = 0$ ), determine:  $U(s)$ ,  $r(t)$ ,  $R(s)$ ,  $r^*(t)$ ,  $R^*(s)$ ,  $x(t)$ ,  $X(s)$ ,  $x^*(t)$  e  $X^*(s)$ , considerando:  $T = 1$  (segundo).

Solução:

$$u(t) = \delta(t) \quad U(s) = 1$$

$$r(t) = h(t) = 1 \text{ para } t \geq 0 \quad \text{e} \quad R(s) = \frac{1}{s}$$

$$\begin{aligned} r^*(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - k) \quad \text{e} \\ R^*(s) &= \sum_{k=0}^{\infty} e^{-ks} = \frac{1}{1 - e^{-s}} \quad \text{para, } |e^{-s}| < 1 \\ x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} (h(t - k)) \\ X(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-s} + \frac{1}{s} e^{-2s} + \dots = \end{aligned}$$



**Figura 16.6** Sistema ideal de tempo discreto do Exemplo 16.2.

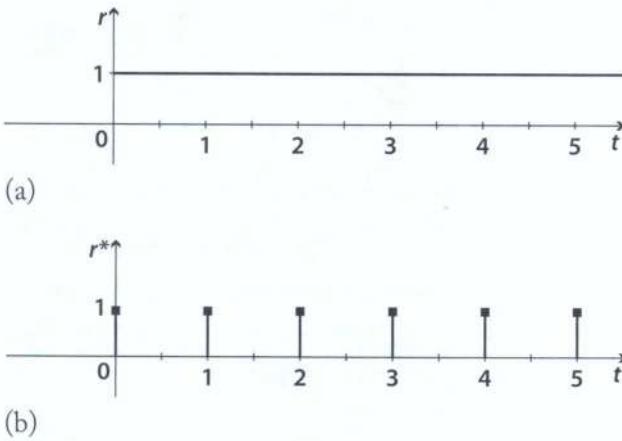
$$\frac{1}{s} \left( 1 + e^{-s} + e^{-2s} + \dots \right) = \frac{1}{s} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-sk} = \frac{1}{s(1 - e^{-s})}$$

Ver Figura 16.7.

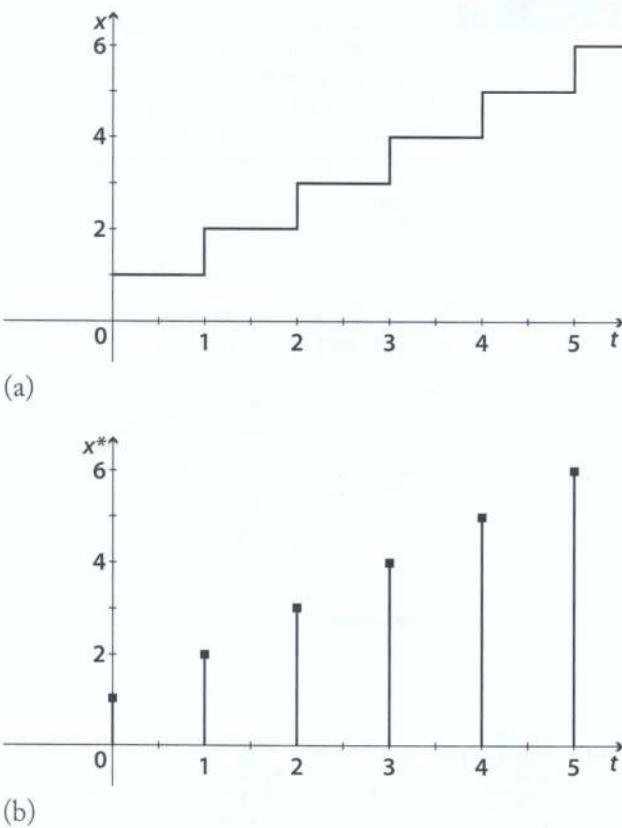
Pela Figura 16.8, de  $x(t)$ , é fácil obter  $x^*(t)$ :

$$x^*(t) = \delta(t) + 2\delta(t-1) + 3\delta(t-2) + \dots = \sum_0^{\infty} (k+1)\delta(t-k)$$

$$X^*(s) = 1 + 2e^{-s} + 3e^{-2s} + \dots = \sum_0^{\infty} (1+k)e^{-ks}$$



**Figura 16.7** Gráficos de  $r(t)$  e  $r^*(t)$ .



**Figura 16.8** Gráficos de  $x(t)$  e  $x^*(t)$ .

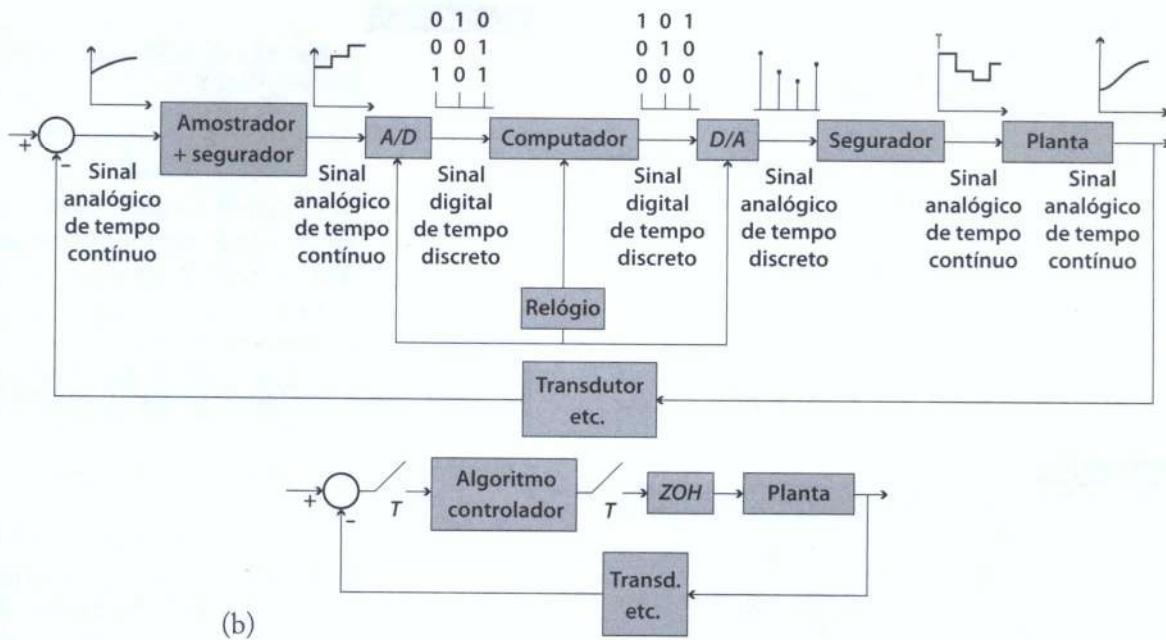
### 16.3 Sistemas de controle dotados de controlador digital

Os sistemas de controle modernos, em geral, incluem um elemento de controle digital (computador, microcontrolador, DSP, PLC etc.) que trabalha com sinais de tempo discreto, com período comandado por um *clock* (relógio). Nesses casos, em que há no mesmo sistema alguns componentes operando com sinais digitais e outros operando com sinais analógicos, é necessário o emprego de conversores analógico-digitais (*A-D*) e digitais-analógicos (*D-A*). Normalmente, os sinais de entrada no sistema são analógicos de tempo contínuo. Eles devem ser amostrados por meio de um amostrador-segurador, (*ZOH*), convertidos em sinal digital por meio de um conversor *A-D* (analógico-digital) e levado ao computador. Já na saída do computador, os sinais digitais são normalmente convertidos em analógicos, por um conversor *D-A* (digital analógico) dotado de um segurador (*ZOH*) e entregues à planta que fornece na saída um sinal analógico. Na Figura 16.9a, temos um diagrama de blocos detalhado de um sistema de controle desse tipo. Na Figura 16.9b, temos um diagrama simplificado, onde aparecem apenas os elementos que são usualmente representados pelas respectivas funções de transferência. O computador contém o algoritmo de controle (lei de controle).

### 16.4 Tempo contínuo e tempo discreto – notação e definições

Recordemos, inicialmente, algumas definições já vistas anteriormente.

- **Tempo contínuo:** supõe-se que o tempo varia continuamente, conforme nossa intuição. Representa-se por  $t$ . Variáveis, funções ou sinais de tempo contínuo:  $x = x(t)$ ;  $u = u(t)$ ;  $f(t)$ ...
- **Tempo discreto:** supõe-se constituído por número infinito de instantes discretos:  $t_k = kT$ , com  $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ . O período  $T$  é um número real denominado período de amostragem.
- **Variáveis, funções, ou sinais de tempo discreto:**  $x_k = x(kT)$ ;  $u_k = u(kT)$ ;  $f_k = f(kT)$ ...



**Figura 16.9** (a) – Diagrama detalhado, com indicação do processamento de sinais, de um sistema dotado de controlador digital.  
 (b) – Diagrama simplificado equivalente ao da Figura 16.9a.

São também denominadas variáveis, funções ou sinais amostrados.

Note que, para simplificar a notação dos sistemas de tempo discreto, é comum se suprimir o valor  $T$  dos índices temporais (argumento da função). Por exemplo, pode-se escrever  $x_k = x(k) = x(kT)$ . Essa simplificação não pode ser feita quando o  $T$  aparece como coeficiente. Por exemplo,  $5Tx(kT) = 5Tx(k) = 5Tx_k$ .

■ Intervalo de amostragem:

$$\Delta t_k = t_{k+1} - t_k = (k+1)T - kT = T$$

■ Acréscimos das variáveis de tempo discreto:

$$\Delta x_k = x_{k+1} - x_k = x((k+1)T) - x(kT)$$

### ■ 16.4.1 Interpretação das derivadas em tempo discreto

Examinaremos uma das formas aproximadas das derivadas de 1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> ordens de tempo discreto. Essa forma aproximada será aqui denominada aproximação de ordem zero ou de Euler.

Derivadas de 1<sup>a</sup> ordem. Adotamos as seguintes aproximações:

$$\frac{dy}{dt} = y'(t) \rightarrow \frac{\Delta y_k}{\Delta t_k} = y'_k \quad \text{ou} \quad \frac{y_{k+1} - y_k}{T} = y'_k$$

Derivadas de 2<sup>a</sup> ordem. Por extensão do processo anterior, vem:

$$y'' = \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left( \frac{dy}{dt} \right) \rightarrow y''_k = \frac{y'_{k+1} - y'_k}{\Delta t_k} = \frac{1}{T} \left( \frac{y_{k+2} - y_{k+1}}{T} - \frac{y_{k+1} - y_k}{T} \right)$$

Finalmente, obtém-se

$$y''_k = \frac{(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k)}{T^2}$$

As demais derivadas de ordens superiores podem ser obtidas por leis de formação análogas.

### ■ 16.4.2 Formação das equações de diferenças

Para escrever as equações de diferença associadas a uma equação diferencial, podem-se utilizar as aproximações anteriormente apresentadas.

Equações de diferenças de 1<sup>a</sup> ordem.

$$y' + ay = bu(t) \rightarrow \frac{y_{k+1} - y_k}{T} + ay_k = bu_k$$

ou, finalmente,

$$y_{k+1} + (aT - 1)y_k = Tbu_k$$

Podemos, então, escrever essa equação de diferenças de 1ª ordem sob a forma:

$$y_{k+1} + a_0 y_k = b_0 u_k$$

com

$$a_0 = (aT - 1) \quad \text{e} \quad b_0 = Tb$$

### Exemplo 16.3

Escreva a equação de diferenças associada à equação diferencial

$$y' + 2y = u(t),$$

para  $T = 0,1\text{s}$ , utilizando a aproximação de ordem zero para a derivada de uma função.

Solução:

No caso, temos  $y_{k+1} + (0,2 - 1)y_k = 0,1u_k$   
ou seja,  $y_{k+1} - 0,8y_k = 0,1u_k$

### Exemplo 16.4

Escreva a equação de diferenças associada à equação diferencial

$$\ddot{y} + 4\dot{y} + 40y = 100u(t)$$

para o período de amostragem  $T = 0,1\text{s}$ , utilizando a aproximação de ordem zero para a derivada de uma função.

Solução:

Em tempo discreto, temos:

$$y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k = b_0 u_k$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= pT - 2 = 4(0,1) - 2 = -1,6 \\ a_0 &= qT^2 - pT + 1 = 0,4 - 0,4 + 1 = 1 \quad \text{e} \\ b_0 &= bT^2 = 100(0,01) = 1 \\ y_{k+2} - 1,6y_{k+1} + y_k &= u_k \end{aligned}$$

### ■ 16.4.3 Equações de diferenças de ordem $N$ – forma geral

Vimos exemplos de equações de diferenças, de 1ª e de 2ª ordens, que podem ser escritas, respectivamente, sob as seguintes formas, quando utilizamos a aproximação de ordem zero para a derivada de uma função:

$$\begin{aligned} y_{k+1} + a_0 y_k &= b_0 u_k \\ y_{k+2} + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k &= b_0 u_k \end{aligned}$$

onde  $a_0, a_1$  e  $b_0$  são coeficientes constantes.

O caso geral de uma equação de diferenças linear, de coeficientes constantes, de ordem  $n$  na variável  $y$ , tem a forma:

$$\begin{aligned} a_n y_{k+n} + a_{n-1} y_{k+n-1} + \cdots + a_1 y_{k+1} + a_0 y_k &= \\ b_m u_{k+m} + b_{m-1} u_{k+m-1} + \cdots + b_1 u_{k+1} + b_0 u_k &= \end{aligned}$$

ou, também:

$$\sum_{i=0}^n a_i y_{k+i} = \sum_{j=0}^m b_j u_{k+j}$$

onde  $m$  e  $n$  são números inteiros e  $a_i$  e  $b_j$  são coeficientes constantes. O número  $n$  indica também a ordem da equação de diferenças.

As equações de diferenças em tempo discreto são análogas às equações diferenciais em tempo contínuo.

É sempre possível obter ou formar equações de diferenças associadas a equações diferenciais de tempo contínuo, por amostragem das variáveis.

Da mesma forma que para a integração das equações diferenciais, a solução das equações de diferenças de ordem  $n$  necessita do conhecimento de  $n$  valores iniciais (condições iniciais).

## 16.5 Solução por recorrência

Seja a equação de diferenças

$$\sum_{i=0}^n a_i y_{k+i} = \sum_{j=0}^m b_j u_{k+j}$$

A solução numérica das equações de diferenças pode ser obtida por recorrência. Para tanto, devem ser conhecidos os  $n$  valores iniciais da variável a ser determinada ( $y_0, y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$ ), bem como todos os valores da função  $u_k$  (para  $k = 0, 1, 2, \dots$ ). Note que estamos supondo  $y_k = 0$  e  $u_k = 0$  para todo de  $k < 0$ .

A solução por recorrência é obtida apresentando-se a equação anterior, sob a forma

$$y_{k+n} = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{a_i}{a_n} y_{k+i} + \sum_{j=0}^m \frac{b_j}{a_n} u_{k+j}$$

e calculando-se  $y_{k+n}$ , sucessivamente, para  $k = 0, k = 1, k = 2, \dots$

As soluções por recorrência podem facilmente ser programadas em computador.

### Exemplo 16.5

Dada a equação de diferenças

$$y_{k+2} - 1,6y_{k+1} + y_k = u_k$$

onde

$$u_k = \delta_k = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ 0 & \text{para } k \neq 0 \end{cases}$$

e também

$$\begin{cases} y_0 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

determine os cinco primeiros termos da sequência  $y_k$ .

Solução por recorrência:

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 1,6y_{k+1} - y_k + u_k \\ k = 0 \rightarrow y_2 &= 1,6y_1 - y_0 + u_0 = \\ &1,6 - 0 + 1 = 2,6 \\ k = 1 \rightarrow y_3 &= 1,6y_2 - y_1 + u_1 = \\ &1,6(2,6) - 1 + 0 = 3,16 \\ k = 2 \rightarrow y_4 &= 1,6y_3 - y_2 + u_2 = \\ &1,6(3,16) - 2,6 + 0 = 2,456 \end{aligned}$$

e assim por diante.

Esse cálculo pode ser feito com auxílio de uma planilha, como a indicada na Tabela 16.1.

**Tabela 16.1**  $y_{k+2} = 1,6y_{k+1} - y_k + u_k$

$k$	$u_k$	$y_k$	$-1*y_k$	$y(k+1)$	$1,6*y(k+1)$	$y(k+2)$
0	1,000	0,00	0,00	1,00	1,60	2,60
1	0,000	1,00	-1,00	2,60	4,16	3,16
2	0,000	2,60	-2,60	3,16	5,06	2,46
3	0,000	3,16	-3,16	2,46	3,93	0,77
4	0,000	2,46	-2,46	0,77	1,23	-1,22

### Exemplo 16.6

Dada a equação de diferenças

$$y_{k+2} - 2,5y_{k+1} + y_k = 0$$

determine (por inspeção) o termo geral  $y(k)$ , supondo as condições iniciais  $y_0 = 2$  e  $y_1 = 1$ .

Solução:

$$\begin{aligned} y_{k+2} &= 2,5y_{k+1} - y_k \\ k = 0 \rightarrow y_2 &= 2,5y_1 - y_0 = 2,5 - 2 = \\ &0,5 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k=1 \rightarrow y_3 &= 2,5y_2 - y_1 = 1,25 - 1 = \\ &0,25 = \frac{1}{2^2} \\ k=2 \rightarrow y_4 &= 2,5y_3 - y_2 = 0,625 - 0,5 = \\ &0,625 = \frac{1}{2^3} \end{aligned}$$

Neste caso, é possível identificar por inspeção a lei de formação dos termos da sequência, o que permite escrever o termo geral:

$$y_k = \frac{1}{2^{k+1}}$$

### Exemplo 16.7

Dadas as equações de diferenças finitas

$$\begin{aligned} y(k) &= x(k+1) \quad \text{e} \\ y(k+1) &= 0,4x(k) - 0,3y(k) + \operatorname{sen}((\pi/4)k) \end{aligned}$$

com  $x(0) = y(0) = 1$ , determine os nove primeiros termos da sequência  $y(k)$ .

Solução:

Os resultados estão na seguinte planilha (Tabela 16.2).

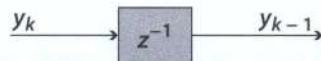
**Tabela 16.2**

$k$	$u(k) = \operatorname{sen}((\pi/4)k)$	$x(0) = 1$	$y(0) = 1$	$x(K+1) = y(k)$	$(-0,3y(k))$	$y(K+1)$	$k+1$
0	0,000	1,000	0,400	1,000	-0,300	0,100	1
1	0,707	1,000	0,400	0,100	-0,030	1,077	2
2	1,000	0,100	0,040	1,077	-0,323	0,717	3
3	0,707	1,077	0,431	0,717	-0,215	0,923	4
4	0,000	0,717	0,287	0,923	-0,277	0,010	5
5	-0,707	0,923	0,369	0,010	-0,003	-0,341	6
6	-1,000	0,010	0,004	-0,341	0,102	-0,894	7
7	-0,707	-0,341	-0,136	-0,894	0,268	-0,575	8
8	0,000	-0,894	-0,358	-0,575	0,173	-0,185	9

## 16.6 Diagramas de blocos

As equações de diferenças podem ser representadas por meio de diagramas de blocos, que seguem as regras gerais dos diagramas usados para represen-

tação do modelo matemático dos sistemas lineares. Para representar equações como a dos exemplos anteriores, basta acrescentarmos aos elementos habituais um bloco de retardo ou de atraso unitário, onde a variável de entrada seja  $y_k$  e a de saída seja  $y_{k-1}$ ; se for  $y_{k+2}$ , a saída será  $y_{k+1}$ ; e assim por diante. Esse bloco de retardo é designado pelo símbolo  $z^{-1}$  (Figura 16.10), por razões que serão vistas posteriormente.



**Figura 16.10**

### Exemplo 16.8

Represente por meio de um diagrama de blocos a equação do Exemplo 16.5:

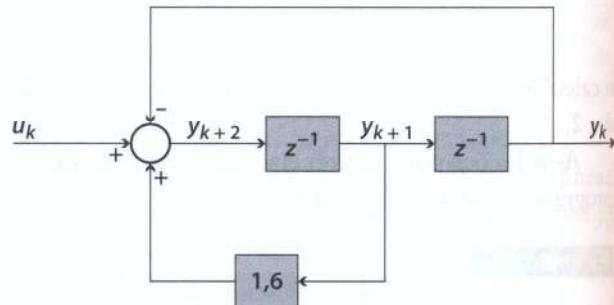
$$y_{k+2} - 1,6y_{k+1} + y_k = u_k$$

Solução:

Pondo-se a equação dada na forma

$$y_{k+2} = 1,6y_{k+1} - y_k + u_k$$

a construção do diagrama de blocos (Figura 16.11) fica imediata.



**Figura 16.11**

### Exemplo 16.9

(a) Para  $t = 0$ , a tensão no condensador (do circuito indicado na Figura 16.12a) é  $y_0 = 2$  volts. Para  $t > 0$ , tem-se  $u(t) = 0$ . Determine  $y(t)$  para  $t > 0$ .

(b) No diagrama de blocos da Figura 16.12b, determine a resposta  $y^*(k)$ , supondo  $u(k) = 0$  para  $k \geq 0$  e  $y_0 = y(0) = 2$  V.

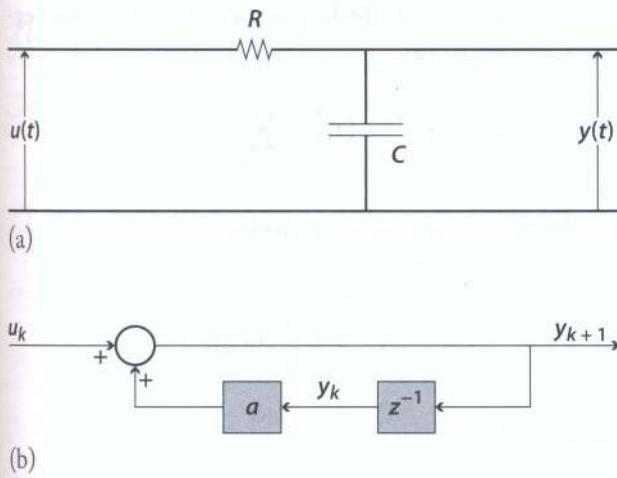


Figura 16.12

(c) Qual deve ser o valor da constante  $a$ , do diagrama de blocos do item (b), para que a resposta discreta  $y^*(k)$  seja idêntica à sequência formada pela amostragem ideal, de período  $T$ , da resposta  $y(t)$ , do circuito do item (a)?

Solução:

(a) Neste caso, a solução é bem conhecida:

$$y = 2e^{-\frac{t}{RC}}$$

(b) Do diagrama, resulta  $y_{k+1} = u_k + ay_k$  com  $u_{k=0}$  para  $k \geq 0$ , e  $y_0 = 2$ .

Resulta:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= ay_k \\ k=0 &\rightarrow y_1 = ay_0 = 2a \\ k=1 &\rightarrow y_2 = ay_1 = 2a^2 \\ k=2 &\rightarrow y_3 = ay_2 = 2a^3 \end{aligned}$$

Termo geral:

$$y_k = 2a^k$$

(c) A resposta amostrada do circuito do item (a), comparada com o resultado do item (b), nos dá:

$$y_k = 2e^{-\frac{-kT}{RC}} = 2a^k$$

Dessa comparação, resulta:

$$a = e^{-\frac{T}{RC}}$$

### Exemplo 16.10

(Aplicação em que a variável independente não é o tempo).

Determine as tensões  $V_k$  nos nós do circuito da Figura 16.13.

Solução:

Seja  $X$  a resistência equivalente do circuito visto de 1-1' (compreendendo infinitas malhas iguais). O restante do circuito visto de 2-2' (compreendendo também infinitas malhas iguais) será  $X$ . Logo (Figura 16.14):

$$X = \frac{2R(R+X)}{3R+X}$$

$$X^2 + RX - 2R^2 = 0$$

$$X_{1,2} = \begin{cases} = R \\ = -2R \end{cases}$$

Como devemos ter  $X > 0$ , a solução é  $X = R$ .

Na malha reduzida (Figura 16.15), tem-se:

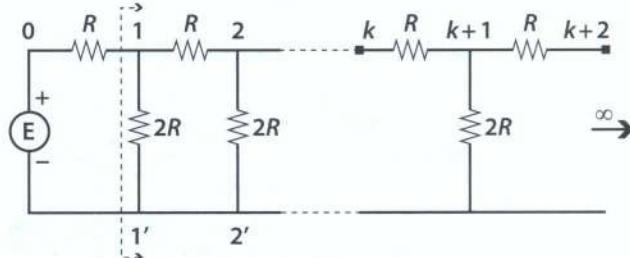


Figura 16.13

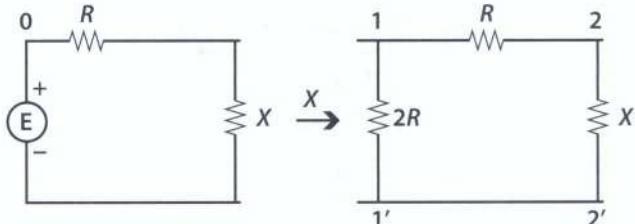


Figura 16.14

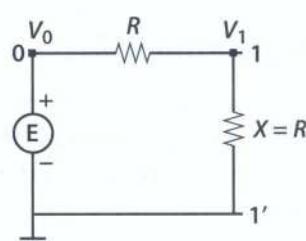


Figura 16.15

$$V_0 = E \quad \text{e} \quad V_1 = \frac{E}{2}$$

Essas são as condições de contorno, equivalentes às condições iniciais, nos sistemas em que a variável independente é o tempo.

A equação nodal de uma seção típica do circuito resulta:

$$\frac{V_k - V_{k+1}}{R} = \frac{V_{k+1}}{2R} + \frac{V_{k+1} - V_{k+2}}{R} \quad \text{ou}$$

$$V_{k+2} = \frac{5}{2}V_{k+1} - V_k$$

que é a equação de diferenças do circuito dado (ver Figura 16.16). Então, por recorrência, obtemos:

para  $k=0$

$$\longrightarrow V_2 = \frac{5}{2}V_1 - V_0 = \frac{5E}{4} - E = \frac{E}{4} \longrightarrow$$

$$V_2 = \frac{E}{2^2}$$

para  $k=1$

$$\longrightarrow V_3 = \frac{5}{2}V_2 - V_1 = \frac{5E}{8} - \frac{E}{2} = \frac{E}{8} \longrightarrow$$

$$V_3 = \frac{E}{2^3}$$

e assim por diante. O termo geral será:

$$V_i = \frac{E}{2^i} \quad \text{com } i = 0, 1, 2, \dots$$

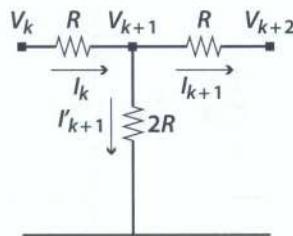


Figura 16.16

### ■ 16.6.1 Transformada Z

Vimos, no item 16.2, que um sinal amostrado ideal é formado por uma sequência de impulsos que podem ser representados matematicamente pela expressão:

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \delta(t - kT)$$

A transformada de Laplace dessas equações permite-nos escrever:

$$X^*(s) = \mathcal{L}\{x^*(t)\} = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) e^{-skT}$$

Definimos, então, a variável  $z$ :

$$z = e^{sT}$$

$$\therefore s = \frac{1}{T} \ln(z)$$

Resulta:

$$X^*(s) = X^*(\ln(z)/T) = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

Dessa forma, define-se a transformada  $Z$  de uma função de tempo discreto:

$$Z\{x^*\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

#### ■ 16.6.1.1 Pequena tabela de transformadas z

1. Impulso unitário  $\delta(t)$ . Sabemos que  $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = 1$

$$\delta(t)^* = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(kT) \delta(t - kT) =$$

$$\delta(0)\delta(t) + \delta(T)\delta(t - T) + \dots = \delta(t)$$

Então,

$$Z\{\delta(t)^*\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{\delta(kT)\} z^{-k} = 1$$

2. Degrau unitário  $h(t)$ . Também sabemos que  $\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{1}{s}$

$$h^*(t) = \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t - kT) & \text{para } t \geq 0 \\ 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Logo,

$$Z\{h(t)^*\} = \sum_{k=0}^{\infty} \{\delta(t - kT)\} z^{-k}$$

ou

$$Z\{b(t)^*\} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + z^{-3} + \dots = \frac{1}{1 - z^{-1}} = \frac{z}{z-1} \quad \text{ou seja,}$$

válido para  $|z^{-1}| < 1$

3. Sinal exponencial  $e^{-at}$ . Temos também

$$\mathcal{L}\{e^{-at}\} = \frac{1}{s+a}$$

$$\left\{e^{-at}\right\}^* = \begin{cases} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} \delta(t - kT) & \text{para } t \geq 0 \\ = 0 & \text{para } t < 0 \end{cases}$$

Logo,

$$Z\{(e^{-at})^*\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT} z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-aT} z^{-1})^k = \frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

válido para  $|e^{-aT} z^{-1}| < 1$

4. Potência  $b^t$ .

Fazendo-se  $b^t = e^{-at}$ . No caso do sinal exponencial anterior, resulta:  $b^{kT} = e^{-akT}$ . (Em ambos os casos, pode-se escrever:  $b = e^{-a}$  e também  $a = -\ln b$ .)

$$Z\{(b^t)\} = \frac{1}{1 - b^T z^{-1}} = \frac{z}{z - b^T}$$

válido para  $|b^T z^{-1}| < 1$

## 16.7 Teoremas importantes

### ■ 16.7.1 Teorema da multiplicação por $t$

$$Z\{(tx(t))^*\} = -Tz \frac{d}{dz} X(z)$$

Demonstração:

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$$Z\{(tx(t))^*\} = \sum_{k=0}^{\infty} kT x(kT) z^{-k} =$$

$$-T \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) : [-k z^{-(k+1)}] = -Tz \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) \frac{d}{dz} (z^{-k}) =$$

$$-Tz \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} = -Tz \frac{d}{dz} X(z)$$

$$Z\{(tx(t))^*\} = -Tz \frac{d}{dz} X(z)$$

Como aplicação desse teorema, podemos obter a transformada  $Z$  de uma rampa unitária.

$$x^*(t) = h^*(t) = 1, \text{ para } t \geq 0.$$

$$\text{Sabemos que, nesse caso, } X(z) = \frac{z}{z-1}.$$

Sabemos que a rampa  $w(t) = th(t)$ . Logo,

$$Z\{w(t)^*\} = Z\{(tx(t))^*\} = -Tz \frac{d}{dz} \left( \frac{z}{z-1} \right)$$

ou

$$Z(w(kT)^*) = W(z) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Com esse exemplo, completamos a nossa pequena tabela da transformada  $Z$  (Tabela 16.3).

**Tabela 16.3** Tabela de transformada

f(t)	F(s)	F(z)
$\delta(t)$	1	1
$h(t)$	$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
$e^{-at}$	$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT}}$
$b^t$	$\frac{1}{s-\ln b}$	$\frac{z}{z-b^T}$
$\omega(t)$	$\frac{1}{s^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$

### ■ 16.7.2 Teorema do deslocamento (ou da translação no campo real)

$$Z\{x^*(k+1)\} = zX(z) - zx_0$$

Demonstração:

$$Z\{x^*(t)\} = X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}$$

$$\begin{aligned} Z\{x^*(t+T)\} &= \sum_{k=0}^{\infty} x((k+1)T) z^{-k} = \\ z \sum_{k=0}^{\infty} x((k+1)T) z^{-(k+1)} &= z \sum_{k=1}^{\infty} x((k)T) z^{-k} = \\ z \left( \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} - x(0) \right) &= z(X(z) - x_0) \end{aligned}$$

onde  $x_0 = x(0)$  é o valor de  $x(kT)$  para  $k = 0$ .

### Aplicação:

Esta propriedade permite-nos obter a solução explícita de equações de diferenças, como a seguinte:

$$x(k+1) - x(k) = 0 \quad \text{com} \quad x_0 = 2$$

### Solução:

Aplicando-se a transformada  $Z$  a essa equação, resulta, de acordo com o teorema do deslocamento, em:

$$zX(z) - 2z - X(z) = 0 \quad \text{ou} \quad X(z) = 2 \frac{z}{z-1}$$

Logo,

$$x^*(k) = 2h^*(k) = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-k)$$

Isto é,  $x^*(k)$  é um degrau de altura 2, o que pode ser verificado pela solução por recorrência.

### Observação:

$$Z\{x^*(k+1)\} = zZ\{x^*(k)\} + zx_0$$

Substituindo-se  $k+1$  por  $k$ ,

$$Z\{x^*(k)\} = zZ\{x^*(k-1)\} + zx_{-1}$$

Lembrando que  $x(k) = 0$  para  $k < 0$  resulta  $x_{-1} = x(-1) = 0$ , e, portanto,

$$\begin{aligned} Z\{x^*(k)\} &= zZ\{x^*(k-1)\} \quad \text{ou} \\ z^{-1}Z\{x^*(k)\} &= Z\{x^*(k-1)\} \end{aligned}$$

Igualando termo a termo os elementos das duas sequências, resulta:

$$z^{-1}x(k) = x(k-1)$$

Assim, a multiplicação por  $z^{-1}$  no campo complexo corresponde, no campo real, a atrasar o sinal de  $x(k)$  para

$x(k-1)$ , isto é, atrasar de um intervalo unitário de tempo  $T$ . Por isso mesmo é que  $z^{-1}$  é denominado operador de atraso unitário e usado como tal, nos diagramas de blocos.

Generalização:

O teorema (2) pode ser generalizado. De fato,

$$\begin{aligned} Z\{x^*(k+2)\} &= zZ\{x^*(k+1)\} - zx(1) \\ Z\{x^*(k+2)\} &= z[zZ\{x^*(k)\} - zx(0)] - zx(1) \\ Z\{x^*(k+2)\} &= z^2Z\{x^*(k)\} - z^2x(0) - zx(1) \end{aligned}$$

Prosseguindo, vem:

$$\begin{aligned} Z\{x^*(k+m)\} &= \\ z^m Z\{x^*(k)\} - z^m x(0) - z^{m-1}x(1) - z^{m-2}x(2) - \dots & \\ - zx(m-1) \end{aligned}$$

### ■ 16.7.3 Teorema do valor final

Se a função  $f^*(t)$  possuir transformada  $F(z)$  e se a função  $(1 - z^{-1})F(z)$  for estável, então, demonstra-se que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(kT)) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} F(z) \right)$$

#### Exemplo 16.11 Exemplo de aplicação

Supondo condições iniciais ( $C.I. = 0$ ) na equação de diferenças a seguir, obtenha a expressão de  $Y(z)$  e o valor final de  $y(k)$ .

$$\begin{aligned} y(k+3) - 1,25y(k+1) + 0,25y(k) &= \\ 0,25\delta(k+2) & \\ (z^3 - 1,25z + 0,25)Y(z) &= 0,25z^2 \\ Y(z) &= \frac{0,25z^2}{z^3 - 1,25z + 0,25} = \\ \frac{0,25z^2}{(z-1)(z^2+z-0,25)} & \\ \lim_{k \rightarrow \infty} y(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} Y(z) = \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1}{z} & \frac{0,25z^2}{z^3 + 1,25z + 0,25} = \\ \lim_{z \rightarrow 1} \frac{0,25z}{z^2 + z - 0,25} &= \frac{0,25}{1,75} = 0,143 \end{aligned}$$

### 16.8 Inversão da transformada $Z$

Dois métodos usados são:

- (a) expansão em frações parciais.
- (b) desenvolvimento em série de potências.

## ■ 16.8.1 Inversão por expansão em frações parciais

É o mesmo método utilizado para inversão da transformada de Laplace. O processo é o seguinte: determina-se a função  $X(z)$  a ser invertida e expande-se em frações parciais a relação  $X(z)/z$ . Usa-se, então, a tabela de transformadas (Tabela 16.3) para obtenção de  $x(k)$ .

### Exemplo 16.12

Determinar o termo geral  $x(k)$  pela transformada inversa de Laplace da expressão:

$$X(z) = \frac{3z}{(z-0,2)(z-0,5)}$$

Solução:

Por expansão em frações parciais, resulta:

$$\begin{aligned} \frac{X(z)}{z} &= \frac{10}{z-0,5} - \frac{10}{z-0,2} \\ \text{ou} \quad X(z) &= \frac{10z}{z-0,5} - \frac{10z}{z-0,2} \end{aligned}$$

Usando agora a tabela de transformadas  $Z$ , obtemos:

$$\begin{aligned} x(k) &= 10(0,5)^k - 10(0,2)^k \quad \text{ou} \\ x(k) &= 10((0,5)^k - (0,2)^k) \end{aligned}$$

Calculando os cinco primeiros termos da sequência, obtemos:

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 2,1; \quad x_3 = 1,17; \\ x_4 &= 0,609; \quad x_5 = 0,309 \end{aligned}$$

## ■ 16.8.2 Inversão por desenvolvimento em série infinita

A própria definição de transformada  $Z$  permite-nos escrever:

$$\begin{aligned} Z^{-1}\{X(z)\} &= Z^{-1}\left\{\sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k}\right\} = \\ x(0)\delta(t) + x(T)\delta(t-T) + x(2T)\delta(t-2T) + \dots \end{aligned}$$

Por esse método, vamos obter os valores numéricos sucessivos de  $x(kT)$ , mas não sua expressão geral, na forma explícita, como no método anterior. Quando  $X(z)$  é apresentado como quociente de dois polinômios em  $z$ , pode-se obter o desenvolvimento em série, por divisão infinita.

### Exemplo 16.13

A mesma transformada  $X(z)$  do caso anterior:

$$X(z) = \frac{3z}{(z-0,2)(z-0,5)} = \frac{3z}{z^2 - 0,7z + 0,1}$$

Dividindo-se denominador e numerador por  $z^2$  (a maior potência de  $z$  do denominador):

$$X(z) = \frac{3z^{-1}}{1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2}}$$

Efetuando-se a divisão, resulta na Expressão 16.1.

Obtém-se, então,

$$\begin{aligned} x_0 &= 0; \quad x_1 = 3; \quad x_2 = 2,1; \quad x_3 = 1,17; \\ x_4 &= 0,609; \quad x_5 = 0,309; \quad \dots \end{aligned}$$

que confere com o resultado do exemplo anterior.

$$\begin{array}{r} 3z^{-1} \quad | 1 - 0,7z^{-1} + 0,1z^{-2} \\ -3z^{-1} + 2,1z^{-2} - 0,3z^{-3} \quad 3z^{-1} + 2,1z^{-2} + 1,17z^{-3} + 0,609z^{-4} + 0,309z^{-5} + \dots \\ \hline -2,1z^{-2} + 1,47z^{-3} - 0,21z^{-4} \\ 1,17 \quad z^{-3} - 0,21z^{-4} \\ -1,17z^{-3} + 0,819z^{-4} - 0,117z^{-5} \\ 0,609z^{-4} - 0,117z^{-5} \\ -0,609z^{-4} + 0,426z^{-5} - 0,0609z^{-6} \\ 0,309z^{-5} - 0,0609z^{-6} \\ \dots \end{array}$$

**Expressão 16.1** Divisão do Exemplo 16.13.

## 16.9 Aplicações da transformada Z na solução das equações de diferenças

A seguir, alguns exemplos de utilização da transformada Z na solução de equações de diferenças finitas.

### Exemplo 16.14

Determine a solução da equação de diferenças finitas,

$$x(k+2) + 5x(k+1) + 6x(k) = u(k)$$

indicando o termo geral e os quatro primeiros elementos da sequência, nos casos seguintes:

- (a) Com  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 1$  e  $u(k) = 0$ .
- (b) Com  $x(0) = 0$ ,  $x(1) = 0$  e  $u(k) = h(k)$  = degrau unitário.

Solução:

Transformando-se a equação dada, vem:

$$z^2 X(z) - z^2 x(0) - z x(1) + 5zX(z) - 5z x(0) + 6X(z) = U(z)$$

$$(a) z^2 X(z) - z + 5zX(z) + 6X(z) = 0$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{z^2 + 5z + 6} = \frac{z}{(z+2)(z+3)} \\ X(z) &= z \left( \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3} \right) \end{aligned}$$

A transformada inversa:

$$x(k) = (-2)^k - (-3)^k \quad \text{para } k \geq 0$$

Os seis primeiros termos de sequência estão na Tabela 16.4.

$$(b) (z^2 + 5z + 6) X(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$\begin{aligned} X(z) &= \frac{z}{(z-1)(z+2)(z+3)} = \\ &\frac{1}{2} \frac{z}{(z-1)} - \frac{1}{3} \frac{z}{(z+2)} + \frac{1}{4} \frac{z}{(z+3)} \end{aligned}$$

Pela transformada inversa:

$$x(k) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}(-2)^k + \frac{1}{4}(-3)^k$$

Os seis primeiros termos de sequência estão na Tabela 16.5.

Tabela 16.5

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$x(k)$	0	1	-5	19	-65	211	-665

### Exemplo 16.15

Considere as equações de diferenças finitas:

$$\begin{aligned} x(k+1) &= 0,5y(k) + 0,2u(k) \\ y(k+1) &= 0,2x(k) + y(k) + u(k) \end{aligned}$$

com as condições iniciais  $x(0) = 0,8$  e  $y(0) = 0$  e entrada  $u(k) = \begin{cases} 0 & \text{para } k < 0 \\ 1 & \text{para } k \geq 0 \end{cases}$

- (a) Determine os quatro primeiros termos da sequência  $y(k)$ .

- (b) Represente essas equações por um diagrama de blocos com operadores de atraso unitário de entrada  $u(k)$  e saídas  $x(k)$  e  $y(k)$ .

- (c) Determine a transformada Z dessas equações e a expressão de  $Y(z)$ .

Solução:

- (a) O cálculo dos quatro primeiros valores de  $x(k)$  e  $y(k)$  será feito por recorrência, com o auxílio da Tabela 16.6.

- (b) Diagrama de blocos (Figura 16.17):

$$\begin{aligned} (c) zX(z) - zx(0) &= 0,5Y(z) + 0,2U(z) \\ zY(z) - zy(0) &= 0,2X(z) + Y(z) + U(z) \end{aligned}$$

Considerando as condições iniciais:

$$\begin{aligned} zX(z) &= 0,8z + 0,5Y(z) + 0,2U(z) \\ zY(z) &= 0,2X(z) + Y(z) + U(z) \end{aligned}$$

Multiplicando a segunda equação por  $z$  e substituindo  $zX(z)$  resultante na segunda equação modificada, vem:

$$z^2 Y(z) = 0,2(0,8z + 0,5Y(z) + 0,2U(z)) + zY(z) + zU(z)$$

o que permite escrever para  $U(z) = \frac{z}{z-1}$

$$Y(z) = \frac{0,16z}{z^2 - z - 0,1} + \frac{(z+0,04)z}{(z-1)(z^2 - z - 0,1)}$$

ou

$$Y(z) = \frac{1,16z(z+0,103)}{(z-1)(z^2 - z - 0,1)}$$

Tabela 16.4

$k$	0	1	2	3	4	5	6
$x(k)$	0	1	-5	19	-65	211	-665

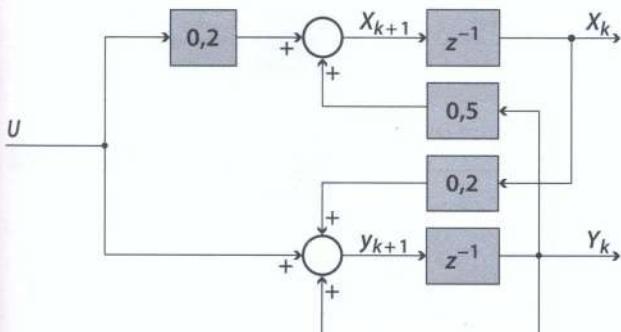


Figura 16.17

Tabela 16.6

$k$	$x(k)$	$y(k)$	$x(k+1)$	$y(k+1)$	$u(k)$
0	0,8	0	0,2	1,16	1
1	0,2	1,16	0,78	2,2	1
2	0,78	2,2	1,3	3,356	1
3	1,3	3,356	1,878	4,616	1
4	1,878	4,616	2,508	5,992	1

Exemplo 16.16

Determine o termo geral da solução da equação:

$$x(k+2) - 0,9x(k+1) + 0,2x(k) = u(k)$$

Considere os seguintes casos:

(a)  $u(k) = 0$  para  $k \geq 0$ ,  $x(0) = 1$  e  $x(1) = 0$ .

(b)  $u(k) = 1$  para  $k \geq 0$  e  $C.I. = 0$ .

Solução:

$$\begin{aligned} z^2X(z) - z^2x(0) - zx(1) - 0,9zX(z) + \\ 0,9zx(0) + 0,2X(z) = U(z) \\ (z^2 - 0,9z + 0,2)X(z) = z(z - 0,9)x(0) + \\ zx(1) + U(z) \end{aligned}$$

(a)  $U(z) = 0 \quad x(0) = 1 \quad x(1) = 0 \quad \therefore$

$$\begin{aligned} X(z) = \frac{z(z - 0,9)}{z^2 - 0,9z + 0,2z} = \frac{z(z - 0,9)}{(z - 0,4)(z - 0,5)} = \\ \frac{5z}{(z - 0,4)} - \frac{4z}{(z - 0,5)} \\ x(k) = 5(0,4)^k - 4(0,5)^k \end{aligned}$$

(b)  $U(z) = \frac{z}{z-1} \quad x(0) = 0 \quad x(1) = 0 \quad \therefore$

$$\begin{aligned} (z^2 - 0,9z + 0,2)X(z) = \\ z(z - 0,9)x(0) + zx(1) + U(z) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z^2 - 0,9z + 0,2)X(z) &= \frac{z}{z-1} \\ X(z) &= \frac{z}{(z-1)(z-0,4)(z-0,5)} \\ X(z) &= \frac{10}{3} \frac{z}{z-1} - 20 \frac{z}{z-0,5} + \frac{50}{3} \frac{z}{z-0,4} \\ x(k) &= \frac{10}{3} - 20(0,5)^k + \frac{50}{3}(0,4)^k \end{aligned}$$

## 16.10 Função de transferência de tempo discreto (pulsada)

O modelo matemático de um sistema dinâmico linear de tempo discreto é constituído por equações de diferenças finitas, de forma semelhante aos sistemas dinâmicos de tempo contínuo que são descritos por meio de equações diferenciais ordinárias. No caso de sistemas lineares de tempo discreto, o modelo matemático pode sempre ser posto sob a forma de uma única equação linear de diferenças finitas relacionando diretamente as variáveis de entrada e de saída:

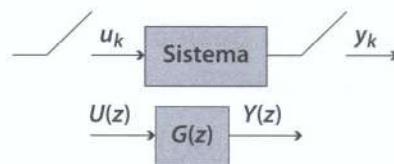
$$\begin{aligned} y_{k+n} + a_{n-1}y_{k+n-1} + a_{n-2}y_{k+n-2} + \cdots + a_2y_{k+2} + a_1y_{k+1} + \\ a_0y_k = b_m u_{k+m} + b_{m-1}u_{k+m-1} + b_{m-2}u_{k+m-2} + \cdots \\ + b_2u_{k+2} + b_1u_{k+1} + b_0u_k \end{aligned}$$

Supondo  $C.I. = 0$ , a transformada Z dessa equação permite-nos escrever:

$$(z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0)Y(z) = (b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + b_{m-2}z^{m-2} + \cdots + b_2z^2 + b_1z + b_0)U(z)$$

Esta última equação permite a definição de função de transferência pulsada (ou função de transferência de tempo discreto — ver Figura 16.18):

$$\begin{aligned} G(z) &= \left. \frac{Y(z)}{U(z)} \right|_{ci=0} = \\ &\frac{b_mz^m + b_{m-1}z^{m-1} + b_{m-2}z^{m-2} + \cdots + b_2z^2 + b_1z + b_0}{z^n + a_{n-1}z^{n-1} + a_{n-2}z^{n-2} + \cdots + a_2z^2 + a_1z + a_0} \end{aligned}$$



Representação de um sistema de tempo discreto, no domínio do tempo e no campo da transformada Z.

Figura 16.18

Como no caso das funções de transferência de tempo contínuo, é expressa pela relação de dois polinômios, a saber:

$$G(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

onde

$$\begin{aligned} P(z) &= b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + b_{m-2} z^{m-2} + \dots \\ &\quad + b_2 z^2 + b_1 z + b_0 \end{aligned}$$

é o polinômio do numerador e

$$\begin{aligned} Q(z) &= z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots \\ &\quad + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 \end{aligned}$$

é o polinômio característico.

A nomenclatura relativa às funções de transferência de tempo contínuo,  $G(s)$ , é extensível às funções de transferência de tempo discreto,  $G(z)$ : polos, zeros, representação no plano complexo, constantes de ganho, resposta impulsiva, diagramas de blocos etc. Uma propriedade importante é a de permitir calcular-se facilmente a resposta do sistema a um sinal de entrada qualquer no campo complexo.

$$Y(z) = G(z)U(z)$$

A inversão da transformada permite que se conheça a resposta  $y_k$  do sistema (domínio do tempo). A resposta no tempo pode ser obtida através do termo geral  $y_k$  ou através da equação de diferenças que representa o sistema, como veremos com auxílio das aplicações.

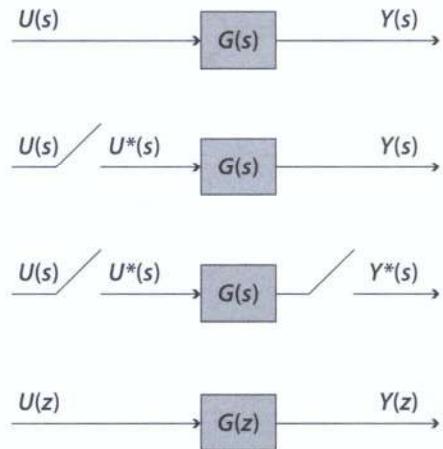
Outra propriedade importante da função de transferência de tempo discreto é viabilizar a álgebra dos diagramas de blocos.

## 16.11 Associação de sistemas de tempo discreto

### ■ 16.11.1 Casos básicos

Vejamos (Figura 16.19)

$$\begin{aligned} Y(s) &= G(s)U(s) \\ Y(s) &= G(s)U^*(s) \\ Y^*(s) &= G^*(s)U^*(s) \end{aligned}$$



**Figura 16.19**

ou, em Z

$$Y(z) = G(z)H(z)$$

### Exemplo 16.17

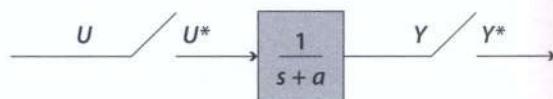
Determine a função de transferência pulsada para o caso do sistema indicado na Figura 16.20.

Solução:

$$Y^*(s) = G^*(s)U^*(s)$$

Pela Tabela 16.3:

$$G(s) = \frac{1}{s+a} \longrightarrow G(z) \frac{z}{z-e^{-at}}$$



**Figura 16.20**

### Exemplo 16.18

Determine a função de transferência pulsada  $F(z) = Y(z)/U(z)$  nos casos 1 e 2, a seguir (figuras 16.21 e 16.22), supondo que não existe efeito de carga.

Solução Caso 1:

$$F_1(z) = G_1(z)G_2(z) = \frac{z^2}{(z-e^{-1T})(z-e^{-3T})}$$

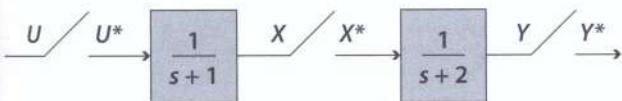


Figura 16.21

Solução Caso 2:

$$\begin{aligned} F_2(s) &= \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{2-1} \left( \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \right) \\ F_2(z) &= G_1 G_2(z) = \left( \frac{z}{z-e^{-T}} - \frac{z}{z-e^{-2T}} \right) = \\ &= \frac{z(e^{-iT} - e^{-2iT})}{(z-e^{-iT})(z-e^{-2iT})} \end{aligned}$$

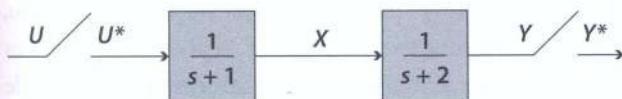


Figura 16.22

**Exemplo 16.19**Obtenha a função de transferência pulsada  $G(z)$  correspondente a  $G(s)$ , sendo:

$$G(s) = \frac{1-e^{-iT}}{s} \left( \frac{1}{s+1} \right)$$

Determine também a resposta impulsiva do sistema.

Solução:

Escreve-se

$$G(s) = (1-e^{-iT}) \frac{1}{s(s+1)}$$

e considera-se  $e^{-iT}$  como um atraso de um período de amostragem:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(s+1)} &= \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1} \xrightarrow{Z} \\ \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-e^{-iT}} &= \frac{z(1-e^{-iT})}{(z-1)(z-e^{-iT})} \\ G(z) &= (1-z^{-1}) \frac{z(1-e^{-iT})}{(z-1)(z-e^{-iT})} = \frac{1-e^{-iT}}{(z-e^{-iT})} \end{aligned}$$

Agora, a determinação da resposta impulsiva. Note que:

$$\begin{aligned} G(z) &= (1-e^{-iT}) \frac{1}{z-e^{-iT}} = (1-e^{-iT}) \frac{z}{z-e^{-iT}} z^{-1} \\ &\xrightarrow{Z^{-1}} g(kT) = (1-e^{-iT}) e^{-(k-1)T} \end{aligned}$$

(termo geral para  $k \geq 0$ ).

**16.11.2 Algumas configurações típicas**

Um procedimento prático para determinar a função de transferência pulsada equivalente dos diagramas a seguir (figuras 16.23 a 16.27) é:

- (i) escrever a função resultante em  $s$ , como se não houvesse amostradores;
- (ii) verificar onde aparecem produtos de funções de transferência em  $s$  e tomá-las isoladamente em  $Z$ , somente se entre seus blocos existir um ramo com um amostrador (ver Figura 16.23);
- (iii) caso contrário, se não houver amostradores entre os blocos, multiplicar primeiro essas funções em  $s$  para depois tomar a sua transformada  $Z$  (ver Figura 16.24).

Veja na Tabela 16.7 alguns casos ilustrativos.

Tabela 16.7

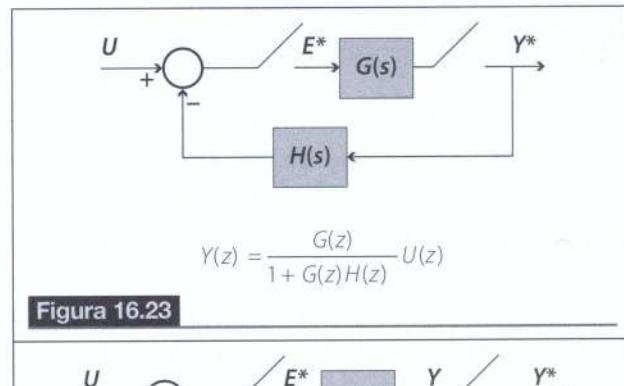


Figura 16.23

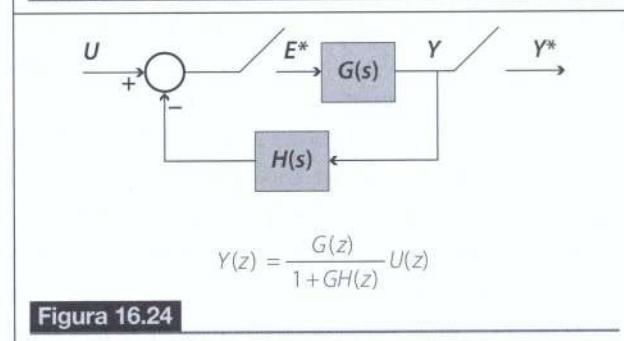


Figura 16.24

(continua)

(continuação)

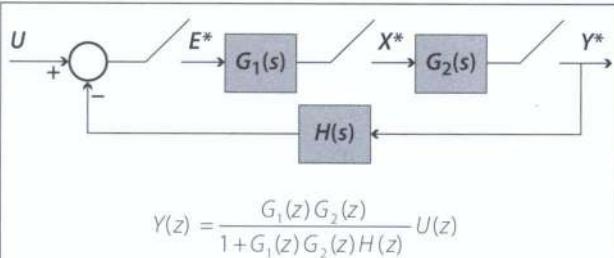


Figura 16.25

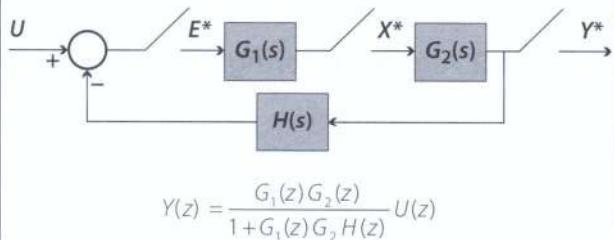


Figura 16.26

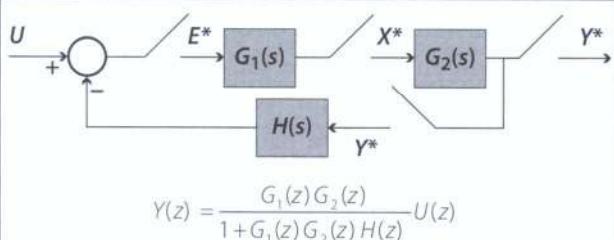


Figura 16.27

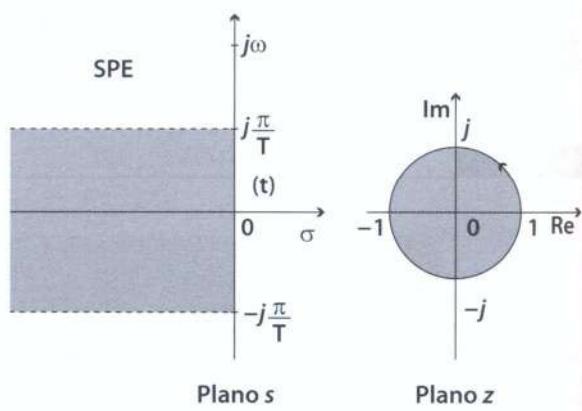


Figura 16.28

gem. Então, para que um sistema de tempo discreto, expresso em função da variável  $z$ , seja estável, todos os seus polos devem situar-se no interior do círculo de raio unitário centrado na origem.

Note que  $\phi$  e, portanto, também  $\omega T$ , podem variar de  $-\infty$  a  $+\infty$ . Veja ainda que cada vez que  $\phi$  dá uma volta completa ( $\Delta\phi = 2\pi$ ), os polos no plano  $z$  se repetem, mas no plano  $s$ , eles passam de uma faixa de largura  $\Delta\omega = \Delta\phi/T = 2\pi/T$  para outra. Assim, os polos existentes no plano  $z$  ficam mapeados repetidamente no plano  $s$ , em faixas de largura  $\Delta\omega = 2\pi/T$ . Então, um sistema estável de tempo discreto tem um número finito de polos no plano  $z$ , mas um número infinito de polos no plano  $s$  (pois a constelação de polos se repete em cada faixa de largura  $2\pi/T$ ). Note, também, que o inverso do período de amostragem é a frequência de amostragem  $f_s = 1/T$ , em Hz. Em radianos por segundo, temos:

$$\omega_s = 2\pi/T = 2\pi f_s$$

Para efeito do mapeamento dos polos do plano  $z$  no plano  $s$ , a faixa delimitada pelas frequências  $-\omega_s = -\omega_s/2$  e  $\omega_s = +\omega_s/2$  é denominada faixa primária. As demais são denominadas faixas complementares:

$$\dots; -\frac{3\omega_s}{2}, -\frac{\omega_s}{2}; \frac{\omega_s}{2}, \frac{3\omega_s}{2}; \dots$$

A região de estabilidade pode ser justificada de outra forma. Uma função de transferência  $G(z)$  pode ser expandida em frações parciais de modo que seu comportamento no tempo discreto seja dado por um somatório de parcelas de potência em  $k$ . Assim, o sistema é estável se o módulo do número complexo  $p_n$  for menor que a unidade.

## 16.12 Noções de estabilidade

Um sistema linear de tempo contínuo é estável se todos os seus polos estiverem situados no semiplano esquerdo do plano  $s$  (ver Figura 16.28). No plano  $z$ , o semiplano esquerdo de  $s$  corresponde a um círculo de raio unitário, centrado na origem. Ou seja, o semiplano esquerdo do plano  $s$  é mapeado dentro do círculo unitário centrado na origem do plano complexo. De fato, sendo,  $z = e^{j\omega T} = |z|e^{j\phi}$  e  $s = \sigma + j\omega$ , vem  $z = e^{\sigma T}e^{j\omega T}$ , com  $|z| = e^{\sigma T}$  e  $\phi = \omega T$ .

No semiplano esquerdo do plano  $s$ , tem-se  $\sigma < 0$ . Portanto, o correspondente módulo de  $z$  fica entre 0 e 1, o que define um círculo de raio unitário centrado na origem do plano  $z$ . O eixo imaginário é dado por  $\sigma = 0$  no plano  $s$  e corresponde a  $|z| = 1$ , que é a circunferência de raio unitário e centro na origem, do plano  $z$ . Os polos do sistema que no plano  $s$  ficam no semiplano esquerdo, no plano  $z$ , devem situar-se no interior do círculo de raio unitário centrado na origem.

$$G(z) = \frac{b_m z^m + b_{m-1} z^{m-1} + b_{m-2} z^{m-2} + \dots + b_2 z^2 + b_1 z + b_0}{z^n + a_{n-1} z^{n-1} + a_{n-2} z^{n-2} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0} = \sum_{i=1}^n c_n \frac{z}{z - p_n}$$

$$\xrightarrow{Z^{-1}} g(kT) = \sum_{i=1}^n c_n (p_n)^k$$

**Exemplo 16.20**

No sistema de tempo discreto indicado pelo diagrama de blocos da Figura 16.29, quais são os valores de T que garantem a estabilidade do sistema?

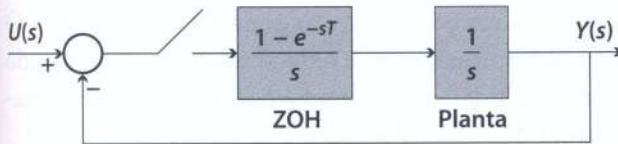
$$G(s) = (1 - e^{-sT}) \frac{1}{s^2}$$

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \frac{Tz}{(1 - z)^2} = \frac{z-1}{z} \cdot \frac{Tz}{(z-1)^2} = \frac{T}{z-1}$$

$$F(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{T}{z-(1-T)}$$

Para que o sistema seja estável, resulta:

$$|1-T| < 1 \longrightarrow -1 < (1-T) < 1 \longrightarrow 0 < T < 2$$

**Figura 16.29****Exemplo 16.21**

O diagrama de blocos da Figura 16.30 representa um sistema de controle dotado de controlador proporcional. Determine se o sistema é ou não estável, para  $K_p = 1$ .

Dado:  $T = 1$  segundo.

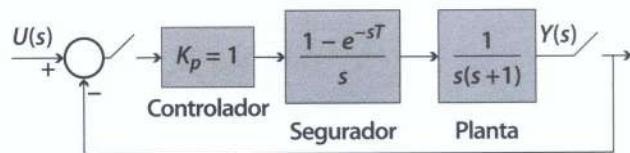
Solução:

$$G(s) = \frac{1-e^{-s}}{s} \frac{1}{s(s+1)} = (1-e^{-s}) \frac{1}{s^2(s+1)}$$

$$G(s) = (1-e^{-s}) \left( \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1} \right)$$

Passando para a transformada Z, obtém-se:

$$G(z) = \frac{z-1}{z} \left( \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{z-1} + \frac{z}{1-e^{-1}} \right)$$

**Figura 16.30**

ou

$$G(z) = \frac{0,368z + 0,264}{(z-1)(z-0,368)}$$

Em malha fechada, resulta:

$$F(z) = \frac{0,368z + 0,264}{z^2 - z + 0,632}$$

A equação característica  $z^2 - z + 0,632 = 0$  tem como raízes:

$$z_{1,2} = 0,5 \pm j0,618 = 0,795[51]$$

O módulo de ambas as raízes é  $0,795 < 1$ . Logo, o sistema é estável.

**Exemplo 16.22**

Para o sistema de controle de tempo discreto representado pelo diagrama de blocos da Figura 16.31, determine:

(a)  $G_1(s) = Y(s)/E^*(s)$ .

(b)  $G_1(z) = Y(z)/E(z)$ .

(c)  $F(z) = Y(z)/U(z)$ .

(d) Verifique se  $F(z)$  é estável.

(e) Para  $u(t) = \text{degrau unitário}$ , determine  $y(kT)$  e os valores correspondentes aos cinco primeiros instantes de amostragem.

(f) Determine o valor final de  $u(kT)$  pelo teorema do valor final e compare o resultado com a tendência dos valores obtidos no caso anterior.

Solução:

$$(a) G_1(s) = \frac{Y(s)}{E^*(s)} = \frac{2(1-e^{-s})}{s(s+2)}$$

$$\text{Também } G_1(s) = (1-e^{-s}) \left\{ \frac{1}{s} - \frac{1}{s+2} \right\}$$

$$(b) G_1(z) = \frac{Y(z)}{E(z)} = \frac{z-1}{z} \left\{ \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-2}} \right\} = \frac{0,865}{z-0,135}$$

$$(c) F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,865}{z-0,135+0,017} = \frac{0,865}{z-0,118}$$

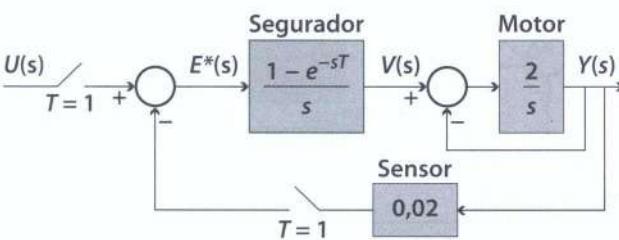


Figura 16.31

(d) polo:  $0,118 \rightarrow$  sistema estável.

$$(e) F(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0,865z^{-1}}{1 - 0,118z^{-1}}$$

$$(1 - 0,118z^{-1})Y(z) = 0,865z^{-1}U(z).$$

Passando para o domínio do tempo e lembrando que  $u_k$  é um degrau unitário:

$$y_k - 0,118y_{k-1} = 0,865u_{k-1}$$

Os cinco primeiros nos valores de  $y_k$  estão na Tabela 16.8.

(f) Cálculo do valor final utilizando o teorema do valor final:

$$\lim_k (y_k) = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{z-1}{z} F(z) \frac{z}{z-1} \right) =$$

$$\lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{0,865}{z - 0,118} \right) = 0,981$$

Tabela 16.8

$k$	0	1	2	3	4	5
$y_k$	0,865	0,967	0,979	0,981	0,981	0,981

## 16.13 Teorema da amostragem

A amostragem de um sinal analógico evidentemente inclui uma perda potencial de informações contidas no sinal de origem. Entretanto, se a frequência ( $\omega_1$ ) do componente harmônico mais elevado do sinal amostrado for finita, a amostragem pode ser feita sem perda de informações. Basta que a frequência  $\omega_s$  de amostragem seja pelo menos o dobro da frequência  $\omega_1$  do componente harmônico de maior frequência do sinal analógico. Isso é o que afirma o denominado teorema da amostragem (ou teorema de Shannon). Trata-se de um teorema de fundamental importância no estudo do processamento de sinais. A frequência limite  $\omega_s = 2\omega_1$  é denominada frequência de Nyquist.

Um enunciado mais preciso desse teorema é indicado a seguir.

Seja  $x(t)$  um sinal analógico de tempo contínuo cujo componente de Fourier de frequência mais elevada tem frequência  $\omega_1$  rad/s. Seja  $x^*(t)$  o sinal amostrado por impulsos de  $x(t)$  com uma frequência de amostragem  $\omega_s$ . Então, se a frequência de amostragem  $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$  (onde  $T$  é o período de amostragem) for maior que o dobro de  $\omega_1$  (isto é, se  $\omega_s > 2\omega_1$ ), o sinal  $x(t)$  pode ser inteiramente reconstruído (recuperado) a partir de  $x^*(t)$ . Em outros termos, se  $\omega_s > 2\omega_1$ , todas as informações contidas em  $x(t)$  estão também contidas em  $x^*(t)$  (ver OGATA, K. *Discrete-Time Control Systems*, 2<sup>a</sup> ed. EUA: Prentice Hall, 1995, p. 90-92).

Um problema que ocorre com frequência é que a maioria dos sinais encontrados na prática tem número infinito de componentes harmônicos e, portanto, não possuem componente de frequência máxima finita. Nesses casos, mesmo intervalos de amostragem muito pequenos podem não ser suficientes.

Quando a frequência de amostragem for inferior à frequência limite, pode ocorrer o fenômeno denominado *aliasing*. Tal fenômeno consiste na suposição de espectros do sinal amostrado. Os fenômenos de *aliasing*, uma vez ocorridos, não podem ser eliminados. O que se faz usualmente é reduzir a largura de banda do sinal antes de ser amostrado, por meio de filtros analógicos denominados filtros anti-*aliasing*.

## 16.14 Projeto de controlador de tempo discreto

Nos exemplos que se seguem usaremos a técnica de projeto denominada cancelamento de polos e zeros. Ela consiste tipicamente em posicionar zeros do controlador sobre alguns dos polos estáveis da planta, de forma a neutralizar seus efeitos. Note que os polos e zeros não são removidos e, portanto, não se deve cancelar polos instáveis da planta, pois na prática existe sempre uma incerteza quanto às suas posições.

### Exemplo 16.23

O diagrama da Figura 16.32 refere-se a um processo industrial de controle do nível de um líquido em um reservatório, bombeado por um motor de corrente contínua. Dados levantados experimentalmente por amostragem

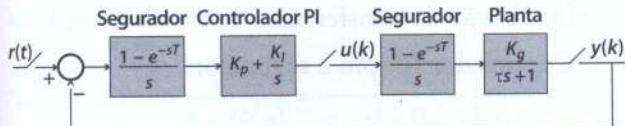


Figura 16.32

(medidos em intervalos de  $T = 10$  segundos) forneceram os seguintes resultados:

$K_g = 1,8$  (constante de ganho, em m/V);  $\tau = 158$  (constante de tempo, em s).

Deseja-se, utilizando um controlador com estrutura  $PI$ , conforme o diagrama de blocos da Figura 16.32, reduzir a constante de tempo de malha fechada para  $\tau' = \tau/3$  (isto é,  $\tau' = 52,7$  s). Dimensione o compensador, determinando as constantes  $K_p$  e  $K_i$ . Para tanto, cancele o polo da função de tempo discreto da planta (com o seu segurador), com o zero da função de tempo discreto do controlador  $PI$  (com o seu segurador), obtendo, assim, uma função de transferência de malha fechada de 1<sup>a</sup> ordem.

Solução:

(1) Função de transferência de tempo discreto da planta.

Com  $a = \frac{1}{\tau}$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \left( \frac{1 - e^{-sT}}{s} \right) \left( \frac{K_g a}{s + a} \right) = \\ &= \left( 1 - e^{-sT} \right) \left( \frac{K_g a}{s(s + a)} \right) = \\ &= \left( 1 - e^{-sT} \right) \left( \frac{K_g}{s} - \frac{K_g}{s + a} \right) \end{aligned}$$

Resulta a função de transferência de tempo discreto:

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \left( \frac{z-1}{z} \right) \left( \frac{K_g z}{z-1} - \frac{K_g z}{z-e^{-aT}} \right) = \\ &= \frac{K_g(1-e^{-aT})}{z-e^{-aT}} \end{aligned}$$

Numericamente, obtemos:

$$K_g = 1,8 \quad \tau = 158 \quad a = (1/\tau) = 0,00633 \quad T = 10$$

$$\begin{aligned} G_p(z) &= \frac{K_g(1-e^{-aT})}{z-e^{-aT}} = \frac{1,8(1-e^{-0,0633})}{z-e^{-0,0633}} = \\ &= \frac{0,110}{z-0,939} \end{aligned}$$

(2) Controlador  $PI$ . Fazendo  $x_1 = K_i/K_p$ , podemos escrever:

$$\begin{aligned} G_C(s) &= \frac{1 - e^{-sT}}{s} \frac{K_p s + K_i}{s} = \\ &= \left( 1 - e^{-sT} \right) \frac{K_p(s + x_1)}{s^2} = \left( 1 - e^{-sT} \right) \left( \frac{K_p}{s} + \frac{K_p x_1}{s^2} \right) \end{aligned}$$

Pela transformada  $z$ :

$$\begin{aligned} G_C(z) &= \left( \frac{K_p z}{z-1} + \frac{K_p z x_1 T}{(z-1)^2} \right) (1-z^{-1}) = \\ &= \frac{K_p (z-(1-x_1 T))}{z-1} \end{aligned}$$

Ou, sendo  $T = 10$  segundos:

$$G_C(z) = \frac{K_p (z-(1-10x_1))}{z-1}$$

(3) Cancelamento de polo em malha aberta:

$$\begin{aligned} G(z) &= G_C(z) \quad G_p(z) = \\ &= \frac{K_p (z-(1-10x_1))}{z-1} \quad \frac{0,110}{z-0,939} \end{aligned}$$

Para haver cancelamento de polo, deve-se ter:

$$1-10x_1 = 0,939 \quad \text{ou} \quad x_1 = 0,0061$$

$$\text{Resulta: } G(z) = \frac{0,110 K_p}{z-1}$$

4) Malha fechada:

$$F(z) = \frac{G(z)}{1+G(z)} = \frac{0,110 K_p}{z-1+0,110 K_p} = \frac{0,110 K_p}{z-e^{-bT}}$$

Desejamos que a nova constante de tempo seja

$$\tau' = \frac{1}{3} \tau = 52,67. \text{ Logo,}$$

$$b = \frac{1}{\tau'} = 0,019 \quad \text{e} \quad e^{-bT} = e^{-0,19} = 0,827.$$

Devemos ter, então:

$$1-0,110 K_p = 0,827 \quad \text{ou} \quad K_p = 1,573 \quad \text{e}$$

$$K_i = x_1 K_p = 0,0061(1,573) \quad \text{ou} \quad K_i = 0,0096$$

**Exemplo 16.24**

O sistema de controle de tempo discreto, representado pelo diagrama de blocos da Figura 16.33, incorpora um controlador *PID*. Sendo o intervalo de amostragem  $T = 4$  segundos e  $K_D = 0$ , determine:

(a) A função de transferência de tempo discreto da planta,  $G_p(z) = Y(z)/V_a(z)$  (malha aberta com o segurador).

(b) A função de transferência de tempo discreto  $G_c(z) = V_a(z)/U(z)$ , do controlador, de forma a se obter um único polo de malha fechada, na posição 0,5 do plano  $z$  (sugere-se compensação por cancelamento de polo). Indique os valores de  $K_p$  e  $K_I$ .

Solução:

(a) Processo.

Cálculos preliminares relativos ao processo.

Função de transferência do processo isolado:

$$G_p(s) = \frac{0,1}{s + 0,05} = \frac{2}{20s + 1}, \quad \tau = 20$$

Pela notação habitual, temos, em malha aberta,  $K_g = 2$ ,  $\tau = 20$

Função de transferência da planta com o segurador:

$$\bar{G}_p(s) = \frac{1 - e^{-4s}}{s} \frac{0,1}{s + 0,05} = (1 - e^{-4s}) \frac{0,1}{s(s + 0,05)}$$

$$\bar{G}_p(s) = (1 - e^{-4s}) \left\{ \frac{2}{s} - \frac{2}{s + 0,05} \right\}$$

$$\begin{aligned} \bar{G}_p(s) &= \left( \frac{z-1}{z} \right) \left\{ \frac{2z}{z-1} - \frac{2z}{z - e^{-0,2}} \right\} = \\ &\left( \frac{z-1}{z} \right) \frac{2z(1 - 0,819)}{(z-1)(z - 0,819)} \end{aligned}$$

$$\bar{G}_p = \frac{2(1 - 0,819)}{z - 0,819} = \frac{363}{z - 0,819}$$

(b) Função de transferência do controlador.

Controlador *PI* com o segurador:

$$G_C(s) = \frac{1 - e^{-sT}}{s} \left( K_p + \frac{K_I}{s} \right) = (1 - e^{-sT}) \frac{K_p s + K_I}{s^2}$$

ou, com  $x_1 = K_I / K_p$

$$\begin{aligned} G_C(s) &= (1 - e^{-sT}) \frac{K_p(s + x_1)}{s^2} = \\ &(1 - e^{-sT}) K_p \left( \frac{1}{s} + \frac{x_1}{s^2} \right) \end{aligned}$$

Em função de  $z$ :

$$G_C(z) = \left( \frac{z-1}{z} \right) K_p \left( \frac{z}{z-1} + \frac{x_1 T z}{(z-1)^2} \right)$$

$$\text{Finalmente, } G_C(z) = K_p \cdot \frac{z - (1 - x_1 T)}{z - 1}$$

A função de malha aberta será, então:

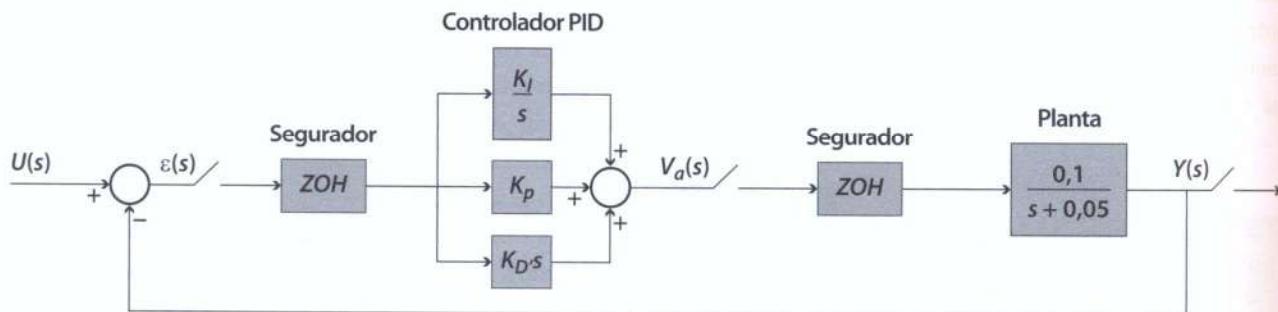
$$G(z) = G_C G_p = \frac{0,363 K_p (z - (1 - x_1 T))}{(z-1)(z-0,819)}$$

Para cancelar o polo em 0,819, devemos fazer (sendo  $T = 4$ ):

$$1 - 4x_1 = 0,819 \longrightarrow x_1 = 0,045$$

Resulta:

$$G(z) = \frac{0,363 K_p}{z - 1}$$



**Figura 16.33**

Em malha fechada:

$$F(z) = \frac{G(z)}{1 + G(z)} = \frac{0,363K_p}{z - (1 - 0,363K_p)}$$

Para termos o polo em 0,5:

$$\begin{aligned} 1 - 0,363K_p &= 0,5 \quad \rightarrow \quad K_p = 1,377 \\ K_I = K_p x_1 &= 1,377 \cdot 0,045 \quad \rightarrow \quad K_I = 0,062 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$F(z) = \frac{0,363 \cdot 1,377}{z - 0,5} = \frac{0,5}{z - 0,5}$$

e a função de transferência do controlador:

$$G_C(z) = K_p \frac{z - (1 - x_1 T)}{z - 1} = \frac{1,377(z - 0,819)}{z - 1}$$

## Considerações finais

Este é um capítulo de noções sobre sistemas de tempo discreto, particularmente sistemas de controle de tempo discreto. Inicialmente, apresentou-se uma definição da amostragem de sinais e uma classificação deles. Em seguida, fez-se uma introdução aos sistemas de controle dotados de controlador digital. Depois, abordaram-se equações de diferenças e solução dessas equações por recorrência e a representação por diagrama de blocos. Os tópicos seguintes foram a transformada Z, os teoremas correlatos e a aplicação na solução

de equações de diferenças. Mostrou-se, então, que a definição de função de transferência pode ser adaptada ao caso dos sistemas de tempo discreto, dando origem à denominada função de transferência de tempo discreto. Essa definição facilita o estudo da associação dos sistemas de tempo discreto, bem como permite a determinação da estabilidade no plano complexo. Depois, tratou-se de uma informação sobre o teorema da amostragem e, finalmente, foram dados exemplos de projetos por cancelamento de polos e zeros.

## Problemas propostos

1. Dada a equação de diferenças finitas:

$$x(k+2) + 1,3x(k+1) + 4x(k) = u(k)$$

Determine:

- (a) Os valores de  $x(2)$  a  $x(6)$ , por recorrência, supondo condições iniciais  $x(0) = 0$  e  $x(1) = 2$ , sendo a entrada um impulso unitário.  
 (b) A transformada Z da equação.

2. Dada a equação de diferenças finitas

$$x(k+2) + 2,0x(k+1) + 0,96x(k) = u(k)$$

- (a) Determine os valores  $x(2)$   $x(3)$  e  $x(4)$ , por recorrência, supondo  $u(k) = 0$  e condições iniciais  $x(0) = 0,5$  e  $x(1) = 1$ .  
 (b) Determine a transformada Z da equação (não esqueça as condições iniciais).

3. No diagrama de blocos indicado na Figura 16.34,  $u_k = b_k$  = degrau unitário.
- (a) Determine a equação de diferenças finitas, representada pelo diagrama de blocos.  
 (b) Determine os cinco primeiros termos da sequência  $y_k$ .

**Observação:**

Note que todos os sinais são nulos, para  $t < 0$ .

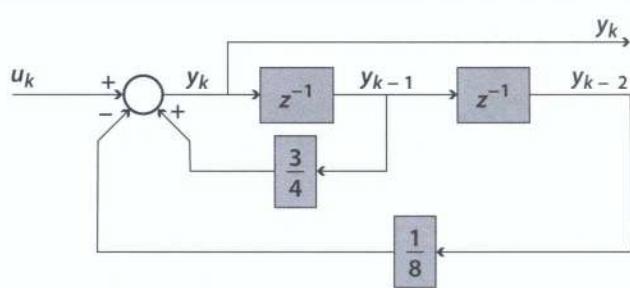


Figura 16.34

4. O diagrama de blocos da Figura 16.35 representa um sistema de tempo discreto.

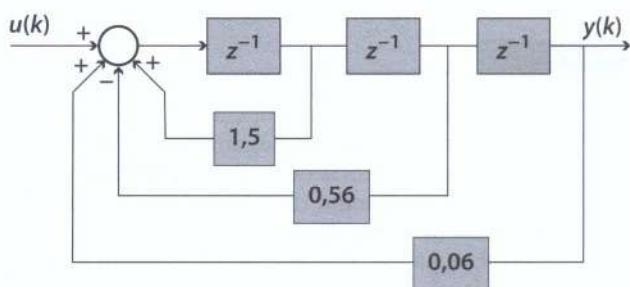


Figura 16.35

- (a) Determine a equação de diferenças correspondente ao diagrama da figura.
- (b) Determine os oito primeiros termos da resposta do sistema ao impulso unitário  $\delta(t)$ , sendo as condições iniciais  $y(0) = 2$ ,  $y(1) = 1$  e  $y(2) = 0$ .
- (c) Obtenha a transformada  $Z$  da equação do item (a) e determine a expressão  $Y(z)$  para as condições específicas do item (a).
5. Um sistema de tempo discreto é descrito pela equação de diferenças

$$y(k+2) + 0,7y(k+1) + 0,1y(k) = u(k)$$

- (a) Construa um diagrama de blocos de entrada  $u(k)$  e saída  $y(k)$ , usando blocos de atraso unitário.
- (b) Supondo  $C.I. = 0$  e sendo  $u^*(k) = b^*(k) =$  degrau unitário, determine, por recorrência, os três primeiros elementos não nulos da sequência  $y^*(k)$ .
- (c) Usando a transformada  $Z$ , determine  $Y(z)$ , a partir da equação de diferenças dada ( $C.I. = 0$ ).
- (d) A partir da expressão de  $Y(z)$  obtida do item anterior, determine o termo geral de  $y(k)$  e compare os resultados com os obtidos no item (b).
6. Considere o sistema de controle de tempo discreto indicado pelo diagrama de blocos da Figura 16.36, onde  $H(s)$  representa um atraso de 0,25 segundo. Determine:
- (a)  $H(s)$  e  $H(z)$ .
  - (b)  $G(z)$ .
  - (c)  $F(z) = Y(z)/U(z)$ .
  - (d)  $y(k)$ , para  $u(t) =$  degrau unitário.
  - (e) O valor final de  $y(k)$  do item anterior, pelo teorema do valor final.

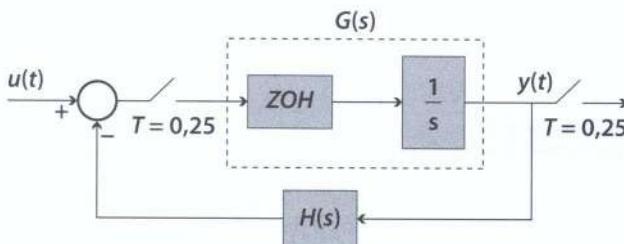


Figura 16.36

7. Deseja-se controlar a temperatura  $y(t)$  de um líquido em um reservatório, através da tensão  $v(t)$  sobre uma resistência de aquecimento. O diagrama de blocos do sistema completo, já linearizado, é o indicado na Figura 16.37.
- (a) Obtenha a função de transferência pulsada da planta em série com o segurador
- $$G_p(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}.$$
- (b) Obtenha a resposta do processo discretizado no item anterior, para uma entrada  $u(t)$  do tipo

- degrau unitário, a partir de zero  $^{\circ}\text{C}$ , para os três primeiros períodos de amostragem.
- (c) Determine a função de transferência de malha fechada  $F(z)$  e verifique se o sistema resultante é estável. Em caso afirmativo, determine também o valor estacionário da saída, para uma entrada tipo degrau unitário.

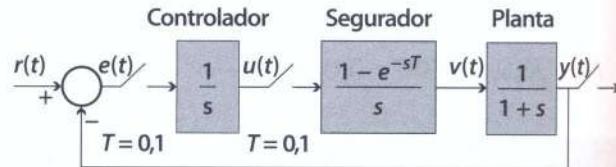


Figura 16.37

8. O sistema de tempo discreto representado pelo diagrama de blocos da Figura 16.38 se destina a controlar o funcionamento de uma planta industrial

$$G_p(s) = \frac{1}{s+0,2}$$

O controlador de tempo discreto é da forma:

$$G_c(z) = \frac{1,3(z+x_1)}{z+x_2}$$

O intervalo de amostragem é  $T = 1,25$  segundos, e  $ZOH$  é um segurador de ordem zero.

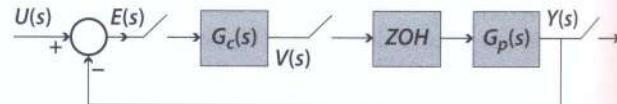


Figura 16.38

- (a) Determine a constante de tempo da planta  $G_p(s)$ .
- (b) Determine a função de transferência de tempo discreto do processo:  $G_p(z) = Y(z)/V(z)$ .
- (c) Dimensione o controlador ( $x_1$  e  $x_2$ ) de forma que, em malha fechada, o sistema tenha um único polo e constante de tempo  $\tau_f = \tau_d/2$  (metade da constante de tempo do processo, em malha aberta).
9. Deseja-se retardar a evolução de um processo, cuja saída é  $y(t)$  de forma que sua constante de tempo de malha fechada seja da ordem de 0,8 segundo. A função de transferência do processo é:

$$G_p(s) = \frac{0,4}{s+2}$$

Deseja-se utilizar um controle de tempo discreto, em malha fechada, do tipo indicado no diagrama de blocos da Figura 16.39, com período de amostragem  $T = 0,1$  segundo, com auxílio de um controlador PI

$$G_c(s) = \frac{\alpha s + \beta}{s}$$

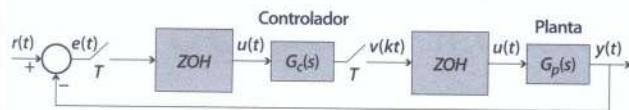


Figura 16.39

- (a) Determine a constante de tempo  $\tau_{ma}$ , do processo, em malha aberta.
- (b) Determine a função de transferência discreta da planta em série com o segurador  $G_{s+p}(z) = \frac{Y(z)}{V(z)}$ .
- (c) Determine a função de transferência discreta do controlador em série com o segurador  $G_{s+e}(z) = \frac{V(z)}{E(z)}$  em função de  $\alpha$  e  $\beta$ .

- (d) Determine o valor da relação  $\frac{\beta}{\alpha}$  de forma que o sistema de malha fechada seja de 1ª ordem.
- (e) Determine os valores de  $\alpha$  e  $\beta$ , de forma a obter a constante de tempo de malha fechada desejada ( $\tau_f = 0,8$  segundo).

10. Deseja-se controlar a temperatura  $\theta(t)$  de um líquido em um reservatório através da tensão  $v(t)$  sobre uma resistência de aquecimento. O diagrama de blocos do sistema completo, já linearizado, é o indicado na Figura 16.40.

- (a) Determine o ganho e a constante de tempo da planta  $G_p(s) = \frac{0,0625}{s + 0,0125}$
- (b) Determine a função de transferência discreta da planta em série com o segurador  $G_{s+p}(z) = \frac{\theta(z)}{V(z)}$
- (c) Determine a função de transferência discreta do controlador em série com o segurador, em função de  $K_p$ ,  $G_{s+e}(z) = \frac{V(z)}{E(z)}$ , de forma a obter um único polo de malha aberta.
- (d) Determine o valor de  $K_p$  de forma a obter um único polo de malha fechada em  $z = -0,6$ .  
Dado: intervalo de amostragem:  $T = 10$  segundos.

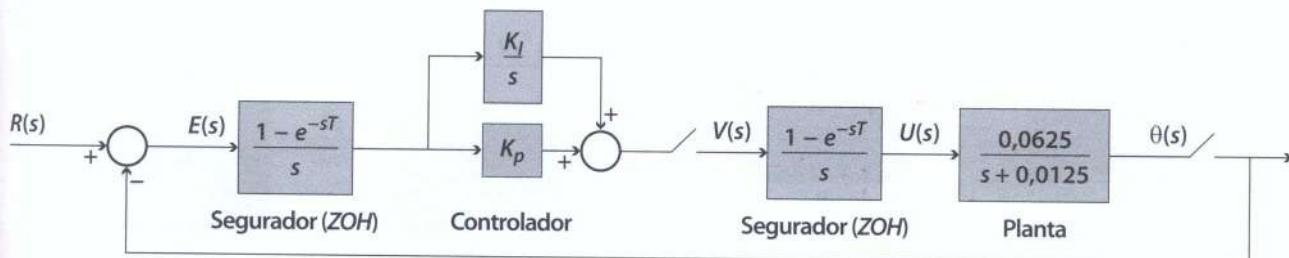


Figura 16.40

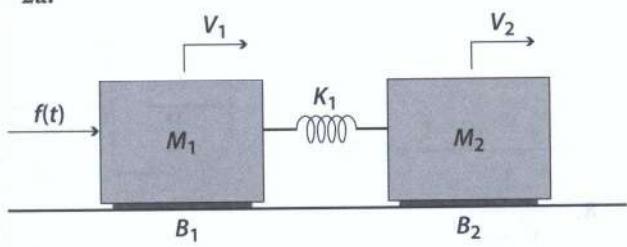
# Respostas selecionadas

## Capítulo 2

1a.  $L_1 \frac{di_1}{dt} + R_1 i_1 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt - \frac{1}{C_1} \int_0^t i_2 dt = u(t)$

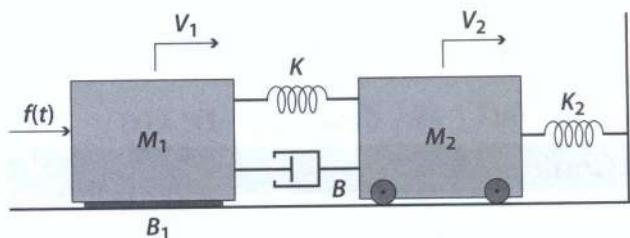
$$L_2 \frac{di_2}{dt} + R_2 i_2 + \frac{1}{C_1} \int_0^t i_2 dt - \frac{1}{C_1} \int_0^t i_1 dt = 0$$

2a.

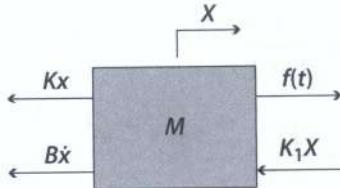


$$M_2 \frac{dv_2}{dt} + Bv_2 + (K + K_2) \int_0^t v_2 dt -$$

$$Bv_1 - K \int_0^t v_1 dt = 0$$

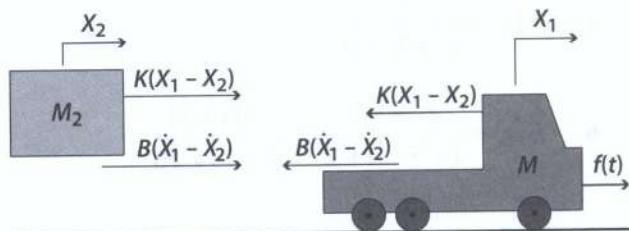


5.

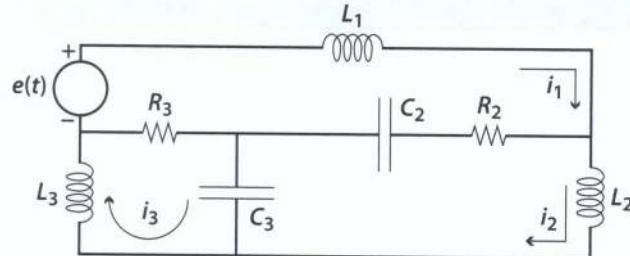


$$M\ddot{x} + B\dot{x} + (K + K_1)x = f(t)$$

6a.

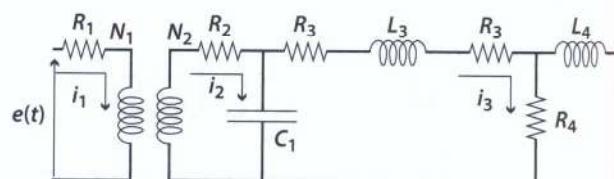


7c.



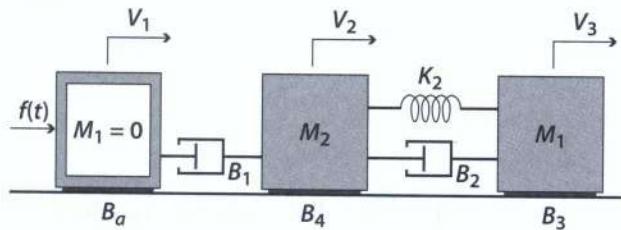
13.  $J_1 \dot{\omega}_1 + \beta_1 \omega_1 + Kf_0 \omega_1 dt - Kf_0 \omega_2 dt = M(t)$   
 $J_2 \dot{\omega}_2 + (\beta_2 + \beta_3) \omega_2 + Kf_0 \omega_2 dt - Kf_0 \omega_1 dt = 0$

14b.



8.  $M\ddot{x}_1 + B\dot{x}_1 + Kx_1 - B\dot{x}_2 - Kx_2 = f(t)$   
 $M\ddot{x}_2 + 2B\dot{x}_2 + 2Kx_2 - B\dot{x}_1 - Kx_1 - B\dot{x}_3 - Kx_3 = 0$   
 $M\ddot{x}_3 + B\dot{x}_3 + Kx_3 - B\dot{x}_2 - Kx_2 = 0$

10.



12.  $J\ddot{\omega}_2 + B\omega + Kf_0 \omega dt = M(t)$   
O sistema é análogo a um circuito RLC-série.

16. 16 rad/s.

17.  $\frac{dv_2}{dt} + 5v_2(t) = -50v_1(t)$

18.  $\frac{d^2v_2}{dt^2} + 1,25 \frac{dv_2}{dt} = v_1(t)$

19.  $\frac{d^2v_2}{dt^2} + 1,25 \frac{dv_2}{dt} + 25v_2 = v_1$

20.  $C = 10 \mu F \quad R = 200 \text{ k}\Omega$

## Capítulo 3

1.  $F(s) = \frac{5}{s+1}$

8.  $\frac{s}{s^2 - a^2}$

2.  $F(s) = \frac{4}{2s+1}$

9.  $\frac{2s}{s^2 + 4}$

3.  $F(s) = \frac{11}{s-1}$

10.  $F(s) = \frac{7}{s+3} - \frac{3}{s+7} = \frac{4(s+10)}{s^2 + 10s + 21}$

4.  $F(s) = \frac{4,912}{s+3}$

11.  $F(s) = \frac{1}{(s+2)^2}$

5.  $F(s) = \frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

12.  $F(s) = \frac{2}{s^3}$

6.  $F(s) = \frac{2}{s+5} - \frac{5}{s+2} = \frac{-3(s+7)}{s^2 + 7s + 10}$

13.  $F(s) = \frac{2}{(s+2)^3}$

7.  $\frac{a}{s^2 - a^2}$

14.  $F(s) = \frac{6}{(s+3)^4}$

15.  $F(s) = \frac{3}{s^2 + 2s + 10}$

16.  $F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 10}$

17.  $F(s) = \frac{s}{s^2 + 9}$

18.  $F(s) = \frac{0,707(s+3)}{s^2 + 9}$

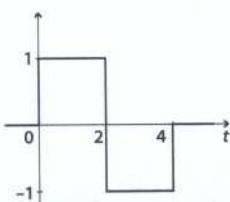
19.  $F(s) = \frac{0,866(s+2,887)}{s^2 + 25}$

20.  $F(s) = \frac{0,866(s+57,737)}{s^2 + 10^4}$

21.  $F(s) = \frac{2(s+4)}{s^2 + 5s + 6}$

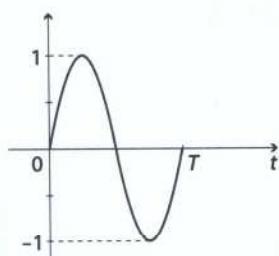
22.  $F(s) = \frac{1-5s}{s^2 + 2s - 3}$

26. Gráfico da função.



$$P(s) = \frac{1 - 2e^{-2s} + e^{-4s}}{s}$$

27. Gráfico da função.



$$F(s) = \frac{2\pi T(1 - e^{-sT})}{(T^2 s^2 + 4\pi^2)}$$

28.  $f(t) = k(w(t) - w(t - T))$

$$F(s) = k \left( \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-sT}}{s^2} \right)$$

29.  $f(t) = k(w(t) - w(t - T) - Tb(t - T))$

$$F(s) = \frac{k(1 - e^{-sT} - sTe^{-sT})}{s^2}$$

30. para  $f_1(t) = k(w(t) - w(t - T) - Tb(t - T))$

$$F_1(s) = \frac{k(1 - e^{-sT} - sTe^{-sT})}{s^2}. \text{ Então,}$$

$$f(t) = f_1(t) + f_1(t - T) + f_1(t - 2T) \quad \text{e}$$

$$F(s) = F_1(s)(1 + e^{-st} + e^{-2st})$$

31.  $f(t) = 2,5(1 - e^{-2t}) \quad \text{para } t \geq 0$

32.  $f(t) = 12(e^{-3t} - e^{-4t}) \quad \text{para } t \geq 0$

33.  $f(t) = 1 - 4e^{-3t} + 3e^{-4t} \quad \text{para } t \geq 0$

34.  $f(t) = 2,5 - 1,29e^{-2t} + 2,86e^{-9t} \quad \text{para } t \geq 0$

35.  $f(t) = 5(e^{-2t} - e^{-4t}) \quad \text{para } t \geq 0$

36.  $f(t) = 0,466e^{-2,5t} \operatorname{sen}(8,59t) \quad \text{para } t \geq 0$

37.  $f(t) = 5(1 - \sqrt{2} e^{-t} \operatorname{sen}(t + 45^\circ)) \quad \text{para } t \geq 0$

38.  $f(t) = e^{-2t} (\cos(t) - 2\operatorname{sen}(t)) \quad \text{para } t \geq 0$

39.  $f(t) = 5(e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t}) \quad \text{para } t \geq 0$

40.  $F(s) = \frac{1/2}{s^3} + \frac{1/4}{s^2} - \frac{1/8}{s} + \frac{1/8}{s+2}$

41.  $y(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}e^{-4t} + \frac{1}{3}e^{-6t}, \quad t \geq 0$

42.  $y(t) = 0,14 - 0,2e^{-2t} + 0,06e^{-7t}, \quad t \geq 0$

43.  $y(t) = \frac{1}{16} + \frac{15}{12}e^{-2t} - \frac{15}{48}e^{-8t}, \quad t \geq 0$

## Capítulo 4

1.

(a)  $\frac{1}{s^3 + 5s^2 + 3}$

(b)  $\frac{0,5}{s(s^2 + 6s + 5)}$

(c)  $\frac{25s}{s^3 + 2s^2 + 5s + 10}$

(d)  $\frac{2s + 1}{s^3 + 6s^2 + 5}$

(e)  $\frac{160(s+4)}{s(s^3 + 18s^2 + 192s + 640)}$

(f)  $\frac{10(s+4)}{s^2(s^3 + 3s^2 + 19s + 17)}$

2. polos: 0;  $-1 \pm j$ ; zeros: -1; -3.

3.  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s+1)}{s(s^2 + 5s + 20)}$ ; polos: 0,  $-2,5 \pm j3,71$ ; zero: -1.

4.  $G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s+1)}{s(s^2 + 6s + 5)}$ ; polos: 0, -1 e -5; zero: -1.

**Observação:**

O polo e o zero em -1 se cancelam, e a função de transferência pode ser reduzida:

$$G(s) = \frac{K}{s(s+5)}$$

5.  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(s+5)}{s(s^2 + 6s + 25)}$ ; polos: 0,  $-3 \pm j4$ ; zero: -5.

6.  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2(s^2 + 4s + 4)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$ ; polos: -1;  $-1 \pm j$ ; zeros: -2; -2.

7.

(a)  $\frac{2(s+0,5)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$ ;  $K = 2$ ;

$$\frac{0,5(2s+1)}{0,5s^3 + 1,5s^2 + 2s + 1}; K_g = 0,5$$

(b)  $\frac{7,2(s+5)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2}$ ,  $K = 7,2$ ;

$$\frac{18(0,2s+1)}{(0,5s^3 + 1,5s^2 + 2s + 1)}; K_g = 18$$

8.

1ª forma normal:

$$\frac{2(s^2 + 4s + 4)}{s^3 + 3s^2 + 4s + 2} = \frac{2(s+2)^2}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$$

2ª forma normal:

$$\frac{4(0,25s^2 + s + 1)}{(0,5s^3 + 1,5s^2 + 2s + 1)} = \frac{4(0,5s + 1)^2}{(s+1)(0,5s + s + 1)}$$

9.  $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2,5(s+0,2)}{s^3 + 3s^2 + 8s + 6}$ ; polos: -1;  $-1 \pm j\sqrt{5}$ ;

zero: -0,2.

10.  $\frac{4(s+5)}{s(s^2 + 6s + 8)}$ ;  $\frac{2,5(0,2s+1)}{s(0,125s^2 + 0,75s + 1)}$

11.

(a)  $Q(s) = s^3 + 4s^2 + 3s$ ; 3º ordem;

(b)  $G(s) = \frac{2(s^2 + 4s + 8)}{s(s+1)(s+3)}$ .

12.  $G(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s^2 + 2s + 2)}$

13.  $\ddot{y}(t) + 12\ddot{y}(t) + 32\dot{y}(t) = 32u(t)$

14.

(a)  $\ddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 9\dot{y}(t) + 8y(t) = 8(u(t) - \dot{u}(t))$

(b)  $\ddot{y}(t) + 2\ddot{y}(t) + 9\dot{y}(t) + 8y(t) = 8(\cos(t) + \sin(t))$

15.  $G(s) = \frac{X(s)}{f(s)} = \frac{1}{Ms^2 + (B + B_1)s + K}$

16.  $\frac{R_1Cs}{(R + R_1)Cs + 1} = \frac{0,5s}{s + 5}$

17.  $\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{RCs}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}$

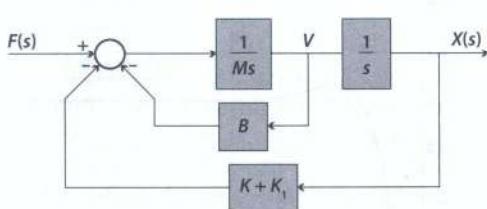
Numericamente,  $\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{10s}{s^2 + 30s + 100}$

18.  $\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{R^2C^2s^2 + 2RCs + 1}{R^2C^2s^2 + 3RCs + 1}$

Numericamente,  $\frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{s^2 + 20s + 100}{s^2 + 30s + 100}$

## Capítulo 5

1.



$$2. \frac{0,8}{s + 10,4}$$

$$3. \frac{10}{s^2 + 4s + 10}$$

$$4. \frac{1}{s^2 + 7s + 1,5}$$

$$5. G(s) = \frac{G_1 G_2 G_3}{1 + G_1 G_2 H + G_1 G_2 G_3}$$

$$6. G(s) = \frac{G_1 G_2 (G_3 + G_4)}{1 + G_1 G_2 H_1 + G_1 G_2 G_3 + G_1 G_2 G_4}$$

7.

$$U \rightarrow \boxed{\frac{s+2}{s^2 + 8s + 8}} \rightarrow Y$$

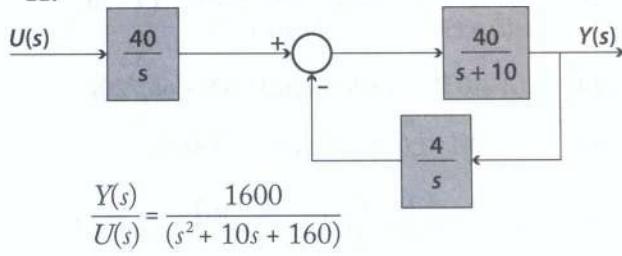
$$8. G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1500}{s^2 + 261s + 1560}$$

$$9. G(s) = \frac{G_1 (G_2 G_3 + 1)}{1 + G_1 G_3}$$

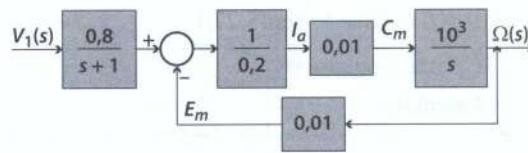
10. Reduzindo os fatores comuns, obtemos:

$$\frac{(s^2 + 8s + 4)}{(s + 1)(s + 8)(s + 2)}.$$

11.



$$12. G(s) = \frac{\Omega(s)}{V_1(s)} = \frac{40}{(s + 0,5)(s + 1)}$$



## Capítulo 6

$$1. (a) 10 \text{ rad/s}; 0; 0,2 \text{ s}; (b) 0; 100 \text{ rad/s}; 20 \text{ s}; (c) -50 \text{ rad/s}; 0; 0,5 \text{ s}.$$

$$2. G(s) = \frac{1}{s + 0,04}; \\ \omega(t) = 500(1 - e^{-0,04t}) \text{ rpm.}$$

$$3. \omega(t) = 500e^{-0,04t} \text{ rpm}; \quad T(\text{parada}) = 5\tau = 125 \text{ s.}$$

$$4. \text{ Constante de ganho } K_g = (20/25) = 0,8; \text{ constante de tempo } \tau = 1/25 = 0,04 \text{ s; tempo de subida } t_s = 2,2 \tau = 0,088 \text{ s; tempo de acomodação } t_{ac} = 4 \tau = 0,16 \text{ s; valor final da resposta } y(\infty) = 0,8.$$

$$5. (a) \tau = 1,111 \text{ s; (b) } \omega(t) = 111,1(1 - e^{-0,9t}) \text{ rad/s; velocidade final} = 1.061 \text{ rpm.}$$

$$6. \text{ Impulso} = 100 \text{ Ns}; \quad v(t) = 100e^{-0,1t}.$$

$$7. y(t) = 2,5[t - 0,5(1 - e^{-2t})]$$

$$8. y(t) = 0,714[t - 0,0476(1 - e^{-21t})]$$

$$9. (a) -\frac{50}{s + 25}; (b) K_g = 2; (c) 0,04 \text{ s; (d) } v_2 = 2(1 - e^{-25t}).$$

$$10. V_0 = 5 \text{ m/s; } \tau = 4 \text{ s; distância total} = 19,86 \text{ m.}$$

$$11. \omega(t) = 1.200e^{-0,4t} \text{ rpm; } 2,5 \text{ s.}$$

$$12. \text{ Impulso} = 100\delta(t); \quad v(t) = 100e^{-0,1t}.$$

$$13. y(t) = 1 + 15e^{-4t} - 16e^{-5t}.$$

$$14. 20/(s^2 + 2s + 5).$$

$$15. 10(s+1)/(s^2 + 2s + 5).$$

$$16. (a) y(t) = 4(1 - 1,25 e^{3t} \sin(4t + 53,13^\circ)).$$

$$17. G(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + 20s + 64};$$

$$x(t) = 2,5 - \frac{10}{3}e^{-4t} + \frac{2,5}{3}e^{-16t};$$

$$v(t) = \frac{40}{3}(e^{-4t} - e^{-16t});$$

$v_{\max} = 6,3 \text{ m/s}$  no instante  $t = 0,116 \text{ s}$ .

18. Constantes de tempo: 0,25 e 0,1667;  
 $g(t) = 4(-e^{-4t} + 4e^{-6t})$ ;

$$y(t) = \frac{5}{3}(1 + 0,6e^{-4t} - 1,6e^{-6t}).$$

19. Um zero na origem ( $s = 0$ ); polos: -1 e -10;  
 $v_2(t) = (50/9)(e^t - e^{10t})$  para  $t \geq 0$ .

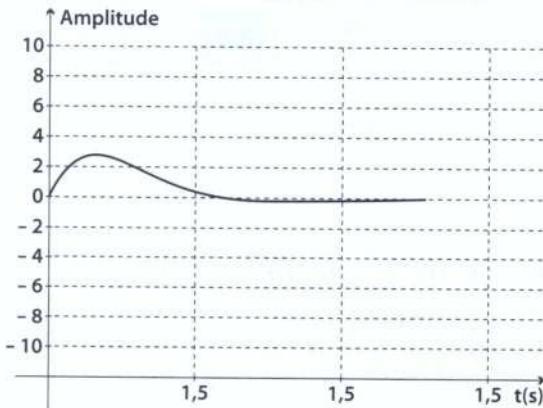
20.  $y(t) = 10 [1 - 1,089e^{-5t} \sin(11,62t + 66,72^\circ)]$

21.  $y(t) = 4[1 - 1,024e^{-2t} \sin(9t + 77,47^\circ)]$ .

22.  $\omega(t) = 250 \left(1 - \frac{8}{3}e^{-10t} + \frac{5}{3}e^{-16t}\right) \quad t \geq 0$

23. (a)  $F(s) = 40/(s^2 + 9s + 48)$ .  
(b)  $s_{1,2} = -4,5 \pm j5,27$ .  
(c)  $\zeta = 0,65$  subamortecido.  
(d)  $g(t) = 7,59e^{-4,5t} \sin(5,27t)$ .

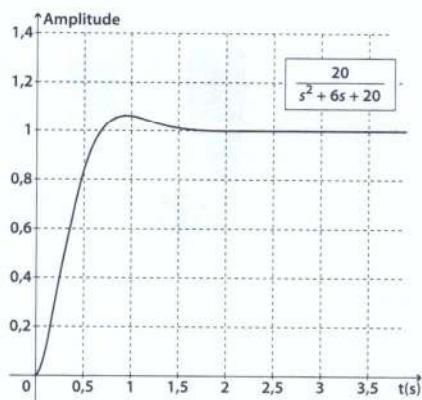
Resposta impulsiva.



24.  $8(e^{-2t} - e^{-4t})$ ;  $2(1 - 2e^{-2t} + e^{-4t})$ ; para  $t > 0$ .

25. (a)  $F(s) = 20/(s^2 + 6s + 20)$ ;  
(b)  $\zeta = 0,67$  e  $\tau = 0,33$ ;  
(c)  $M_p\% = 5,8\%$  e  $t_p = 0,946$  (unidades S.I.);  
(d)  $\omega_d = 3,32$  e  $t_{sub} = 0,694$  (unidades S.I.);  
(e) Esboço.

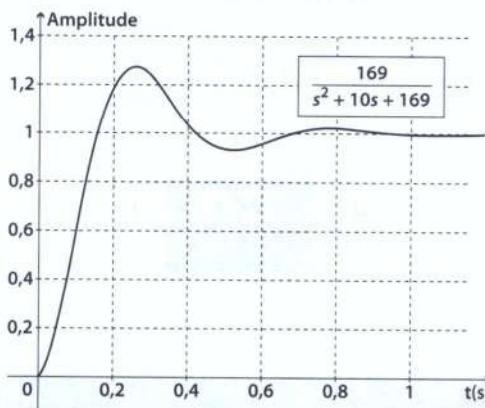
Resposta ao degrau unitário.



26.  $\zeta = 0,385$ ;  $\omega_n = 13$ ;  $\omega_d = 12$ ;  $T = 0,164$ ;  
 $T_p = 0,262$ ;  $T_{ac} = 0,8$ ;  $M_p\% = 27\%$ .  
(unidades S.I.)

Esboço.

Resposta ao degrau unitário.



27.  $T_p = 0,5\text{s}$ ;  $M_p \approx 27\%$   $T_{ac} \approx 1,4\text{s}$

$$G(s) = \frac{47,7}{s^2 + 5,76s + 47,7}$$

29.  $y(t) = 1 - 1,4142 e^{-4t} \sin(3t + 45^\circ)$

30.  $y(t) = 1 - e^{-4t}(\cos(3t) - 7\sin(3t)) = 1 - 7,07e^{-4t} \sin(\omega t - 188,13^\circ)$

32.  $y(t) = 2(1 - 2,4e^{-0,5t} + 1,5e^{-t} - 0,1e^{-3t})$

34.  $y(t) = 1,0 - 0,314e^{-10t} - 0,895e^{-0,628t} \sin(6,293t + 50,4^\circ)$ .

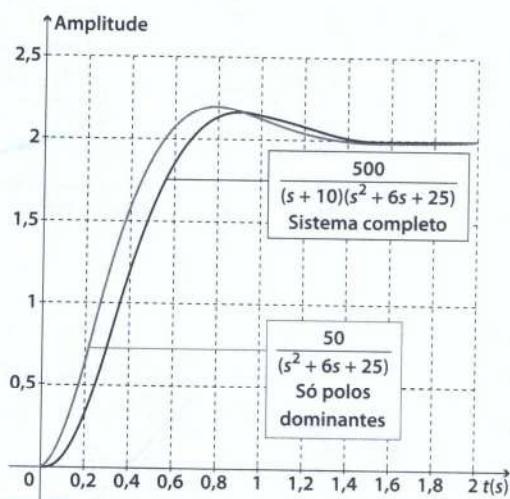
35.  $y(t) = 2\{1,0 - 0,385e^{-10t} - 1,55e^{-3t} \operatorname{sen}(4t + 23,39^\circ)\}$ .

36.  $\bar{G}(s) = \frac{50}{(s^2 + 6s + 25)}$ ;

$$\bar{y}(t) = 2\{1,0 - 1,25e^{-3t} \operatorname{sen}(4t + 53,13^\circ)\}$$

A figura a seguir permite-nos comparar as respostas dos dois sistemas. As diferenças relativamente grandes resultam do fato de o polo real não estar suficientemente longe dos polos complexos. Bons resultados são obtidos quando a distância do 3º polo ao eixo imaginário é pelo menos 10 vezes maior que a dos polos complexos, ao mesmo eixo.

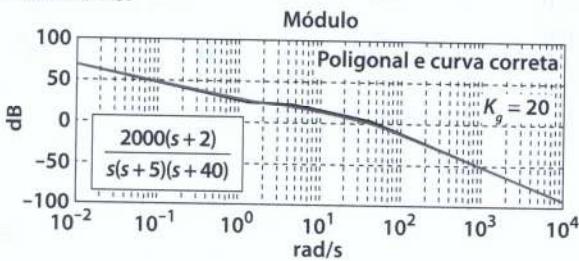
Resposta ao degrau unitário.



## Capítulo 7

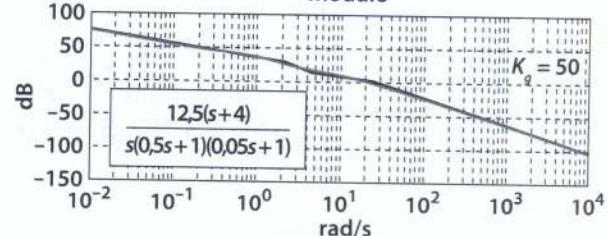
1. (a) 20 dB; (b) 20 dB; (c) 32 dB.
2. (a) 26 dB; (b) 32 dB; (c) 40 dB.
3. (a)  $K_g = 25$  ou 28 dB; (b)  $K_g = 2$  ou 6 dB; (c)  $K_g = 10$  ou 20 dB.
5. zeros:  $s_1' = 0$ ;  $s_2' = -13$ ; polos:  $s_1 = -4$ ;  $s_2 = -9$ ;  $\omega = 3,25$  rad/s.
6.  $G(j300) = 68,7 \angle -57^\circ$ .
- 7.

Exercício 7b.

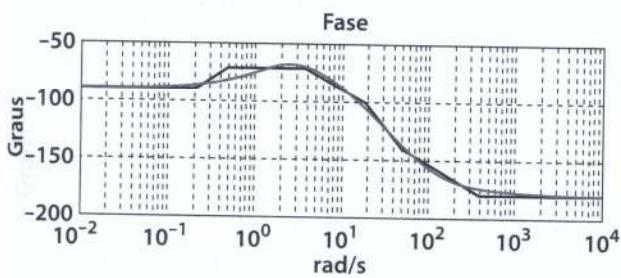
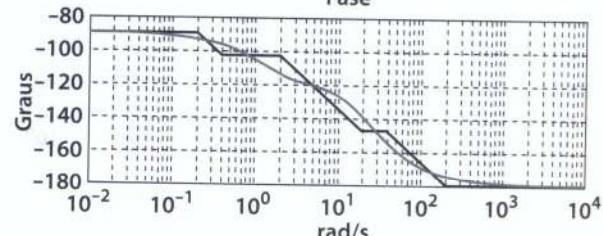


Exercício 7c.

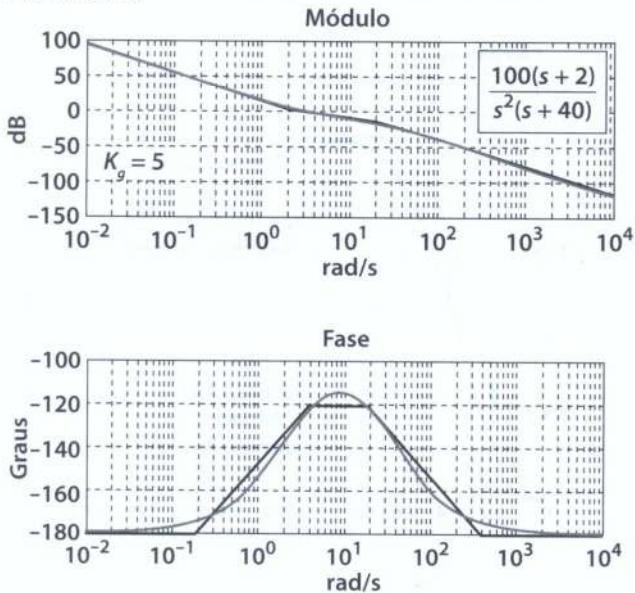
**Módulo**



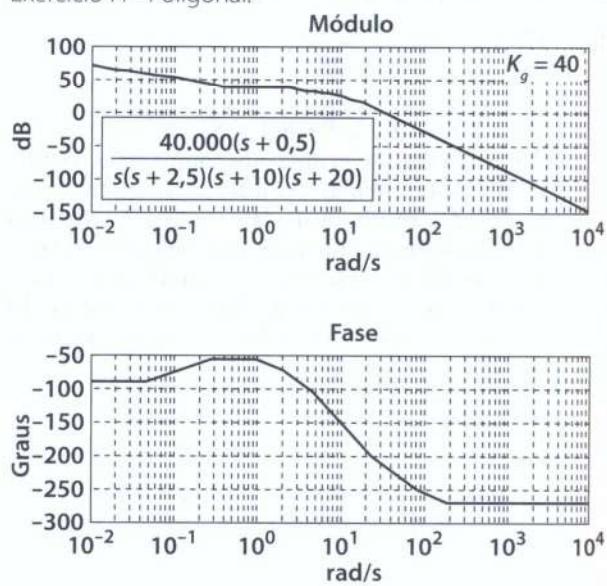
**Fase**



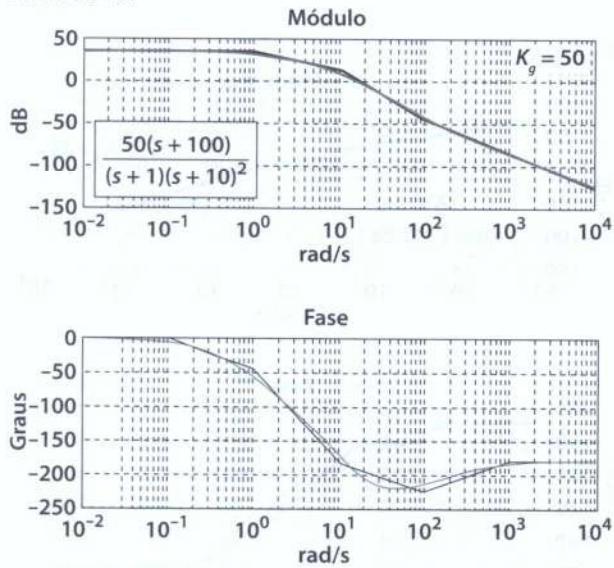
Exercício 7d.



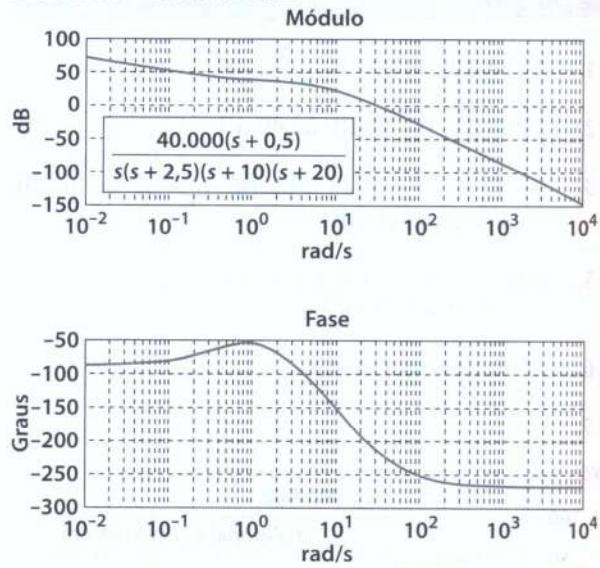
Exercício 7f - Poligonal.



Exercício 7e.



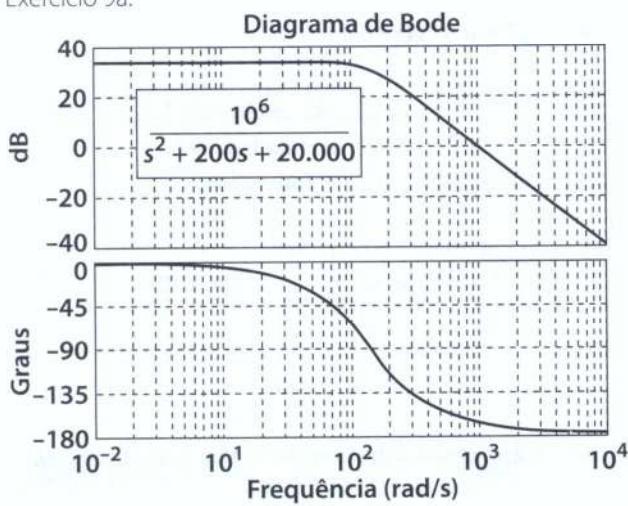
Exercício 7f - Curva correta.



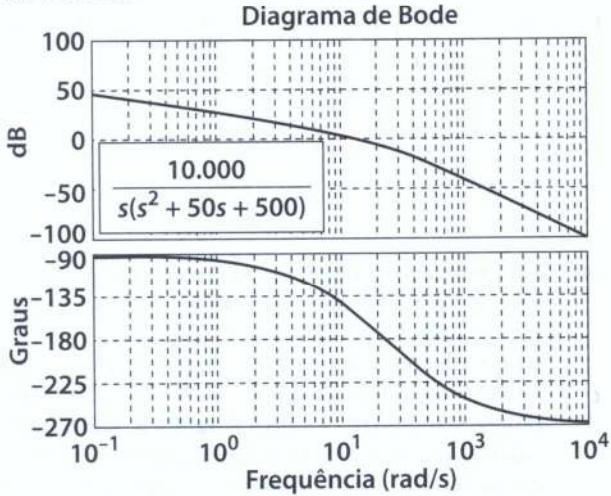
8. Módulo da resposta = 22,3; fase =  $-204^\circ$ .

9.

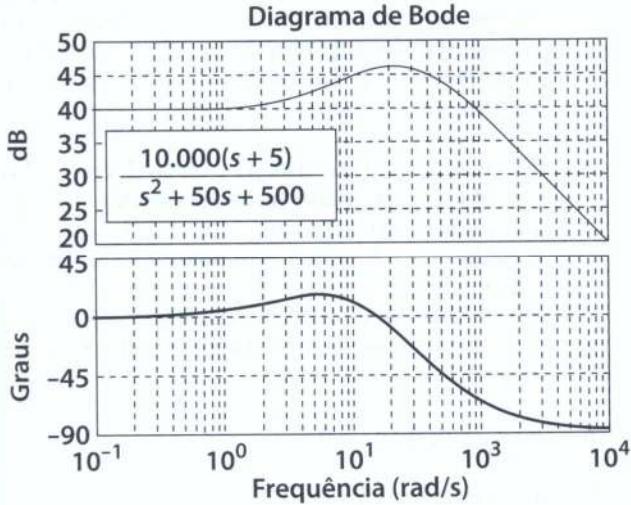
Exercício 9a.



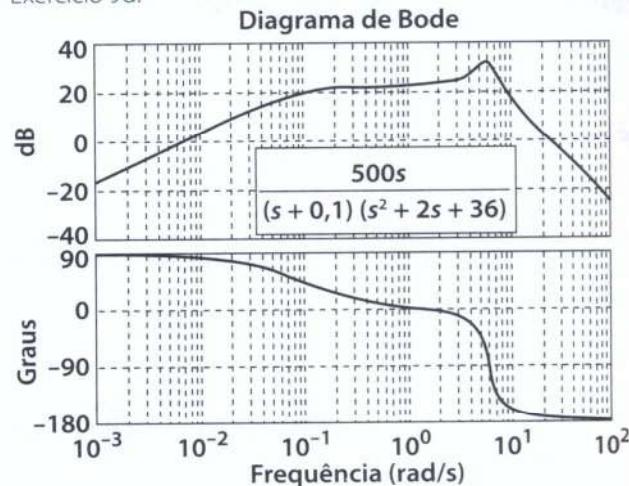
Exercício 9b.



Exercício 9c.



Exercício 9d.



11.  $K_g = 50(34 \text{ dB})$ ; polos: 0; -2; -20; zero: -0,4.

12. 48 dB;

$$G_a(s) = \frac{2 \cdot 10^6}{s(s+5)(s+20)(s+80)}$$

13.  $G(j2) = 11,62|5,9^\circ$ ;  $G(j5) = 49,84|-85,4^\circ$

14.  $G(j10) = 1,11|-19,7^\circ$ ;  $|G(j10)|_{\text{dB}} = 0,922 \text{ dB}$

$$G(j20) = 1,34|-16,1^\circ$$
;  $|G(j20)|_{\text{dB}} = 2,51 \text{ dB}$

$$G(j30) = 2,17|-24,6^\circ$$
;  $|G(j30)|_{\text{dB}} = 6,74 \text{ dB}$

$$G(j40) = 5,01|-94,3^\circ$$
;  $|G(j40)|_{\text{dB}} = 14,0 \text{ dB}$

15.  $y(t) = 70 \sin(4t + 12,4^\circ)$ .

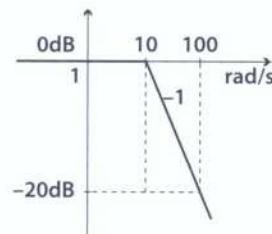
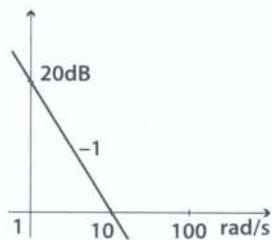
## Capítulo 8

1. (a) 0 raiz no SPD.  
(b) 2 raízes no SPD.  
(c) 0 raiz no SPD.  
(d) 2 raízes no SPD.
2. Dois polos no SPD (duas trocas de sinais na coluna principal). O sistema é instável porque tem polos no SPD.
3.  $0 < K < 140,79$ .
4. Dois polos no SPD; sistema instável (Figura 8.6). Todos os polos no SPE; sistema estável (Figura 8.7).
5.  $0 < K < 72$  (Figura 8.8).  
 $11,06 < K < 28,94$  (Figura 8.9).
6.  $K > 2$  (Figura 8.10).  
 $0 < K < 762,7$  (Figura 8.11).
7. m.a.:  $2,34 < K < 13,66$ ; m.f.:  $2 < K < 6$ ; para  $2,34 < K < 6$  há estabilidade em m.a. e em m.f.; para  $K = 2$ : polos  $-0,84$ ;  $-7,16$  e  $\pm j\sqrt{2}$ .
8. (a)  $3 < K < 51$ ; (b)  $12 < K < 19$
9.  $1,2 \leq a \leq 3,0$ .
10. (a) Caso especial 1 do critério de Routh. Há dois polos no SPD; sistema instável.  
(b) O sistema fica estabilizado.
11.  $Q_1$ : nenhuma raiz no SPD.  
 $Q_2$ : Caso especial 1; 2 raízes no SPD.
12.  $-1, -5$  e 2 raízes no eixo imaginário (Caso especial 2):  $\pm j$ ; nenhuma no SPD.
13. Caso especial 2; polos do sistema:  $-2, \pm j$  e  $-1 \pm j$ .
14. Caso especial 2 + duas trocas; polos em  $-4, \pm j2$  e  $1 \pm j3$ . Sistema instável.
15.  $q = s^4 + 6s^2 + 8, \pm j\sqrt{2}, \pm j2, -1 \pm j$ . Nenhuma no SPD.

## Capítulo 9

1. Primeiro sistema: m.a.:  $K = 20, K_g = 1, \tau = 0,05$ , polo =  $-20$ ; m.f.:  $K = 20, K_g = 0,5, \tau = 0,025$ , polo =  $-40$ . Segundo sistema: m.a.:  $K = 20, K_g = 1, \tau = 0,05$ , polo =  $-20$ ; m.f.:  $K = 10, K_g = 0,25, \tau = 0,025$ , polo =  $-40$ .

2.



3. malha aberta instável: polos em  $-5$  e  $+1$ ; ganho  $K_g = -5$ ; malha fechada estável: polos em  $-2 \pm j4$ ; constante de ganho  $K_g = 1,25$ .

4. Em malha aberta: sistema é estável, com polos em  $-3$  e  $-7$ , qualquer que seja o valor de  $K$ . O ganho será sempre  $K_g = K/21$ .  
Em malha fechada: para  $K = 3$ , polos em  $-4$  e  $-6$ , sistema superamortecido, ganho  $K_g = 0,125$  e constantes de tempo  $0,25$  e  $1,67$ ; para  $K = 4$ , polos coincidentes em  $-5$ , sistema com amortecimento crítico, ganho  $K_g = 0,16$  e uma única constante de tempo =  $0,2$ ; para  $K = 29$ , polos complexos conjugados em  $-5 \pm j5$ , sistema subamortecido e ganho  $K_g = 0,58$  e constante de tempo  $0,2$ ; para  $K = 68$ , polos complexos conjugados em  $-5 \pm j8$ , também sistema subamortecido e ganho  $K_g = 0,764$  e constante de tempo  $0,2$ . Em todos os casos, o sistema é estável.
5. Em malha aberta, o sistema é instável, com polos em  $+4$  e  $-6$ . Em malha fechada, para  $K = 4$ , sistema ainda é instável, com polos em  $+1,12$  e  $-7,12$  e ganho  $K_g = -2$ ; para  $K = 6$ , polos  $0$  e  $-8$ ; sistema marginalmente estável e  $K_g = 3$ ; para  $K = 10$ , polos em  $-1,52$  e  $-10,47$ ; sistema estável e  $K_g = 2,5$ ; para  $K = 15$ , polos em  $-2,48$  e  $-14,52$ , sistema estável e  $K_g = 1,67$ .
6. (a)  $\varepsilon_{stv} = 0$ ; (b)  $\varepsilon_{sta} = 0,5$ .
7. Estável;  $\varepsilon_{stp} = 0,5$ ; tipo 0.

8. Tipo 2; estável;  $\varepsilon_{stv} = 0$ ;  $\varepsilon_{sta} = 1,2$ .
9. Sistema tipo 2; (a)  $\varepsilon_{stv} = 0$ ; (b)  $\varepsilon_{sta} = 0,214$ .
10. Sistema tipo 1;  $K_v = 0,02 K$ ;  $K \geq 100$ .
11. (a) Tipo 1; (b) 6,25; (c)  $0^\circ\text{C}$ ; (d)  $0,032^\circ\text{C}$ ; (e)  $0,019^\circ\text{C}$ .
12. Valor final = 6,207;  $\varepsilon_{stf} = 0,993$ ; resultados coerentes:  $6,207 + 0,993 = 7,200$ .
13. (a)  $0 < K < 448$ ; (b) tipo 1; (c) para  $K = 420$ ,  $\varepsilon_{stv} = 0$ ; para  $K = 520$ , sistema instável; (d) para  $K = 420$ ,  $\varepsilon_{stv} = 0,5$ ; para  $K = 520$ , sistema instável.
14. (a) Tipo 1; (b)  $0 < K < 324$ ; (c)  $e_{stv} = 0,015$  rad ou  $0,86^\circ$ .
15.  $K_{\max} = 120$ ;  $K_g(\max) = \frac{K_{\max}}{15} = 8$ ; para margem de segurança de 1 para 2, usa-se  $K_g = \frac{K_g(\max)}{2} = 4$ ;  $\varepsilon_{stv} = \frac{(\pi/12)}{K_g} = \frac{\pi}{48} = 0,0654$  rad, ou  $\varepsilon_{stv} = 3,75^\circ$ .

## Capítulo 10

1. (a)  $1/(1+GH)$ ; (b)  $1/(1+GH)$ ; (c)  $-H/(1+GH)$ .

3.

$$(a) F(s) = \frac{Y}{U} \Big|_{D=0} = \frac{100(s+1)}{s^3 + 7s^2 + 111s + 100}$$

$$(c) F_d(s) = \frac{Y}{D} \Big|_{U=0} = \frac{-s(s+1)}{s^3 + 7s^2 + 111s + 100}$$

4.

$$(a) F(s) = \frac{6,25}{s + 7,5};$$

$$(b) F_d(s) = \frac{-(s+1,25)}{s + 7,5};$$

$$(c) V_a = 60,83 \text{ V.}$$

5.

$$(a) F_1(s) = \frac{1000}{s^2 + 20s + 200};$$

$$(b) F_2(s) = \frac{-20(s+20)}{s^2 + 20s + 200};$$

$$(c) \lim_{t \rightarrow \infty} (\Omega_r(t)) = 5 \text{ e } \lim_{t \rightarrow \infty} (\Omega_d(t)) = -2,0.$$

$$6. \left. \frac{Y}{U} \right|_{D=0} = \frac{K}{2s + 1 + K}$$

$$\left. \frac{Y}{D} \right|_{U=0} = \frac{2}{2s + 1 + K}$$

$$K = 20$$

$$7. S_K^F = \frac{1}{1 + KG}; \text{ se } KG \gg 1, S_K^F \cong \frac{1}{KG}$$

$$8. S_K^F = \frac{-KG}{1 + KG}; \text{ se } KG \gg 1, S_K^F \cong -1$$

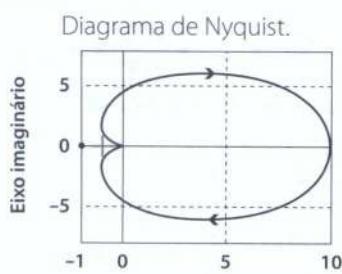
$$9. S_p^F = - \frac{ps}{s^2 + ps + K}$$

$$10. S_q^G = 0,6 \underline{[126,87^\circ]}$$

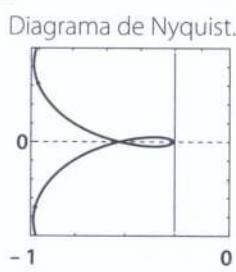
$$11. S_p^F = 0,729 \underline{[149^\circ]}.$$

## Capítulo 11

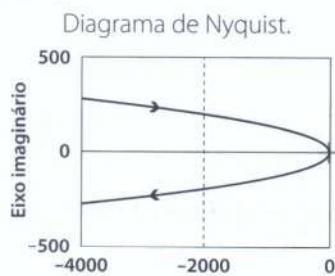
2. (a) Estável.



(b) Estável.

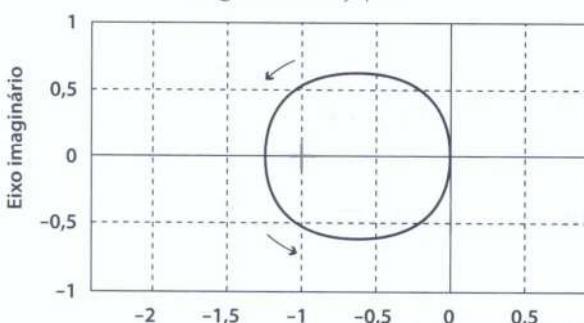


(c) Instável.



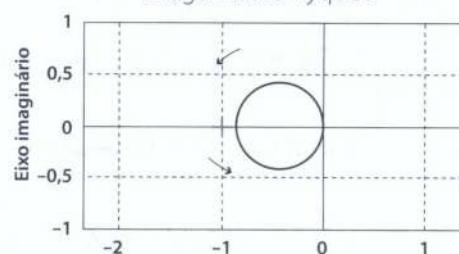
(d)  $N = -1; P = 1; Z = 0$ ; estável

Diagrama de Nyquist.



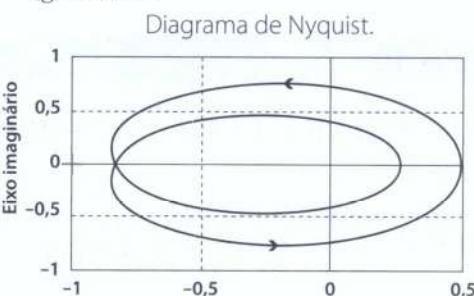
(e)  $N = 0; P = 1; Z = 1$ ; instável

Diagrama de Nyquist.



(f)  $N = 1; P = 0$ ; instável

(g) Estável.



3. (a)  $MG = \infty$  e  $MF = 56,5^\circ$ .

(b)  $MG = \infty$  e  $MF = 28,7^\circ$ .

4. (a)  $MG = 7,7\text{dB}$ ; e  $MF = 77,9^\circ$ .

(b)  $MG = 1,7\text{dB}$  e  $MF = 22,4^\circ$  (margens muito pequenas).

5.  $MG = 4,91 \text{ dB}$  e  $MF = 21^\circ$ .

6.  $MG = 7,43 \text{ dB}$  e  $MF = 33,2^\circ$ .

7.  $M_p = 1,59$ ;  $\omega_p = 7,93 \text{ rad/s}$ .

## Capítulo 12

2. (a)  $K > 20$  e  $K = 36$ .  
 (b) 3,111.  
 (c) 27 e -34.  
 (d)  $K = 2,67$ ;  $K = 3,06$ ;  $K = 20,9$ ;  $\omega_a = 4,47$ .  
 (e)  $\theta = 116,56^\circ$ ;  $K > 16,9$ .  
 (f)  $\theta = -101,3^\circ$ ;  $1 > K > 0,396$ .
3. (a)  $\sigma = -3,155$ ;  $\omega = 5,46$  rad/s.  
 (b)  $\sigma = -2,85$ ;  $0 < K < 197$ .
4.  $\sigma \approx -1,4$ ;  $\omega = 1,44$  rad/s;  $0 < K < 2,23$ ;  $K = 0,6$ .  
 5.  $\sigma = -3$ ;  $\sigma \approx -4$ .  
 6. Cruzamento do eixo imaginário:  $\pm j4,9$  e  $K = 4$  ponto de separação: -10,32 e  $K = 24,65$ .  
 7. Cruzamento do eixo  $\pm j6$ ;  $K = 15$ ; ponto de separação de partida: 6;  $K = 3$ ; ponto de separação de chegada: -6;  $K = 27$ .  
 8.  $\sigma = -6$ ;  $\omega = 7,55$  rad/s;  $K = 1190$ ;  $1190 > K > 130$ .

## Capítulo 13

1.  $K_p = 3,9$   
 malha fechada  $F_c(s) = \frac{39}{s^2 + 7s + 49}$   
 polos:  $-3,5 \pm j6,06$
2. Obtém-se bom resultado com zero em -0,05 e  $K_p = 1$ :  $G_c(s) = \frac{(s + 0,05)}{s} = 1 + \frac{0,05}{s}$ ;  
 $F_c(s) = \frac{100(s + 0,05)}{s^3 + 9s^2 + 120s + 5}$ ;  $\zeta = 0,4095$ .
3. Uma possível solução é  $R_1 = R_2 = 1 \text{ M}\Omega$  e  $C_2 = 20 \mu\text{F}$  e  $R = 10 \text{ k}\Omega$
4.  $G_c(s) = K_c(s + 5)$   
 $G(s) = \frac{100K_c(s + 5)}{s(s + 5)(s + 8)} = \frac{64}{s(s + 8)}$   $K_c = 0,64$
5.  $G_c(s) = \frac{1,16(s + 3)}{(s + 5,028)}$
6.  $G_c(s) = \frac{0,202(s^2 + 6,698 + 0,6598)}{s}$   
 $F_c(s) = \frac{20,174(s^2 + 6,695s + 0,6595)}{s^4 + 12s^3 + 55,174s^2 + 159,065s + 13,305}$   
 Polos do sistema compensado: -0,086; -2,246 +  $j3,970$ ; -2,246 -  $j3,970$ ; e -7,421.
7.  $G_c(s) = 4,89 \frac{s + 4}{s + 14}$
8.  $G_c(s) = 9 \frac{s + 2}{s + 19}$

9.  $G_c(s) = 3,33 \frac{s + 10}{s + 18,32}$
10.  $G_c(s) = 103 \frac{s + 3,63}{s + 10}$
11.  $G_c(s) = 1 \frac{s + 0,08}{s + 0,01}$
12.  $G_c(s) = 1,35 \frac{s + 0,1}{s + 0,01}$
13.  $G_c(s) = 4,95 \frac{s + 0,05}{s + 0,005}$
14.  $G_c(s) = 1 \frac{s + 0,125}{s + 0,01}$
15.  $G_c(s) = 1 \frac{s + 0,1}{s + 0,01}$
16.  $G_c(s) = 3,02 \frac{s + 2,88}{s + 8,7}$
17.  $G_c(s) = 0,08 \frac{s + 0,07}{s + 0,007}$
18.  $G_c(s) = 0,018 \frac{s + 0,1}{s + 0,001}$
19.  $G_c(s) = 0,1 \frac{s + 0,2}{s + 0,02}$

## Capítulo 14 (Problemas propostos 1)

1. (a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 $C = [1 \ 0]$      $D = 0$

(c)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -64 & -18 & -6 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 $C = [64 \ 16 \ 0]$      $D = 0$

(e)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -5 & -6 & 0 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 $C = [1 \ 2 \ 0]$      $D = 0$

(g)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$   
 $C = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]$      $D = 0$

2. (a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -10 & 15 & -5 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}$   
 $C = [1 \ 0 \ 0]$      $D = 0$

(c)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -10 & -7 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 250 \end{bmatrix}$   
 $C = [1 \ 0 \ 0]$      $D = 0$

(e)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -5 & -3 \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
 $C = [2 \ 1 \ 0]$      $D = 0$

3. (a)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ RC & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{C} \\ 0 \end{bmatrix} j(t)$   
 $[y] = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$      $D = [0]$

(b)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R & 1 \\ L & L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{bmatrix} j(t)$

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -R & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$      $D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

(c)  $A = \begin{bmatrix} -R_1 & -1 \\ L & L \\ 1 & -1 \\ C & R_2 C \end{bmatrix}$      $C = \begin{bmatrix} -R_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} \frac{R_1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R_2 C} \end{bmatrix}$      $D = \begin{bmatrix} R_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

(d)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ 0 & 0 & \frac{1}{C} \\ \frac{-1}{L} & \frac{-1}{L} & \frac{-2R}{L} \end{bmatrix}$      $B = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{L} & \frac{R}{L} \end{bmatrix}$   
 $C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -R \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$D = \begin{bmatrix} 1 & R \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

4.  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{K}{J} & -\frac{\beta}{J} & \frac{K_e}{J} \\ 0 & \frac{-K_e}{L_a} & \frac{-R_u}{L_a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_a} \end{bmatrix} u(t)$

$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & K_e & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$

## Capítulo 14 (Problemas propostos 2)

1. (a)

$$\begin{aligned}sX_1(s) - x_{01} &= -X_1(s) + X_2(s) + U_2(s) \\ sX_2(s) - x_{02} &= -2X_2(s) + U_1(s)\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 0,5(1 - 2e^{-t} + e^{-2t}) \\ x_2(t) &= 0,5(1 - e^{-2t})\end{aligned}$$

2.  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 6 \\ -37 & -16 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 9 \end{bmatrix} u(t)$

$$y(t) = [3 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

3. (a)  $s_1 = -3 + j$  e  $s_2 = -3 - j$ 

(b)  $\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+6}{(s+3)^2+1} & \frac{1}{(s+3)^2+1} \\ \frac{-10}{(s+3)^2+1} & \frac{s}{(s+3)^2+1} \end{bmatrix}$

(c)  $G(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+1}{(s+3)^2+1} & \frac{s+1}{(s+3)^2+1} \\ \frac{1-s}{(s+3)^2+1} & \frac{1-s}{(s+3)^2+1} \end{bmatrix}$

(d)  $y_1(t) = e^{-3t}[-2 \operatorname{sen}(t) + \cos(t)]$   
 $y_2(t) = e^{-3t}[4 \operatorname{sen}(t) - \cos(t)]$

4. (a)

Equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -500 & 0 \\ -2500 & -250 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10^4 \\ 0 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{Equação de saída: } y(t) = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores de  $A$ :  $s_1 = -250$  e  $s_2 = -500$ ;Resposta (para  $t \geq 0$ ):  $y(t) = 10 - 22e^{-250t} + 5e^{-500t}$ 

(b)

Equação de estado:

$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -125000 & -750 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \cdot 10^6 \end{bmatrix} u(t)$$

$$\text{Equação de saída: } y(t) = [1 \quad 0] \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$$

Autovalores de  $A$ :  $s_1 = -250$  e  $s_2 = -500$ ;Resposta (para  $t \geq 0$ ):  $y(t) = 10 - 22e^{-250t} + 5e^{-500t}$ 

Comparação: Os autovalores e a resposta são os mesmos nos casos (a) e (b), como não poderia deixar de ser, já que o sistema é o mesmo.

## Capítulo 14 (Problemas propostos 3)

1.  $Q_a(s) = s^3 + 5s^2 - 19 \quad Q_a(M) = \begin{bmatrix} -34 & -3 \\ 9 & -34 \end{bmatrix}$   
 $Q_m(M) = 0$

2.  $e^{Mt} = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{-2t} & e^{-t} - e^{-2t} \\ -2(e^{-t} - e^{-2t}) & -e^{-t} + 2e^{-2t} \end{bmatrix}$

$$e^{Nt} = \begin{bmatrix} \cos 2t & 2\operatorname{sen} 2t \\ -0,5\operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

3.  $\varphi_1 = \text{não}; \varphi_2 = \text{não}; \varphi_3 = \text{sim}; A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. (a)  $-5$  e  $-6$ ; (b)  $\pm j2$ .6. (a) Polos  $-5$  e  $-6$ ; sistema estável: polos no SPE.  
(b)  $y(t) = 2e^{-5t}$ .

$$(c) G(s) = \frac{1}{s+5}$$

7. (a)  $-2$  e  $-12$ ;

(b)  $\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+14}{s^2+14s+24} & \frac{1}{s^2+14s+24} \\ \frac{-24}{s^2+14s+24} & \frac{s}{s^2+14s+24} \end{bmatrix}$

(c)  $G(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+12)}$

(d)  $y(s) = -2,3e^{-2t} + 3,3e^{-12t}$

8.  $y_1 = x_1 - x_2 = \frac{1}{10} - \frac{1}{2}e^{-2t} + \frac{2}{5}e^{-5t}$

$$y_2 = x_2 = \frac{1}{3}(e^{-2t} - e^{-5t})$$

9.

(a)  $\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s-5}{\Delta} & \frac{16}{\Delta} \\ \frac{-5}{\Delta} & \frac{s+13}{\Delta} \end{bmatrix}$  com  $\Delta = s^2 + 8s + 15$

(b)  $G(s) = \frac{s+27}{(s+3)(s+5)}$

(c)  $y(t) = -4e^{-3t} + 6e^{-5t}$

10. (c)  $y(t) = 0,5(1 + 6e^{-t} - 3e^{-4t})$ .

11. (a)  $s_1 = -1 + j$   
 $s_2 = -1 - j$

(b)  $\varphi(t) = \begin{bmatrix} e^t(\cos t + \operatorname{sen} t) & e^{-t} \operatorname{sen} t \\ -2e^{-t} \operatorname{sen} t & +e^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) \end{bmatrix}$

$$\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{s+2}{\Delta} & \frac{1}{\Delta} \\ \frac{-2}{\Delta} & \frac{s}{\Delta} \end{bmatrix}$$

com  $\Delta = (s+1)^2 + 1$

(c)  $y_1(t) = 0,5[1 - e^{-t} (\cos t - 3 \operatorname{sen} t)]$   
 $y_2(t) = 2,5[1 - e^{-t} (\cos t + \operatorname{sen} t)]$

12.  $x_1(t) = 6(1 - e^{-t})$   
 $x_2(t) = -6(1 - e^{-2t})$

## Capítulo 15

1.

$$Q = \begin{bmatrix} 1,25 & 0,25 \\ -0,25 & -0,25 \end{bmatrix} \quad P = Q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -5 \end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,25 \\ -0,25 \end{bmatrix} u \quad y = [-1 \ -5] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

2.  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -21 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u$

$y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$  autovalores: -3 e -7

3.

$$Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; \quad Q^{-1} = P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad A' = \begin{bmatrix} -6 & -13 \\ 4 & 2 \end{bmatrix};$$

$$B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C' = [1 \ 1]$$

Autovalores de  $A$  e de  $A'$ :  $-2 \pm j6$ .

4.

$$P = \begin{bmatrix} 1,375 & 0,125 \\ -0,375 & -0,125 \end{bmatrix} \quad Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -33 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u \quad y = [1 \ 0] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

5.

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & 25 \end{bmatrix}; \quad a = -8; \quad b = -2; \quad c = 0;$$

$$B' = \begin{bmatrix} 0,25 \\ -0,3333 \\ 0,0833 \end{bmatrix} \quad C = [8 \ 2 \ 0]; \quad C' = [6 \ 4 \ -2]$$

6.

Autovetores de  $A$ :

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \quad P^{-1} = Q = \begin{bmatrix} 1,333 & 0,333 \\ -0,333 & -0,333 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,333 \\ -0,333 \end{bmatrix} u \quad y = [2 \ 5] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}$$

7.

(a) -2 e -4;  $P_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  e  $P_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}$ ;

(b)  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$  e  $P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0,5 \\ -1 & -0,5 \end{bmatrix}$ ;

(c)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ -0,5 & -0,5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$  e

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix}.$$

8.  $y_1 = 0,25 + 0,5e^{-2t} - 0,75e^{-4t}, \quad t \geq 0$

$y_2 = 0,25 - 1,5e^{2t} + 1,25e^{-4t}, \quad t \geq 0$ .

9.

(a)  $P = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$  e  $Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ ;

(b)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} u(t)$ ; e

$$y = [0 \ -1] \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix};$$

(c)  $\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s+2} \end{bmatrix}$ ;

(d)  $y(t) = \frac{3}{2}(1 - e^{-2t}), \quad t \geq 0$ .

10.

(a) Autovalores: -1 e -3;  $A_d = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$

(b)  $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ;  $Q = P^{-1} = \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,5 & -0,5 \end{bmatrix}$

(c)  $\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \end{bmatrix} u$ ;  $y = [1 \ -1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

(d)  $\phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & 1 \\ 1 & \frac{1}{s+3} \end{bmatrix}$

(e) resposta impulsiva:  $y(t) = 0,5(e^{-t} + e^{-3t})$ ,  $t \geq 0$ .

11.

(a)  $M_c = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ;  $\det(M_c) = -2$ ; sistema completamente controlável;

(b)  $B' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ ; não há linha nula em  $B$ , logo o sistema é completamente controlável.

12.

(a)  $M_c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$ ;  $\det(M_c) = -2$ ; sistema completamente controlável.

(b)  $M_{ob} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ ;  $\det(M_{ob}) = -2$ ; sistema completamente observável.

(c) Essas conclusões poderiam ser obtidas diretamente por observação das matrizes dadas, pois a matriz  $A$  é diagonal, a matriz  $B$  não tem linha nula e a matriz  $C$  não tem coluna nula.

13.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -15 & -23 & -9 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b)  $K = \begin{bmatrix} 39985 & 2777 & 81 \end{bmatrix}$

14.

(a)  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -14 & -7 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

(b)  $\omega_n = \frac{\alpha}{\zeta} = \frac{8}{0,625} = 12,8$   
 $\omega_d = \sqrt{\omega_n^2 - \alpha^2} \cong 10$ ;  $s_{1,2} = -8 \pm j10$ ;  
 $K = \begin{bmatrix} 1304 & 278 & 17 \end{bmatrix}$ .

15.

(a)  $A = \begin{bmatrix} -10 & 1 & 0 \\ -21 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ;  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $D = [0]$

(b)  $H = \begin{bmatrix} 350 \\ 20479 \\ 750000 \end{bmatrix}$

16.

(a)  $-2 \pm j2$ ;  
(b)  $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -8 & 0 \end{bmatrix}$ ;  $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \end{bmatrix}$ ;  $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ ;  
(c)  $-4 \pm j4$ ;  
(d)  $H = \begin{bmatrix} 8 \\ 96 \end{bmatrix}$ .

## Capítulo 16

1.

(a)  $x_2 = -1,6 \quad x_3 = -5,92 \quad x_4 = 14,096$   
 $x_5 = 5,35 \quad x_6 = -63,345$

(b)  $z^2 X(z) - z^2 x_0 - zx_1 + 1,3(zX(z) - zx_0) + 4X(z) = U(z)$

2.

(a)  $x_0 = 0,5 \quad x_1 = 1 \quad x_2 = -2,48$   
 $x_3 = 4 \quad x_4 = -5,62$

(b)  $z^2 X(z) - z^2 x_0 - zx_1 + 2(zX(z) - zx_0) + 0,96X(z) = 0$

3.

(a)  $y_k = 0,75y_{k-1} - 0,125y_{k-2} + u_k$  para  $k \geq 0$

(b)  $y_0 = 1; y_1 = 1,75; y_2 = 2,188; y_3 = 2,422; y_4 = 2,543$ ;  
 $y_5 = 2,605; \dots$

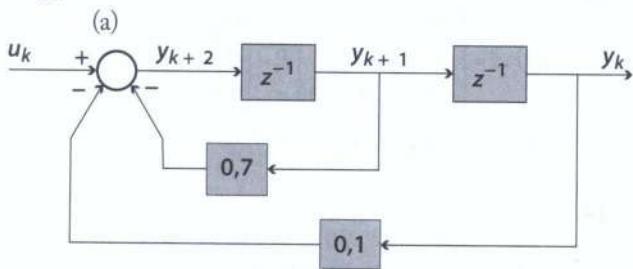
4.

(a)  $y_{k+3} - 1,5y_{k+2} + 0,56y_{k+1} - 0,06y_k = u_k$

(b)  $y_3 = 0,560 \quad y_4 = 0,900 \quad y_5 = 1,036$   
 $y_6 = 1,084 \quad y_7 = 1,100 \quad y_9 = 1,105$   
 $y_{10} = 1,106 \quad y_{11} = 1,107 \quad y_{12} = 1,107 \dots$   
 $y_{k \rightarrow \infty} = 1,107$

(c)  $z^3 Y(z) - 2z^3 - z^2 - 1,5(z^2 Y(z) - 2z^2 - z) + 0,56(zY(z) - 2z) - 0,06Y(z) = U(z)$  ou  
 $(z^3 - 1,5z^2 + 0,56z - 0,06)Y(z) = 2z^3 - 2z^2 - 0,32z + U(z)$

5.



(b)  $y(0) = 0; y(1) = 0; y(2) = 1; y(3) = 0,3;$   
 $y(4) = 0,69; y(5) = 0,487; y(6) = 0,59 \dots$

(c) 
$$Y(z) = \frac{z}{(z^2 + 0,7z + 0,1)(z - 1)} = \frac{z}{(z + 0,2)(z + 0,5)(z - 1)}$$

(d)  $y(k) = \frac{-1}{0,36}(-0,2)^k + \frac{1}{0,45}(-0,5)^k + \frac{1}{1,8}1^k$

$y(k \rightarrow \infty) = \frac{1}{8}$

6.

(a)  $H(s) = e^{-0,25s}$  e  $H(z) = z^{-1}$ , visto que  $T = 0,25$  segundo.

(b)  $G(z) = \frac{0,25}{z - 1}$

(c)  $F(z) = \frac{0,25z}{z^2 - z + 0,25} = \frac{0,25z}{(z - 0,5)^2}$

(d)  $y_{k+2} = y_{k+1} - 0,25y_k + 0,25u_{k+1}$

(e) Valor final = 1.

7.

(a)  $G_p(z) = \frac{0,095}{z - 0,905}$

(b)  $y_0 = 0; y_1 = 0,095; y_2 = 0,181; y_3 = 0,259;$   
 $y_4 = 0,329;$

(c)  $F(z) = \frac{0,095z}{z^2 - 1,810z + 0,905}$

polos:  $z_{1,2} = +0,905 \pm j0,293$ ,

$|z_1| = |z_2| = 0,951 < 1$ : sistema estável; valor estacionário = 1.

8.

(a)  $\tau_p = \frac{1}{0,2} = 5 \text{ s}$

(b)  $G_p(z) = \frac{1,106}{z - 0,779}$

(c)  $x_1 = -0,779$  e  $x_2 = 2,043$

9.

(a)  $\tau_{ma} = \frac{1}{2} = 0,5 \text{ s}$

(b)  $G_{S+P}(z) = \frac{0,0362}{(z - 0,819)}$

(c)  $G_{S+C}(z) = \frac{\alpha \left( z - \left( 1 - \frac{0,1\beta}{\alpha} \right) \right)}{(z - 1)}$

(d)  $\frac{\beta}{\alpha} = 1,81$

(e)  $\alpha = 3,246 \quad \beta = 5,87$

$$G_C(s) = \frac{3,246s + 5,87}{s}$$

# Índice remissivo

## A

abscissas, 17, 103, 104, 163  
ação de controle, 203  
proporcional (*P*), 204  
proporcional-integral (*PI*), 204  
proporcional derivativa (*PD*), 204  
proporcional-integral-derivativa (*PID*), 204  
*aliasing*, 316  
amostrador, 297  
amostragem uniforme de sinais, 297-298  
classificação dos sinais, 298  
generalidades, 297-298  
representação matemática, 298  
sinais analógicos, 298, 299, 300  
sinais de tempo contínuo, 299  
sinais de tempo discreto, 298, 299, 300  
sinais digitais, 299, 300  
amplificador  
inversor, 25-26  
linear, 4  
operacional típico, 25  
análise  
da estabilidade, 172-175  
pelo diagrama do *LR*, 199-200  
de malhas, 14, 15, 17, 18, 19, 270  
analogia  
do 1º tipo, 17  
e modelagem, 13-31  
ângulos de partida, 193  
aplicações da transformada *Z* na solução das equações de diferenças, 310-311  
aproximação de ordem zero, 301  
assintotas de uma curva, 191  
associação de sistemas de tempo discreto, 312-314  
algumas configurações típicas, 313  
casos básicos, 312  
atraso  
de fase, 204  
e avanço de fase, 204  
atribuição de polos, 280, 281, 286  
atuador, 8, 152, 188, 203  
autovalores múltiplos, 268  
autovetor da matriz *A*, 269  
avanço de fase, 204

## B

bifurcação, 51  
bloco analógico  
de primeira ordem, 26  
de segunda ordem, 26  
dinâmico, 51  
operacional, 51  
bobinas de campo, 22, 24  
**C**  
calibração dos ramos, 193  
caminho de Nyquist, 170, 172  
cancelamento de pólos e zeros, 316  
circuito(s)  
com amplificadores operacionais, 207, 232  
com dois amplificadores operacionais, 70, 71  
elétricos, 2, 5, 13, 15, 17, 19, 28  
*LGC*-paralelo, 14  
*LRC*-paralelo, 14  
*LRC*-série, 14  
círculo diretor, 19  
classificação dos sistemas, 4, 148  
coluna de referência, 125  
comparação dos diagramas de Bode dos sistemas compensado e não compensado, 234  
comparação entre as respostas dos sistemas compensado e não compensado, 207, 210, 214, 216, 218  
comparador, 8, 11, 55, 151, 155, 203  
compensação  
ou síntese, 9  
por ajuste de ganho, 223-224  
por atraso de fase, 224-225  
por avanço de fase, 230-231  
por realimentação interna, 221-223  
compensador(es), 188  
ativo de atraso de fase, 226  
de atenuação em alta frequência, 224  
de atraso de fase, 207  
de um sistema com realimentação, 204  
passivo de atraso de fase, 226  
complementação à margem de ganho, 177  
componente  
forçado da resposta, 65  
forçado, 123

natural, 65, 123  
transitório da resposta, 66  
comportamento  
assintótico lento, 205  
da variável controlada, 151  
no infinito, 191  
computadores com programas adequados, 125  
condição de módulo, 193  
condições de estabilidade relativa, 203  
configuração do sistema, 3  
conflito de sentidos de percurso, 196  
constante  
de erro estático, 144  
de ganho de baixa frequência do sistema (*Kg*), 46, 209  
de ganho de freqüência zero, 137, 139  
de ganho generalizada de frequência zero, 46  
de ganho imprópria, 46, 137  
de tempo do sistema, 47, 137  
contorno de Nyquist *veja* caminho de Nyquist  
controlabilidade e observabilidade, 275-279  
controlador  
de atraso de fase, 208-211,  
de avanço de fase, 215-216,  
proporcional (*P*), 204-205  
proporcional derivativo (*PD*), 211-213  
proporcional-integral (*PI*), 205-206  
proporcionalintegralderivativo (*PID*), 218-221  
controladores (ou compensador), 203  
mecânicos, 203  
hidráulicos, 203  
pneumáticos, 203  
elétricos, 203  
eletrônicos, 203  
controle  
em cascata, 218, 221  
integral, 292  
corrente do circuito de armadura, 24  
critério(s)  
de escolha das variáveis de estado, 241-245  
de Nyquist, 169-172  
de Routh, 123, 133  
de Routh-Hurwitz, 125  
critério de estabilidade de Nyquist, 163, 184

critério de estabilidade de Routh, 125-129

casos especiais, 129-132

curvas de resposta em frequência, 137

## D

dectetor de erro, 8

defeito, 157

derivada da saída, 221

desempenho em regime transitório, 203, 205

determinação

do número de ramos que vão para o infinito, 190

do número total de ramos do  $LR$ , 190

dos pontos de separação sobre o eixo real, 190

dos segmentos do  $LR$  pertencentes ao eixo real, 190

diagonalização da matriz do sistema — autovetores, 269-272

diagrama

de Nyquist, 163-186

do corpo livre, 16, 45

do lugar das raízes, 187-202

diagramas de blocos, 51-63, 304-306

definição, 51

pequena tabela de transformadas z, 306-307

diagramas de Bode, 118, 138, 223

função de transferência com apenas um zero na origem, 107

função de transferência com um polo na origem, 106-107

função de transferência com um polo real fora da origem, 107-108

função de transferência com um zero real fora da origem, 108-110

função de transferência constante, 106

funções de transferência simples, 106-110

diagramas polares e transformação  $s \rightarrow A(j)$ , 163-166

dinâmica do compensador, 213

diodo Zener, 7, 8

distúrbios, 25, 151, 155, 156, 181, 288

domínio

da frequência, 43, 66, 74, 78, 80, 88, 203, 223, 237, 248

do tempo, 8, 39, 65, 74, 78, 99, 100, 204, 237, 249, 255, 258, 260, 312

dualidade entre circuitos elétricos, 15

## E

efeitos

da realimentação em sistemas de 1a ordem, 137-139

da realimentação em sistemas de 2a ordem, 139-140

quanto à estabilidade do sistema, 138

sobre a resposta em frequência, 138-139

sobre as constantes de ganho e de tempo, 137-138

eixo imaginário, 115, 124, 139, 163, 169, 177, 179, 200, 215, 314

engrenagens ideais, 19, 20, 30

entrada(s)

entrada

exógenas, 152

inversora, 25

ou excitações, 2

tipo rampa, 218

equação(ões)

de análise nodal de um circuito, 18  
de diferenças de ordem  $N$  — forma geral, 302-303

de diferenças finitas *veja* sistema de equações diferenciais ordinárias de estado e de saída no domínio da frequência, 238-241, 248-249

de um circuito tipo série, 15

diferenciais lineares, 36

diferenciais parciais *veja* sistema de equações diferenciais ordinárias escalares de estado do sistema, 239 homogênea, 65, 66

erro

atuante, 55, 137, 140, 143, 144, 151, 285

de modelagem, 181

do sistema, 10, 143

erro estacionário, 141, 143-147, 214

de posição, 148, 205, 284

nulo, 284

erros estacionários, 141, 143

dos sistemas dotados de realimentação, 148

erro estático de aceleração, 144, 146

erro estático de posição, 144, 207, 209

erro estático de velocidade, 144, 145, 147

erro estático

de aceleração (*esta*), 146-147

de posição (*estp*), 144-145

de velocidade (*estv*), 145-146

escalas logarítmicas, 104-106, 118

espaço de estados, 237-264

especificações em malha fechada, 182-184

estabilidade, 123-135

absoluta, 124, 141, 170, 178, 223

Bibô (*bounded input bounded output*), 123

de entrada e saída limitadas, 123, 133

definição, 123

dinâmica, 66

do sistema de controle, 203

estabilidade relativa, 124, 175-180

margem de fase, 177, 223, 225, 230

margem de ganho, 177, 223

estado de um sistema, 238, 248, 252,

269, 277

exemplo(s)

de modelo físico, 3

de sistema de rotação, 20

de redução de diagramas de blocos,

56-59

## F

faixa primária, 314

faixas complementares, 314

fasores de entrada e saída, 102-103

filtros *anti-aliasing*, 316

finalidade do sistema de controle, 151

fluxo magnético, 14, 15

forma canônica

controlável, 272, 273, 276, 281, 286

observável, 273-274, 289, 290

forma de Jordan, 269

formação das equações de diferenças, 301-302

formas normais da função de transferência,

45-47

fórmula de Ackermann, 286-287, 290

fórmula de Mason, 59-61, 63

frequência

de corte e largura de banda (*wb*), 183

de cruzamento de ganho, 178

de Nyquist, 316

de pico *veja* Frequência de ressonância (*wp*) de ressonância (*wp*), 123, 183

função

complexa de variável complexa, 163

de Laplace, 33

de matriz quadrada, 256-257

harmônica de excitação, 102

harmônica de transferência, 101, 118

impulso unitário, 67

parábola ou sinal de aceleração, 66

rampa ou sinal de velocidade, 66

função de transferência, 41-49, 55, 137, 237, 262

com apenas um zero na origem, 107

com um polo na origem, 106

com um polo real fora da origem, 107

com um zero real fora da origem, 108

constante, 106

de malha aberta, 172, 215

de malha fechada, 159, 179

de tempo discreto (pulsada), 311, 319

definição, 41

do distúrbio, 155

e resposta impulsiva, 68-69

em frações parciais, 73

pulsada, 297

função senoidal, 67

de transferência, 100-102

## G

generalização — sistemas com mais de três pólos, 91

gerador de corrente contínua (c.c.), 6, 152, 161

gráfico (ou mapa) da função  $f(x)$ , 163

gráfico de Nyquist, 175

grau de liberdade de um sistema, 17

## I

imprecisão de modelagem, 288

implementação de controladores elétricos e eletrônicos, 203

implementação do compensador de avanço de fase, 216-218

implementação do compensador PD, 213-215

por atraso de fase, 225-230

índices de desempenho, 79-80

tempo de subida (*ts*), 79

tempo de atraso (*ta*), 79

instante de pico (*tp*), 79

máximo sobressinal (*Mp*), 79

integrador inversor, 26

interpretação das derivadas em tempo discreto, 301

inversão da transformada  $Z$ , 308

Inversão por expansão em frações

parciais, 309

Inversão por desenvolvimento em série infinita, 309

Inversão

por desenvolvimento em série infinita, 309

por expansão em frações parciais, 309

inversor do sinal de uma variável, 51

## J

janela de linearidade, 4

**L**

lei

- de Hook, 4
- de Kirchhoff, 14, 241
- de Newton, 16
- fundamental da mecânica *veja* lei de Newton

localização dos polos e zeros de malha aberta no plano  $s$ , 190

**M**

malhas internas de realimentação, 203  
mapeamento ou transformação de  $s$ , 163  
margem de ganho ( $MG$ ), 177

Mason, S. J., 59

matriz

- $A$  diagonalizada, 268-269
- de controlabilidade, 275
- de observabilidade, 277
- de transição de estado no domínio do tempo, 258-259
- de transição de estado, 250-252
- dinâmica do observador, 290
- exponencial, 257-258

método(s)

- algébricos, 203
- da alimentação direta, 156
- de resposta em frequência, 203
- de solução por recorrência, 297
- do lugar das raízes, 139, 187-188, 203
- gráficos, 203

Mimo (*multiple input multiple output*), 2, 4, 237, modelagem, 13-31, 180, 181

- da planta, 180
- de sistemas, 9
- dos geradores, 25
- dos motores, 22
- dos sistemas, 28
- física, 9
- matemática, 9, 13

modelo entrada-saída, 41, 47

modelo matemático  
definição, 3

modelo abstrato, 3

modelo de estado, 237-238  
definição, 237-238  
espaço de estado, 238  
Estado de um sistema, 238  
trajetória de estado, 238

modelo

- de estados e diagramas de blocos, 249-250
- de parâmetros distribuídos, 5
- descritivo, 3, 5
- matemático de um sistema de primeira ordem, 68
- nominal da planta, 181

modelo físico  
definição, 2

**N**

noções de estabilidade, 314  
notação de Bellman, 255-259, 262  
'nuvem', 181

**O**

observadores de estados, 273, 287-289  
operador de atraso unitário, 308

outros casos de transformações, 272-274  
forma canônica controlável, 273  
forma canônica observável, 273-274

**P**

parâmetros dos sistemas, alterações  
por defeito ou acidente, 157  
por envelhecimento, 157  
por fadiga, 157  
por variações excessivas de temperatura, 157

período de amostragem, 300

par de eixos coordenados, 163

perturbação(ões), 151

- e sensibilidade, 151-162
- em sistemas de controle, 151-152
- ou distúrbios, 25

pico de ressonância ( $M_p$ ), 183, 223

planos

- complexos, 163
- de Argan, 163

planta (processo), 151, 188

polinômio auxiliar, 192

polinômio

- característico do sistema  $A$ , 43
- de Hurwitz, 124
- de matriz quadrada, 255-256

polos

- do sinal de entrada, 66
- dominantes do sistema, 89

ponto(s)

- de cruzamento do  $LR$  com o eixo imaginário, 192
- de cruzamento, 177
- de irradiação das assintotas, 195
- de partida do eixo real, 188
- de separação, 188, 190

potência mecânica, 23

precisão e regime permanente, 203

presença de zeros na função de transferência, 90-91

princípios do método do  $LR$ , 188-189

processo de controle da variável de saída, 137

programas computacionais, 193

projeto

- de controlador de tempo discreto, 306
- de controladores, 281-284
- de controle integral, 284-286
- de observadores, 289-291
- por realocação, 280

projeto de compensadores, 203-236

- pelo método da resposta em frequência, 223
- pelo método do lugar das raízes, 204-223

propriedades

- da função de transferência, 43-45
- de  $j(\lambda)$ , 259

pseudoconstante de ganho, 46

**Q**

queima de combustível, 5

**R**

ramificação, 51

realimentação, 137-150

- de estados, 265-296
- em sistemas de controle, 140-141
- não unitária, 139
- unitária, 143

realização física de um compensador PI,

207-208

redução de uma associação de resistências elétricas, 55

reduções básicas, 55-56

blocos em série, 55

malhas de realimentação, 55

ramos em paralelo, 55

sucessivas, 61

refinamento e calibração do esboço do  $LR$ , 193-199

regime permanente, 65

regras básicas de construção do  $LR$ , 189-191

rejeição aos distúrbios, 155-157

relação de polinômios em  $s$ , 42

representação(ões)

- de um sistema por meio de diagramas de blocos, 52-54
- gráficas da resposta em freqüência, 103-104

por diagramas de blocos, 7-8

resíduos associados aos polos, 34

resposta  
à entrada zero *veja* resposta livre  
a sinais de comando e de perturbação, 152-155

ao degrau do sistema compensado de malha fechada, 234

ao degrau unitário, 69-70

completa, 99

de regime permanente, 65

forçada, 65, 123

harmônica do sistema, 99

livre, 253

natural, 695

no domínio da freqüência, 252-254

transitória, 65, 66, 123

resposta dinâmica dos sistemas lineares, 65-98

generalidades, 65

resposta em freqüência

- de um sistema com polos e zeros reais, 110-113
- de um sistema com polos e zeros reais, 110-116

diagramas de Bode de funções de transferência simples, 106

do sistema considerado, 99

do sistema não compensado, 233

escalas logarítmicas, 104-106

fasores de entrada e saída, 102-103

função senoidal de transferência, 100-102

generalidades, 99

representações gráficas da resposta em freqüência, 103-104

resposta em freqüência de um sistema com polos e zeros reais, 110-113

sistemas com polos complexos conjugados, 113-116

sistemas com polos e zeros reais e

complexos, 116-117

sistemas de fase mínima e não mínima, 118

robustez, 180-182

**S**

segmento

- de uma década, 105
- de uma oitava, 105

semiplano esquerdo (*SPE*) do plano  $s$ , 124  
 sensibilidade, 157-160  
   de fase, 157  
   de ganho, 157  
 sensor, 151  
 servomotores elétricos de corrente contínua  
   característica de conjugado, 22-23  
   característica de potência, 23  
   característica de velocidade, 23  
   controlado pelo circuito de armadura, 22  
   controlado pelo circuito de campo, 24  
   funcionamento em regime permanente, 22  
 simulação analógica, 9, 25-28  
   com amplificadores operacionais, 25  
 simulação física, 8  
 sinais  
   amostrados, 297  
   típicos de ensaios, 66-67  
 sinal de controle na variável manipulada, 203  
 Siso (*single input single output*), 2, 4, 237  
 sistema  
   com malha interna de compensação, 222  
   controlado, 8, 203  
   de entradas e saídas múltiplas, 2  
   de entradas e saídas únicas, 2  
   de equações diferenciais ordinárias, 3  
   de malha fechada, 137  
   formado por um bloco de massa, 43  
   não compensado, 206  
   realimentado, 203  
   solar, 1  
 sistema criticamente amortecido, 76-77  
   resposta impulsiva, 77  
   resposta ao degrau unitário, 77  
 sistema de 1<sup>a</sup> ordem  
   com realimentação unitária negativa, 138  
   em malha aberta, 137  
 sistema de 3<sup>a</sup> ordem, 87-90  
   polos dominantes, 89  
   resposta ao degrau unitário, 87  
   sistemas com três polos reais, 87  
   sistemas com um polo real e dois polos  
     complexos conjugados, 88  
 sistema de controle com realimentação, 1, 5, 8  
   regulador, 6  
   rastreador, 6  
 sistema linear invariante no tempo, 169  
   Método direto, 169-170  
   Critério de Routh, 170  
 sistema mecânico, 5, 9, 17, 27  
   de translação, 16, 29  
   de rotação, 18, 19, 21  
   MBK, 16  
 sistema subamortecido, 72-73, 77-80  
   de 2<sup>a</sup> ordem dotado de um zero real, 84-86  
   resposta à rampa unitária, 74  
   resposta ao degrau unitário de um  
     sistema dotado de dois polos reais  
       e um zero, 74  
   resposta ao degrau unitário, 74  
   resposta ao degrau unitário, 78  
   resposta impulsiva, 73-74  
   resposta impulsiva, 78

sistemas  
   a multivariáveis, 237  
   análogicos, 299  
   biológicos, 1, 4  
   com mais de três pólos, 89  
   com polos complexos conjugados,  
     113-116  
   com polos e zeros reais e complexos,  
     116-117  
   de 1<sup>a</sup> ordem, 72  
   de 2<sup>a</sup> ordem — classificação, 72  
   de controle de malha fechada, 6  
   de controle dotados de controlador  
     digital, 300  
   de memória nula, 4  
   de parâmetros concentrados, 5  
   de parâmetros variáveis *veja Sistemas*  
     variantes no tempo  
   de tempo discreto, 297-321  
   dinâmicos, 4, 10, 28, 33, 99, 187, 311  
   do tipo 1, 142-143  
   do tipo 2, 143  
   do tipo LIT, sistemas LIT, 5, 41, 47, 65,  
     92, 170, 237, 262  
   do tipo zero, 141-142  
   eletromecânicos, 21  
   escalares, 2, 4, 280  
   estáticos ou instantâneos, 4  
   estáveis, 92  
   físicos, 1-2, 4, 9, 28, 156  
   invariantes no tempo, 5  
   jurídicos, 1  
   lineares, 4, 5, 41, 48, 51, 65-98, 123, 242,  
     246, 255, 311  
   marginalmente estáveis, 125  
   mecânicos de rotação, 19  
   mecânicos de translação, 15-16, 18, 28  
   monetários, 1  
   não lineares, 4, 170, 262  
   rastreadores, 155  
   superamortecidos, 73  
   variantes no tempo, 5  
   vetoriais, 2, 4, 237  
   vetoriais, 237  
 sistemas análogos, 5, 43  
   definição, 16  
 sistemas de controle, 1-11  
   com realimentação, 1, 5-7, 140, 177  
   com realimentação unitária, 1, 5-7, 140,  
     206, 236, 254  
   definição, 1  
 sistemas de fase mínima, 109  
   e não mínima, 118  
 solução  
   da equação de estado no domínio do  
     tempo, 260-262  
   de equações diferenciais, 36-37  
   por recorrência, 303  
 somador, 51  
   ponderado, 26  
 subsistemas, 1  
 superposição de sistemas de 1<sup>a</sup> ordem, 91

**T**

tabela de erros estacionários, 147  
 tabela de Routh, 126, 170  
 tacogerador, 221  
 tempo contínuo e tempo discreto — notação  
   e definições, 300-301  
   Interpretação das derivadas em tempo  
     discreto, 301  
   Formação das equações de diferenças,  
     301-302  
   Equações de diferenças de ordem  $N$  —  
     forma geral, 302-303  
 tempo de acomodação, 211  
 teorema  
   da amostragem, 316  
   da multiplicação por  $t$ , 307  
   de Cayley-Hamilton, 256  
   de Shannon, 316  
   do deslocamento (ou da translação no  
     campo real), 308-309  
   do valor final, 308  
 teoremas importantes, 307-308  
   Teorema da multiplicação por  $t$ , 307  
   Teorema do deslocamento (ou da  
     translação no campo real), 307-308  
 tipos de sistemas, 141  
   do tipo zero, 141-142  
   do tipo 1, 142-143  
   do tipo 2, 143  
 trajetória de estado, 238  
 trajetórias fechadas no plano  $s$ , 166-169  
 transdutor, 151  
 transformação das equações de estado e de  
   saída, 266-268  
 transformação de Laplace, 3, 33, 262  
 transformação linear das variáveis de estado,  
   265-266  
 transformada de Laplace, 33-39, 158, 237  
   definição, 33  
   propriedades da, 34  
     inversa, 34, 99, 243  
 transformada Z, 306  
 transitório oscilante, 87  
 transitório oscilatórios, 87

**V**

validação do modelo, 3  
 valor do erro de modelagem, 181  
 vantagens da representação de estado, 246-248  
 variações excessivas de temperatura, 157  
 variáveis de entrada, 2, 3, 5, 6, 7, 13, 51, 237,  
   238, 246, 311  
 variáveis de referência, 140  
   do sistema de controle, 6  
   de estado de fase, 242  
   internas do sistema, 2  
 variável de controle, 151

**Z**

ZOH (Segurador de Ordem Zero –  
 Holder), 298

# Sobre os autores

## **Paulo Alvaro Maya**

Engenheiro Mecânico Eletricista, diplomado em 1949 pela Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP). Tem título de Mestre pelo Massachusetts Institute of Technology - MIT (1959). Doutor em Ciências Físicas pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - PUC-SP (1976). É Professor Titular da FEI e recebeu Título de Professor Emérito. É Professor da disciplina de Controle e Servomecanismos. Foi professor Titular da PUC-SP, tendo atuado também na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, na Escola Superior de Química Oswaldo Cruz e na Faculdade de Engenharia da Universidade de Mogi das Cruzes. Foi Consultor Técnico da firma Figueiredo Ferraz, Consultoria e Engenharia de Projetos.

## **Fabrizio Leonardi**

Graduado em engenharia elétrica pela FEI (1984), mestre em engenharia elétrica pela FEI (1989), doutor em engenharia de sistemas pela Escola Politécnica da USP (2002). Tem experiência industrial e acadêmica nas áreas de automação, controle de processos, modelagem, identificação e simulação de sistemas. Na Indústria trabalhou durante 10 anos com automação, controle e sistemas digitais. Atua na área acadêmica desde 1987. É professor Titular da FEI. Também é professor da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP) e da Escola de Engenharia Mauá (IMT).

# Controle essencial

PAULO ALVARO MAYA  
FABRIZIO LEONARDI

A reconhecida parceria de Paulo Alvaro Maya e Fabrizio Leonardi é ampliada em *Controle essencial*, uma obra sobre sistemas de controle que prima pela didática na transmissão do conhecimento e traz ao público interessado uma forma simples e agradável de estudar os sistemas com realimentação. Entre os assuntos abordados na obra estão:

- Modelagem de sistemas.
- Sistemas LIT (lineares invariantes no tempo) e sua estabilidade.
- Diagramas de Nyquist.
- Diagramas do Lugar das Raízes.
- Sistemas de tempo discreto.
- Controlabilidade e observabilidade, realimentação de estados e projetos de controladores e observadores.

Por apresentar esse conteúdo com minúcia e clareza, proporcionando ao leitor entendimento rápido do assunto, e por reforçar a teoria lançando mão de exemplos, exercícios resolvidos e problemas, *Controle essencial* é indicado aos alunos de engenharia elétrica, mecânica, de controle e de automação, além de atender aos de cursos tecnológicos.



[www.pearson.com.br/maya](http://www.pearson.com.br/maya)

Para professores: manual de soluções e apresentações em PowerPoint;  
para estudantes: introdução ao Matlab e solução de exercícios  
selecionados.

[www.pearson.com.br](http://www.pearson.com.br)

ISBN 978-85-7605-700-0

9 7888576 057000